UNIVERSIDAD NACIONAL DEL COMAHUE
Facultad de Economía y Administración
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

VERSIONES MATRICIALES DE DESIGUALDADES NUMÉRICAS

Ariela Neris Garcés Fernández

Directora: Mg. Cristina Cano

15 de Abril 2015

AGRADECIMIENTOS

A mi familia, a mis hijos Carolina y José y a mi esposo José, porque ellos son la verdadera razón por la que fui capaz de llegar hasta aquí.

A mi directora Cristina Cano, por haber confiado en mí y haberme acompañado en esta última etapa.

Introducción

La presente tesina se inscribe, de manera íntegra, en el campo de estudio de matrices. El análisis matricial, continuación natural del álgebra lineal, es un área de investigación relativamente reciente. Si bien en la historia de la matemática el trabajo con matrices se remonta al año 650 a. C. con el estudio de los llamados *cuadrados mágicos*, fue el matemático inglés James Joseph Sylvester (1814-1897) quien en 1850 utilizó por primera vez el término "matriz" (*matrix*, en inglés) y lo definió como un "arreglo cuadrilongo de términos" (*oblog arrangement of terms*, en inglés). Sin embargo, fue su amigo Arthur Cayley (1821-1895) quien comprendió de manera cabal la importancia del concepto. Cayley publicó en 1858 su *Memoir on the theory of matrices*; en ella aparece la primera definición abstracta de matriz y se muestra que los arreglos de coeficientes de las formas cuadráticas y las transformaciones lineales son casos particulares del concepto general de matriz. A Cayley se le atribuye también el desarrollo del álgebra matricial, al definir las operaciones básicas con matrices y construir la inversa de una matriz inversible en términos de su determinante. Las contribuciones de Arthur Cayley al desarrollo del estudio de las matrices han hecho que se lo considere como el padre de la teoría de matrices.

Los trabajos con matrices, a partir de Cayley, se han desarrollado exponencialmente. En la actualidad, muchos de los problemas de disciplinas diversas (cálculo, geometría diferencial, física teórica, estadística, las ingenierías, entre otras) pueden ser resueltos de manera sencilla y elegante usando la teoría de matrices. Como afirman Antezana y Stojanoff (2009, Prefacio), "poder reducir y reformular un problema al caso matricial es un éxito, porque es mucho más viable resolver un problema de matrices que el problema de origen".

Ahora bien, no debe pensarse que la variedad de campos de aplicación es consecuencia de una ausencia de materia propia. Por el contrario, si bien toma herramientas de distintas áreas de la matemática, el análisis matricial tiene como tema propio las desigualdades, las cuales suponen normas, autovalores, valores singulares, determinantes, trazas, etc. Y este es, precisamente, el tema que aborda la presente tesina: las desigualdades numéricas en sus versiones matriciales.

Las desigualdades juegan un rol fundamental en matemática. Existen desigualdades que dependiendo del contexto en el que estemos trabajando resultan válidas; la desigualdad triangular $|a+b| \leq |a| + |b|$, por ejemplo, es cierta en $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n$ y también se cumple para una norma N en un espacio vectorial $\mathbb{V}$, o la desigualdad Aritmético-Geométrica $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ que vale para números reales positivos. En este trabajo tomaremos estas desigualdades (y otras que no han sido mencionadas) y estudiaremos si son ciertas para distintos niveles de complejidad en el campo de matrices. En el nivel 1, que es el nivel más fuerte, se extiende una desigualdad numérica a matrices cualesquiera; en el nivel 2, se extiende la desigualdad a valores singulares de matrices; y en el nivel 3, a normas unitariamente invariantes.

En §1, se presentan algunos conceptos previos, definiciones y resultados que serán utilizados en el cuerpo de la tesina; entre otros, se definen los conceptos de *matriz en bloque, autovalores, valores singulares, norma unitariamente invariante* y el teorema de Dominancia Fan. En §2, estudiaremos algunas desigualdades matriciales. Particularmente, en §2.1 se trabaja con la desigualdad triangular, la desigualdad $\pm y \leq x$ y la desigualdad $|a-b| \leq a+b$ extendiéndolas a matrices para analizar la válidez en los distintos niveles de complejidad. En §2.2, se toma la Desigualdad Aritmético-Geométrica $ab \leq \frac{(a^2+b^2)}{2}$ y, al extenderla a matrices, se prueba que es válida tanto para valores singulares y para normas unitariamente invariantes, pero no lo es para el nivel 1. En §2.3, se demuestra un corolario de la Desigualdad Aritmético-Geométrica, $|||A^{\frac{1}{2}}XB^{\frac{1}{2}}||| \leq \frac{1}{2}|||AX+XB|||$ para normas unitariamente invariantes. Por otro lado, con un breve argumento se muestra que la familia de medias de Heinz interpola entre la media geométrica y la aritmética, luego se prueba que la versión para normas unitariamente invariantes es verdadera. En §2.4, se hace referencia a $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ que es una generalización de la desigualdad Aritmético-Geométrica en la desigualdad de Young y al extenderla a matrices Ando [2] demuestra que vale para el nivel 2 y para el nivel 3, también nos referimos a la prueba que Audenaert dio de $s_j(A^vB^{1-v} + A^{1-v}B^v) \leq s_j(A+B)$, donde s_j son los valores singulares de las matrices indicadas. En §2.5, se presentan teoremas, corolarios, proposiciones y lemas que demuestran distintas desigualdades para valores singulares de matrices. En §2.6, se presentan diferentes maneras de escribir la desigualdad Aritmético-Geométrica y se da la versión para matrices, para valores singulares y para normas unitariamente invariantes. En §3, por último, se logra acotar inferior y superiormente una norma unitariamente invariante para la suma de matrices.

Índice general

Capítulo 1

Nociones preliminares

1.1. Generalidades

Antes de abordar de manera específica el objetivo de la presente tesina, enunciaremos algunas notaciones básicas, definiciones y resultados importantes sobre análisis matricial que usaremos en el desarrollo de este trabajo.
Se asume cierta familiaridad, de parte del lector, con el álgebra lineal. Por ello, se omitirán demostraciones que pueden hallarse en libros como Hoffman y Kunze [17]. También se omitirán aquellas demostraciones que requieran argumentos que escapan a los contenidos abordados a lo largo de esta tesina.

Sea $\mathbb{V}$ un K-espacio vectorial, con $K = \mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$. Una función $N : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ es una *norma* en $\mathbb{V}$ si N verifica las siguientes propiedades. Dados $u, v \in \mathbb{V}$ y $\lambda \in K$, se tiene:

1. $N(v) \geq 0$ y, además, $N(v) = 0$ si y solo si $v = 0$.
2. $N(u + v) \leq N(u) + N(v)$.
3. $N(\lambda v) = |\lambda| N(v)$.

Recordemos que si N proviene de un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, diremos que el par $(\mathbb{V}, N)$, o bien $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, es un *$K$-espacio de Hilbert*. Cuando $K = \mathbb{C}$, también diremos que $\mathbb{V}$ es un "espacio de Hilbert" sin más, asumiendo que dim $\mathbb{V} < \infty$, de lo contrario hay que pedir que $\mathbb{V}$ sea completo. Denotaremos a un K-espacio de Hilbert por $\mathcal{H}$.
Usualmente usaremos letras $\mathcal{H}$ o $\mathcal{K}$ para tales espacios y notaremos por $\mathfrak{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ al espacio de operadores lineales de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{K}$ (acotados, si dim $\mathcal{H} = \infty$).
Si $\mathcal{H} = \mathcal{K}$, escribimos $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ en lugar de $\mathfrak{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$.

En este trabajo pensamos a las matrices como operadores en $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ con el producto escalar y norma usuales. Llamaremos $M_{m\text{x}n}$ o M_n si $m = n$, al espacio de todas las matrices complejas de orden $m \times n$.

Denotamos al conjugado traspuesto de la matriz A por $A^* = (\bar{A})^T$ y la llamaremos matriz *adjunta* de A.

Dado $A \in M_n$, decimos que A es *normal* si $AA^* = A^*A$.

Una matriz $U \in M_n$ se llama *unitaria* si $UU^* = U^*U = I_n$. Se denota con U_n al conjunto de las matrices unitarias.

Dado $A \in M_n$, decimos que A es *hermitiana* si $A = A^*$.

Denotamos los *autovalores* de una matriz hermitiana $A_{n\times n}$ por $\lambda_i(A), i = 1, 2, ..., n$ y puestos en orden decreciente por $\lambda_1(A) \geq \lambda_2(A) \geq ... \geq \lambda_n(A)$ y al vector de autovalores $\lambda(A) = (\lambda_1(A), \lambda_2(A), ..., \lambda_n(A))$.

Si A es hermitiana existe una matriz unitaria U tal que $A = U\ \mathrm{diag}(\lambda(A))U^*$, donde $\mathrm{diag}(\lambda(A))$ es una matriz diagonal con los autovalores de A en su diagonal.

Decimos que una matriz hermitiana A es *definida positiva* si $x^*Ax > 0$ para todo $x \in \mathbb{C}^n$ y lo denotamos como $A > 0$. Otra caracterización de una matriz A definida positiva es que todos sus autovalores son positivos. Si A tiene todos sus autovalores no negativos, decimos que es *semidefinida positiva* y lo notamos $A \geq 0$
Se denota con M_n^+ al espacio de las matrices semidefinidas positivas.

Lema 1.1.1. *Sea* $A \in M_n^+$ *entonces* $B^*AB \geq 0$, *para todo* $B \in M_n$

Demostración: Como $A \geq 0$, $v^*Av \geq 0$ para todo $v \in \mathbb{C}^n$. Sea $B \in M_n$, calculamos $v^*(B^*AB)v = (Bv)^*ABv = w^*Aw \geq 0$, pues $A \geq 0$ y considerando $w = Bv$.
Por lo tanto, $B^*AB \geq 0$ para todo $B \in M_n$. ■

Dada $A \in M_n^+$, llamaremos $A^{1/2}$ a la única matriz en M_n^+ tal que elevada al cuadrado da A. Otra forma de describir a $A^{1/2}$ es la siguiente: como $A \in M_n^+$ existe $U \in U_n$ tal que $A = U\ \mathrm{diag}(\lambda(A))U^*$, luego $A^{1/2} = U\ \mathrm{diag}(\lambda(A))^{1/2}U^*$.

Para toda matriz $A \in M_n$ existe $U \in U_n$ tal que $A = U|A|$ llamada *descomposición polar* de A, donde $|A| = (A^*A)^{1/2}$, es el *módulo* de A. [1] Esta descomposición siempre existe, aunque no siempre U es única.

Observemos que $A^*A \geq 0$ y $|A| \geq 0$, para todo $A \in M_n$.

Los autovalores de $|A|$ contados con su orden de multiplicidad, son llamados *valores singulares* de A, los cuales denotamos por $s_i(A)$ y $s_1(A) \geq s_2(A) \geq ... \geq s_n(A)$, puestos en orden decreciente y $s(A) = (s_1(A), s_2(A), ..., s_n(A))$ el vector de valores singulares de A.

Para matrices hermitianas A, B, si $A - B$ es semidefinida positiva decimos:

$$B \leq A. \tag{1.1.1}$$

Esta condición es equivalente a decir que existe una matriz unitaria U tal que:

$$B \leq UAU^* \tag{1.1.2}$$

Definición 1.1.2. Si $A \in M_n$, llamaremos *Descomposición Cartesiana de* A a la suma de su parte real e imaginaria, es decir; $A = ReA + ImA$, donde la *parte real* de A es $ReA = \frac{A+A^*}{2}$ y la *parte imaginaria* de A es $ImA = \frac{A-A^*}{2i}$.

Notar que ReA e ImA son matrices hermitianas.

[1]Si bien el símbolo $|\cdot|$ es utilizado para denotar valor absoluto, determinantes y módulo, en este trabajo, acotaremos su uso a este último concepto.

Proposición 1.1.3. *Sea $A \in M_n$. Entonces*

1. $\lambda_k(ReA) \leq \lambda_k(|A|) = s_k(A)$, *para todo* $k \in \mathcal{I}_n$.

2. *Existe* $U \in U_n$ *tal que* $ReA \leq U|A|U^*$.

Para la demostración ver J. Antezana, D. stojanoff [5, pág. 167].

Otro concepto muy utilizado es el de *mayorización*. Para definirlo veamos primero lo siguiente:

Sea $x \in \mathbb{R}^n$, escribiremos $x^{\downarrow}$ al vector obtenido al reordenar sus coordenadas en forma decreciente.
Así para $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, si

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^{\downarrow} \leq \sum_{i=1}^{k} y_i^{\downarrow}, \qquad k = 1, 2, ..., n \tag{1.1.3}$$

decimos que x está *débilmente mayorizado* por y, denotamos esto por:

$$x \prec_w y. \tag{1.1.4}$$

Si además de $x \prec_w y$, se cumple que $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$, luego decimos que x está *mayorizado* por y y se denota $x \prec y$.
Y si

$$\prod_{i=1}^{k} x_i^{\downarrow} \leq \prod_{i=1}^{k} y_i^{\downarrow}, \qquad k = 1, 2, ..., n$$

decimos que x está *débilmente mayorizado-logaritmo* por y, y se denota $\log x \prec_w \log y$.
Si adicionalmente se cumple que $\prod_{i=1}^{n} x_i = \prod_{i=1}^{n} y_i$, decimos que x está *mayorizada-logaritmo* por y, se denota $\log x \prec \log y$.

Proposición 1.1.4. *Si* $x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_n \geq 0$ *e* $y_1 \geq y_2 \geq ... \geq y_n \geq 0$ *satisface*

$$\prod_{i=1}^{k} x_i \leq \prod_{i=1}^{k} y_i, \qquad k = 1, 2, ..., n,$$

entonces también satisfacen:

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \leq \sum_{i=1}^{k} y_i, \qquad k = 1, 2, ..., n.$$

Esta proposición dice que la mayorización log implica mayorización común.

Lema 1.1.5. *Sean* $A, B \in M_n$ *y denotemos el orden decreciente de los valores singulares de* A, B y AB *por* $s_1(A) \geq s_2(A) \geq ... \geq s_n(A) \geq 0$, $s_1(B) \geq s_2(B) \geq ... \geq s_n(B) \geq 0$ *y* $s_1(AB) \geq s_2(AB) \geq ... \geq s_n(AB) \geq 0$. *Entonces*

$$\prod_{i=1}^{k} s_i(AB) \leq \prod_{i=1}^{k} s_i(A)s_i(B), \ k = 1, ..., n.$$

Para la demostración ver Bhatia [6, pág. 72].

Lema 1.1.6. *Sea A una matriz hermitiana y $P_k(n) = \{P \in M_n : P = P^2 = P^*$ y $rg(P) = k\}$ una familia de proyectores de rango k, entonces:*

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j(A) = \max_{P \in P_k(n)} tr(PAP)$$

Demostración: Por propiedad de traza y como P es proyector, tenemos:

$$\max_{P\in P_k(n)} tr(PAP) = \max_{P\in P_k(n)} tr(PPA) = \max_{P\in P_k(n)} tr(P^2A) = \max_{P\in P_k(n)} \mathrm{tr}(PA).$$

Por otro lado, como P es proyector, el vector de autovalores de P está formado por unos y ceros y como P es de rango k sus primeros k autovalores son unos, luego, los primeros k autovalores de PA son los primeros k autovalores de A, entonces por propiedad, se tiene que:

$$tr(PA) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j(A)$$

así,

$$\max_{P\in P_k(n)} \mathrm{tr}(PA) = \max_{P\in P_k(n)} \sum_{j=1}^{k} \lambda_j(A).$$

Por lo tanto,

$$\max_{P\in P_k(n)} tr(PAP) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j(A). \qquad \blacksquare$$

Proposición 1.1.7. *Sea A,$B \in M_n$ hermitianas. Luego,*

$$\lambda(A+B) \prec \lambda(A) + \lambda(B)$$

(En la suma $\lambda(A) + \lambda(B)$ se asume que ambos vectores están ordenados de la misma forma).

Demostración: Por lema 1.1.6 para todo $k \in \mathbb{I}_n$ podemos escribir:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k} \lambda_j(A+B) &= \max_{P\in P_k(n)} tr(P(A+B)P) \\
&\leq \max_{P\in P_k(n)} tr(PAP) + \max_{P\in P_k(n)} tr(PBP) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \lambda_j(A) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j(B).
\end{aligned}$$

La igualdad para $k = n$ surge de que $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$.

Por lo tanto,

$$\lambda(A+B) \prec \lambda(A) + \lambda(B). \qquad \blacksquare$$

Proposición 1.1.8. *Sea* A,$B \in M_n$ *matrices hermitianas. Luego,*

$$\lambda(A) - \lambda(B) \prec \lambda(A - B)$$

Demostración: Por lema 1.1.6 para todo $k \in \mathbb{I}_n$ podemos escribir:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k} \lambda_j(A) &= \max_{P \in P_k(n)} tr(PAP) \\
&= \max_{P \in P_k(n)} tr(P(A - B + B)P) \\
&\leq \max_{P \in P_k(n)} tr(P(A - B)P) + \max_{P \in P_k(n)} tr(PBP) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \lambda_j(A - B) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j(B).
\end{aligned}$$

Luego,

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j(A) - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j(B) \leq \sum_{j=1}^{k} \lambda_j(A - B)$$

y la igualdad para $k = n$ se da ya que

$$tr(A - B + B) = tr(A - B) + tr(B)$$

$$\Rightarrow tr(A) - tr(B) = tr(A - B).$$

Por lo tanto,

$$\lambda(A) - \lambda(B) \prec \lambda(A - B). \qquad \blacksquare$$

En análisis matricial son usados a menudo los argumentos con matrices en bloques. En particular, las matrices en bloques de $2{\times}2$ juegan un rol importante en la obtención de desigualdades.

Sean A y B matrices de M_{mxn}, se define *suma directa* de A y B a la matriz en bloques $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ y se denota por $A \oplus B$. Y si A, B, C, D son elementos de M_n, la matriz $\begin{bmatrix} A & C \\ D & B \end{bmatrix}$ es un elemento de $M(2n)$.

Una norma $|||.|||$ sobre M_n es llamada *norma unitariamente invariante* si para toda $A \in M_n$

$$|||UAV||| = |||A|||,$$

cualesquiera sean las matrices unitarias $U, V \in M_n$.

Ejemplos de norma unitariamente invariante:

1. Sea $A \in M_n$, definimos la norma de Ky-Fan como:

$$||A||_{(k)} = \sum_{i=1}^{k} s_i(A) \qquad k = 1, 2, ..., n.$$

2. Sea $A \in M_n$, la p-norma Schatten se define de la siguiente manera:

$$||A||_p = \left[\sum_{i=1}^{n} [s_i(A)]^p\right]^{1/p} \qquad 1 \leq p < \infty. \tag{1.1.5}$$

Se define $||A||_\infty = s_1(A)$, siendo $s_1(A)$ el mayor valor singular de A.
Esta norma, llamada *norma operador*, se denota simplemente por $||A||$. La norma p-Schatten para $p = 2$, también llamada *norma Hilbert-Schmidt*, es algo particular. Puede ser calculada fácilmente a partir de las entradas de la matriz, así:

$$||A||_2 = \left[\sum_{i,j} |a_{ij}|^2\right]^{1/2}, \qquad 1 \leq i, j \leq \ n. \tag{1.1.6}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} ||A||_2^2 &= \sum_{i=1}^{n} s_i(A)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A^*A) \\ &= tr(A^*A) \\ &= \sum_{i,j} |a_{ij}|^2. \end{aligned}$$

Así,

$$||A||_2 = \left[\sum_{i,j} |a_{ij}|^2\right]^{1/2}, \qquad 1 \leq i, j \leq \ n.$$

Una norma unitariamente invariante puede considerarse definida sobre M_n para todo orden de la siguiente forma:

$$|||A||| = \left|\left|\left| \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right|\right|\right|.$$

Esto es, al adicionar o quitar valores singulares nulos no se ven afectados los valores de la correspondiente norma.
Como en definitiva la $|||.|||$ es un número real, es posible comparar la norma de matrices de distinto tamaño (aunque esta comparación no tenga relevancia en la presente tesina). Por eso, si X es de tamaño menor que Y, una desigualdad como $|||X||| \leq |||Y|||$ realmente significa que $|||X \oplus 0||| \leq |||Y|||$, donde los bloques cero son añadidos para hacer que el tamaño de $X \oplus 0$ sea el mismo que el de Y.

Definición 1.1.9. Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$.

1. Dado un proyector P hermitiano (o sea $P = P^2 = P^*$), se define el *pinching* de A como:

$$\mathcal{C}_p := PAP + (I - P)A(I - P).$$

Por ejemplo, si P proyecta sobre las primeras k coordenadas en $\mathbb{C}^n$, entonces:

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ D & E \end{bmatrix} \Rightarrow \mathcal{C}_p(A) = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix},$$

donde los bloques tienen los tamaños adecuados (por ejemplo, $B \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$).

2. Más generalmente un sistema de proyectores ortogonales en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es un subconjunto de matrices hermitianas
$$P = \{P_1, ..., P_r\},$$
donde los P_i son proyectores tales que:
$$P_i P_j = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{r} P_i = I.$$
Nótese que un proyector P define un sistema de proyectores $\mathcal{P} = \{P, I - P\}$.

3. Dado un sistema de proyectores $\mathcal{P} = \{P_1, ..., P_r\}$ en $M_n(\mathbb{C})$, se define el operador *pinching asociado* a $\mathcal{P}$:
$$\mathcal{C}_{\mathcal{P}} : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \text{dado por } \mathcal{C}_{\mathcal{P}}(A) = \sum_{i=1}^{r} P_i A P_i, \; A \in M_n(\mathbb{C}).$$

El motivo por el cual nos interesan los operadores pinching es porque todas las normas unitariamente invariantes son reducidas por pinchings.

Esto es:
$$\text{si } \mathcal{C}_{\mathcal{P}}(A) = \sum_{j=1}^{k} P_j A P_j, \text{ entonces } |||\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(A)||| \leq |||A|||$$
para toda norma unitariamente invariante. A esta desigualdad la llamaremos *desigualdad pinching.*

Recordaremos una serie de resultados conocidos que serán de utilidad en el desarrollo de este trabajo.

Teorema 1.1.10. De dominancia Fan: *Sean A, B dos matrices $n \times n$. Si*
$$\|A\|_{(k)} \leq \|B\|_{(k)} \quad \textit{para k=1, 2,..., n,}$$
luego,
$$|||A||| \leq |||B||| \tag{1.1.7}$$
para toda norma unitariamente invariante.

Así mismo, como las normas Ky-Fan son normas unitariamente invariantes, si
$$|||A||| \leq |||B|||,$$
significa que:
$$\|A\|_{(k)} \leq \|B\|_{(k)} \quad \text{para } k = 1, 2, ..., n.$$
A su vez
$$\|A\|_{(k)} \leq \|B\|_{(k)} \quad \text{para } k = 1, 2, ..., n;$$
es equivalente a
$$s(A) \prec_w s(B)$$
y en consecuencia
$$|||A||| \leq |||B|||, \text{ para toda norma unitariamente invariante.}$$
Por lo tanto,
$$\|A\|_{(k)} \leq \|B\|_{(k)}, \text{ para } k = 1, 2, ..., n \Leftrightarrow s(A) \prec_w s(B) \Leftrightarrow |||A||| \leq |||B|||.$$
Para una demostración ver J. Antezana, D. Stojanoff [5, pág. 93].

Teorema 1.1.11. Principio de Máximo Ky Fan: *Sea A una matriz hermitiana con autovalores $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Para todo $k = 1, 2, ..., n$, se cumple que:*

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j(A) = max \sum_{j=1}^{k} x_j^* A x_j, \tag{1.1.8}$$

donde el máximo es tomado sobre toda elección de una k-upla $(x_1, ..., x_k)$ ortonormal en $\mathcal{H}$.

Para una demostracón ver J. Antezana, D. Stojanoff [5, pág. 85].

Teorema 1.1.12. Principio Minimax. *Sea A un operador hermitiano en $\mathcal{H}$ y sea $\mathcal{M}$ algún subespacio k-dimensional de $\mathcal{H}$. Luego*

$$\begin{aligned} \lambda_k(A) &= \max_{\substack{\mathcal{M}\subset\mathcal{H} \\ dim\mathcal{M}=k}} \min_{\substack{x\in\mathcal{M} \\ \|x\|=1}} x^* A x \\ &= \min_{\substack{\mathcal{M}\subset\mathcal{H} \\ dim\mathcal{M}=n-k+1}} \max_{\substack{x\in\mathcal{M} \\ \|x\|=1}} x^* A x. \end{aligned}$$

Para la demostración ver J. Antezana, D. Stojanoff [5, pág. 31], Bhatia [6, pág. 58].

A continuación se presentan resultados que fueron probados por H. Weyl.

Proposición 1.1.13. *Sean A* y *B matrices hermitianas para todo j=1,2,...,n,*

$$\lambda_j(A) + \lambda_n(B) \leq \lambda_j(A+B) \leq \lambda_j(A) + \lambda_1(B).$$

Para la demostración ver J. Antezana, D. Stojanoff [5, pág. 32], Bhatia [6, pág. 63].

Teorema 1.1.14. *Si H es semidefinida positiva, luego*

$$\lambda_j(A+H) \geq \lambda_j(A) \qquad para\ todo\ j.$$

Demostración: Por la proposición anterior, $\lambda_j(A+H) \geq \lambda_j(A) + \lambda_n(H)$, pero todos los autovalores de H son no negativos. Alternativamente, nótese que $x^*(A+H)x \geq x^*Ax$ para todo x y, usando el Principio de Minimax, se obtiene el resultado. ■

Corolario 1.1.15. Principio de monotonía de Weyl: *Sean A, B matrices hermitianas tales que $A \leq B$, entonces*

$$\lambda_j(A) \leq \lambda_j(B), \qquad 1 \leq j \leq n.$$

Demostración: Haciendo $H = B - A$, por teorema 1.1.14 se obtiene $\lambda_j(A + (B - A)) \geq \lambda_j(A)$, luego $\lambda_j(A) \leq \lambda_j(B)$. ■

Otra herramienta muy utilizada en análisis matricial es el concepto de *función monótona* y *convexa* de operadores.

Definición 1.1.16. Sea f una función real definida sobre un intervalo I. Si $D = \text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ es una matriz diagonal cuyas entradas λ_j están en I, definimos $f(D) = \text{diag}(f(\lambda_1), ..., f(\lambda_n))$. Si A es una matriz hermitiana cuyos autovalores λ_j están en I, y U una matriz unitaria tal que $A = UDU^*$, donde D es diagonal, luego definimos $f(A) = Uf(D)U^*$.

Definición 1.1.17. Una función f se dice que es monótona para matrices de orden n si es monótona con respecto al orden $n \times n$ de matrices hermitianas; es decir, si $A \leq B$ entonces $f(A) \leq f(B)$. Luego, si para todo n, f es monótona para matrices de orden n, decimos simplemente que f es *monótona para matrices* u *operador monótono.*

Definición 1.1.18. Consideremos el operador $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Tal operador se llamará *operador convexo* si

$$f[(1-\lambda)A + \lambda B] \leq (1-\lambda)f(A) + \lambda f(B), \quad 0 \leq \lambda \leq 1,$$

y diremos que es *cóncavo* si $-f$ *es convexo.*

Teorema 1.1.19. *Sea f una función continua que mapea al intervalo $[0,\infty)$ en sí mismo. Luego, f es un operador monótono si y solo si es un operador cóncavo.*

Para una demostración ver Bhatia [6, pág. 120].

Teorema 1.1.20. *Sea f una función real continua en el intervalo $[0,\infty)$. Luego las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) *f es operador convexo y $f(0) \leq 0$.*

b) *La función $g(t) = \frac{f(t)}{t}$ es operador monótono en $(0,\infty)$.*

Para una demostración ver Bhatia [6, pág. 122].

Veamos algunos resultados interesantes para matrices en bloques.

Definición 1.1.21. Una matriz $C \in M_n$ es una *contracción* si $||C|| \leq 1$

Lema 1.1.22. *Una matriz $C \in M_n$ es una contracción si y solo si* $\begin{bmatrix} I & C \\ C^* & I \end{bmatrix} \geq 0.$

Para una demostración ver Bhatia [6, pág. 10].

Proposición 1.1.23. *Para toda $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, el operador* $\begin{bmatrix} |A^*| & A \\ A^* & |A| \end{bmatrix}$ *es positivo.*

Demostración: Como $\begin{bmatrix} |A^*| & A \\ A^* & |A| \end{bmatrix}$ es unitariamente equivalente a $\begin{bmatrix} |A| & |A| \\ |A| & |A| \end{bmatrix}$ que es una matriz semidefinida positiva, por lo tanto, es también semidefinida positiva.

Por la descomposición polar de A, existe U, matriz unitaria tal que $A = U|A|$.

Veamos que $|A^*| = U|A|U^*$.
En efecto,

$$|A^*| = (AA^*)^{1/2} = (U|A||A|U^*)^{1/2} = (U|A|^2U^*)^{1/2}.$$

Sea $U_1 = \begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ entonces $U_1^{-1} = U_1^* = \begin{bmatrix} U^* & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$.

Luego

$$\begin{aligned} 0 &\leq \begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |A| & |A| \\ |A| & |A| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^* & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} U|A|U^* & U|A| \\ |A|U^* & |A| \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} |A^*| & A \\ A^* & |A| \end{bmatrix}. \end{aligned}$$ ■

Proposición 1.1.24. *Sean $L, M \in M_n$ matrices semidefinidas positivas y sea $A \in M_n$. La matriz en bloques*

$$\begin{bmatrix} L & A \\ A^* & M \end{bmatrix} \in M_{2n}$$

es semidefinida positiva si y solo si existe una contracción $C \in M_n$ tal que $A = L^{1/2}CM^{1/2}$.

Demostración: Usando el hecho que C es una contracción si y solo si $\begin{bmatrix} I & C \\ C^* & I \end{bmatrix} \geq 0$, y el lema 1.1.1

$$\begin{bmatrix} L^{1/2} & 0 \\ 0 & M^{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & C \\ C^* & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L^{1/2} & 0 \\ 0 & M^{1/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & L^{1/2}CM^{1/2} \\ M^{1/2}C^*L^{1/2} & M \end{bmatrix} \geq 0.$$

Para probar la recíproca consideremos primero a L y M estríctamente positivas por lo que serán inversibles.
Luego

$$0 \leq \begin{bmatrix} L^{-1/2} & 0 \\ 0 & M^{-1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L & A \\ A^* & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L^{-1/2} & 0 \\ 0 & M^{-1/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & L^{-1/2}AM^{-1/2} \\ M^{-1/2}A^*L^{-1/2} & I \end{bmatrix}.$$

Es decir

$$\begin{bmatrix} I & C \\ C^* & I \end{bmatrix} \geq 0, \text{ con } C = L^{-1/2}AM^{-1/2}$$

y esto ocurre si y solo si $||C|| \leq 1$. El caso general se prueba por continuidad. ■

Corolario 1.1.25. *Sea $A \in M_n$, entonces*

$$\begin{bmatrix} s_1(A)I & A \\ A^* & s_1(A)I \end{bmatrix} \geq 0.$$

Demostración: Sea $C = (s_1(A))^{-1}A$. Es claro que $\|C\| \leq 1$ y que $A = (s_1(A)I)^{1/2}C(s_1(A)I)^{1/2}$. ■

A continuación daremos algunas nociones básicas relacionadas con el *producto Hadamard.*

Definición 1.1.26. Dadas $A, B \in \mathcal{M}_{mxn}(\mathbb{C})$, su producto de Hadamard $A \circ B$ es la matriz

$$A \circ B = (a_{ij}b_{ij})_{\substack{i \in \mathbb{I}_m \\ j \in \mathbb{I}_n}} \in \mathcal{M}_{mxn}(\mathbb{C}).$$

Teorema 1.1.27. Teorema de Schur. *Si A y B son matrices semidefinidas positivas entonces $A \circ B$ es también una matriz semidefinida positiva. Si A y B son positivas, $A \circ B$ también es positiva.*

Para una demostración ver J. Antezana, D. Stojanoff [5, pág. 50]

Definición 1.1.28. Para $A \in M_n$ definimos las entradas diagonales de $|A^*| = (AA^*)^{1/2}$ en orden decreciente por

$$p_1(A) \geq p_2(A) \geq \ \dots \ \geq p_n(A) \geq 0$$

y las entradas diagonales en orden decreciente de $|A| = (A^*A)^{1/2}$ por

$$q_1(A) \geq q_2(A) \geq \ \dots \ \geq q_n(A) \geq 0.$$

Además $d_1(A) \geq d_2(A) \geq \ \dots \ \geq d_n(A)$ son las entradas diagonales de A en orden decreciente.

Teorema 1.1.29. *Para toda A y $B \in M_n$ y para todo $k = 1, 2, ..., n$ vale*

$$\sum_{i=1}^{k} s_i\left(A \circ B\right) \leq \sum_{i=1}^{k} \left[p_i\left(A\right) q_i\left(A\right)\right]^{1/2} s_1\left(B\right).$$

Demostración: Como las matrices en bloques

$$\begin{bmatrix} |A^*| & A \\ A^* & |A| \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} s_1(B)I & B \\ B^* & s_1(B)I \end{bmatrix}$$

son semidefinidas positivas, por teorema 1.1.27, también lo será su producto de Hadamard. Es decir

$$\begin{bmatrix} |A^*| \circ s_1(B)I & A \circ B \\ A^* \circ B^* & |A| \circ s_1(B)I \end{bmatrix} \geq 0.$$

Luego por la proposición 1.1.24 existe una contracción $C \in M_n$ tal que

$$A \circ B = s_1(B)[I \circ |A^*|]^{1/2} C [I \circ |A|]^{1/2}.$$

Los valores singulares de C son a lo sumo 1, los valores singulares de $[I \circ |A^*|]^{1/2}$ son las raíces cuadradas de las entradas diagonales de $|A^*|$ y los valores singulares de $[I \circ |A|]^{1/2}$ son las raíces cuadradas de las entradas diagonales de $|A|$. Entonces aplicando el lema 1.1.5 surge que

$$\prod_{i=1}^{k} s_i(A \circ B) \leq \prod_{i=1}^{k} \left[p_i(A) q_i(A)\right]^{1/2} s_1(B), \quad k = 1, ..., n.$$

De aquí y por la proposición 1.1.4 podemos concluir que

$$\sum_{i=1}^{k} s_i\left(A \circ B\right) \leq \sum_{i=1}^{k} \left[p_i\left(A\right) q_i\left(A\right)\right]^{1/2} s_1\left(B\right),$$

para todo $k = 1, 2, ..., n$. ■

Corolario 1.1.30. *Para toda A y $B \in M_n$ vale*

$$s_1\left(A \circ B\right) \leq \left[p_1\left(A\right) q_1\left(A\right)\right]^{1/2} \; s_1\left(B\right)$$

o, en otras palabras

$$\|A \circ B\| \leq \left[p_1\left(A\right) q_1\left(A\right)\right]^{1/2} ||B||.$$

Demostración: Es inmediata tomando $k = 1$ en el teorema anterior.

Observación 1.1.31. *Si A es semidefinida positiva se tiene que $A = |A| = |A^*|$ y por lo tanto, $q_i(A) = p_i(A) = d_i(A) = a_{ii}$, para todo i.*

Las demostraciones de los siguientes corolarios se desprenden de la observación anterior.

Corolario 1.1.32. *Si $A = [a_{ij}]$ es semidefinida positiva y $B \in M_n$ entonces*

$$s_1(A \circ B) \leq \max_i a_{ii} \; s_1(B),$$

o, en otras palabras

$$\|A \circ B\| \leq \max_i a_{ii} \|B\|.$$

Corolario 1.1.33. *Si A es semidefinida positiva y $B \in M_n$ entonces, para todo $k = 1, 2, ..., n$,*

$$\sum_{i=1}^{k} s_i (A \circ B) \leq d_1 (A) \sum_{i=1}^{k} s_i (B) .$$

Corolario 1.1.34. *Si $A = [a_{ij}]$ es semidefinida positiva y $B \in M_n$ entonces*

$$|||A \circ B||| \leq \max_i a_{ii} |||B|||.$$

Capítulo 2

Desigualdades matriciales

Tomando las notaciones básicas, las definiciones y los resultados importantes sobre matrices presentados previamente, y a partir de desigualdades de números reales, en los siguientes apartados nos introducimos en el estudio de desigualdades de matrices.

2.1. Desigualdades con valor absoluto posibles extensiones

Las desigualdades más conocidas para números reales podrían tener varias extensiones plausibles para matrices. Sin embargo, solo algunas de ellas resultan válidas. Vamos a ilustrar esto con algunos ejemplos.

2.1.1. La desigualdad triangular

Sean a, b números reales cualesquiera. Sabemos que la desigualdad triangular $|a+b| \leq |\, a \,| + |\, b \,|$ se cumple. Podríamos pensar, después de definir el módulo de A, en la posibilidad de extender esta desigualdad a matrices. Nos preguntamos si se verifica la desigualdad para matrices cualesquiera A y $B \in M_n$, es decir $|\, A+B \,| \leq |\, A \,| + |\, B \,|$, o si se cumple para los valores singulares de dichas matrices, esto es $s_i(A+B) \leq s_i(A) + s_i(B)$ para todo $i = 1, ..., n$. Ahora bien, como vimos en las definiciones previas, toda norma debe cumplir la desigualdad triangular, por lo que es trivial que para toda norma unitariamente invariante vale $|||A+B||| \leq |||A||| + |||B|||$. En este sentido es que las versiones en norma unitariamente invariante son más débiles que las otras. Veamos que las otras extensiones no siempre se cumplen.

Sean

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Luego

$$A + B = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}, \qquad |A+B| \cong \begin{bmatrix} 6,7082 & -2,2361 \\ -2,2361 & 2,2361 \end{bmatrix}.$$

Por otro lado

$$|A| = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad |B| = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

así

$$|A|+|B| = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \text{ y } |A|+|B|-|A+B| \cong \begin{bmatrix} 0{,}2918 & -0,7639 \\ -0,7639 & 0,7639 \end{bmatrix}.$$

Esta última no es una matriz semidefinida positiva ya que sus autovalores son $\lambda_1 = -0,2717$ y $\lambda_2 = 1,3274$. En consecuencia, $|A|+|B| \not\geq |A+B|$ y no vale la desigualdad triangular para el módulo de matrices.

Para el nivel de valores singulares consideremos las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Tenemos que los valores singulares de A son $s_1(A) \cong 8,713$ y $s_2(A) \cong 3,328$, mientras que los de B son $s_1(B) \cong 4,32$ y $s_2(B) \cong 2,083$, pero los valores singulares de $A+B$ son $s_1(A+B) \cong 11,219$ y $s_2(A+B) \cong 7,22$. Luego, para $i = 2$ se tiene que $s_2(A+B) \geq s_2(A)+s_2(B)$. Y la desigualdad tampoco vale para los valores singulares.

Sabemos que la desigualdad triangular para una norma es siempre verdadera. A modo de ilustración, tomando las matrices anteriores y la norma Ky-Fan que es una norma unitariamente invariante. Tenemos:
Si $k = 1$,

$$||A+B||_{(1)} \cong 11,219, ||A||_{(1)} + ||B||_{(1)} \cong 13,033.$$

Si $k = 2$,

$$||A+B||_{(2)} \cong 18,439, ||A||_{(2)} + ||B||_{(2)} \cong 18,444.$$

Es oportuno aclarar que la desigualdad para cada valor singular implica la submayorización y por ende la desigualdad en norma unitariamente invariante, pero la recíproca no es cierta. Es por eso que $s_i(A+B) \leq s_i(A) + s_i(B)$ para todo $i = 1, ..., n$ es más fuerte que la desigualdad triangular en norma unitariamente invariante.

2.1.2. La desigualdad $\pm y \leq x$

Si x e y son números reales tales que $\pm y \leq x$, luego $|y| \leq x$. Veamos qué pasa en matrices.

Si X e Y son matrices hermitianas de orden n que verifican

$$X - Y \geq 0 \text{ y } \; X + Y \geq 0, \text{ diremos que } \; \pm Y \leq X.$$

Lema 2.1.1. *Si $\pm Y \leq X$, entonces para todo $v \in \mathbb{C}^n$ vale que $|v^*Yv| \leq v^*Xv$.*

Demostración: como $X - Y \geq 0$, entonces

$$0 \leq v^*(X-Y)v = v^*Xv - v^*Yv;$$

luego

$$v^*Yv \leq v^*Xv. \tag{2.1.1}$$

Por otro lado $X + Y \geq 0$ y

$$0 \leq v^*(X+Y)v\rangle = v^*Xv + v^*Yv,$$

entonces

$$-v^*Yv \leq v^*Xv. \tag{2.1.2}$$

Como v^*Yv y v^*Xv son números reales, luego de 2.1.1 y 2.1.2 resulta

$$|v^*Yv| \leq v^*Xv. \qquad \blacksquare$$

Como consecuencia de este lema si $\pm Y \leq X$, entonces $X \geq O$.

Analicemos si dadas X e Y matrices hermitianas tales que $\pm Y \leq X$ vale $|Y| \leq X$.

$$\text{Si } \ Y = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \text{y } X = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix},$$

resulta

$$X - Y = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix} \geq 0, \ X + Y = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \geq 0.$$

Por lo tanto, $\pm Y \leq X$, pero

$$|Y| = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \text{ y } X - |Y| = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{que no es semidefinida positiva, pues}$$

sus autovalores son -2 y 6, luego la desigualdad $|Y| \leq X$ no vale.

Veamos si es cierto que $s_j(Y) \leq s_j(X)$ para todo $j = 1, ..., n$. Como $s(Y) = (3, 3)$ y $s(X) = (9, 1)$ luego $s_2(Y) \nleq s_2(X)$.
Se observa que $s_1(Y) \leq s_1(X)$ y $s_1(Y) + s_2(Y) \leq s_1(X) + s_2(X)$ por lo que en este caso vemos que $s(Y) \prec_w s(X)$ lo que significa que $|||Y||| \leq |||X|||$.

Nos preguntamos si $\pm Y \leq X$ implica $|||Y||| \leq |||X|||$ será siempre verdadero.

Proposición 2.1.2. *Sean X e Y matrices hermitianas tales que $\pm Y \leq X$. Luego $|||Y||| \leq |||X|||$ para toda norma unitariamente invariante.*

Demostración: Elegimos una base ortonormal $e_1, e_2, ...e_n$, tal que $Ye_j = \lambda_j e_j$, donde λ_j, $j = 1, \ldots, n$ son los autovalores de Y y $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq ... \geq |\lambda_n|$. Luego, para $1 \leq k \leq n$, usando el lema 2.1.1, tenemos que $X \geq 0$ y

$$\sum_{j=1}^{k} s_j(Y) = \sum_{j=1}^{k} |\lambda_j| = \sum_{j=1}^{k} e_j^* Y e_j \leq \sum_{j=1}^{k} e_j^* X e_j.$$

Por teorema 1.1.11

$$\sum_{j=1}^{k} s_j(Y) \leq \sum_{j=1}^{k} s_j(X) \quad \text{para todo } \ j = 1, ..., k,$$

luego

$$s(Y) \prec_w s(X).$$

Así, por teorema de Dominancia Fan,

$$|||Y||| \leq |||X|||. \qquad \blacksquare$$

En conclusión, si x e y son números reales tales que $\pm y \leq x$, luego $|y| \leq x$. Análogamente, si X e Y son matrices hermitianas y cumplen que $\pm Y \leq X$, la proposición 2.1.2 dice que la desigualdad para norma unitariamente invariante $|||Y||| \leq |||X|||$ es verdadera. En cambio, la desigualdad más fuerte para valores singulares, $s_j(Y) \leq s_j(X)$, con $1 \leq j \leq n$, no siempre es cierta.

2.1.3. La desigualdad $|a-b| \leq a+b$

Veamos ahora la siguiente desigualdad. Si a y b son números reales positivos, se obtiene la desigualdad

$$|a-b| \leq a+b. \tag{2.1.3}$$

Una extensión natural para matrices semidefinidas positivas A y B podría ser:

$$|A-B| \leq A+B. \tag{2.1.4}$$

Esto, sin embargo, no siempre es verdad. Dadas

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

que son matrices semidefinidas positivas, puesto que ambas matrices tienen a 0 y 5 como autovalores, se concluye que

$$|A-B| = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \ A+B = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix};$$

luego,

$$A+B-|A-B| = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix},$$

no es una matriz semidefinida positiva ya que sus autovalores son 6 y -2 y la supuesta desigualdad $|A-B| \leq A+B$ no se cumple.

Habiendo fallado esto, cabe hacerse la pregunta de si la afirmación

$$s_j(A-B) \leq s_j(A+B) \qquad \text{para } 1 \leq j \leq n \tag{2.1.5}$$

es siempre cierta. En el ejemplo anterior, $A-B$ tiene a 3 como valor singular doble y $A+B$ tiene a 9 y 1 como valores singulares simples. Así $s_2(A-B)$ es más grande que $s_2(A+B)$ y la desigualdad (2.1.5) no se cumple.

Ahora bien, como

$$(A+B)-(A-B) = 2B \geq 0 \ \text{ pues } \ B \geq 0$$

y

$$(A+B)+(A-B) = 2A \geq 0 \ \text{ pues } \ A \geq 0;$$

luego tenemos que

$$\pm(A-B) \leq A+B.$$

Así, por la proposición 2.1.2 el nivel para normas unitariamente invariantes se cumple, es decir:

$$|||A-B||| \leq |||A+B||| \tag{2.1.6}$$

2.2. La Desigualdad Aritmético-Geométrica

La conocida desigualdad Aritmético-Geométrica para números reales positivos a y b puede escribirse como $\sqrt{ab} \leq \frac{(a+b)}{2}$ o como $ab \leq \frac{(a^2+b^2)}{2}$.

Podría pensarse que esta desigualdad es trasladable a matrices semidefinidas positivas A y B.

Es conocido que si A y B conmutan, existen $U \in \mathcal{U}_n$, D_1 y D_2, tales que $A = UD_1U^*$, $B = UD_2U^*$, donde $D_1 = \mathrm{diag}(\lambda(A))$ y $D_2 = \mathrm{diag}(\lambda(B))$, (ver [5, pág. 15]), luego,

$$AB = (UD_1U^*)(UD_2U^*) = UD_1D_2U^* \geq 0.$$

Por lo tanto AB es semidefinida positiva, así

$$0 \leq (A-B)^2 = (A-B)(A-B) = A^2 - AB - BA + B^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

y la desigualdad $AB \leq \frac{(A^2+B^2)}{2}$ es cierta.

Generalmente, A y B no conmutan y AB no es semidefinida positiva. Así, un posible "**Nivel 1** de la desigualdad Aritmético-Geométrica" podría ser la afirmación:

$$|AB| \leq \frac{A^2+B^2}{2}, \text{que resulta falsa.}$$

Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

luego

$$|AB| = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \frac{1}{2}(A^2+B^2) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

así, resulta que

$$\frac{1}{2}(A^2+B^2) - |AB|$$

no es una matriz semidefinida positiva pues, sus autovalores son -0,556 y 1,642.

Una versión en valores singulares de la desigualdad para matrices semidefinidas positivas A y B

$$2s_j(AB) \leq s_j(A^2+B^2), \qquad 1 \leq j \leq n \tag{2.2.1}$$

es verdadera y fue probada en [10]. Dicho de otra forma; cualesquiera sean las matrices A y B de orden n

$$2s_j(A^*B) \leq s_j(AA^*+BB^*) \qquad 1 \leq j \leq n. \tag{2.2.2}$$

Si A y B son semidefinidas positivas, la desigualdad (2.2.2) se reduce a (2.2.1), ya que $A = A^*$ y $B = B^*$. Si A y B son arbitrarias, se usa su descomposición polar $A = PU$, $B = RV$, donde P y R son semidefinidas positivas, y U y V son unitarias, para obtener (2.2.2) de (2.2.1).
Veamos a continuación una demostración sugerida por Zhan.
Sea $X = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Luego,

$$XX^* = \begin{bmatrix} AA^*+BB^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad X^*X = \begin{bmatrix} A^*A & A^*B \\ B^*A & B^*B \end{bmatrix}.$$

Sea $U = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$. Luego la parte de la diagonal de X^*X puede ser expresada como

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & A^*B \\ B^*A & 0 \end{bmatrix} = \frac{X^*X - U(X^*X)U^*}{2}.$$

La matriz $U(X^*X)U^*$ es semidefinida positiva. Por lo tanto, esto implica la desigualdad $Y \leq \frac{1}{2}X^*X$. Por Corolario 1.1.15, resulta que

$$\lambda_j(Y) \leq \frac{1}{2}\lambda_j(X^*X) \quad \text{para todo} \quad j = 1, 2, ..., 2n. \tag{2.2.3}$$

Pero los autovalores de X^*X son los mismos que los de XX^*, que, a su vez, son los autovalores de $AA^* + BB^*$ al agregarle n ceros. Los autovalores de Y son los valores singulares de A^*B junto con sus opuestos. Por lo tanto, de la desigualdad (2.2.3) se deduce (2.2.2).

El uso de matrices en bloques en esta argumentación es común a otras pruebas en el campo del análisis matricial.
Sean A y B matrices semidefinidas positivas, y sea $X = \begin{bmatrix} A^{\frac{1}{2}} & B^{\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Luego

$$XX^* = \begin{bmatrix} A+B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad X^*X = \begin{bmatrix} A & A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}} \\ B^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} & B \end{bmatrix}.$$

La matriz diagonal en bloques $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = A \oplus B$ es un pinching de la matriz X^*X, y por lo tanto $|||A \oplus B||| \leq |||X^*X|||$ para toda norma unitariamente invariante.

Por otro lado $|||X^*X||| = |||XX^*|||$, luego

$$|||A \oplus B||| \leq |||(A+B) \oplus 0|||. \tag{2.2.4}$$

Esta desigualdad es un mejoramiento de (2.1.6) y suele abreviarse como $|||A \oplus B||| \leq |||A+B|||$, siempre que seamos cuidadosos en interpretar dichas desigualdades entre normas de matrices de diferentes tamaños.
Se puede probar que para matrices semidefinidas positivas cualesquiera A y B vale

$$|||A - B||| \leq |||A \oplus B||| \tag{2.2.5}$$

para toda norma unitariamente invariante. Zhan [28] mostró que esta última desigualdad puede ser mejorada a una versión para valores singulares:

$$s_j(A - B) \leq s_j(A \oplus B), \qquad 1 \leq j \leq n. \tag{2.2.6}$$

Y más aún, este enunciado es *equivalente* a la desigualdad Aritmético-Geométrica (2.2.1).
Mostramos ahora que la desigualdad (2.2.6) se obtiene de (2.2.2).
Sea

$$X = \begin{bmatrix} A^{\frac{1}{2}} & 0 \\ -B^{\frac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix}, \qquad Y = \begin{bmatrix} A^{\frac{1}{2}} & 0 \\ B^{\frac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

luego

$$X^*Y = \begin{bmatrix} A-B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad XX^* + YY^* = \begin{bmatrix} 2A & 0 \\ 0 & 2B \end{bmatrix}.$$

Por la desigualdad (2.2.2) se tiene:

$$2s_j((X^*Y)) \leq s_j(XX^* + YY^*). \qquad 1 \leq j \leq n.$$

Expresado en términos de las matrices A y B

$$s_j((A-B)\oplus 0) \leq s_j(A\oplus B).$$

Esto es equivalente a la desigualdad (2.2.6).

Veamos ahora que si $X = \begin{bmatrix} A & C \\ C^* & B \end{bmatrix} \geq 0$, entonces $2s_j(C) \leq s_j(X) \quad 1 \leq j \leq n.$

Supongamos que la matriz en bloques $X = \begin{bmatrix} A & C \\ C^* & B \end{bmatrix}$ es semidefinida positiva. Sea $U = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$, luego la matriz $Y = UXU^* = \begin{bmatrix} A & -C \\ -C^* & B \end{bmatrix}$ es también semidefinida positiva. Por lo tanto, por (2.2.6) tenemos

$$s_j(X-Y) \leq s_j(X\oplus Y) \quad 1 \leq j \leq 2n.$$

Pero $X - Y = \begin{bmatrix} 0 & 2C \\ 2C^* & 0 \end{bmatrix}$.

Así, los valores singulares de $X-Y$ son los valores singulares de $2C$, cada uno repetido dos veces. Las matrices X e Y, siendo unitariamente equivalentes, tienen los mismos valores singulares, y por lo tanto los valores singulares de $X \oplus Y$ son los valores singulares de X, cada uno repetido dos veces. Así, se ha mostrado que si $X = \begin{bmatrix} A & C \\ C^* & B \end{bmatrix}$ es semidefinida positiva, luego

$$2s_j(C) \leq s_j(X) \quad 1 \leq j \leq n. \tag{2.2.7}$$

Lo que acabamos de demostrar implica la desigualdad Aritmético-Geométrica (2.2.1). Para ver esta implicación, sean A y B matrices semidefinidas positivas, y sea $T = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix}$. Luego,

$$X = TT^* = \begin{bmatrix} A^2 & AB \\ BA & B^2 \end{bmatrix} \geq 0, \qquad Y = T^*T = \begin{bmatrix} A^2+B^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0.$$

De (2.2.7) obtenemos la desigualdad

$$2s_j(AB) \leq s_j(X) = s_j(Y) = s_j(A^2+B^2)$$

para $1 \leq j \leq n$, que es la desigualdad Aritmético-Geométrica (2.2.1).

Así se ha mostrado que los enunciados (2.2.1), (2.2.2), (2.2.6) y (2.2.7) se pueden derivar uno de otro. Hay pruebas alternativas de (2.2.6) y (2.2.7), algunas más simples que otras. Una de las demostraciones más simples para (2.2.6) fue dada por Zhan y la daremos a continuación.

Si H es cualquier matriz hermitiana, como $\lambda_j(H\oplus -H)$ son los autovalores de H y sus opuestos ordenados en forma decreciente y $s_j(H)$ coinciden con $|\lambda_j(H)|$ luego:

$$s_j(H) = \lambda_j(H\oplus -H), \quad 1 \leq j \leq n. \tag{2.2.8}$$

Aplicando esto a la matriz $H = A - B$, tenemos $s_j(A-B) = \lambda_j((A-B)\oplus(B-A))$. Por otro lado, como $(A-B)\oplus(B-A) \leq A\oplus B$ y usando el Corolario 1.1.15, tenemos $\lambda_j((A-B)\oplus(B-A)) \leq \lambda_j(A\oplus B)$ de esta desigualdad y de (2.2.8) obtenemos (2.2.6).

2.3. Desigualdades más fuertes de normas unitariamente invariante

Un corolario de (2.2.1) es la desigualdad en norma

$$|||A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}||| \le \frac{1}{2}|||A+B||| \tag{2.3.1}$$

para toda norma unitariamente invariante.
Versiones más elaboradas de esta desigualdad pueden encontrarse en Bhatia y Davis [8]. Entre otras, ellos mostraron que dadas cualesquiera matrices definidas positivas A y B y para toda X, tenemos:

$$|||A^{\frac{1}{2}}XB^{\frac{1}{2}}||| \le \frac{1}{2}|||AX+XB|||. \tag{2.3.2}$$

Esta desigualdad ya había sido demostrada pero únicamente en norma de operadores y fue usada para obtener pruebas simples de algunas desigualdades famosas de Heinz en Teoría de Perturbación. Siguiendo [8] se lograron diferentes demostraciones de la desigualdad (2.3.2). Una de estas ideas ha sido particularmente fructífera, y la explicaremos brevemente.
La inserción de la matriz X en (2.3.2) mejora en gran medida el alcance de la desigualdad (2.3.1). Al mismo tiempo nos conduce a una demostración simple. La clave es que el caso general de (2.3.2) se obtiene de un caso muy especial donde $A = B$. (En este caso la desigualdad original (2.3.1) es una tautología). Con el fin de demostrar que

$$|||A^{\frac{1}{2}}XA^{\frac{1}{2}}||| \le \frac{1}{2}|||AX+XA||| \tag{2.3.3}$$

podemos asumir que $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, ...\lambda_n)$ es una matriz diagonal. La entrada (i,j) de la matriz $A^{\frac{1}{2}}XA^{\frac{1}{2}}$ es $\sqrt{\lambda_i\lambda_j}x_{ij}$; esto está acotado en valor absoluto por $\frac{1}{2}(\lambda_i+\lambda_j)x_{ij}$, la entrada (i,j) de $\frac{1}{2}(AX+XA)$. Existe una norma unitariamente invariante $||.||_2$ para la cual la dominación elemento a elemento $|s_{ij}| \le |t_{ij}|$ implica $||S||_2 \le ||T||_2$. Así, la desigualdad (2.3.3) es cierta para esta norma.
Para otras normas se requiere un argumento más elaborado.
Consideremos S una matriz semidefinida positiva luego por corolario 1.1.34 obtenemos:

$$|||S \circ T||| \le \max_i \, s_{ii}|||T|||$$

Sea Y la matriz con entradas

$$y_{ij} = \frac{2\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}{\lambda_i+\lambda_j},$$

donde los λ_i y λ_j son los autovalores de A.
Luego

$$A^{\frac{1}{2}}XA^{\frac{1}{2}} = Y \circ [\frac{1}{2}(AX+XA)].$$

La matriz Y es igual a $2A^{\frac{1}{2}}CA^{\frac{1}{2}}$ donde $c_{ij} = \frac{1}{\lambda_i+\lambda_j}$. La matriz C así definida es llamada matriz de Cauchy y es conocida su positividad, y por lo tanto Y también lo es.
Como Y es definida positiva, entonces se cumple la desigualdad (2.3.3). En efecto:
Como

$$|||A^{1/2}XA^{1/2}||| = |||Y \circ [\frac{1}{2}(AX+XA)]|||,$$

por corolario 1.1.34

$$|||Y \circ [\frac{1}{2}(AX+XA)]||| \le \max_i \, y_{ii}|||\frac{1}{2}(AX+XA)|||$$

y como los elementos de la diagonal de Y son todos iguales a uno, resulta

$$|||A^{\frac{1}{2}}XA^{\frac{1}{2}}||| \leq \frac{1}{2}|||AX + XA|||. \tag{2.3.4}$$

Para pasar de (2.3.3) a (2.3.2) se utiliza un argumento de matriz en bloques. Sean

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}, \qquad \widetilde{X} = \begin{bmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Luego, aplicando la desigualdad (2.3.3) a estas matrices, se deduce la desigualdad (2.3.2).
Bhatia y Davis [8] probaron una generalización más fuerte de (2.3.2). En un trabajo posterior los mismos autores lo demostraron como sigue. Para $0 \leq v \leq 1$, la familia de *medias de Heinz* para números positivos a y b está definida como:

$$H_v(a,b) = \frac{a^v b^{1-v} + a^{1-v} b^v}{2}.$$

Entonces, $H_v(a,b) = H_{1-v}(a,b)$; $H_{\frac{1}{2}}(a,b) = \sqrt{ab}$; $H_0(a,b) = H_1(a,b) = \frac{1}{2}(a+b)$. Puede verse que:

$$\sqrt{ab} \leq H_v(a,b) \leq \frac{1}{2}(a+b). \tag{2.3.5}$$

Por lo tanto, H_v es una familia de medias que interpola entre la media geométrica y aritmética.
La versión matricial de la desigualdad (2.3.5) que fue probada en [8] es:

$$2|||A^{\frac{1}{2}}XB^{\frac{1}{2}}||| \leq |||A^v XB^{1-v} + A^{1-v}XB^v||| \leq |||AX + XB|||. \tag{2.3.6}$$

El argumento esbozado para probar (2.3.3) puede ser adaptado a esta situación. Por ejemplo, para probar la segunda desigualdad en (2.3.6), necesitamos probar que la matriz Z con entradas

$$z_{ij} = \frac{\lambda_i^v \lambda_j^{1-v} + \lambda_i^{1-v}\lambda_j^v}{\lambda_i + \lambda_j}$$

es semidefinida positiva. Esto es más complicado que para la matriz Y considerada anteriormente.
En [13, 23] los autores establecen una conexión entre tales matrices y la teoría de funciones definidas positivas. Usando esto, ellos probaron distintas desigualdades involucrando diferentes medias. Este tema, que se aborda en [14, 15], ha dado lugar a una amplia variedad de resultados. Un resumen conveniente y una lista de referencias pueden ser obtenidos en [7]. Dimos una versión para valores singulares de la desigualdad (2.3.1). La desigualdad (2.3.2) no puede ser planteada a este nivel más elevado. Elegimos matrices semidefinidas positivas A y X tales que $AX + XA$ también es semidefinida positiva. Luego las entradas de la diagonal de $A^{\frac{1}{2}}XA^{\frac{1}{2}}$ son iguales a las de $\frac{1}{2}(AX + XA)$. La suma de estas entradas de la diagonal es igual a la traza de estas matrices, que es la suma de sus valores singulares. Como $s_1(A^{\frac{1}{2}}XA^{\frac{1}{2}}) \leq \frac{1}{2}s_1(AX + XA)$, tenemos que $s_2(A^{\frac{1}{2}}XA^{\frac{1}{2}}) \geq \frac{1}{2}s_2(AX + XA)$.
Si no se piensa en insertar el factor X, existen versiones más fuertes de la desigualdad Aritmético-Geométrica para valores singulares. Estas se verán en la siguiente sección.
Adelantamos que parece haber un delicado equilibrio entre elevar el nivel y la inserción de X.

2.4. Desigualdades Fuertes de valores singulares

La desigualdad $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ tiene una generalización en la desigualdad de Young que es usada a menudo en análisis matemático. Esta generalización establece que

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

donde p y q son índices conjugados; es decir, son números positivos tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. T . Ando en [2] obtiene una extensión análoga de la desigualdad Aritmético-Geométrica para matrices (2.2.1). Él mostró que

$$s_j(AB) \leq s_j\left(\frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}\right) \qquad \text{para todo } 1 \leq j \leq n. \tag{2.4.1}$$

donde A y B son matrices semidefinidas positivas y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Desde luego, esto implica que

$$|||AB||| \leq \left|\left|\left|\frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}\right|\right|\right|. \tag{2.4.2}$$

Ando [1] señala que la versión más fuerte

$$|||AXB||| \leq \left|\left|\left|\frac{A^pX}{p} + \frac{XB^q}{q}\right|\right|\right|$$

en general no tiene validez. Kosaki [23] demostró que una desigualdad más débil que esta:

$$|||AXB||| \leq \frac{|||A^pX|||}{p} + \frac{|||XB^q|||}{q} \tag{2.4.3}$$

se cumple, y usó esto para dar otra demostración de la desigualdad multiplicativa:

$$|||AXB||| \leq |||A^pX|||^{\frac{1}{p}}|||XB^q|||^{\frac{1}{q}} \tag{2.4.4}$$

probada antes por Kittaneh [20] y por Bhatia y Davis [9].
En otra dirección, la segunda desigualdad de (2.3.5) tiene una versión para valores singulares de matrices. En respuesta a una conjetura de Zhan [29], Audenaert [3] probó

$$s_j(A^vB^{1-v} + A^{1-v}B^v) \leq s_j(A+B), \quad 1 \leq j \leq n, \ \text{ para } \ 0 \leq v \leq 1. \tag{2.4.5}$$

La demostración de Audenaert depende del siguiente teorema general acerca de funciones monótonas de matrices.

Teorema 2.4.1. *Sea f una función monótona de matrices en $[0,\infty)$. Luego para todas las matrices semidefinidas positivas A y B*

$$Af(A) + Bf(B) \geq \frac{1}{2}(A+B)^{\frac{1}{2}}(f(A)+f(B))(A+B)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.4.6}$$

Demostración: La función f es también cóncava para matrices, y $g(t) = tf(t)$ es función convexa para matrices. (Ver Teorema 1.1.19 y Teorema 1.1.20.) La convexidad de g implica la desigualdad

$$\frac{g(A)+g(B)}{2} \geq g\left(\frac{A+B}{2}\right);$$

entonces,

$$\frac{Af(A)+Bf(B)}{2} \geq \frac{A+B}{2} f\left(\frac{A+B}{2}\right).$$

La expresión del lado derecho es igual a $\frac{1}{2}(A+B)^{1/2} f(\frac{A+B}{2})(A+B)^{1/2}$. La concavidad de f para matrices implica que

$$f\left(\frac{A+B}{2}\right) \geq \frac{f(A)+f(B)}{2}.$$

Combinando esas dos desigualdades obtenemos (2.4.6). ■

Ahora mostraremos cómo se deriva (2.4.5) de (2.4.6). La prueba explota hábilmente el hecho de que las matrices XY y YX tienen los mismos autovalores. Sea $f(t) = t^r,\ 0 \leq r \leq 1$. Esta función es monótona para matrices. Por lo tanto, a partir de (2.4.6) y por corolario 1.1.15 obtenemos:

$$2\lambda_j(A^{1+r} + B^{1+r}) \geq \lambda_j((A+B)(A^r + B^r)). \tag{2.4.7}$$

A excepción de los ceros triviales, los autovalores de $(A+B)(A^r+B^r)$ son los mismos que los de la matriz

$$\begin{bmatrix} A^{\frac{1}{2}} & B^{\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{\frac{1}{2}} & 0 \\ B^{\frac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^r + B^r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y, a su vez, son los mismos autovalores de

$$\begin{bmatrix} A^{\frac{1}{2}} & 0 \\ B^{\frac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^r + B^r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{\frac{1}{2}} & B^{\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A^{\frac{1}{2}}(A^r+B^r)A^{\frac{1}{2}} & A^{\frac{1}{2}}(A^r+B^r)B^{\frac{1}{2}} \\ B^{\frac{1}{2}}(A^r+B^r)A^{\frac{1}{2}} & B^{\frac{1}{2}}(A^r+B^r)B^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

A partir de las desigualdades (2.2.7) y (2.4.7) se tiene:

$$\begin{aligned}\lambda_j(A^{1+r} + B^{1+r}) &\geq s_j(A^{\frac{1}{2}}(A^r+B^r)B^{\frac{1}{2}}) \\ &= s_j(A^{\frac{1}{2}+r}B^{\frac{1}{2}} + A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}+r}).\end{aligned}$$

Reemplazando A y B por $A^{\frac{1}{1+r}}$ y $B^{\frac{1}{1+r}}$, respectivamente, obtenemos de esto:

$$s_j(A+B) \geq s_j(A^{\frac{2r+1}{2r+2}}B^{\frac{1}{2r+2}} + A^{\frac{1}{2r+2}}B^{\frac{2r+1}{2r+2}}), \quad 0 \leq r \leq 1.$$

En otras palabras:

$$s_j(A+B) \geq s_j(A^v B^{1-v} + A^{1-v}B^v), \quad \frac{1}{2} \leq v \leq \frac{3}{4}$$

y tenemos probado (2.4.5) para este rango especial. Otra vez, exceptuando los ceros triviales, los autovalores de $(A+B)(A^r+B^r)$ son los mismos que los de

$$\begin{bmatrix} A^{\frac{r}{2}} & 0 \\ B^{\frac{r}{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A+B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{\frac{r}{2}} & B^{\frac{r}{2}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si repetimos los argumentos anteriores finalmente obtenemos, la desigualdad (2.4.5) para $\frac{3}{4} \leq v \leq 1$. Esto establece (2.4.5) para $\frac{1}{2} \leq v \leq 1$, y por simetría para todo v en [0,1].

Aquí es interesante notar que la primera desigualdad en (2.3.5) no logra tener una extensión matricial para valores singulares. Audenaert [3] da el siguiente ejemplo de matrices semidefinidas positivas 3×3 A y B para las cuales

$$s_2(A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}) > s_2(H_v(A,B)), \qquad 0 < v < 0{,}13.$$

Sean

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Por razones obvias ilustraremos solo para $v = \frac{1}{10}$ que la desigualdad anterior se cumple. Los valores singulares de $A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}$ son $\{6{,}451009;0{,}62005;0\}$ y los valores singulares de $(H_{\frac{1}{10}}(A,B))$ son $\{6{,}636873;0{,}616711;0\}$. Luego se tiene que $s_2(A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}) > s_2(H_v(A,B))$.

Otra generalización de (2.2.1) que puede ser probada usando estas ideas es:

$$2s_j(A^{\frac{1}{2}}(A+B)^r B^{\frac{1}{2}}) \leq s_j((A+B)^{r+1}), \quad r \geq 0. \tag{2.4.8}$$

El caso especial $r = 1$ fue demostrado por Bhatia y Kittaneh [11], y Tao [25] probó esto para todo entero positivo r. Usando la descomposición polar $X = UP$ se ve que $(XX^*)^{r+1} = X(X^*X)^r X^*$ para toda matriz X. Sea $X = \begin{bmatrix} A^{\frac{1}{2}} & 0 \\ B^{\frac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix}$. Luego,

$$\begin{aligned} (XX^*)^{r+1} &= X(X^*X)^r X^* \\ &= \begin{bmatrix} A^{\frac{1}{2}} & 0 \\ B^{\frac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A+B)^r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{\frac{1}{2}} & B^{\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A^{\frac{1}{2}}(A+B)^r A^{\frac{1}{2}} & A^{\frac{1}{2}}(A+B)^r B^{\frac{1}{2}} \\ B^{\frac{1}{2}}(A+B)^r A^{\frac{1}{2}} & B^{\frac{1}{2}}(A+B)^r B^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Así, usando (2.2.7) para $1 \leq j \leq n$, obtenemos

$$2s_j(A^{\frac{1}{2}}(A+B)^r B^{\frac{1}{2}}) \leq s_j(XX^*)^{r+1} = s_j(X^*X)^{r+1} = s_j((A+B)^{r+1}).$$

Una versión en X de (2.2.5) fue probada por Kittaneh [21, 22]: si A y B son semidefinidas positivas, y X es arbitraria; luego,

$$|||AX - XB||| \leq ||X||\ |||A \oplus B|||. \tag{2.4.9}$$

Nótese que esto implica, en particular, que $||AX - XA|| \leq ||X||\ ||A||$. Un mejoramiento significativo en esta desigualdad, usando la desigualdad triangular, nos conduce a $||AX - XA|| \leq 2||X||\ ||A||$. A continuación damos una prueba simple de (2.4.9). Sea U cualquier matriz unitaria; luego, usando la invariancia unitaria de la norma y (2.2.5) obtenemos:

$$|||AU - UB||| = |||A - UBU^*||| \leq |||A \oplus UBU^*||| = |||A \oplus B|||.$$

Ahora bien, sea X cualquier contracción; es decir: $||X|| \leq 1$. Luego existen matrices unitarias U y V tales que $X = \frac{1}{2}(U + V)$. Por lo tanto:

$$|||AX - XB||| \leq \frac{1}{2}(|||AU - UB||| + |||AV - VB|||) \leq |||A \oplus B|||.$$

Finalmente, si X es cualquier matriz, $X/||X||$ es una contracción y la desigualdad anterior conduce a (2.4.9).

Mejorando esta propuesta, Kittaneh [22] obtuvo una versión en X como (2.2.6). Esta versión dice que para A, B matrices semidefinidas positivas y X arbitraria obtenemos:

$$s_j(AX - XB) \leq ||X|| s_j(A \oplus B), \qquad 1 \leq j \leq n. \tag{2.4.10}$$

2.5. Otro nivel de desigualdades de matrices

Si la desigualdad $s_j(Y) \leq s_j(X),\ 1 \leq j \leq n$ falla, se pueden analizar desigualdades más débiles del tipo:

$$s_j(Y \oplus 0) \leq s_j(X \oplus X),\ \ 1 \leq j \leq 2n.$$

Expresaremos esto en una forma abreviada:

$$s_j(Y) \leq s_j(X \oplus X),\ \ 1 \leq j \leq n. \tag{2.5.1}$$

Lo anterior es equivalente a decir:

$$s_j(Y) \leq s_{\left[\frac{j+1}{2}\right]}(X),\ \ 1 \leq j \leq n. \tag{2.5.2}$$

donde $[r]$ denota la parte entera de r.

Algunos ejemplos de tales desigualdades vinculadas a las discutidas anteriormente se presentan a continuación.

Lema 2.5.1. *Sea X e Y matrices hermitianas tales que $\pm Y \leq X$. Luego,*

$$s_j(Y) \leq s_j(X \oplus X), \quad 1 \leq j \leq n.$$

Demostración: La condición $\pm Y \leq X$ implica que $Y \oplus (-Y) \leq X \oplus X$. Usando (2.2.8) y por corolario 1.1.15 tenemos para $1 \leq j \leq n$,

$$s_j(Y) \leq \lambda_j(X \oplus X) = s_j(X \oplus X). \qquad \blacksquare$$

Esto nos conduce a otra versión de la desigualdad Aritmético-Geométrica:

Proposición 2.5.2. *Para toda $A, B \in M_n$ tenemos*

$$s_j(A^*B + B^*A) \leq s_j((A^*A + B^*B) \oplus (A^*A + B^*B)).\ \ \ 1 \leq j \leq n. \tag{2.5.3}$$

Demostración: Ya que $(A \pm B)^*(A \pm B) \geq 0$, tenemos $\pm(A^*B + B^*A) \leq A^*A + B^*B$. La desigualdad (2.5.3) se deduce del lema 2.5.1. $\blacksquare$

Si A y B son hermitianas, esto se reduce a:

$$s_j(AB + BA) \leq s_j((A^2 + B^2) \oplus (A^2 + B^2)), \quad 1 \leq j \leq n. \tag{2.5.4}$$

Hirzallah y Kittaneh [16] han mostrado que también tenemos:

$$s_j(AB^* + BA^*) \leq s_j((A^*A + B^*B) \oplus (A^*A + B^*B)), \quad 1 \leq j \leq n. \tag{2.5.5}$$

Hemos comentado al inicio de este capítulo que un **Nivel 1** de la desigualdad triangular (2.1.3) no es cierta. Incluso para norma unitariamente invariante la desigualdad

$$|||A + B||| \leq |||\ |A| + |B|\ ||| \tag{2.5.6}$$

no siempre es verdadera para matrices de 2×2. Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

luego $A + B$ tiene valores singulares $\{\sqrt{2}, 0\}$ mientras que los valores singulares de $|A| + |B| = I$ son {1,1}. Para estas matrices, no existe ninguna matriz unitaria U con la propiedad

$$|A + B| \leq U(|A| + |B|)U^*. \tag{2.5.7}$$

Pues esto significaría que $|A + B| \leq |A| + |B|$ lo que sabemos no es cierta.

Hacemos notar que para matrices A y B de la desigualdad (2.5.6) es cierta, pero la desigualdad (2.5.7) no es cierta aún para matrices hermitianas. Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

luego $s_2(A+B) = \sqrt{2}$ es más grande que $s_2(|A|+|B|) = 2-\sqrt{2}$.

Un teorema muy conocido de Thompson [26].

Teorema 2.5.3. . *Dadas $A; B \in M_n$, existen $U; V \in U_n$ tales que*

$$|A+B| \leq U|A|U^* + V|B|V^*$$

Demostración: Hagamos la descomposición polar $A+B = W|A+B|$, con $W \in U_n$. Entonces

$$|A+B| = W^*(A+B) = Re(W^*(A+B)) = ReW^*A + ReW^*B.$$

Por la Proposición 1.1.3, existe $U \in U_n$ tal que:

$$ReW^*A \leq U|W^*A|U^*,$$

por otro lado,

$$(W^*A)^*W^*A = A^*W^*WA = A^*A,$$

entonces,

$$|W^*A| = |A|.$$

Así,

$$ReW^*A \leq U|A|U^*.$$

Análogamente existe $V \in U_n$ tal que:

$$ReW^*B \leq V|B|V^*.$$

Por lo tanto,

$$|A+B| \leq U|A|U^* + V|B|V^*. \qquad \blacksquare$$

Mostraremos otra versión de la desigualdad triangular:

Teorema 2.5.4. *Sean A y B dos matrices cualesquiera $n \times n$. Luego*

$$s_j(A+B) \leq s_j((|A|+|B|) \oplus (|A^*|+|B^*|)) \tag{2.5.8}$$

para $1 \leq j \leq n$.

Demostración: Las matrices $\begin{bmatrix} |X| & \pm X^* \\ \pm X & |X^*| \end{bmatrix}$ son semidefinidas positivas para toda $X \in M_n$ (ver proposición 1.1.23). Por lo tanto, $\begin{bmatrix} |A|+|B| & \pm(A+B)^* \\ \pm(A+B) & |A^*|+|B^*| \end{bmatrix}$ son semidefinidas positivas, y así,

$$\pm \begin{bmatrix} 0 & (A+B)^* \\ A+B & 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} |A|+|B| & 0 \\ 0 & |A^*|+|B^*| \end{bmatrix}.$$

Luego, usando el lema 2.5.1 obtenemos:
$s_j((A+B) \oplus (A+B)^*) \leq s_j((|A|+|B|) \oplus (|A^*|+|B^*|) \oplus (|A|+|B|) \oplus (|A^*|+|B^*|))$ para $j = 1, 2, ..., 2n$.
Ahora notemos que $s_j(X) = s_j(X^*)$, y $s_j(Y \oplus Y) \leq s_j(X \oplus X)$ para todo j si y solo si $s_j(Y) \leq s_j(X)$ para todo j.
Por lo tanto la última desigualdad es equivalente a (2.5.8). $\blacksquare$

Corolario 2.5.5. *Si A y B son matrices normales $n \times n$, luego para todo $j = 1, 2, ..., n$,*

$$\begin{aligned} s_j(A+B) &\leq s_j((|A|+|B|) \oplus (|A|+|B|)) \\ &= s_{\left[\frac{j+1}{2}\right]}(|A|+|B|). \end{aligned} \tag{2.5.9}$$

Otro resultado bastante conocido y muy usado es la desigualdad pinching. Sea $A = [A_{ij}]$ una matriz en bloques $m \times m$ donde los bloques de la diagonal $A_{11}, ..., A_{mm}$ son matrices cuadradas de orden $n_1, ..., n_m$, con $n_1 + ... + n_m = n$. La diagonal de matrices en bloques $C(A) = A_{11} \oplus ... \oplus A_{mm}$ es llamada una pinching o una m-pinching de A. La desigualdad pinching dice: $|||C(A)||| \leq |||A|||$ para toda norma unitariamente invariante.

Una versión en valores singulares de esta desigualdad no es cierta. La matriz identidad es una pinching de $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, y $s_2(I) = 1$ mientras que $s_2(A) = 0$. Sin embargo, tenemos lo siguiente:

Teorema 2.5.6. *Sea $C(A)$ m-pinching de una matriz A $n \times n$. luego para j=1, 2, ..., n,*

$$s_j(C(A)) \leq s_j(A \oplus A \oplus ... \oplus A) \tag{2.5.10}$$

(m veces)

Demostración: Toda m-pinching puede ser expresada como $C(A) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} U^{*k} A U^k$, donde U es una matriz unitaria (ver [7], p. 88). Se ha mostrado en [16] que si $X_0, ..., X_{m-1}$ son elementos de $M(n)$, luego $\frac{1}{m} s_j \sum_{i=0}^{m-1} X_i \leq s_j(X_0 \oplus ... \oplus X_{m-1})$. Combinando estos dos hechos obtenemos (2.5.10). ■

2.6. Otras versiones de la Desigualdad Aritmético-Geométrica

La desigualdad Aritmético-Geométrica para números positivos a y b podría escribirse de diferentes maneras
(i) $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$,
(ii) $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$,
(iii) $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

Cada una de estas tres desigualdades puede obtenerse de otra. Sin embargo, se sugieren diferentes versiones plausibles para matrices. Por ejemplo, en lugar de la desigualdad (2.2.1) podríamos preguntarnos si

$$s_j^{\frac{1}{2}}(AB) \leq \frac{1}{2} s_j(A+B), \qquad 1 \leq j \leq n. \tag{2.6.1}$$

El nivel para normas unitariamente invariantes podría ser:

$$|||(AB)^{\frac{1}{2}}||| \leq \frac{1}{2}|||A+B|||. \tag{2.6.2}$$

La versión en valores singulares de la desigualdad dada por *(iii)* es $s_j(AB) \leq \frac{1}{4} s_j^2(A+B)$, y esto no es distinto de (2.6.1).

Para toda norma unitariamente invariante dicha desigualdad queda expresada como sigue:

$$|||AB||| \leq \frac{1}{4}|||(A+B)^2||| \tag{2.6.3}$$

Resulta que este enunciado es más débil que (2.6.2).

Bathia y Kittaneh [11] consideran todas estas diferentes formulaciones. Prueban la desigualdad (2.6.3) para toda norma unitariamente invariante. Esto equivale a decir que (2.6.2) es cierta para toda Q-norma, una clase que incluye todas las p-normas Schatten para $p \geq 2$. Bathia y Kitaneh probaron que (2.6.2) es válida también para la norma traza (con $p = 1$). Aún más, ellos demostraron que la desigualdad (2.6.1) es verdadera para el caso $n = 2$. Otros casos de esto permanecen abiertos. Finalmente, hacemos notar que hay muchos trabajos que estudian los valores de la media geométrica de una matriz semidefinida positiva de A y B con varias conexiones a problemas en teoría de matrices, redes eléctricas, física y geometría. El lector interesado podría ver el capítulo 4-6 de [7].

Capítulo 3

Cotas para normas unitariamente invariantes

3.1. Desigualdades de autovalores y valores singulares de matrices

Proposición 3.1.1. *Sea* $A \in M_n(\mathbb{C})$. *Entonces*:

$$\hat{A} := \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} \sum(A) & 0 \\ 0 & -\sum(A) \end{bmatrix} \in H(2n)$$

donde $\sum(A) = \operatorname{diag}(s(A))$
En particular, $s(\hat{A}) = \{\pm s_i(A)\}$ *con las mismas multiplicidades. Es decir,*

$$s(\hat{A}) = (s_1(A), \dots, s_n(A), -s_n(A), \dots, -s_1(A)) \qquad ①$$

Demostración: Sean U, $V \in \mathcal{U}_n$ tales que:

$$\sum(A) = VAU^* = UA^*V^*.$$

Es fácil ver que:

$$W = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} V & U \\ -V & U \end{bmatrix} \in \mathcal{U}(2n).$$

Entonces:

$$\begin{aligned} W\hat{A}W^* &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} UA^* & VA \\ UA^* & -VA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^* & -V^* \\ U^* & U^* \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} UA^*V^* + VAU^* & VAU^* - UA^*V^* \\ UA^*V^* - VAU^* & -VAU^* - UA^*V^* \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum(A) & 0 \\ 0 & -\sum(A) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{bmatrix}. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 3.1.2. *Dada cualquier matriz en bloques semidefinidas positivas* $\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix}$ *donde* $A \in M_n,\ C \in M_m,\ r = \text{mín}\{m, n\}$. *Tenemos:* $s_j(A \oplus C) - s_1(B) \leq s_j \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \leq s_j(A \oplus C) + s_1(B), \quad j = 1, 2, ..., r$

Demostración: Sabemos que si X y H son del mismo orden $n \times n$ tales que X y H son matrices hermitianas, por proposición 1.1.13 tenemos:

$$\lambda_j(X) + \lambda_n(H) \leq \lambda_j(X + H) \leq \lambda_j(X) + \lambda_1(H) \tag{3.1.1}$$

Como

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \geq 0 \tag{3.1.2}$$

entonces A y $C \in M_n^+$ y, en consecuencia,

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \geq 0. \tag{3.1.3}$$

Recordemos que los valores singulares de las matrices semidefinidas positivas son iguales a sus autovalores. Además si consideramos

$$X = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{bmatrix} \text{ y } X + H = \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix}. \tag{3.1.4}$$

Por el teorema 3.1.1 $\lambda_n(H) = -s_1(B)$ *y* $\lambda_1(H) = s_1(B)$.

Remplazando en la desigualdad (3.1.1) obtenemos:

$$s_j(A \oplus C) - s_1(B) \leq s_j \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \leq s_j(A \oplus C) + s_1(B).$$

Así la demostración está completa. ■

Teorema 3.1.3. *Dada cualquier matriz en bloques semidefinida positiva* $M = \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix}$, *donde* A,B y C *son matrices complejas de orden* n, *tenemos:*

$$\sum_{j=1}^{k} (s_j(A \oplus C) - s_j(B)) \leq \sum_{j=1}^{k} s_j \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \leq \sum_{j=1}^{k} (s_j(A \oplus C) + s_j(B)), \quad k = 1, 2, ..., n \tag{3.1.5}$$

Demostración: Por proposición 3.1.1, (3.1.4) y proposición 1.1.7 escribimos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} &= \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{k} \left(\lambda_j(A \oplus C) + \lambda_j \begin{bmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{k} (\lambda_j(A \oplus C) + s_j(B)), \quad k = 1, 2, ..., n. \end{aligned}$$

Ya que $\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \geq 0$ $A, C \geq 0$ y $\lambda_j(A \oplus C) = s_j(A \oplus C)$ obtenemos:

$$\sum_{j=1}^{k} s_j \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \leq \sum_{j=1}^{k} (s_j(A \oplus C) + s_j(B)), \qquad k = 1, 2, ..., n. \tag{3.1.6}$$

Sea $\mathcal{U} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$ una matriz unitaria. Luego, escribimos

$$0 \leq UMU^* = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B \\ -B^* & C \end{bmatrix}.$$

Esto quiere decir que $\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} A & -B \\ -B^* & C \end{bmatrix}$ son unitariamente similares. Luego, los autovalores de esas matrices en bloques son los mismos. Así, usando proposición 1.1.8 y unitariamente similar, escribimos:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k} \left(\lambda_j \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} - \lambda_j \begin{bmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{bmatrix} \right) &\leq \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \begin{bmatrix} A & -B \\ -B^* & C \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \\ \sum_{j=1}^{k} (\lambda_j(A \oplus C) - s_j(B)) &\leq \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^{k} (s_j(A \oplus C) - s_j(B)) \leq \sum_{j=1}^{k} s_j \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix}, \qquad k = 1, 2, ..., n. \tag{3.1.7}$$

Más aún, la desigualdad (3.1.5) se obtiene cambiando las desigualdades (3.1.6) y (3.1.7). Esto completa la demostración. ■

Teorema 3.1.4. *Dada cualquier matriz en bloque semidefinida positiva* $\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix}$, *donde* A, B y C *son matrices complejas cuadradas de orden* n, *tenemos*:

$$\sum_{j=1}^{k} s_j(B + B^*) \leq \sum_{j=1}^{k} s_j \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix}, \qquad k = 1, 2, ..., n.$$

Demostración: Nótese que la matriz $\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix}$ es permutacionalmente similar a la matriz $\begin{bmatrix} C & B^* \\ B & A \end{bmatrix}$. Puesto que, la suma de dos matrices semidefinidas positivas es una matriz semidefinida positiva, escribimos:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & B^* \\ B & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + C & B + B^* \\ B + B^* & A + C \end{bmatrix} \geq 0.$$

Considerando la proposición 1.1.7, escribimos:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \begin{bmatrix} A + C & B + B^* \\ B + B^* & A + C \end{bmatrix} &\leq \sum_{j=1}^{k} \left(\lambda_j \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} + \lambda_j \begin{bmatrix} C & B^* \\ B & A \end{bmatrix} \right) \\ &= 2 \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

También, tenemos de la desigualdad (2.2.7):

$$2\sum_{j=1}^{k} s_j(B+B^*) \leq 2\sum_{j=1}^{k} s_j \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix}. \qquad \blacksquare$$

Teorema 3.1.5. *Dada cualquier matriz en bloques semidefinida positiva* $\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix}$, *donde* A, B *y* C *son matrices complejas cuadradas de orden* n, *tenemos*:

$$\tfrac{1}{2}\lambda_j(A+B+B^*+C) \leq \lambda_j \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix}$$

o

$$\tfrac{1}{2}\lambda_j[A+C-(B+B^*)] \leq \lambda_j \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix}, \qquad j=1,2,...,n.$$

Demostración: Si $A \in M_n$ es una matriz hermitiana, luego para cualquier matriz V de orden $m \times n$ que satisface $V^*V = I_n$ y para cada $i = 1, 2, \ldots, m$ se tiene:

$$\lambda_{i+m-n}(A) \leq \lambda_i(V^*AV) \leq \lambda_i(A) \tag{3.1.8}$$

Primero sea $V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix}$ una matriz compleja donde I denota la matriz identidad $n \times n$. Escribimos:

$$\begin{aligned} 0 \leq V^*MV &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(A+B+B^*+C). \end{aligned}$$

Usando la desigualdad (3.1.8) obtenemos:

$$\frac{1}{2}\lambda_j(A+B+B^*+C) \leq \lambda_j \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix}.$$

De igual modo, si elegimos $V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I \\ -I \end{bmatrix}$ obtenemos:

$$\frac{1}{2}\lambda_j[A+C-(B+B^*)] \leq \lambda_j \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix}. \qquad \blacksquare$$

Observación: Veamos cómo acotan las desigualdades que hemos visto los valores singulares de matrices en bloques 2×2.

Ejemplo: Sean

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ y } C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Es claro que $M = \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix}$ es una matriz semidefinida positiva. Los autovalores de la matriz M son:

$$\lambda_1(M) = 6,\ \lambda_2(M) = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} \cong 4,302, \lambda_3(M) = 2,\ \lambda_4(M) = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} \cong 0,697.$$

Los valores singulares de la matriz B son:

$$s_1(B) = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \cong 1,618,\ s_2(B) = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \cong 0,618.$$

Sea $K = A + B + B^* + C = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \geq 0$. Los autovalores de la matriz K son:
$\lambda_1(K) = \frac{13}{2} + \frac{\sqrt{89}}{2} \cong 11,216$, $\lambda_2(K) = \frac{13}{2} - \frac{\sqrt{89}}{2} \cong 1,783$.

También, los valores singulares de la matriz $(A \oplus C)$ son la unión de los autovalores de las matrices A y C. Esto es,

$$s_1(A \oplus C) = 5, \quad s_2(A \oplus C) \cong 4,618$$

$$s_3(A \oplus C) \cong 2,381, \quad s_4(A \oplus C) = 1$$

Luego, tenemos:

$$2s_1(B) \leq s_1(M), \text{ ya que } 3,236 \leq 6$$

$$s_1(A \oplus C) - s_1(B) \leq s_1(M) \leq s_1(A \oplus C) + s_1(B), \text{ ya que } 3,382 \leq 6 \leq 6,618$$

$$\frac{1}{2}\lambda_1(A + B + B^* + C) \leq \lambda_1 \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix}, \text{ ya que } 5,608 \leq 6$$

En este ejemplo se muestra que las desigualdades de los teoremas 3.1.2 y 3.1.5 acotan mejor que la desigualdad 2.2.7.

Teorema 3.1.6. *Sea A_i una matriz semidefinida positiva $n \times n$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$.*

$$\frac{1}{n} s_j(\sum_{i=1}^{n} A_i) \leq s_j(\bigoplus_{i=1}^{n} A_i), \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

Demostración: Sea $V = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} I \\ I \\ \vdots \\ I \end{bmatrix}$ matriz $n^2 \times n$ e $I_{n \times n}$ la matriz identidad. Escribimos:

$$\begin{aligned} V^*MV &= \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} I & I & \cdots & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} I \\ I \\ \vdots \\ I \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{n}(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} A_i \end{aligned}$$

Además, como $A_i \in M_n$ es una matriz hermitiana y V de orden $m \times n$, con $m = n^2$, satisface $V^*V = I_n$ para cada $i = 1, 2, \ldots, m$, por la desigualdad (3.1.8), obtenemos:

$$\frac{1}{n} s_j \left(\sum_{i=1}^{n} A_i \right) \leq s_j \left(\bigoplus_{i=1}^{n} A_i \right). \quad \blacksquare$$

Corolario 3.1.7. *Sea A_i una matriz semidefinida positiva $n \times n$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$.*

$$\frac{1}{n} |||(\sum_{i=1}^{n} A_i)||| \leq |||(\bigoplus_{i=1}^{n} A_i)|||$$

Ejemplo 1: Sean

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, y\ A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Los valores singulares de la matriz $A_1 + A_2$ son:

$$s_1(A_1 + A_2) \cong 9,541,\ \ s_2(A_1 + A_2) \cong 3,458.$$

Y los valores singulares de la matriz $(A_1 \oplus A_2)$ son la unión de los autovalores de las matrices A_1 y A_2. Esto es,

$$s_1(A_1 \oplus A_2) = 5, \quad s_2(A_1 \oplus A_2) \cong 4,618$$

$$s_3(A_1 \oplus A_2) \cong 2,381, \quad s_4(A_1 \oplus A_2) = 1$$

Luego, tenemos en la desigualdad dada:
para j=1

$$\frac{1}{2}s_1(A_1 + A_2) \leq s_1(A_1 \oplus A_2),$$

ya que

$$4,7705 \leq 5$$

y para j=2

$$\frac{1}{2}s_2(A_1 + A_2) \leq s_2(A_1 \oplus A_2),$$

ya que

$$1,729 \leq 4,618.$$

3.2. Acotando la norma de suma de matrices

Como consecuencia del corolario 3.1.7 obtenemos:

$$|||A + B||| \leq 2|||A \oplus B|||. \tag{3.2.1}$$

Por otro lado, a partir de la desigualdad (2.2.4) tenemos:

$$|||A \oplus B||| \leq |||A + B|||. \tag{3.2.2}$$

Por lo tanto concluimos:

$$|||A \oplus B||| \leq |||A + B||| \leq 2|||A \oplus B|||$$

Ejemplo 2:

a) Usando las matrices A_1 y A_2 del ejemplo 1 tenemos que los valores singulares de la matriz $A_1 + A_2$ son:

$$s_1(A_1 + A_2) \cong 9,541,\ \ s_2(A_1 + A_2) \cong 3,458.$$

Y los valores singulares de la matriz $(A_1 \oplus A_2)$ son:

$$s_1(A_1 \oplus A_2) = 5, \quad s_2(A_1 \oplus A_2) \cong 4,618$$

$$s_3(A_1 \oplus A_2) \cong 2,381, \quad s_4(A_1 \oplus A_2) = 1.$$

Luego para la norma Ky-Fan:

$$||A||_{(k)} = \sum_{i=1}^{k} s_i(A) \qquad k = 1, 2, ..., n.$$

Si $k = 1$, se tiene $5 \leq 9{,}541 \leq 10$ y

para $k = 2$, se tiene $9{,}618 \leq 12{,}999 \leq 19{,}236$.

b) Si

$$A_1 = \begin{pmatrix} 79{,}1834 & -14{,}5379 & -49{,}9661 & 29{,}8606 \\ -14{,}5379 & 50{,}6081 & 22{,}7118 & -155730 \\ -49{,}9661 & 22{,}7118 & 132{,}4915 & -36{,}3389 \\ 29{,}8606 & -15{,}5730 & -363389 & 56{,}7168 \end{pmatrix}$$

y

$$A_2 = \begin{pmatrix} 49{,}6635 & -19{,}8470 & -20{,}8813 & -1{,}2447 \\ -19{,}8470 & 31{,}0213 & 9{,}4915 & 10{,}5657 \\ -20{,}8813 & 9{,}4915 & 68{,}2203 & -15{,}1864 \\ -1{,}2447 & 10{,}5657 & -15{,}1864 & 66{,}0947 \end{pmatrix}.$$

Los valores singulares de la matriz $A_1 + A_2$ son:

$$s_1(A_1 + A_2) = 278,\ s_2(A_1 + A_2) = 106,\ s_3(A_1 + A_2) \cong 87{,}999,\ s_4(A_1 + A_2) = 62.$$

Y los valores singulares de la matriz $(A_1 \oplus A_2)$ son:

$$s_1(A_1 \oplus A_2) = 187, \quad s_2(A_1 \oplus A_2) = 91$$

$$s_3(A_1 \oplus A_2) = 72, \quad s_4(A_1 \oplus A_2) = 53$$

$$s_5(A_1 \oplus A_2) = 45, \quad s_6(A_1 \oplus A_2) \cong 35$$

$$s_7(A_1 \oplus A_2) \cong 34, \quad s_8(A_1 \oplus A_2) = 17$$

Luego, tomando la norma Ky-Fan obtenemos:

para $k = 1$, $187 \leq 278 \leq 374$

para $k = 2$, $278 \leq 384 \leq 556$

para $k = 3$, $350 \leq 471,999 \leq 700$

para $k = 4$, $403 \leq 533,999 \leq 806$.

Bibliografía

[1] T. Ando, *Majorizations and inequalities in matrix theory*, Linear Algebra, Appl. 199 (1994) 17-67.

[2] T. Ando, *Matrix Young inequalities*, Oper. Theory Adv. Appl. 75 (1995) 33-38.

[3] K. Audenaert, *A singular value inequality for Heinz means*, Linear Algebra Appl. 422 (2007) 279-283.

[4] J.S.Aujla, J.C Bourin, *Eigenvalue inequalities for convex and log-convex functions*, Linear Algebra Appl. 424 (2007) 25-35.

[5] J. Antezana, D. Stojanoff, *Análisis matricial* (2009).

[6] R. Bhatia, *Matrix Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1997.

[7] R. Bhatia, *Positive Definite*, Princeton University Press, Princeton, 2007.

[8] R. Bhatia, C. Davis, *More matrix forms of the arithmetic-geometric mean inequality*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 14 (1993) 132-136.

[9] R. Bhatia, C. Davis, *A Cauchy-Schwarz inequality for operators with applications*, Linear Algebra Appl. 223/224 (1995) 119-129.

[10] R. Bhatia, F. Kittaneh, *On the singular values of a product of operators*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 11 (1990) 272-277.

[11] R. Bhatia, F. Kittaneh, *Notes on matrix arithmetic-geometric mean inequalities*, Linear Algebra Appl. 308 (2000) 203-211.

[12] R. Bhatia, F. Kittaneh, *The matrix arithmetic-geometric mean inequality revisited*, Linear Algebra Appl. 428 (2008) 2177-2191.

[13] R. Bhatia, K.R. Parthasarathy, *Positive definite functions and operator inequalities*, Bull. London Math. Soc. 32 (2000) 214-228.

[14] F. Hiai, H. Kosaki, *Comparison of various means for operators*, J. Funct. Anal 163 (1999) 300-323.

[15] F. Hiai, H. Kosaki, *Means for matrices and comparison of their norms*, Indiana Univ. Math. J. 48 (1999) 899-936.

[16] O. Hirzallah, F. Kittaneh, *Inequalities for sums and direct sums of Hilbert space operators*, Linear Algebra Appl. 424 (2007) 71-82.

[17] K. Hoffman, R. Kunze, *Álgebra Lineal*, Editorial Prentice / Hall Internacional 1973.

[18] R.A. Horn, C.R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1991.

[19] F. Kittaneh, *A note on the arithmetic-geometric mean inequality for matrices*, Linear Algebra Appl. 171 (1992) 1-8.

[20] F. Kittaneh, *Norm inequalities for fractional poqers of positive operators*, Lett. Math. Phys. 27 (1993) 279-285.

[21] F. Kittaneh, *Norm inequalities for commutators of positive operators and applications*, Math. Z. 258 (2008) 845-849.

[22] F. Kittaneh, *Inequalities for commutators of positive operators*, J. Funct. Anal. 250 (2007) 132-143.

[23] H. Kosaki, *Arithmetic-geometric mean and related inequalities for operators*, J. Funct. Anal. 156 (1998) 429-451.

[24] A. McIntosh, *Heinz inequalities and perturbation of spectral families*, Macquarie Mathematical Reports, 79-0006,1979.

[25] Y. Tao, *More results on singular value inequalities of matrices*,Linear Algebra and its Appl. 416 (2006)724-729.

[26] R.C. Thompson, *Convex and concave functions of singular values of matrix sums*, Pacific J. Math. 66 (1976) 285-290.

[27] R. Turkmen, Z. Ululok, *Inequalities for singular values of positive semidefinite block matrices*, International Mathematical Forum, Vol 6, 2011, nro 31, 1535-1545.

[28] X. Zhan, *singular values of differences of positive semidefinite matrices*, SIAM J. Matrix. Anal. Appl. 22 (2000) 819-823.

[29] X. Zhan, *Matrix Inequalities*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1790, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[30] X. Zhan, *On some matrix inequalities*, Linear Algebra Appl. 376 (2004) 299-303.