Universidad Nacional de Comahue

Facultad de Ingeniería

Tesis realizada para obtener el Título de Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Estudio de los errores en la resolución de inecuaciones en alumnos ingresantes al Profesorado de Matemática

Tesista:

Lic. Carina Natalia Duna

Directora:

Dra. Alejandra M. Martínez

Codirectora:

Mg. Teresa Braicovich

Marzo de 2023

Resumen

El análisis de los errores y dificultades en el aprendizaje de la Matemática es un tema de interés desde hace mucho tiempo y en la actualidad ha cobrado especial relevancia para los investigadores en Educación Matemática. Es claro que los errores y dificultades generan preocupación en la mayoría de los docentes debido a que influyen en el aprendizaje de los diferentes contenidos.

A lo largo de este trabajo, se estudian y analizan los errores y dificultades en la resolución de inecuaciones que presentan los alumnos que ingresan al Profesorado de Educación Secundaria en Matemática del Instituto Superior de Formación Docente N° 23, Luján, Buenos Aires, tomando como herramienta teórica y metodológica la Teoría de Funciones Semióticas, la cual es utilizada por el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática para el estudio de la construcción de significados de objetos matemáticos.

Para realizar dicho análisis, se diseña una prueba diagnóstica cuyo objetivo es reconocer algunos de los conocimientos previos que ya han adquirido los estudiantes antes del inicio de los estudios de su carrera docente. Dicha evaluación consta de una serie de ejercicios de resolución de inecuaciones y desigualdades que los estudiantes debieron resolver, explicando y argumentando todas las decisiones tomadas a la hora de responder.

Posteriormente, se identifican los errores cometidos por los estudiantes para luego analizar, caracterizar y clasificarlos en función de la categorización propuesta por Radatz.

Una vez analizados los resultados de la evaluación diagnóstica, se ofrece un aporte didáctico que consiste en una serie de sugerencias metodológicas para el logro de una comprensión eficiente del objeto matemático en estudio, y que propone la implementación de tareas que impliquen el uso de diferentes sistemas de representación y permitan la articulación coherente entre ellas.

Palabras claves: Errores, Inecuaciones, Teoría de Funciones Semióticas.

Abstract

The analysis of errors and difficulties in the learning of mathematics has been a topic of interest for a long time and nowadays it has gained special relevance for researchers in Mathematics Education. It is clear that these errors and difficulties generate concern in most teachers because they influence in the learning process of different contents.

Throughout this work, the errors and difficulties present in the resolution of inequalities in students who entered the Secondary Education Teacher Training Course in Mathematics Nº 23 of Luján, Buenos Aires, are studied and analysed. We have adopted as theoretical and methodological tool the Theory of Semiotic Functions which is used by the Ontosemiotic Approach to Cognition and Mathematical Instruction for the study of the construction of meaning of mathematical objects.

In order to carry out this analysis, a diagnostic test has been designed with the objective of recognizing the previous knowledge that students had acquired before the beginning of their teaching career. This evaluation consisted of six exercises about inequalities that students had to solve through explaining and arguing about the decisions taken in every answer.

Subsequently, the errors made by the students have been identified, analyzed, characterized and classified according to the categorization proposed by Radatz.

Once the results of the diagnostic evaluation have been analyzed, a didactic contribution was offered. It consisted of a series of methodological suggestions for the achievement of an efficient understanding of the mathematical object under study. This methodological approach proposes the implementation of tasks that involves the use of different representation systems and allows the coherent articulation between these representations.

Key words: Errors, Inequations, Semiotic Function Theory.

Agradecimientos

Mi más sincero agradecimiento a mis padres, que confiaron en mi y me apoyaron incondicionalmente. Lamentablemente hoy no están físicamente, pero a ellos les debo todos mis logros.

Agradezco profundamente a mi directora de tesis, Dra. Alejandra Martínez, quien me acompañó durante todo el proceso brindándome generosamente sus conocimientos y asesoramiento.

A mi codirectora, Mg. Teresa Braicovich, que a pesar de las distancias físicas siguió de cerca este proyecto.

A mis compañeros de trabajo que me han brindado lo más importante que tiene un docente: tiempo.

A mi familia, quien supo entender y respetar mis ausencias y momentos de estrés.

Pero especialmente quiero agradecer a Juan, por haberme dado las fuerzas para superar los obstáculos que a lo largo de este trabajo se fueron presentando, quien con todo su amor me incentivó a seguir, a no bajar los brazos. Gracias por confiar en mi en todo momento.

Índice general

Índice de cuadros

Índice de figuras

Capítulo 1

El tema de investigación

1.1. Introducción

Aprender matemática no es tarea fácil y mucho menos lo es enseñarla. El alumno que ingresa a una carrera docente no sólo aprenderá contenidos nuevos, sino que también aprenderá a enseñarlos, y por eso es fundamental reflexionar sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En mi experiencia como docente de primer año del Profesorado de Educación Secundaria en Matemática (PESM) he podido observar errores y dificultades en la resolución de problemas en general y de inecuaciones en particular. Ello ha motivado a estudiar, analizar y reflexionar sobre dichos errores con la finalidad de ofrecer una serie de sugerencias metodológicas que inviten a recapacitar sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje respecto de la resolución de inecuaciones, contribuyendo al desarrollo del pensamiento reflexivo, al acrecentamiento de la claridad conceptual y al aprendizaje significativo, teniendo en cuenta que dicho contenido es transversal prácticamente a toda la carrera.

Muchos investigadores han abordado el estudio en torno a las dificultades que presentan los estudiantes al utilizar desigualdades en diversos niveles del sistema educativo. Entre ellos podemos mencionar a Diez (1995), Garrote et al. (2004), Barbosa (2006), Borello y Lezama (2009), Heredia y Palacios (2014), Bernardis (2014), Ortiz (2021), entre otros.

Bernardis (2014) manifiesta que vivimos en un mundo donde representar lo cotidiano y contextualizar la enseñanza nos obliga a pensar en los modos de enseñar pues el alumno debe estar preparado para reconocer, evaluar hechos y tomar decisiones y es aquí donde aparecen las desigualdades, aunque paradójicamente toma más fuerza la enseñanza y los aprendizajes en "el reino de lo igual". Esta autora sostiene que se evidencia por parte de los alumnos un mejor uso de las cuestiones que involucran a las igualdades que a las desigualdades pero recuerda que el mundo en el que vivimos no es armónico ni exacto por lo que se hace necesario asumir el desafío de cómo expresar e interpretar lo desigual. También considera que existen otros conflictos entre el mundo real y el diseño del mundo que hicieron en la escuela secundaria, por ello cree que es relevante el estudio de las dificultades en el trabajo con desigualdades, dado que esto puede contribuir a favorecer una transición menos traumática de la matemática que traen aprendida de la escuela secundaria a la matemática avanzada que estudiarán en un nivel superior.

1.2. Justificación

El trabajo con el concepto de desigualdad matemática y, por consiguiente, de las inecuaciones, es fundamental en la ciencia y la tecnología dado que se encuentra presente en prácticamente todos los temas de matemática.

Particularmente, en la carrera PESM, podemos mencionar, entre otros ejemplos, que el uso de inecuaciones se encuentra presente en varios espacios curriculares. Como ser, entre los temas abordados en Análisis Matemático pueden encontrarse inecuaciones en la definición de dominio y rango de una función, valor absoluto, las funciones trigonométricas y sus inversas, límite, funciones por partes, el concepto de continuidad, diferenciabilidad, monotonía, concavidad, aproximación de raíces, series, etc.; entre los temas de Álgebra puede encontrarse tanto en el concepto de orden numérico, órdenes de magnitud, problemas de programación lineal, etc., entre los temas de Probabilidad y Estadística, en el cálculo de probabilidades, cotas para probabilidades desconocidas, intervalos de confianza y predicción o test de hipótesis y el estudio de desigualdades famosas como la Desigualdad de Chebyshev, o bien las desigualdades que aparecen en la geometría plana cuando se comparan longitudes, ángulos, áreas o para determinar la existencia o inexistencia de ciertas figuras particulares.

Al tratarse de un tema transversal de la carrera, el estudio de los errores cometidos en su resolución, despierta un real interés dado que muchos docentes de la Institución coinciden en que la mayoría de los alumnos cometen los mismos errores de forma reiterada, y como consecuencia de ello, señalan dificultades que tienen en su aprendizaje a lo largo de todo el recorrido de la carrera. Es interesante estudiar la procedencia de estos errores puesto que en muchos casos se tiende a culpar al alumno por la falta de interés, por aplicar algoritmos que memorizan y utilizan reiteradas veces sin comprender las reglas y procedimientos de cálculo, por la falta de estudio o de atención, etc., cuando en realidad, ponen de manifiesto una fuerte carencia de comprensión. Este interés por descubrir las dificultades que presentan los estudiantes al momento de abordar la resolución de inecuaciones lleva a plantear una investigación de carácter exploratorio descriptivo que profundice la relación entre el uso de los registros gráfico y algebraico con el objetivo de procurar que los alumnos alcancen el éxito al estudiar los temas mencionados, específicamente en el contexto del Instituto de Formación Docente N° 23 de la ciudad de Luján, en el primer año de la carrera PESM.

Para llevar a cabo este trabajo de analizar cualitativamente los errores, se tendrán en cuenta las herramientas que ofrece la Teoría de Funciones Semióticas (TFS) inmersas en el marco teórico Enfoque Ontológico-Semiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS) propuesto por Godino (2003). Bajo este enfoque, las funciones semióticas servirán para caracterizar los significados que se ponen en juego durante la actividad matemática en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Muchas veces, en el trabajo matemático, los símbolos (significantes) están en lugar de las entidades conceptuales (significados) a quienes hacen referencia. Sin embargo, el punto fuerte de la instrucción matemática no se encuentra, según Godino (2003), en el dominio de la sintaxis del lenguaje simbólico matemático, sino en la comprensión de su semántica, es decir, en la naturaleza de los propios conceptos y su relación con los contextos y situaciones de cuya resolución provienen. Por otra parte, el propósito de la enseñanza de las matemáticas es ofrecer condiciones para que los estudiantes entiendan y comprendan el proceso que llevan a cabo para la resolución de un problema. Deben saber que hay situaciones que pueden abordarse desde distintos enfoques y que cada uno de ellos requiere de formas representacionales equivalentes y manipulaciones simbólicas particulares. Esto exige al docente buscar alternativas que permitan facilitar la resolución, en este caso, de inecuaciones. Es por ello que el uso de distintos sistemas representacionales puede brindarle a los alumnos herramientas y elementos argumentativos sólidos que, a futuro, puedan constituirse como mecanismos de verificación de resultados.

Una vez analizados los errores como así también las dificultades vinculadas a los temas de inecuaciones, se ofrece un aporte didáctico que consiste en una serie de sugerencias metodológicas que conlleve a una comprensión eficiente del objeto matemático en estudio (inecuaciones) proponiendo la implementación de tareas que impliquen el uso de diferentes sistemas de representación y promuevan la articulación coherente entre dichas representaciones.

Por todo lo expresado anteriormente es que surge el interés de la presente investigación: *"Estudio de los errores en la resolución de inecuaciones en alumnos ingresantes al Profesorado de Matemática"*.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

Este trabajo tiene por objetivo estudiar los errores que cometen los alumnos ingresantes al PESM a la hora de resolver inecuaciones y desarrollar una propuesta de actividades que pueda ser utilizada para salvar dichos errores y que, a su vez, les permita lograr un mayor manejo de la argumentación y comunicación de saberes. Este estudio será llevado a cabo en el marco del EOS utilizando como herramienta la TFS.

1.3.2. Objetivos específicos

Considerando lo expuesto anteriormente, este trabajo tiene por objetivos específicos:

- Identificar y caracterizar, a través de una evaluación diagnóstica, los errores cometidos por los alumnos ingresantes al primer año de la carrera PESM en la resolución de inecuaciones.
- Analizar los errores y reflexionar sobre los obstáculos y dificultades que se presentan en la resolución de inecuaciones bajo la lupa de distintas teorías o aportes realizados por otros investigadores.
- Proponer una aproximación metodológica de enseñanza que promueva el aprendizaje reflexivo y la disminución de errores en el desarrollo de estrategias de resolución de inecuaciones.

1.4. Hipótesis

De los objetivos propuestos es que se plantean las siguientes hipótesis de investigación:

- Numerosos alumnos ingresantes al PESM presentan dificultades en la resolución de inecuaciones y no reflexionan acerca de los errores durante la cursada o en instancias de evaluación.
- Muchos alumnos tienen dificultades para argumentar y comunicar los resultados obtenidos en la resolución de problemas, en particular en aquellos relacionados con las inecuaciones.
- En general, el tratamiento que se le otorga a la resolución de inecuaciones no considera todos los componentes necesarios para su aprendizaje a partir de su complejidad.
- Varios alumnos ingresantes a la carrera PESM tienen dificultades para operar aritmética y algebraicamente.

1.5. Metodología

La investigación propuesta tiene un balance teórico y experimental, donde se complementan el estudio y análisis del estado del arte en cuanto al estudio de los errores en matemática y particularmente en la resolución de inecuaciones, con el diseño experimental de situaciones donde se busca indagar sobre la forma en que estudiantes que ingresan al Profesorado de Matemática son capaces de resolver distintos tipos de inecuaciones. Dicha indagación tiene por objetivo identificar las dificultades que tienen los alumnos y analizar los errores que cometen en la resolución de inecuaciones para luego ofrecer una propuesta de enseñanza que intente remediar dichas dificultades y propender a un aprendizaje significativo.

Para tal fin, en la presente tesis, se realiza un estudio del estado del arte sobre el tema de investigación en el que se presentan trabajos de distintos investigadores que analizan las dificultades y errores cometidos por estudiantes de diferentes niveles educativos. Sin embargo, se pudo observar que existe muy poca o escasa bibliografía que se detenga a analizar los errores cometidos por los estudiantes de una carrera de formación docente.

Una vez analizada la bibliografía se procede a la elaboración de la prueba diagnóstica. Ésta tiene como objetivo reconocer algunos de los conocimientos previos y construcciones mentales que ya han adquirido los estudiantes antes del inicio de los estudios de su carrera docente. Las actividades propuestas en la evaluación diagnóstica involucran la puesta en juego de las capacidades vinculadas con la producción y la comunicación de la información dado que deben explicar y argumentar durante el proceso de resolución y es por ello que constituyen información relevante sobre los procesos de conceptualización de los alumnos. Esta evaluación diagnóstica proporcionará datos para diseñar una propuesta en función del punto de partida real del grupo con el que se va a trabajar y prever la realización de modificaciones en esa planificación con la intención de mejorar los aprendizajes.

Una vez realizada la actividad de diagnóstico se procede al análisis cualitativo de los resultados. Este análisis consiste en verificar el grado de conocimiento que los alumnos poseen sobre inecuaciones y, sobre todo, en identificar los errores y dificultades presentadas durante la resolución. La información obtenida será el punto de partida para la elaboración de las sugerencias didácticas.

1.6. Organización del trabajo

El presente trabajo se organiza de la siguiente manera. En el Capítulo 2 se realiza inicialmente un breve recorrido sobre los aportes del marco teórico EOS y, puntualmente, de la TFS inmersas en este marco, y cómo estas teorías fueron utilizadas en diversas investigaciones por diferentes autores, culminando con una tipología de las mismas. En el Capítulo 3 se aborda el tema de la desigualdades en la historia para luego hacer un recorrido por distintos estudios realizados en torno a las inecuaciones y culminar con el abordaje de la enseñanza de las mismas. En el Capítulo 4 se detallan los motivos por los cuáles estudiar los errores, se presentan definiciones de error y posibles causas de sus apariciones en la resolución de actividades de matemática, citando diversas investigaciones que destacan la importancia de su estudio para luego culminar con la clasificación y categorización de dichos errores. Tanto el Capítulo 3 como el Capítulo 4 muestran los antecedentes que motivan a la presente investigación. En el Capítulo 5 se presentan las características de la evaluación diagnóstica, su diseño e implementación, y se establecen las funciones semióticas esperadas para cada ejericicio propuesto. En el Capítulo 6 se realiza un análisis detallado de los errores detectados en cada uno de los ejercicios de la evaluación diagnóstica. Luego se agrupan estos errores en categorías para posteriormente analizar las dificultades observadas. En el Capítulo 7 se presenta una serie de sugerencias metodológicas para la enseñanza de las inecuaciones que atiende a las dificultades detectadas en el Capítulo anterior. Por último, en el Capítulo 8 se exponen los resultados y finalmente en el Capítulo 9 se presentan las conclusiones.

Capítulo 2

El marco teórico

2.1. Introducción

Como se ha mencionado en el Capítulo anterior, el marco teórico que sustenta esta investigación es el EOS propuesto por Godino (2003). Contreras y Ordóñez (2006) presentan una síntesis de este marco y consideran que este enfoque se configura en torno a tres modelos:

1. Teoría de los significados sistémicos, institucionales y personales de los objetos matemáticos que sería el equivalente, al menos en parte, a la teoría antropológica desarrollada por Chevallard (1992). Esto significa que considera las matemáticas como una actividad humana, mediada por instrumentos lingüísticos o de otro tipo.

2. Teoría de las funciones semióticas cuyos elementos básicos son las entidades primarias con sus diferentes facetas o dimensiones del conocimiento.

3. Teoría de las configuraciones didácticas, en la que se modeliza la enseñanza y aprendizaje del contenido matemático como un proceso estocástico multidimensional compuesto por seis subprocesos.

Contreras et al. (2005) sostienen que para la TFS, la construcción del conocimiento se realiza desde la actividad práctica, donde el dominio de las herramientas semióticas es un elemento básico, ya que son esenciales para la actividad cognitiva.

2.2. El Enfoque Ontológico Semiótico

Para Godino (2003), el EOS surge de "un enfoque teórico unficado de la cognición y la instrucción matemática, a partir de una ontología matemática y una semiótica propia, adaptada a las necesidades de investigación en didáctica de las matemáticas"(p. 23). La construcción de dicho enfoque atravesó distintas etapas. Godino y Batanero (1994), en una primera instancia, precisaron las nociones de significado institucional y personal de un objeto matemático centrando el interés en los conocimientos institucionalizados, pero sin perder de vista al alumno como sujeto individual al que se dirige el esfuerzo educativo. Un objeto personal involucra la generación de una regla de comportamiento en el sujeto. Es decir, el sistema de prácticas personales que utiliza un estudiante para resolver los problemas de los que surge el objeto en un momento dado. Contreras et al. (2005) sostienen que si bien los significados y los objetos personales son de carácter individual, no se debe perder de vista que el alumno se encuentra sumido en instituciones educativas donde se dan distintas interacciones, por lo tanto, tienen un carácter colectivo. Entonces hay que considerar también los objetos institucionales y sus significados que son los que constituyen el conocimiento objetivo. Siguiendo esta línea, Godino (2003) afirma que "la distinción entre las facetas personal e institucional de los conocimientos matemáticos nos parece fundamental para poder describir y explicar las interacciones entre el profesor y los alumnos en los procesos de enseñanza y aprendizaje"(p. 137).

Continuando con la segunda etapa de construcción del EOS se estudian los sistemas de prácticas manifestados por un sujeto (o en el seno de una institución) ante una clase de situaciones-problemas. En esta fase se estudió con mayor profundidad las relaciones dialécticas entre el pensamiento (las ideas matemáticas), el lenguaje matemático (sistemas de signos) y las situaciones-problemas para cuya resolución se inventan tales recursos. Es decir, se estudiaron los procesos de interpretación de los sistemas de signos matemáticos puestos en juego en el seno de los sistemas didácticos, ampliando la idea de función semiótica y ontología matemática asociada.

En una última instancia, se pule el modelo teórico sobre la instrucción matemática, entendida como "enseñanza y aprendizaje organizado en el seno de los sistemas didácticos". Aquí se definen seis dimensiones de la instrucción matemática:

1. Epistémica. Relativa al conocimiento institucional.
2. Docente. Relativa a las funciones del profesor.
3. Discente. Relativa a las funciones del estudiante.
4. Mediacional. Relativa al uso de recursos instruccionales.
5. Cognitiva. Relativa a la cronogénesis de los significados personales de los estudiantes.
6. Emocional. Relativa a los afectos, valores, sentimientos implicados en el estudio de un contenido matemático.

Según su Godino (2003), el EOS

> ... proporciona criterios para identificar los estados posibles de la trayectoria epistémica, y la adopción de la "negociación de significado" como noción clave para la gestión de las trayectorias didácticas. El aprendizaje matemático se concibe como el resultado de los patrones de interacción entre los distintos componentes de dichas trayectorias (p. 26).

El punto de partida del EOS es la formulación de una ontología de objetos matemáticos que tiene en cuenta tres aspectos de la matemática: la propia actividad de resolución de problemas, un aspecto social dado que dicha actividad es compartida y un lenguaje simbólico y lógicamente organizado. Tomando como punto de partida una situación problemática, se definen los conceptos teóricos de: práctica, objeto (que puede considerarse personal e institucional) y significado, con el fin de manifestar, por un lado los tres aspectos de la matemática antes mencionados y, por otro, la génesis personal e institucional del conocimiento matemático, sin descuidar la interdependencia entre ellos.

En concreto, EOS considera que los objetos matemáticos son emergentes de sistemas de prácticas y son, además, complejos de explicar dado que se puede considerar, como mínimo, dos niveles de objetos que emergen de la actividad matemática. En el primer nivel podemos mencionar aquellas entidades que se pueden observar en un texto matemático (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) y en un segundo nivel tenemos los tipos de objetos que surgen de las distintas maneras de ver, hablar, operar, etc. sobre los objetos del nivel anterior.

Es así que para realizar una práctica matemática y la interpretación de los resultados como satisfactorios se necesita poner en marcha determinados conocimientos. Ahora bien, si se consideran los componentes del conocimiento para la realización y evaluación de la práctica que permite resolver una situación o problema (ejemplo, plantear y resolver una inecuación con una incógnita) vemos que es necesario el uso de lenguajes, verbales y simbólicos. Estos lenguajes son la parte ostensiva de una serie de conceptos, proposiciones y procedimientos que intervienen en la elaboración de argumentos que permiten decidir si las acciones que componen la práctica son satisfactorias.

En cuanto a los objetos matemáticos primarios definidos en el EOS, Godino et al. (2007) proponen la siguiente tipología:

- Elementos lingüísticos (términos, expresiones, notaciones y gráficos) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.)
- Situaciones–problemas (aplicaciones extra-matemáticas, tareas, ejercicios, etc.)
- Conceptos-definiciones (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función, etc.)
- Proposiciones (enunciados sobre conceptos, afirmaciones, etc.)
- Procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, etc.)

A su vez, estos objetos se organizan en entidades más complejas, como ser sistemas conceptuales, teorías, etc.

Godino (2003) considera a los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas según el juego de lenguaje en el que participen y los considera según las siguientes dimensiones duales:

- **Personal – institucional**. Si los sistemas de prácticas se llevan a cabo en una institución, los objetos se consideran *objetos institucionales*, mientras que si estos sistemas son específicos de una persona se consideran como *objetos personales*.
- **Ostensivo – no ostensivo**. El objeto se considera *ostensivo* si es público y puede mostrarse a otros. En cambio los objetos institucionales y personales tienen una naturaleza *no ostensiva*.
- **Expresión – contenido**. Resultan ser el *antecedente* y *consecuente* de cualquier función semiótica. Los objetos no deben pensarse como entidades aisladas, sino más bien se relacionan unos con otros. Esta relación se establece por medio de funciones semióticas. Dichas funciones son entendidas como una relación entre una expresión o significante (antecedente) y un contenido o significado (consecuente) que establece una persona o institución teniendo en cuenta una regla de correspondencia.
- **Extensivo – intensivo**. En este caso el objeto interviene como un caso particular o en una clase más general. Esta dualidad ofrece la posibilidad de enfocar la atención entre lo particular y lo general y esa es una cuestión clave en la construcción y aplicación del conocimiento matemático.
- **Unitario – sistémico**. En ciertas ocasiones los objetos matemáticos participan como entidades que se suponen son conocidas previamente, entidades unitarias, mientras que otras intervienen como sistemas que se deben descomponer para su estudio.

El EOS entiende que la comprensión es una competencia y no tanto un proceso mental, dado que considera que un sujeto comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diversas prácticas. Es aquí donde las funciones semióticas cobran un papel importante en el proceso de relaciones entre entidades o grupo de ellas que se llevan a cabo en las prácticas matemáticas dado que éstas permiten al EOS entender la comprensión en términos de funciones semióticas.

En los últimos años, algunos investigadores han utilizado el EOS para estudiar dificultades en el aprendizaje de algunos contenidos de matemática. Por ejemplo, Distéfano et al. (2012) realizaron un análisis de las dificultades y errores que se generan cuando los alumnos usan las representaciones aritmético-algebraica y geométrica-vectorial de los números complejos, utilizando como una de las herramienta de análisis la TFS cuya descripción se puede ver en la Sección siguiente. Por su parte, Minnaard (2015) se enfocó en el estudio de los errores en Probabilidad y Estadística. En esta misma línea, Dávila (2018) se propuso identificar los indicadores epistémicos, ecológicos, afectivos, cognitivos, mediacional e interaccional adecuados para configurar una idoneidad didáctica que permitiera potenciar el aprendizaje de las medidas de tendencia central en los estudiantes de secundaria. En cambio, Chavez (2009) investigó y describió los distintos significados institucionales y personales de la función afín para detectar algunos de los errores en el aprendizaje del objeto en mención. Además, explicó mediante el uso de las funciones semióticas la causa de estos errores, ya sean debido a conflictos semióticos de tipo cognitivo o epistémico. En cuánto a los estudiantes de carrera docente, podemos mencionar a Marín Ortega (2020) quién realizó un análisis de textos y análisis de errores en futuros profesores de matemática frente a actividades evaluativas sobre la ecuación cuadrática tomando como marco de referencia al EOS.

Estos investigadores centraron su investigación en el estudio de los errores en diversos temas de la matemática tomando como marco teórico el EOS. Algunos pocos aprovecharon las potencialidades que ofrece la TFS para completar sus investigaciones.

2.3. Teoría de la Funciones Semióticas

2.3.1. Introducción

Generalmente, en el quehacer matemático, utilizamos algunos objetos en representación de otros, logrando así una correspondencia, muchas veces implícita, entre el objeto representante y el representado. Searle (1997) sostiene que “hay palabras, símbolos u otros objetos ostensivos que significan o expresan algo, representan o simbolizan algo que está más allá de ellos mismos, y lo hacen de un modo que es públicamente comprensible”(p. 76). Por objetos ostensivos se entiende que son aquellos objetos caracterizados por ser percibidos y de gozar de materialidad.

Los conceptos y las situaciones problemáticas se expresan mediante el lenguaje a través del cual se describen sus propiedades. Las palabras, los símbolos, los gráficos y hasta los objetos físicos cumplen el rol de sistemas de representación. Godino (2003) define a esto como *“uso referencial del lenguaje”*. Pero para la TFS la representación no es exclusiva del lenguaje, sino que los mismos objetos abstractos, las situaciones problemáticas, las acciones y argumentaciones pueden ser signos de otras entidades.

2.3.2. ¿Qué es una función semiótica?

Godino (2003) brinda da la siguiente definición de función semiótica:

> Se trata de las correspondencias (relaciones de dependencia o función) entre un antecedente (expresión o significante) y un consecuente (contenido o significado), establecidas por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia. Estos códigos pueden ser reglas (hábitos, convenios) que informan a los sujetos implicados sobre los términos (funtivos) que se deben poner en correspondencia en las circunstancias fijadas. (p. 286)

y considera que esta noción de función semiótica permite hacer una interpretación del conocimiento y la comprensión de un objeto **O** por parte de un sujeto **X** (persona o institución) en términos de las funciones semióticas que **X** puede establecer, en unas circunstancias fijadas, en las que interviene el objeto **O**. Puesto que cada función semiótica implica un acto de semiosis por un agente interpretante, constituye un conocimiento y hablar de conocimiento equivaldrá a hablar de significado, esto es, de función semiótica. También expresa que la TFS pretende buscar explicaciones de las dificultades del aprendizaje matemático, atendiendo particularmente la interacción comunicativa y los procesos de interpretación que tienen lugar en las clases de matemática, para luego buscar las causas de las dificultades y conflictos cognitivos que presentan los estudiantes.

Es importante que los estudiantes conozcan el significado de los términos, expresiones y representaciones que se utilizan en matemática, es decir, que sepan a qué hace referencia el lenguaje matemático en sus diversos registros. Este reconocimiento es muy valioso dado que el problema semántico del lenguaje matemático es muy complejo debido a la gran variedad de registros semióticos utilizados en este contexto.

2.3.3. ¿Para qué se utilizan las funciones semióticas?

Muchos investigadores consideran que las funciones semióticas constituyen herramientas metodológicas muy potentes para el estudio de la construcción de significados de objetos matemáticos. Godino et al. (2005) describen un modelo ontológico y semiótico para el conocimiento matemático del tema combinatoria. Aplicaron la TFS para analizar el proceso de resolución de algunos problemas combinatorios por parte de estudiantes con alta formación matemática. Dicho trabajo muestra la utilidad que tienen estas herramientas para proporcionar una explicación semiótica a la dificultad del razonamiento combinatorio. En cambio Contreras et al. (2005) realizaron un análisis semiótico de textos cuyo objetivo fue mostrar cómo el uso y aplicación de la TFS ponen en evidencia determinados fenómenos didácticos relacionados con la complejidad semiótica asociada a la función derivada. Una tarea similar realizaron Contreras y Ordóñez (2006) al analizar la introducción del concepto de integral definida presentada en un libro de texto de bachillerato. El uso de TFS en este estudio ha dejado en evidencia diversos conflictos semióticos que deben ser considerados en la enseñanza del tema integral definida. Por su parte, Tamayo et al. (2008) analizaron un proceso de enseñanza y aprendizaje de la definición de límite funcional según Weierstrass. Para ello, descomponen dicho objeto matemático en unidades para poder identificar las funciones semióticas que se establecen en el proceso de enseñanza y aprendizaje implementado en una institución escolar en un ambiente de tecnología digital. También Aznar et al. (2016) utilizaron dichas herramientas como instrumento de diagnóstico y abordaje de errores en producciones de alumnos que se encontraban cursando materias básicas de las carreras de ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina. En dicho trabajo se describió el uso de las funciones semióticas para abordar distintas problemáticas de aprendizaje en los estudiantes universitarios. Estos investigadores consideran que las funciones semióticas permiten visibilizar el nivel de complejidad de una determinada práctica matemática, evaluar detalladamente estas prácticas de los estudiantes para detectar discrepancias de significados y favorecer el rediseño de secuencias didácticas, contemplando las complejidades y conflictos detectados. Además, dicho análisis ha permitido identificar los conflictos de significados que pueden obstaculizar el aprendizaje en un proceso de instrucción y obtener información relevante para el diseño de estrategias de enseñanza.

En resumen, se han mostrado algunas investigaciones que utilizan las funciones semióticas como herramientas metodológicas del EOS en distintos contextos y con diversas finalidades. Ninguno de los trabajos mencionados hace uso de la TFS para describir la problemática asociada al objeto matemático inecuaciones en el nivel superior para una carrera de formación docente.

2.3.4. Tipos de funciones semióticas

En una función semiótica, el objeto inicial y/o final puede estar formado por uno o más elementos primarios que desempeñan el papel de expresión o de contenido, resultando así diferentes tipos de funciones que pueden interpretarse como procesos cognitivos específicos. Teniendo en cuenta los contenidos (el significado), Godino (2003) distingue los siguientes tipos de funciones:

- **Significado lingüístico**: Cuando el contenido es un término, expresión, gráfico u otro elemento lingüístico. Por ejemplo, cuando el símbolo $\geq$ se usa en lugar de la expresión "es mayor o igual que".
- **Significado situacional**: Cuando el objeto final es una situación-problema. Por ejemplo, la descripción verbal, gráfica o mixta de una situación-problema reemplaza a la situación problemática real.
- **Significado conceptual**: Cuando el contenido es un concepto o definición. Por ejemplo, en la definición de inecuación "Desigualdad entre dos expresiones algebraicas de una o más incógnitas, que puede o no verificarse para ciertos valores de esas incógnitas", la palabra inecuación remite a la definición correspondiente.

- **Significado proposicional**: Cuando el contenido es una propiedad o atributo de un objeto. Por ejemplo, "los números positivos son mayores que los negativos".
- **Significado actuativo**: Cuando su contenido es una acción u operación (un algoritmo o procedimiento). Por ejemplo, el 20 % de 50 indica que a 50 se lo multiplica por 20 y luego se lo divide por 100.
- **Significado argumentativo**: Cuando el contenido es una argumentación. Por ejemplo, la demostración de una propiedad.

Además de estos tipos de funciones semióticas podemos identificar variantes según la faceta de las cuales se consideran dichas entidades:

- Personal-institucional: según el agente que interprete el objeto.
- Elemental-sistémico: según el grado de complejidad del objeto.
- Extensiva-intensiva: según el nivel de abstracción.
- Ostensiva-no ostensiva: según el carácter ostensivo del objeto.
- Referencial-instrumental: según el papel desempeñado por la expresión.

Este marco teórico (EOS) tiene un enfoque pragmático pues intenta explicar la asociación de significados de los objetos matemáticos que se producen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Godino (2003) sostiene que el aprendizaje significativo por parte de un estudiante es modelizado como una secuencia de actos de comprensión o actos de superación de obstáculos que el EOS interpreta como el establecimiento de funciones semióticas de distinto tipo. En este contexto se puede inferir que los errores se deben a la falta de establecimiento de las funciones semióticas o bien con el establecimiento de funciones semióticas incorrectas.

Capítulo 3

Desigualdades

3.1. Desigualdades en la historia

Se puede considerar que el nacimiento del Álgebra como una ciencia que relaciona los números con las letras data de más de 3600 años. Durante muchos siglos, se resolvieron problemas en su mayoría de carácter geométrico y con ellos surgió la necesidad de la utilización de símbolos para su resolución. También se observó que en algunas de las estrategias utilizadas para resolver estos problemas se utilizaron igualdades y desigualdades. El tema no consistía en resolver un problema de desigualdades sino que éstas surgían como estrategias de resolución, tal como se menciona en Boyer y Merzbach (2011).

Si bien el origen de las inecuaciones no se puede precisar, se cree nacieron poco después de las ecuaciones (1700 a. C. - 1700 d. C.) debido al surgimiento de problemas en los cuales la respuesta podía contener un grupo de números. Una de las características de dicho período fue la invención gradual de símbolos y la resolución de ecuaciones. Allí se presenta un Álgebra desarrollada por los griegos (300 a. C.), llamada Álgebra Geométrica, rica en métodos geométricos para resolver ecuaciones algebraicas. Esta notación simbólica surgió de la mano de Viète (1540-1603) y marca el inicio de una nueva etapa en la que posteriormente se logra un avance importante en la teoría de las inecuaciones. Fue Descartes (1596-1650) quien fija y ubica a los números positivos hacia la derecha del eje horizontal y hacia arriba en el eje vertical del plano que hoy lleva su nombre. A partir de ese momento, el Álgebra se convierte en la ciencia de los cálculos simbólicos y de las ecuaciones. Mas tarde, Euler (1707-1783) la define como la teoría de los cálculos con cantidades de distintas clases haciendo referencia a cálculos con números racionales enteros, fracciones, raíces cuadradas y cúbicas. Y a partir del siglo XVII, de la mano de Newton (1643 - 1727) y Leibniz (1646 -1716), aparece el cálculo infinitesimal y sus aplicaciones.

Respecto de la historia de las desigualdades, Bernardis et al. (2017) expresan:

> Inicialmente, las desigualdades no tienen un estatus especial en matemática, sino que se consideraron peculiaridades o herramientas matemáticas para el desarrollo de otras teorías. Dos milenios y acciones personales cambiaron el estado de las desigualdades, desde considerarse una herramienta para la matemática hasta afianzarse como una disciplina real de estudio. (p. 181)

Tanto la historia como los ejemplos citados y muchos más, dan cuenta que la desigualdad, junto con sus prácticas, siempre han estado presentes en el seno de la matemática. Sin embargo Borello y Lezama (2009) afirman que, durante muchos siglos, no se percibió la necesidad de implementar técnicas para manipular expresiones que surgen del planteamiento de una desigualdad. Además, manifiestan que encontramos algunas huellas claras de las inecuaciones, así como hoy la conocemos, sólo a partir del siglo pasado.

3.2. Algunos estudios sobre inecuaciones

Al inicio de una carrera de nivel superior, como puede ser el PESM, muchos estudiantes encuentran grandes dificultades en el aprendizaje de la matemática, particularmente, en el aprendizaje de las inecuaciones. Por ello, resulta interesante para el profesor conocer y estudiar los errores básicos cometidos por los alumnos, dado que esta tarea provee de información sobre la forma en que los estudiantes aprenden.

Numerosas investigaciones han abordado el estudio de las dificultades y errores cometidos en la resolución de inecuaciones en los distintos niveles del sistema educativo. Entre ellas podemos mencionar a Heredia y Palacios (2014) quienes presentaron reflexiones, elementos conceptuales y metodológicos para posibles propuestas didácticas hacia maestros en formación y en ejercicio, en relación a la enseñanza y el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones lineales. Vargas (2013) estableció algunos de los errores más frecuentes que cometen los alumnos al resolver ejercicios sobre inecuaciones y a partir de la revisión de algunos documentos y bibliografía presentó algunas ideas para la implementación de una propuesta. Torres (2013) profundizó la relación entre el uso de los registros gráfico y algebraico y el éxito alcanzado al estudiar los temas de funciones e inecuaciones, analizando los conflictos semióticos que surgen al estudiarlos. Sánchez (2012) detalló la elaboración, aplicación y análisis de resultados de una secuencia didáctica orientada a superar las dificultades que tienen los estudiantes tanto en la comprensión de los procesos de resolución de inecuaciones cuadráticas como en la resolución de problemas que requieren el uso de este objeto matemático. Borello y Lezama (2009) realizaron un estudio acerca de las desigualdades a partir de las prácticas didácticas del profesor cuyo objetivo fue ofrecer herramientas metodológicas y didácticas que ayuden a los maestros en su quehacer cotidiano. Barbosa (2003) expuso un conjunto de construcciones mentales que pueden desarrollar los alumnos universitarios a fin de que entiendan el concepto de inecuaciones.

Algunas de estas investigaciones coinciden en que la enseñanza de las inecuaciones se reduce a tareas mecánicas y no de apropiación del contenido semántico de inecuaciones, como también apuntan al establecimiento de relaciones entre los diferentes sistemas de representación semiótica de las desigualdades. Por ello, es importante abordar la enseñanza de las inecuaciones desde distintos sistemas de representación pues se considera que este hecho podría ayudar a reducir los errores cometidos en la resolución de inecuaciones promoviendo así un aprendizaje más reflexivo.

3.3. Abordaje de la enseñanza de inecuaciones

El tratamiento que generalmente se hace en las escuelas de nivel medio sobre las inecuaciones es puramente algebraico y centrado en la resolución de inecuaciones de distinto tipo. Acerca de ello, Bernardis et al. (2017) conjeturan sobre la existencia de una ruptura entre los abordajes aritmético y algebraico que impacta en la comprensión de algunos contenidos y consideran que los estudiantes que acceden al nivel superior presentan serias dificultades en el manejo de algunas desigualdades. Estas autoras postulan que no existe un paso natural del álgebra al cálculo ni un desarrollo continuo y regular del conocimiento, sino que se da un desarrollo caótico. Además, consideran que, si bien las desigualdades no son puramente geométricas, pueden ser visualizadas a través de la representación de objetos geométricos por la relación de comparaciones entre las relaciones métricas (longitudes, áreas, volúmenes). No son exclusivamente algebraicas a pesar de que pueden ser traducidas al lenguaje algebraico y tampoco intrínsicamente del análisis, aunque están presentes en las nociones de límites y convergencia, entre otros. En este punto y, coincidiendo con las autoras, se cree que para una mejor comprensión del objeto inecuaciones es necesario presentar el contenido en distintos contextos: algebraico, geométrico, numérico y funcional, ya que, de esta manera, reconocerán a la desigualdad como un concepto transversal que está presente en gran parte de los contenidos de matemática. Siguiendo esta línea, pero refiriéndose a las ecuaciones, Cai y Knuth (2011) establecen que la ruptura semiótica de la igualdad es uno de los aspectos que es preciso tomar en consideración en el tránsito de la aritmética al álgebra. Esta transición es difícil para muchos estudiantes, incluso para aquellos estudiantes que son bastante competentes en aritmética, ya que a menudo requiere que ellos piensen de maneras muy diferentes. Estos investigadores sostienen que esta ruptura es una de las causales de la falta de comprensión del tema inecuaciones. Para Garrote et al. (2004), por ejemplo, la ausencia de significado es uno de los principales problemas que se plantean en el trabajo con inecuaciones por lo que es importante que el alumno tenga una idea clara del concepto de inecuación equivalente, pues es éste el que da significado a las técnicas de resolución.

Con respecto al abordaje de las inecuaciones desde distintas perspectivas, algunos autores consideran de suma importancia el enfoque gráfico en el tratamiento de este tema. Por ejemplo, Fuentes y Ramos Rodríguez (2018) analizaron cómo los alumnos que se encuentran cursando Matemática Aplicada en el nivel superior pueden resolver inecuaciones de forma gráfica y presentaron un plan de clases desde el marco de la Teoría-Acción-Proceso-Esquema de Dubinsky. La idea que se propone en su investigación es identificar los mecanismos y construcciones mentales para el concepto y resolución de inecuaciones. Desde una perspectiva innovadora ofrecida por las herramientas didácticas sustentadas en el enfoque gráfico, Torres (2013) analizó la relación entre el uso de los registros gráficos y algebraicos. Dicho trabajo, llevado a cabo en la Universidad Nacional Experimental del Táchira, Venezuela, le permitió observar que los alumnos que utilizan el enfoque gráfico muestran una mayor claridad conceptual y que, conforme aumenta esta solidez teórica, también mejoran y aumentan las distintas representaciones utilizadas. Al respecto, Borello (2013) sostiene que la importancia del método gráfico para la enseñanza de las inecuaciones radica en los siguientes elementos prioritarios:

- el acercamiento visual resulta "natural" para los alumnos de las nuevas generaciones, ya que viven inmersos en un contexto socio-cultural en que prevalece la cultura de la imagen en detrimento de aquellas habilidades ligadas a la capacidad de abstraer y de reflexionar,
- el enfoque gráfico cambia el centro de la actividad matemática, pues lleva inevitablemente a trabajar con funciones acercándose el concepto de inecuación al objeto función, favoreciendo una real comprensión de los símbolos de desigualdad e igualdad en el momento en que aprende a "moverse" en el plano cartesiano relacionando correctamente la abscisa y la ordenada de los puntos de la función,
- favorece el aprendizaje y la forma de razonamiento creativo que contrasta la idea "tristemente muy difundida" que las matemáticas sólo tratan de técnicas y que no tienen que ver con nada de todo lo que es creativo.

Siguiendo esta misma línea, se encuentran investigaciones que consideran que las propuestas de enseñanza y aprendizaje de las inecuaciones mayormente sólo fomentan el aprendizaje de algoritmos vacíos que se aprenden de memoria. Tal es el caso de Gatica y Maz Machado (2012) quienes afirman que los estudiantes no aprenden las inecuaciones de manera conceptual y esto genera dificultades en el aprendizaje por ausencia de significados. También, Lemus-Cortez y Escobar (2021) identifican una problemática en torno a la resolución de inecuaciones, dado que consideran que el énfasis se pone en la resolución algebraica y no en los conceptos o representaciones gráficas. Estos últimos pueden llegar a producir situaciones didácticas para construir conceptualmente la conexión entre la matemática y la realidad de los estudiantes, lo que favorece la comprensión conceptual del objeto de estudio. Luego de llevar a cabo la experiencia llegaron a la conclusión que las tareas de modelación promueven el desarrollo de habilidades y mejora el aprendizaje de las matemáticas, puesto que relacionan elementos matemáticos con la realidad lo que dota de sentido y significado a lo que aprende el estudiante. Por su parte, Salas (2022) propone una investigación que busca comprender, describir y analizar las interpretaciones que realizan los estudiantes en el proceso de aprendizaje del concepto de desigualdad con el objetivo de proponer una estrategia didáctica para el aprendizaje conceptual de las desigualdades. Este autor, al igual que D'amore (2003), considera que los procesos de conceptualización de la actividad matemática necesariamente deben pasar por registros de representación semiótica para ser comunicados y aprendidos.

Estos investigadores reconocen las dificultades que presentan los estudiantes a la hora de resolver inecuaciones y muchos coinciden en que se debe abordar el tema desde distintos contextos. Por tales motivos y en concordancia con ello se considera que es necesario proponer enfoques metodológicos y soportes didácticos a fin de ofrecer herramientas que ayuden a tomar decisiones adecuadas para poder abordar el tema con la complejidad de los problemas que se presentan. Es así que este trabajo, en su Capítulo 7, ofrece una propuesta metodológica de enseñanza de inecuaciones que adopta una postura coincidente con la de Barbosa (2003), quien afirma que hay que valorar las oportunidades de estudio de las funciones para el desarrollo del pensamiento matemático y cambiar la manera de enseñar las inecuaciones, proponiendo actividades que involucren no sólo la interpretación y la resolución algebraica, sino también resoluciones gráficas ya que éstas favorecen a la flexibilidad de pensamiento.

Capítulo 4

Errores

4.1. ¿Por qué estudiar los errores?

El análisis de los errores y dificultades en el aprendizaje de la Matemática es un tema de interés desde hace mucho tiempo y en la actualidad se ha vuelto un tema relevante para los investigadores en Educación Matemática. Es evidente que estos errores y dificultades generan preocupación en la mayoría de los docentes debido a que éstos influyen en el aprendizaje de los diferentes contenidos. Por ello, es necesario que se estudien y analicen los errores y dificultades que presentan los alumnos al ingresar, en este caso, al PESM, dado que este análisis servirá a los docentes para organizar estrategias que apunten a lograr un aprendizaje más significativo y reflexivo.

Algunos investigadores y docentes coinciden que, en general, lo que más preocupa es la persistencia y la masividad con la que se presentan los errores y es claro que esto influye en el aprendizaje de los diferentes contenidos. Por ende resulta imprescindible que los estudiantes los reconozcan y asuman la necesidad de superarlos a fin de obtener logros de aprendizaje. Por tales razones, muchos investigadores en Educación Matemática sugieren que se diagnostiquen y se traten seriamente los errores. Tal es el caso de Pochulu (2009) quien sugiere que los errores se comenten con los alumnos, que se pueda discutir con ellos aquellas concepciones erróneas para luego poder brindarles propuestas y situaciones que les permitan ajustar sus ideas. En esta misma línea, Engler et al. (2004) sostienen que:

> El protagonismo que como docentes le damos al error y la forma en que trabajamos con él influyen en el aprendizaje y en el rendimiento académico de nuestros alumnos. Si pretendemos aprendizajes significativos es prioritario el conocimiento y el tratamiento del tema en conjunto, docentes y alumnos. (p. 23)

Por ello se considera que el análisis de los errores no sólo sirve para mejorar el proceso de aprendizaje, sino que también ayuda al personal docente en la selección, creación y organización de estrategias orientadas al logro de una mejor educación. En este sentido, detectar las dificultades, los errores y accionar sobre ellos permite evaluar los contenidos para que cada alumno pueda identificar sus dificultades para luego intentar superarlas y así poder lograr nuevos aprendizajes y retroalimentar los conocimientos ya adquiridos.

Es así que analizar los errores que cometen los alumnos en el proceso de aprendizaje y, en el caso puntual de este trabajo, en la resolución de inecuaciones, brindará información valiosa acerca de cómo los alumnos, futuros docentes de matemática, construyen el conocimiento matemático. Además, permite constituir una herramienta para registrar el estado de conocimiento de los alumnos que ayudará a analizar el proceso de enseñanza y aprendizaje a fin de mejorar los resultados.

4.2. Investigaciones en torno al tema

A lo largo del tiempo, muchos investigadores han abordado el estudio de los errores. Algunos puntualmente, los errores y dificultades que presentan los alumnos cuando estudian los contenidos de matemática con el objetivo de mejorar la calidad de la enseñanza y aprendizaje. A continuación se presenta una síntesis de los más relevantes en orden cronológico.

Radatz (1980) realizó un recorrido por diversas aproximaciones teóricas en las cuáles se intenta dar explicación acerca de las causas de los errores de los estudiantes en el proceso de aprendizaje de la matemática. Este investigador señaló razones por las cuales el estudio de los errores es importante y manifiesta la necesidad de brindar un marco teórico. Además sostiene que los docentes necesitan de esos modelos teóricos para poder diagnosticar y corregir aprendizajes erróneos.

Booth (1984) analizó la naturaleza de los errores cometidos por los alumnos. De este análisis observó que muchos de ellos podían ser atribuidos a la naturaleza y el significado de los símbolos y las letras, al objetivo de la actividad y la naturaleza de las respuestas en álgebra, a la comprensión de la aritmética por parte de los estudiantes y al uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimiento.

Rico (1995) presentó algunas reflexiones teóricas de filósofos de la ciencia y de epistemólogos que se han preocupado por el estudio de los errores y señala que estos estudios han sido orientados por las corrientes pedagógicas y psicológicas predominantes en cada época y también se han visto condicionados por los objetivos y formas de organización del currículo de matemática en los sistemas educativos. Al mismo tiempo describió las características generales que presentan los errores y señaló cuatro líneas de investigación relativas al estudio de los errores en el aprendizaje de la matemática:

- estudios relativos al análisis de errores, causas que los producen o elementos que los explican, taxonomías y clasificaciones de errores detectados,
- estudios dedicados al tratamiento curricular de los errores del aprendizaje en matemáticas,
- estudios dedicados a determinar qué conviene que aprendan los profesores en formación en relación con los errores que cometen los alumnos y
- trabajos de carácter técnico que implementan y sostienen una determinada clase de análisis sobre errores.

Engler et al. (2004) presentaron una revisión bibliográfica sobre la evolución del estudio de los errores a través de los años, características principales, categorización y clasificación de los mismos y algunas recomendaciones acerca de su tratamiento y su estudio.

Del Puerto et al. (2006) se ocuparon del estudio de los errores cometidos por alumnos de nivel medio, terciario y universitario en el aprendizaje de las matemáticas y presentaron algunos de los resultados obtenidos a partir de la implementacion de cuestionarios para su detección y posterior análisis para luego sugerir una postura superadora con respecto al error.

Socas (2007) realizó un estudio sobre las dificultades y errores en el aprendizaje de la matemática, puntualmente en la construcción del lenguaje algebraico, tomando como marco de referencia el Enfoque Lógico Semiótico, desarrollando un modelo que permite profundizar en dichas dificultades y errores. Además sostiene que es necesario diagnosticar y tratar más seriamente los errores de los alumnos dado que esta información permitirá a los docentes arbitrar los procedimientos para ayudar a los estudiantes en la corrección de dichos errores.

Cadenas (2007) presentó una investigación en la que llevó a cabo una evaluación diagnóstica acerca de los conocimientos matemáticos, que permitió determinar carencias, dificultades y errores en alumnos del primer semestre de la Escuela de Educación de la Universidad de los Andes, Colombia. Los resultados obtenidos revelaron que la mayoría de los estudiantes muestran grandes carencias sobre todo de tipo aritmético y algebraico.

Gamboa Graus y Fonseca Pérez (2017) presentaron una reflexión teórica del tratamiento a los errores en la enseñanza de la matemática, realizaron una clasificación y categorización de los errores basadas en diversos investigadores para luego ofrecer una serie de sugerencias acerca de su tratamiento.

Arnawa et al. (2019) analizaron los errores, conceptos erróneos y sus causas en el aprendizaje del álgebra lineal elemental en estudiantes de Química de la Universidad de Andalas, Indonesia. Dicho estudio utilizó métodos cualitativos para explicar cómo razonan los estudiantes para formar errores y concepciones erróneas.

Gamboa Araya et al. (2019) han mostrado que un alto porcentaje del alumnado que ingresa a la Universidad Nacional de Costa Rica,Costa Rica, comete errores matemáticos que se muestran durante el proceso de construcción de los nuevos contenidos y que impactan su rendimiento académico en la disciplina. El trabajo realizado por estos investigadores se orientó hacia el análisis de los errores cometidos por los estudiantes que ingresan a la universidad.

Díaz Quezada y Poblete (2019) realizaron un estudio para identificar y caracterizar las competencias matemáticas y los errores de los estudiantes de ingenierías en la resolución de problemas de límites de funciones reales, a través de la aplicación de instrumentos evaluativos con problemas de respuesta abierta, en la Universidad de Los Lagos, Chile.

Mendoza et al. (2021) realizaron una investigación destinada a identificar y analizar los errores y dificultades en torno al razonamiento cuantitativo que muestran los estudiantes de primer año de las carreras de ingenierías de la Universidad Francisco de Paula, Colombia, en las asignaturas de Matemáticas I y II. Del análisis de los resultados concluyeron que los estudiantes presentan dificultades y errores más evidentes en relación con competencias argumentativas, con ítems relacionados a temas de álgebra, cálculo y estadística y también errores significativos relacionados con el razonamiento cuantitativo.

Rosales (2022) considera que los estudiantes que resuelven problemas de física, recaen reiteradamente en equivocaciones matemáticas y cree que la posibilidad de equivocarse es menos probable en contextos educativos superiores. Por tales razones, realizó una indagación sobre los tipos errores de matemática que cometen los estudiantes de secundaria de la Unidad Educativa María Reina, Venezuela. De los resultados obtenidos observó, entre otros, errores por falta de verificación, errores por conflicto de objetivos, errores de lenguaje matemático, errores de ejecución, errores arbitrarios, errores al operar con números reales, errores de procedimiento, errores por deducción incorrecta de información, etc., y sugiere el diseño de estrategias instruccionales que permitan a los alumnos la adquisición de aprendizajes significativos en el área de la matemática relacionada con la física.

Aguerrea et al. (2022) plantearon que los estudiantes siguen cometiendo errores en conceptos y procedimientos que deberían haber sido superados en la escuela secundaria, y muchos de estos errores son altamente persistentes. En su trabajo de investigación recurrieron al uso de software en situaciones de aprendizaje relacionadas con la modelización dado que consideraron que eso ayudaría a los alumnos a remediar esos errores. Cabe destacar que de los investigadores antes mencionados, estos últimos fueron los únicos que trabajaron con estudiantes de Pedagogía en Matemática, es decir, con docentes en formación.

También han abordado el estudio de los errores realizando una categorización de ellos Esteley y Villarreal (1990), Esteley y Villareal (1996), Pochulu (2009); y quiénes han estudiado al error como medio de enseñanza, tal como Astolfi (2004).

Hasta aquí una breve reseña de investigaciones que abordaron el estudio de los errores en distintos niveles del sistema educativo y en distintas asignaturas de matemática o vinculadas a ella. Sólo uno de los trabajos mencionados se lleva a cabo con estudiantes de una carrera docente y ninguno estudió los errores cometidos en la resolución de inecuaciones.

4.3. Definiciones de error

A través de la historia, el concepto de error ha ido variando y los estudios se fueron orientando según las corrientes pedagógicas y psicológicas predominantes, así como por el currículo matemático en los diferentes sistemas educativos. Sin embargo, existen varias definiciones de error, de diversa naturaleza, manifestadas por expertos en el tema. Es así como Gamboa Araya et al. (2019) realizan una breve recopilación de definiciones dadas por algunos autores. Entre ellas se mencionan, por ejemplo, la definición propuesta por Godino (2004) quien expresa que "Hablamos de error cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar"(p. 73). También la definición propuesta por Lucchini et al. (2006) quiénes sostienen que "Se podría definir "error" como un concepto equivocado o juicio falso. Por su parte, la equivocación se define como el tener o tomar una cosa por otra, juzgando u obrando desacertadamente" (p. 3). Y, por último, estos autores exponen la definición dada por Miranda (2007) quien dice: "Se considera que el error es un conocimiento deficiente, insuficiente, imperfecto, defectuoso, escaso o incompleto; una desviación de un conocimiento establecido"(p. 20).

Abrate et al. (2006), definen el error desde una visión filosófica:

> El estudio del conocimiento humano y de la capacidad del hom-

> bre para comprender ha sido siempre una preocupación constante de la Filosofía, determinando que el error es atribuible a la capacidad de considerar verdaderos conceptos y procedimientos que están deficientemente desarrollados, que incluyen ideas contradictorias o interpretaciones y justificaciones falsas. Esto se confirma, inclusive, en la misma historia de la Matemática, donde podemos encontrar proposiciones que se consideraron como verdaderas y que con el tiempo se demostró su falsedad. (p. 21)

Otra definición es la propuesta por De La Torre (2004) quien define el error de la siguiente manera:

> Desde una perspectiva constructiva, el error es un desajuste entre lo esperado y lo obtenido. Hace referencia a criterio, norma o valor; pero no comporta actitud sancionadora ni punitiva. En otros tiempos se castigaba duramente al sujeto que no lograba los aprendizajes previstos, sin analizar sus causas. Esa práctica carece de sentido educativo mediante las calificaciones, sin analizar a qué se deben tales fallos. Sin embargo, el error en la práctica escolar, simplemente pone de manifiesto una ocurrencia inadecuada, la existencia de fallos en el proceso de aprendizaje. (p. 80)

En cambio Matz (1980) expresa que los errores son intentos no exitosos de adaptar los conociemientos adquiridos a una nueva situación. Por ello, considera que el error es un esquema cognitivo inadecuado y no necesariamente se debe a la falta de conocimiento.

Muchos investigadores y docentes coinciden en que el aprendizaje de la Matemática genera dificultades en los estudiantes y, según Socas (1997), éstas pueden ser de distinta naturaleza. Algunas se originan en el macrosistema educativo pero se concretan en el micrositema educativo (alumno, asignatura, profesor e institución escolar). Es por ello que las dificultades pueden abordarse desde varias perspectivas según si el énfasis está puesto en el desarrollo cognitivo del estudiante, en el currículo de matemática o en los métodos de enseñanza. Es así como estas dificultades se conectan en complejas redes que se manifiestan en la práctica en forma de obstáculos y aparecen en las producciones de los estudiantes en forma de errores. Coincidiendo con Socas (1997), Del Puerto et al. (2006), consideran que el alumno tiene un saber anterior, y estos conocimientos anteriores pueden ayudar al nuevo conocimiento, pero a veces son un obstáculo . Esto provoca una reestructuración del conocimiento. Por ello sostienen que los errores cometidos por los alumnos en Matemática son una manifestación de esas dificultades y obstáculos propios del aprendizaje.

Tanto Del Puerto et al. (2006) como muchos de los investigadores mencionados consideran, al igual que la autora de este trabajo, que en las concepciones actuales, el error debe ser considerado como una fuente valiosa de información y no como algo que debe penalizarse. Es por ello que el proceso de enseñanza y aprendizaje se debe reorientar para aprovechar al máximo las oportunidades que ofrece aprender de los errores. Además, el error debe ser considerado como una fuente de motivación y de oportunidades que se le presentan al alumno y que les permitirá argumentar, discutir y rever sus conocimientos, para lograr un aprendizaje más reflexivo y favorecer así a una mejor comprensión.

4.4. Origen de los errores

Motivos de la aparición y persistencia de los errores en el aprendizaje de la Matemática hay muchos. Es por eso que parece necesario avanzar en el estudio del origen y causas posibles de los errores cometidos por los estudiantes a fin de tener una explicación general de cada error o de los errores cometidos por cada alumno de manera tal que se pueda actuar sobre ello.

En cuanto al origen de los errores, tanto Davis (1984) como Pozo y Gómez (2006) afirman que los errores no son producto del azar, sino que aparecen como consecuencia de conocimientos adquiridos previamente y es posible predecir ciertos patrones comunes de errores y dificultades que se presentan de forma similar en distintos estudiantes. Es claro que la aparición de estas dificultades emerge de un marco conceptual consistente, y todo proceso de instrucción es potencialmente generador de errores y dificultades debido a diversas causales, algunas de las cuales se presentan reiteradas veces y otras son inevitables. En esta mimsa línea, Socas

(2007) sostiene los errores no surgen de manera accidental, sino que los estudiantes recurren a experiencias anteriores en matemática y emplean estrategias y reglas personales en la resolución de problemas. Generalmente se acepta que muchos alumnos tienen una actuación aparentemente satisfactoria, pero es muy probable que oculten serios errores operacionales, estructurales y procesales de los objetos matemáticos que dificultan los aprendizajes subsiguientes.

Pochulu (2009) afirma que las dificultades que pueden tener los alumnos al abordar los contenidos de Matemática que se presentan en el nivel medio no son triviales, y requieren de mucho tiempo para su apropiación y consolidación. También expresa que no se debe pasar por alto que las oportunidades que tienen los estudiantes de aprender matemática dependen mucho del entorno, del tipo de tareas, de la formación y experiencia previa, etc. De estas oportunidades y otros factores dependerá lo que aprenden y cómo se implican en las actividades matemáticas y las actitudes que tienen hacia esta ciencia.

Por otro lado, no se debe olvidar que, durante la pandemia, el sistema educativo sufrió un cambio abismal en la manera de trabajar. Pasar de la presencialidad a la virtualidad total fue un desafío muy importante para muchos docentes e instituciones y un cambio más abrupto aún para los alumnos en la manera de aprender. Algunos investigadores como Soto-Meza et al. (2022), analizaron el impacto de la educación virtual en el aprendizaje de la matemática en los estudiantes del nivel primario y secundario en tiempos de pandemia. Para ello realizaron un análisis documental de literatura relacionada al aprendizaje virtual, aprendizaje de la matemática y propuestas para el aprendizaje de la misma en pandemia. De dicho análisis surgen dos conclusiones contrapuestas. La primera de ella ofrece una mirada favorable pues, algunas investigaciones analizadas como, por ejemplo, las de Doz (2021), González et al. (2020), Meeter (2021) y Gore et al. (2021), demuestran un avance en los resultados de aprendizaje de la matemática en comparación con los resultados antes de la pandemia. Pero a su vez, Soto-Meza et al. (2022) consideran que estos resultados no necesariamente demuestran la realidad dado que las calificaciones que se obtienen no reflejan realmente el logro de aprendizajes en matemática, pues se cree que muchos docentes decidieron otorgar mayor importancia y valoración a la participación y a la presentación de trabajos. La otra conclusión refiere a los resultados desfavorables. Investigaciones tales como las de Engzell et al. (2021), Schult et al. (2022), Zierer (2021) y Azevedo et al. (2021) coinciden en que los resultados de los aprendizajes han disminuido en la etapa de la pandemia. Se habla de que hay una brecha de oportunidades que se hace evidente con la realidad de muchos sectores de la sociedad muy desfavorecidos.

Si bien los errores pueden ser originados por diversas causas, es muy importante tener un conocimiento general de los fundamentos teóricos y prácticos sobre esta problemática y cómo esto repercute en el desarrollo curricular de manera tal, que los docentes puedan adquirir herramientas que les permitan hacer un diagnóstico y aportar un tratamiento para la superación de los errores.

4.5. Características de los errores

Como se ha visto en la Sección anterior, el error puede tener diferentes procedencias y poder abordar la caracterización general de los errores cometidos por los estudiantes es de gran importancia. Tal es así que, por ejemplo, Abrate et al. (2006) consideran las siguientes características de los errores:

- Los errores aparecen, por lo general, durante la clase y de una manera espontánea. Aunque estos errores pudieron gestarse mucho antes, suelen sorprender al profesor.
- Dependen de cada alumno en particular. Son persistentes y difíciles de superar porque requieren de una reorganización de los conocimientos en el alumno.
- Existe un mayor predominio de los errores sistemáticos con respecto a los errores por azar u ocasionales. Estos errores sistemáticos muestran que los procesos mentales han llevado a los estudiantes a una comprensión equivocada.
- Los errores sistemáticos son, en general, el resultado de concepciones inadecuadas de los fundamentos de la matemática.

- Muchos alumnos no son conscientes de los errores cometidos dado que no cuestionan lo que les parece obvio y no consideran el significado de los conceptos, reglas o símbolos con que trabajan.
- Algunos errores se gestan en la comprensión o el procesamiento que hace el alumno de la información que da el profesor. Es decir, inventan su propio método en base al método descrito por el profesor.

Las caracterísitcas expresadas por los investigadores antes mencionados coinciden en algunos puntos con Rico (1995), quien propone como características generales de los errores cometidos por los estudiantes, las siguientes:

- Los errores son sorprendentes. Los errores cometidos por los estudiantes generalmente surgen de manera sorprendente, dado que, por lo general, se han mantenido ocultos para el profesor durante algún tiempo.
- Los errores son extremadamente persistentes. Pueden reflejar el conocimiento de los alumnos sobre un concepto o el uso particular de reglas nemotécnicas. Generalmente son resistentes a cambiar por sí mismos debido a que la corrección de errores puede necesitar de una reorganización fundamental del conocimiento de los alumnos.
- Los errores pueden ser sistemáticos o por azar. Los errores sistemáticos se toman como síntomas que señalan un método equivocado subyacente en el estudiante, pero éste los utiliza y considera como correctos. En cambio, los errores por azar reflejan falta de cuidado y lapsus ocasionales y no tienen gran importancia.
- Los errores ignoran el significado, de este modo, las respuestas incorrectas no se ponen en cuestión. Los errores que cometen los estudiantes no consideran el significado de los símbolos y conceptos con los que trabajan.

Gamboa Araya et al. (2019) expresan que los errores son manifestaciones de las dificultades que presentan los estudiantes y que provienen de concepciones que fueron útiles en su momento pero que, al aplicarlo en otros contextos, resultan inapropiadas. A continuación se presenta una breve descripción de las dificultades y las posibles causas de su aparición con las que se encuentran los alumnos, realizada por Godino (2004).

1. *Dificultades relacionadas con los contenidos matemáticos.*

   Una de las posibles causas y dificultades en el aprendizaje es la abstracción y generalización de las matemáticas. A veces el error se produce porque el alumno usa un conocimiento que es válido en algunas circunstancias pero en otras no, es decir, aplica un conocimiento indebidamente.

2. *Dificultades causadas por la secuencia de actividades propuesta.*

   En este caso puede suceder que la propuesta de actividades que presenta el docente a sus alumnos no sea significativa. Esto puede deberse a que el docente no estructura de manera adecuada los contenidos que quiere enseñar, a que los materiales elegidos para llevar a cabo la clase no sean claros o bien la presentación del tema que hace el docente no es clara ni esté bien organizada.

3. *Dificultades que se originan en la organización de la institución.*

   Aspectos como el horario de la clase, número de estudiantes, materiales o recursos didácticos insuficientes, entre otros, pueden dificultar el aprendizaje de los estudiantes.

4. *Dificultades relacionadas con la motivación del alumnado.*

   Puede suceder que las actividades propuestas por el docente sean potencialmente significativas y que la metodología sea la adecuada, pero que los alumnos no encuentren motivación en ella. Esto puede estar relacionado con la autoestima y la historia escolar del alumno.

5. *Dificultades relacionadas con el desarrollo psicológico de los alumnos.*

   Una fuente de dificultades de aprendizaje se debe al hecho de que algunos alumnos aún no hayan superado la etapa previa al nivel académico requerido para su edad.

6. *Dificultades relacionadas con la falta de dominio de los contenidos anteriores.*

   En algunos casos, el alumno no posee los conocimientos previos necesarios para poder aprender el nuevo contenido. Esto provoca una distancia no adecuada entre el nuevo contenido y lo que sabe el alumno.

Los errores sistemáticos propician la creación de patrones de comportamiento equivocados en la ejecución de las tareas. Son patrones consistentes de errores. Algunos investigadores como Miranda (2007) y Del Puerto et al. (2006) los han diferenciado en dos niveles:

- *Nivel individual*: las personas muestran gran regularidad en su modo de resolver ejercicios y problemas similares.
- *Nivel colectivo*: distintas personas cometen errores semejantes en determinadas etapas de su aprendizaje.

Dadas estas regularidades con las que suelen presentarse los errores, es que varios autores han realizado clasificaciones de los mismos en el aprendizaje de la matemática, ya sea por su naturaleza, su posible origen o su forma de manifestarse.

4.6. Clasificación y categorización de los errores

Este trabajo tiene por finalidad describir y estudiar los errores y dificultades cometidos en la resolución de inecuaciones por los alumnos que ingresan en el primer año de la carrera PESM del Instituto Superior de Formación Docente N° 23. Es por ello que se considera de gran importancia realizar una clasificación y categorización de los errores cometidos en matemática, cuyo objetivo sea el de centrar la atención en los diferentes aspectos para reflexionar sobre ellos y ofrecer una propuesta de enseñanza más eficaz que ayude a los estudiantes en sus dificultades cognitivas y colabore con el desarrollo de una actitud racional hacia la matemática.

Muchos investigadores han realizado distintas clasificaciones de los errores con el propósito de crear esquemas para la interpretación. A continuación se presenta una síntesis de algunas de las clasificaciones que se consideran relevantes.

4.6.1. Clasificación propuesta por Radatz (1979)

Este autor realiza una clasificación de los errores partiendo del procesamiento de la información y establece cinco categorías generales:

- *Errores debido a la dificultad del lenguaje.*

  El aprendizaje de conceptos, símbolos y vocabulario matemático es para muchos alumnos un problema similar al aprendizaje de una lengua extranjera. Una falta de comprensión semántica de los textos matemáticos es fuente de errores. Es decir, errores derivados del mal uso de los símbolos y términos matemáticos debido a su inadecuado aprendizaje.

- *Errores debido a dificultades para obtener información espacial.*

  Muchos de estos errores matemáticos emergen de las diferencias entre las imágenes espaciales y el pensamiento espacial de los alumnos. Estos errores aparecen cuando es necesario hacer una representación espacial de una situación matemática o de un problema geométrico y no se logra realizarlo con éxito.

  La representación icónica de las situaciones matemáticas puede implicar grandes dificultades en el procesamiento de la información. Además, el análisis y la percepción a menudo exigen más del alumno que el problema matemático mismo.

- *Errores debido a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.*

  Entre ellos se pueden mencionar las deficiencias en el contenido y los problemas de conocimiento. Estas deficiencias pueden ser el desconocimiento de algoritmos, manejo inadecuado de conceptos básicos, realización de procedimientos incorrectos, incomprensión de símbolos, etc.

- *Errores debido a la rigidez de pensamiento.*

  En estos casos, los alumnos no pueden adaptar lo que ya conocen a situaciones nuevas, es decir, existe una falta de flexibilidad en el pensamiento. Dentro de esta clase de errores podemos mencionar los siguientes:

  - Errores por perseveración, en los que predominan elementos singulares de una tarea o problema.

  - Errores de asociación, que incluyen razonamientos o asociaciones incorrectas entre elementos singulares.

- Errores de interferencia, en los que operaciones o conceptos diferentes interfieren con otros.
- Errores de asimilación, en los que una audición incorrecta produce faltas en la lectura o escritura. Cuando la información es mal procesada debido a fallas de percepción.
- Errores de transferencia negativa a partir de tareas previas.

- *Errores debido a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.*

  Se producen por el desarrollo incorrecto de algoritmos, la falta de estrategias en la solución de tareas matemáticas, aplicación de reglas o estrategias similares en contenidos diferentes, etc. El razonamiento por analogía no siempre funciona en matemática.

4.6.2. Clasificación propuesta por Movshovitz-Hadar et al. (1987)

Para estos autores, los errores pueden enmarcarse en las siguientes categorías:

- *Datos mal utilizados.*

  Errores producidos por alguna discordancia entre los datos y el tratamiento que le da el alumno, debido, por ejemplo, a que se agregan datos extraños o se olvida algún dato primordial para la resolución del problema, se responden cuestiones que no se preguntan o no son necesarias, se utilizan valores numéricos de una variable en otra o se realiza una lectura incorrecta del enunciado, entre otras.

- *Interpretación incorrecta del lenguaje.*

  Errores debidos a una traducción de hechos matemáticos de un lenguaje a otro. Por ejemplo, interpretación incorrecta de símbolos gráficos como términos matemáticos y viceversa.

- *Inferencias no válidas lógicamente.*

  Aquí se encuentran aquellos errores que se producen por falacias de razonamientos. Entre otros ejemplos se pueden mencionar: derivar de un enunciado condicional su recíproco o su contrario, derivar del consecuente el antecedente, incorrecta utilización de los cuantificadores, etc.

- *Teoremas o definiciones deformados.*

  Es el caso de aquellos errores que surgen de alterar un principio, regla o teorema como, por ejemplo, utilizar un teorema sin verificar las condiciones iniciales o hipótesis.

- *Falta de verificación en la solución.*

  Como, por ejemplo, desconexión entre lo analítico y lo gráfico, respuestas consecutivas incoherentes entre sí y no comprobación de que los resultados obtenidos satisfacen las condiciones del problema propuesto.

- *Errores técnicos.*

  Aquí se encuentran, por ejemplo, errores de cálculo, de distracción, de manipulación errática de símbolos algebraicos, etc.

4.6.3. Clasificación propuesta por Socas (1997)

Este investigador sostiene que los errores se deben a ciertas dificultades que se pueden agrupar en cinco categorías: dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos, dificultades asociadas a los procesos del pensamiento matemático, dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas, dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos y dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas. A partir de estas dificultades, clasifica los errores de acuerdo con su origen en:

- *Errores que tienen su origen en un obstáculo.*

  El obstáculo es un conocimiento adquirido, no una falta de conocimiento, que ha demostrado su efectividad en ciertos contextos pero cuando el alumno utiliza este conocimiento fuera de dichos contextos, origina respuestas inadecuadas.

- *Errores que tienen su origen en la ausencia de sentido.*

  Estos errores se originan en los distintos estadíos de desarrollo que se dan en los sistemas de representación y se pueden diferenciar en tres etapas distintas:

  1. Errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética. Para entender la generalización de las relaciones y procesos se requiere que éstos antes hayan sido asimilados en el contexto aritmético.

  2. Errores de procedimiento. En este caso los alumnos usan de manera inapropiada fórmulas o reglas de procedimiento.

  3. Errores del álgebra debido a las características propias del lenguaje algebraico. Un ejemplo de este tipo de error es el sentido del signo igual en álgebra. El sentido de igualdad aritmética se conserva en el álgebra cuando se trabaja con tautologías algebraicas, pero no en expresiones como por ejemplo $3x - 5 = 2x + 1$ que sólo es verdadera cuando x vale 6.

- *Errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.*

  Son ejemplos de este tipo de errores la falta de concentración, la excesiva confianza, los bloqueos, olvidos, etc.

4.6.4. Clasificación propuesta por Astolfi (2004)

Este investigador propone una tipología para los errores desde una perspectiva general, la cual pretende romper con las categorías tradicionales adoptadas para hablar sobre ellos y son las siguientes:

- *Errores debido a la redacción y comprensión de las instrucciones.*

  Provienen de la mala comprensión de las consignas o instrucciones de trabajo (orales o escritas) dadas en la clase. Muchas veces los términos utilizados para la presentación de las actividades o la introducción de ejercicios y problemas no son del todo claros. La dificultad en la lectura puede estar relacionada con la comprensión de las consignas.

- *Errores que provienen de los hábitos escolares o de una mala interpretación de las expectativas.*

  Muchos de los errores de los alumnos provienen de la dificultades que ellos encuentran para entender aspectos implícitos de la situación o de la clase, como ser el contrato didáctico establecido con los docentes, lo que se espera de ellos, las costumbres dentro del aula, reglas propias aunque no estén formalizadas, etc.

- *Errores como resultado de las concepciones alternativas de cada estudiante.*

  Las concepciones alternativas de los alumnos también son conocidas como representaciones. Estas representaciones perduran a lo largo de la escolaridad y afloran en las producciones y respuestas de forma inesperada, es decir, los alumnos no esperan a que les llegue un determinado contenido en una clase para construir mentalmente un sistema coherente de explicaciones.

- *Errores ligados a las operaciones intelectuales implicadas.*

  Algunos de estos errores están relacionados más directamente con la diversidad de las operaciones intelectuales que deben utilizarse para resolver los problemas y que, aparentemente, están al alcance de los alumnos. Por ejemplo, los problemas de suma son más fáciles si se corresponden con una ganancia que con una pérdida.

- *Errores en los procesos adoptados.*

  Los errores en los recorridos empleados pueden ser muy diversos y muchas veces el docente espera el uso de un procedimiento estándar, no llegando a comprender el camino o la intención del alumno. Es decir, a veces los alumnos optan por un procedimiento o estrategia de resolución distinta a la esperada por el profesor, entonces éste lo considera como un error.

- *Errores debido a la sobrecarga cognitiva en la actividad.*

  La capacidad de trabajo es limitada y se subestima frecuentemente la carga cognitiva de la actividad. Así la sobrecarga cognitiva puede darse, por ejemplo, cuando el número de operaciones mentales que deben efectuarse y conservarse es muy superior al límite soportado.

- *Errores que tienen su origen en otra disciplina.*

  Estos errores se presentan cuando los alumnos transfieren conocimientos previos de otras disciplinas o dentro de la misma. El parecido superficial de situaciones en disciplinas distintas, o incluso en la misma, juega un papel esencial frente a los alumnos. Muchas veces transfieren un saber indebidamente porque creen que existen parecidos entre las situaciones.

- *Errores causados por la complejidad propia del contenido.*

  Este error está relacionado con la complejidad interna del contenido. Por ejemplo, muchas veces se trabaja un contenido como ampliación de otro contenido estudiado anteriormente, pero dicha ampliación en ocasiones se considera como una simple generalización de las adquisiciones anteriores cuando en realidad requiere de una renovación teórica importante.

Hasta el momento, se ha presentado y detallado algunas de las clasificaciones y categorizaciones mas relevantes respecto de los errores en matemática a fin de poder entender su procedencia. Rico (1995) sostiene que el estudio de errores en el aprendizaje de la matemática es un proceso muy complejo, lo que lo hace una tarea difícil a la hora de delimitar las causas posibles. Su dificultad radica en el hecho de que se debe tener en cuenta la interacción de muchas variables, como ser, el bagaje de conocimientos previos que traen los estudiantes, el docente y su modo de dar las clases, el currículo, el entorno social en el que se encuentra enmarcada la institución, el medio cultural y sus relaciones, así como las posibles interacciones entre estas variables. Esta es una tarea difícil pero fundamental. Es así que la importancia de este trabajo no sólo radica en la detección y clasificación de los errores cometidos por estudiantes de PESM, sino también tiene por objeto ofrecer una propuesta de enseñanza que ayude a reflexionar sobre ello.

Dentro del ámbito de las matemáticas, una de las clasificaciones más utilizadas es la de Radatz (1979), que, como se ha dicho, está basada en las teorías del procesamiento de la información. Por ello es que para llevar a cabo esta tarea se utilizará dicha clasificación debido no sólo a la importancia sino también a que se considera la más apropiada para poder analizar los errores cometidos en la resolución de la actividad diagnóstica.

4.7. Errores en el aprendizaje de las inecuaciones

Tal como se ha mencionado en la Sección 3.2, varios investigadores han abordado el estudio de los errores y dificultades en torno al tema inecuaciones, con la intención de buscar alternativas didácticas y metodológicas que ayuden a mejorar la comprensión del objeto matemático en estudio. La detección de las dificultades que presentan los estudiantes en la resolución de inecuaciones y su posterior análisis son un tema de interés para investigadores de todo el mundo. Tal es el caso de Vargas (2013) quien señala dificultades en la resolución de inecuaciones lineales de estudiantes de nivel secundario en Costa Rica. Tras realizar un análisis cualitativo de los resultados de la prueba diagnóstica obtuvo los siguientes resultados:

- No es claro cuál de los símbolos $<$ y $>$ significa "mayor que" y cuál "menor que".
- No comprenden que la afirmación $x > a$, con $a \in \mathbb{R}$, incluye como soluciones todos los números reales mayores que a. Muchas veces consideran que las soluciones son únicamente números enteros.
- Algunos estudiantes aprenden el procedimiento algorítmico sin comprenderlo y memorizan reglas tales como "se le da vuelta al símbolo", sin entender la razón por la que se cambia el símbolo mayor a menor o viceversa durante el proceso de resolución de la desigualdad.
- Reproducen ideas erróneas aprendidas al resolver operaciones con polinomios o ecuaciones lineales.

En cuanto a la resolución de inecuaciones cuadráticas, Sánchez (2012) sostiene que esta problemática también se puede percibir en los estudiantes de las carreras de humanidades de la Universidad Señor de Sipán, Perú. Allí, en los primeros cursos de matemática, se han observado las siguientes limitaciones y dificultades en la enseñanza y aprendizaje de este objeto matemático:

- En el dictado de clases, se presenta la definición, la notación formal y rápidamente las técnicas de resolución como simples pasos a seguir.
- En el caso particular de la enseñanza de las inecuaciones cuadráticas no se consideran aplicaciones mediante problemas contextualizados.
- En la resolución de este tipo de inecuaciones, los estudiantes aprenden las técnicas algebraicas de manera mecánica sin ninguna fundamentación y no tienen una visualización clara de lo que es resolver una inecuación.
- En los procesos de resolución de inecuaciones cuadráticas los alumnos utilizan los mismos procedimientos que en la resolución de ecuaciones cuadráticas, determinan las raíces de la función cuadrática y no logran continuar con el procedimiento, ocasionado limitaciones para determinar el conjunto solución.
- Dificultades para identificar las inecuaciones equivalentes, especialmente cuando el término cuadrático tiene signo negativo.
- Dificultades para determinar el conjunto solución de la inecuación cuadrática cuando su expresión no puede factorizarse en $\mathbb{R}$.

En España, Garrote et al. (2004) llevaron a cabo una investigación con el objeto de describir y analizar algunos errores y dificultades de los alumnos del primer curso de bachillerato de las modalidades tecnológico y ciencias de la naturaleza y la salud en el aprendizaje de las inecuaciones y señalan las siguientes dificultades:

- Los estudiantes tienen dificultades para establecer diferencias significativas entre los conceptos de inecuación y de ecuación.
- Existen problemas para reconocer la equivalencia de las expresiones $x > a$ y $a < x$, con $a \in \mathbb{R}$. Usualmente los alumnos resuelven los ejercicios colocando la variable en el miembro izquierdo de la inecuación, ya que si cambian la presentación tienen problemas para interpretarla.
- Presentan serias dificultades al pasar de un enunciado literal a una expresión algebraica, sobre todo si se incluye una doble desigualdad.
- No interpretan adecuadamente la solución de una inecuación.

- Para muchos alumnos, el álgebra es “operar” con números y letras, sin otro objetivo que el de obtener valores para las mismas aplicando algoritmos de resolución.
- Hay dificultades propias de la aritmética que dificultan la solución de inecuaciones, por ejemplo, el uso de la reglas de los signos.
- Utilizan las expresiones literales (variables) sin atribuir ningún tipo de significado.
- Los alumnos utilizan únicamente el lenguaje algebraico para el abordaje de diferentes problemas propuestos, en parte como consecuencia de la forma en la que los docentes abordan el tema en clase.
- Hay ausencia de significado en el trabajo con inecuaciones. Debe reforzarse el concepto de inecuaciones equivalentes.

Estos autores sostienen que los resultados obtenidos en su investigación muestran las dificultades de interpretación que tienen los alumnos, dado que cuando resuelven inecuaciones no son capaces de sacar conclusiones. Esta situación también se observa en algunos de los ejercicios inconclusos que dejan los alumnos.

Anteriormente, Barbosa (2003) determinó que la resolución de las inecuaciones por parte de los alumnos de enseñanza media y superior conllevan innumerables errores de concepción, de entendimiento y de empleo de las propiedades del cuerpo ordenado de los números reales y tales errores son bastante comunes en los diferentes niveles del sistema educativo.

Hasta el momento se han mostrado diversos problemas y dificultades que presentan los estudiantes durante el proceso de aprendizaje de las inecuaciones, y es por ello que muchos investigadores intentan ofrecer respuestas y alternativas que permitan a los estudiantes alcanzar una compresión adecuada de este concepto. Estos errores y dificultades deben ser estudiados y analizados para poder ofrecer propuestas con sugerencias metodológicas que ayuden a paliar las dificultades que se presentan pero, a su vez, ayuden a reflexionar sobre los errores y a capitalizar dicho trabajo en pos de una mejora en la comprensión de estos temas.

Capítulo 5

El diagnóstico

5.1. Introducción

Para llevar adelante esta investigación se realizó una actividad con los alumnos ingresantes a la carrera PESM del Instituto Superior de Formación Docente N° 23 de la ciudad de Luján, provincia de Buenos Aires. Esta actividad de diagnóstico tiene la intención de conocer el grado con que los estudiantes que ingresan a la carrera docente antes mencionada dominan las inecuaciones. Es decir, intenta poner en evidencia las dificultades y errores cometidos en la resolución de inecuaciones, contenido que trabajarán a lo largo de toda su estadía en el profesorado, en las diferentes unidades curriculares de matemática.

5.2. ¿Qué es la evaluación diagnóstica?

El diagnóstico o evaluación diagnóstica es una actividad que tiene por objetivo conocer el tipo y nivel de conocimientos que tienen o han adquirido los estudiantes al inicio de clases, de un tema o de un período académico. Socas (1997) lo ha definido como un conjunto de situaciones de aprendizaje las cuales son planteadas para reconocer y estudiar las dificultades específicas del aprendizaje, que trata de determinar la naturaleza de las mismas. Dicha evaluación se realiza, en general, al inicio de cada unidad didáctica, sin embargo, para analizar los errores y dificultades en este trabajo de investigación se hace necesario implementarla al comienzo de la cursada del espacio curricular Introducción al Cálculo. También Serradell et al. (1987) consideran que el diagnóstico es un proceso que trata de describir, clasificar, predecir y explicar el comportamiento de un sujeto dentro del marco escolar. Incluyen un conjunto de actividades de medición y evaluación de un sujeto (o grupo de sujetos) o de una institución con el fin de dar una orientación. Mollà (2001) considera que es un proceso metodológico, también una actividad basada en la ciencia y que tiene por finalidad indagar sobre los conocimientos que poseen los estudiantes con la intención de fortalecer el aprendizaje de los mismos cuando los resultados no son los esperados. Una vez conocidos los resultados de la evaluación diagnóstica se hacen los cambios pedagógicos para mejorar los procesos de enseñanza.

Cabe destacar la importancia de llevar a cabo este tipo de actividades pues es necesario realizar periódicamente un análisis del proceso educativo, de lo que se está enseñando, conocer y valorar mediante la evaluación las competencias básicas que tienen los estudiantes, el grado de conocimientos y de logros que ellos han adquirido mediante el proceso enseñanza y aprendizaje. Una de las finalidades de dicha actividad es poder reflexionar sobre los cambios que se deben realizar con el objeto de tener una visión sobre las mejoras pedagógicas a realizar y ofrecer una orientación sobre cómo enfocar el aprendizaje de los estudiantes.

5.3. Diseño e implementación

El objetivo de esta evaluación es indagar acerca de las dificultades y errores que presentan los alumnos que ingresan al PESM en el estudio de las inecuaciones. Para la elaboración de dicha actividad se toman como referencia algunas dificultades y errores arrojados por investigaciones presentadas en los Capítulos 3 y 4 de este trabajo. Los aspectos matemáticos fundamentales que se pretenden indagar con esta evaluación diagnóstica son los siguientes:

- La definición de desigualdad y su aplicación.
- Interpretación de desigualdades numéricas y su representación en la recta real.

- La traducción del lenguaje coloquial al lenguaje algebraico.
- La resolución algebraica de inecuaciones lineales con una sola incógnita mediante el uso de propiedades algebraicas y de orden de los números reales.
- Análisis de las soluciones de distintos tipos de inecuaciones lineales.
- Resolución de inecuaciones cuadráticas.
- Resolución de inecuaciones racionales vinculando la resolución de las inecuaciones con el estudio de las desigualdades a través del análisis gráfico de funciones.

Dicha actividad consta de una serie de seis ejercicios de resolución de inecuaciones y desigualdades que deben resolver explicando y argumentando todas las decisiones tomadas a la hora de responder. La evaluación diagnóstica fue entregada a 28 alumnos que ingresaron al PESM durante el año 2022, en el espacio curricular de Introducción al Cálculo que tiene destinadas cinco horas semanales (dos horas los días martes y tres horas los días jueves). La implementación del diagnóstico se llevó a cabo durante una clase de tres horas de duración en el transcurso del primer mes de clases.

Cabe mencionar que esta actividad sólo tiene como objetivo recabar información acerca de los conocimientos previos con los que ingresan los estudiantes al profesorado, es por ello que no tendrá ningún impacto en su desempeño durante el año, es decir, no llevará ninguna calificación ni determinará la aprobación del espacio curricular en el que se lleva a cabo. También es importante aclarar que fue implementada al inicio del ciclo lectivo y durante ese período no se han desarrollado aún los temas correspondientes al primer año en el espacio curricular antes mencionado.

5.4. El diagnóstico

A continuación se muestra la evaluación diagnóstica presentada a los estudiantes:

Resolver las siguientes actividades en una nueva hoja en la que figuren:

- Nombre
- Edad
- Colegio del que proviene
- Año de egreso
- Año de ingreso al profesorado

Justificar cada una de las respuestas dadas explicando los procesos o pasos que te llevaron a dar esas respuestas.

- **EJERCICIO 1:**
  a. Sabiendo que k es un número real, escribir la siguiente afirmación mediante expresiones matemáticas: *"k es menor o igual que* -1 *y mayor que* -3.
  b. Mencionar al menos 4 valores de k que hagan verdadera la expresión anterior.
  c. Representar gráficamente todos los posibles valores de k que cumplen con la condición anterior.
- **EJERCICIO 2:**
  Hallar el conjunto solución de la siguiente inecuación: $2(x-3) > 5x+9$
- **EJERCICIO 3:**
  Dada la siguiente inecuación: $4 - 2(3 - x) < 7 - 2(1 - x)$
  a. ¿Existe al menos un número real que la verifique?
  b. Hallar el conjunto de números reales que verifica la inecuación.
- **EJERCICIO 4:**
  Hallar el conjunto solución de la siguiente inecuación: $x^2 - 5x > -6$ y verificar para algunos elementos del conjunto.

- **EJERCICIO 5:**
  Sean las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y $g(x) = 1$
  a. Graficar ambas funciones en un mismo sistema de ejes cartesianos.
  b. ¿Para qué valores de x se tiene que $f(x) = g(x)$?
  c. Hallar analíticamente todos los valores de x para los cuáles $f(x) < g(x)$. **Verificar gráficamente las soluciones halladas.**
- **EJERCICIO 6:**
  Hallar el conjunto solución de la siguiente inecuación: $\dfrac{x-2}{x+1} > 2$
  Verificar para al menos 3 elementos del conjunto solución.

Con la información recabada en dicho diagnóstico, el trabajo se centra en el análisis de los errores que cometen los alumnos ingresantes y, mediante el uso de las funciones semióticas, tratar de explicar las posibles causas que originan esos errores. En cada ejercicio el estudiante debe explicitar, como si les explicara a sus compañeros, el desarrollo de la resolución del problema, mostrando las estrategias puestas en juego. Una vez detectados y analizados los errores cometidos por los estudiantes en los ejercicios del diagnóstico, se confecciona una propuesta de enseñanza cuyas sugerencias metodológicas se describen el Capítulo 7 y que apuntan a trabajar sobre las dificultades detectadas en dicha actividad.

En el primer cuatrimestre de Introducción al Cálculo se estudian los conjuntos numéricos, sus propiedades algebraicas y de orden para luego resolver ecuaciones e inecuaciones de manera algebraica. Posteriormente, en el segundo cuatrimestre de la misma asignatura, se trabaja con el análisis esquemático de funciones polinomiales, racionales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas. La intención que manifiesta la propuesta didáctica desarrollada en el Capítulo 7 es la de retomar el tema de inecuaciones trabajándose desde un enfoque gráfico debido a que, en esta segunda mitad del calendario académico, los alumnos realizan análisis gráfico de funciones.

5.5. Establecimiento de funciones semióticas

Según la TFS, el conocimiento se construye desde la actividad práctica, donde el dominio de las herramientas semióticas son un elemento básico, pues dichas herramientas, según Duval (2000), son esenciales para la actividad cognitiva. Las funciones semióticas se pueden interpretar, metafóricamente, como una correspondencia entre conjuntos, poniendo en juego tres componentes, tal como se muestra en la Figura 5.1.

Figura 5.1: Funciones semióticas.

Para Godino (2003), la noción de función semiótica es caracterizada mediante la pareja expresión/contenido o significante/significado que presupone una regla de correspondencia entre las componentes de dicha pareja y, por lo tanto, un acto de interpretación. Así, la comprensión de un objeto matemático por parte de los sujetos puede ser interpretada en términos de las funciones semióticas que éstos puedan establecer al poner en juego dicho objeto, ya sea como expresión o contenido de tales funciones.

Tal como se explicó en el Capítulo 2, tanto el objeto inicial como el final pueden estar constituídos por entidades primarias que desempeñan el papel de expresión o de contenido en las funciones semióticas, resultando, por tanto, diferentes tipos de tales funciones. Según el plano del contenido, se resumen en la Figura 5.2 los tipos de funciones semióticas.

Figura 5.2: Tipos de funciones semióticas según su contenido.

A continuación, se utiliza esta teoría para establecer las funciones semióticas en cada uno de los ejercicios del diagnóstico. Cabe aclarar que se propone una serie de funciones semióticas para cada ejericicio pero que no son únicas. Podrían establecerse otro tipo de funciones dependiendo del abordaje que se haga en cada ejercicio. Esta noción, la de función semiótica, permite proponer una interpretación del conocimiento y la comprensión del objeto que tienen los estudiantes en términos de las funciones que puede o no establecer. Las funciones semióticas que se establecen en los ejercicios se basan en la tipología realizada por Godino (2003) que fue explicada en la Sección 2.3.4. y se tratará de vincular con la categorización de los errores propuesta por Radatz (1979), detallada en la Sección 4.6.1.

El enunciado del Ejercicio 1 decía lo siguiente:

EJERCICIO 1:

a. Sabiendo que k es un número real, escribir la siguiente afirmación mediante expresiones matemáticas: *"k es menor o igual que -1 y mayor que -3."*.

b. Mencionar al menos 4 valores de k que hagan verdadera la expresión anterior.

c. Representar gráficamente todos los posibles valores de k que cumplen con la condición anterior.

En la Figura 5.3 se muestran las funciones semióticas que podrían establecerse en el ítem a. La función f_1 relaciona el enunciado del problema en lenguaje coloquial con los símbolos matemáticos necesarios para expresar la afirmación que propone el ítem. Las funciones f_2 y f_3 establecen la asociación entre las proposiciones enunciadas en lenguaje natural y las expresiones matemáticas simbólicas que las representan. La función f_4 establece una conjunción de proposiciones, es decir, los estudiantes deberían reconocer que las proposiciones 1 y 2 se cumplen en simultáneo y como consecuencia reconocer el símbolo matemático $\wedge$ para completar la tarea pedida en el primer ítem.

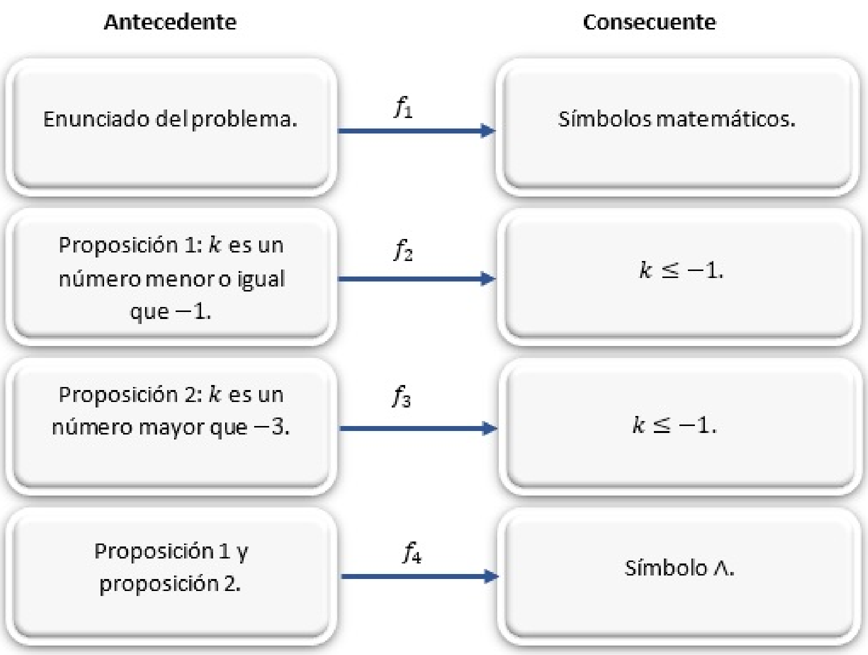


Figura 5.3: Funciones semióticas establecidas en el Ejercicio 1 a.

De las funciones establecidas en este primer ítem, f_1 es la de menor complejidad pero es elemental pues no sería posible reconocer el uso de un símbolo ni interpretar el sentido de una expresión que lo involucra sin conocer, en principio, cómo se lo denomina.

En cuanto al ítem b., en la Figura 5.4 se establece una única función semiótica: f_5, que relaciona los números reales elegidos por los estudiantes con las expresiones matemáticas expresadas en lenguaje simbólico, pues los números elegidos deben verificar simultáneamente las relaciones de desigualdad que escribieron.

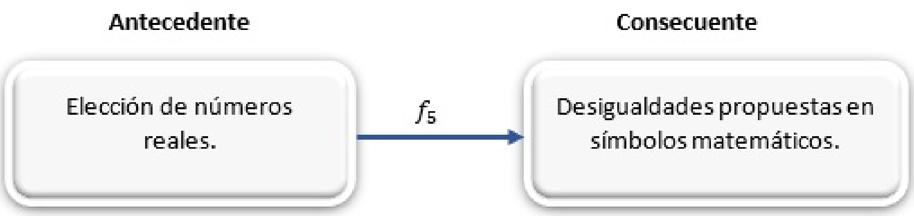


Figura 5.4: Función semiótica establecida en el Ejercicio 1 b.

En cuanto al ítem c. la Figura 5.5 muestra la función semiótica f_6. Esta función establece la vinculación entre todos los números reales que verifican las desigualdades planteadas y su representación en la recta nunérica. Aquí no sólo deben representar los números reales elegidos en el ítem b. sino que deben identificar todos los números reales que verifican las desigualdades presentadas en el ítem a. En este caso deben reconocer que dicha representación es mediante un intervalo de números reales.

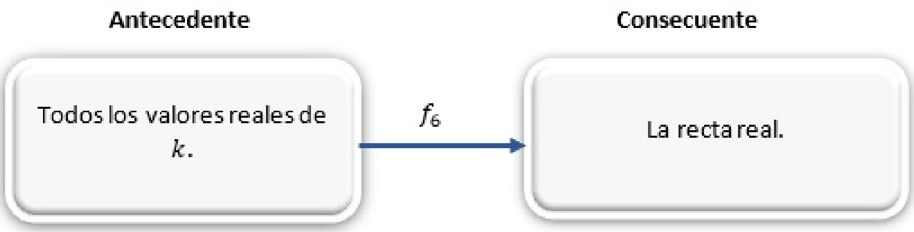


Figura 5.5: Función semiótica establecida en el Ejercicio 1 c.

Respecto a la clasificación de las funciones semióticas involucradas en este primer ejercicio, las funciones f_1, f_2, f_3 y f_6 son de tipo *lingüística*, en cambio f_4 es de tipo *conceptual* y *actuativa*, pues deben reconocer el concepto de conjunción de proposiciones, identificar los intervalos que intervienen, para luego representar la intersección entre ellos. La función f_5 es de tipo *actuativa* y f_6, además de ser de tipo *actuativa* tambíen es de tipo *lingüística*.

En caso de establecer una posible relación entre las funciones semióticas con la clasificación de los errores propuesta por Radatz (1979) mencionada en la Sección 4.6, se podría decir que, una posible falta de establecimiento de funciones semióticas de tipo *linguístico* o establecimiento incorrecto de ellas, se podría vincular directamente a la categoría "Errores debido a la dificultad del lenguaje". Es esperable que los estudiantes que tienen dificultades para leer, por ejemplo, un símbolo matemático como puede ser $\geq$, arrastren esas dificultades hacia el resto de las actividades propuestas.

Se establecen ahora las funciones semióticas referidas al Ejercicio 2, cuya consigna era la siguiente:

EJERCICIO 2:

Hallar el conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$2(x-3) > 5x+9$$

Para este ejercicio se podría establecer una función semiótica f_1 que es de tipo *actuativa* y que se puede observar en la Figura 5.6. Esta función relaciona la inecuación presentada en el ejercicio con su resolución. Para ello, es necesario que los estudiantes reconozcan y apliquen correctamente las propiedades algebraicas y de orden de los números reales y luego puedan establecer el conjunto solución. Además, la función identificada es del tipo *actuativa* y *proposicional*, dado que en el proceso de resolución se deberían reconocer y aplicar algunas proposiciones para llegar a un resultado correcto. Por ejemplo, es necesario reconocer la propiedad distributiva del producto respecto de la suma, la propiedad asociativa y las propiedades de orden de los números reales. También, al despejar la variable en la desigualdad, deberían reconocer algunas propiedades, como por ejemplo, que al sumar a ambos miembros de una desigualdad una expresión, no cambia el sentido de la desigualdad pero que, al multiplicar ambos miembros de una desigualdad por un número, deberían reconocer que si dicho número es positivo, la desigualdad se conserva, en cambio si es negativo, deberán invertir el sentido de la desigualdad. Y si es cero el valor por el que se multiplica, la desigualdad se transforma en una igualdad por ser cero el elemento absorbente para el producto.

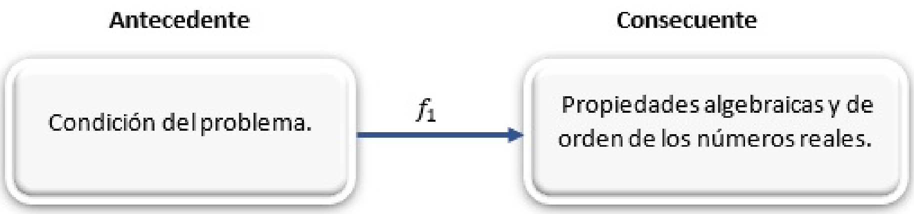


Figura 5.6: Función semiótica establecida en el Ejercicio 2.

En cuanto a la relación con las categorías de errores, la falta de establecimiento de esta función o el establecimiento incorrecto, podría vincularse a la categoría denominada “Errores debido a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos”, pues no reconocer o aplicar correctamente propiedades algebraicas y de orden, pueden llevar a cometer errores no sólo de operatoria sino también de interpretación.

Respecto del Ejercicio 3, recordemos que su consigna era la siguiente:

EJERCICIO 3:

Dada la siguiente inecuación: $4 - 2(3 - x) < 7 - 2(1 - x)$

a. ¿Existe al menos un número real que la verifique?.

b. Hallar el conjunto de números reales que verifica la inecuación.

Las funciones semióticas para este ejercicio se presentan en la Figura 5.7. La función f_1, establece la relación entre la inecuación presentada y la elección de los números reales que la verifiquen. En este caso, cualquiera sea la elección que hagan, verficará la inecuación pues el conjunto solución es toda la recta real. Una vez que los estudiantes elijan los valores reales deberán sustituir dichos valores en la inecuación presentada y realizar las operaciones. Allí se establece la función f_2 en la cual deberían reconocer las propiedades algebraicas y de orden de los números reales para poder operar correctamente con ellos. Por último, la función f_3 relaciona las propiedades algebraicas y de orden con la resolución de la inecuación, dado que para poder hallar el conjunto solución deberán resolver la inecuación aplicando las propiedades antes mencionadas y realizar una interpretación de los resultados obtenidos.

En este caso, las tres funciones son de tipo *actuativa*. Sin embargo, la función f_3 es también una función de tipo *argumentativa*, dado que al poder establecer al menos un número real que verifique la desigualdad deberían poder interpretar y argumentar que no es sólo uno el que la verifica sino todo número real.

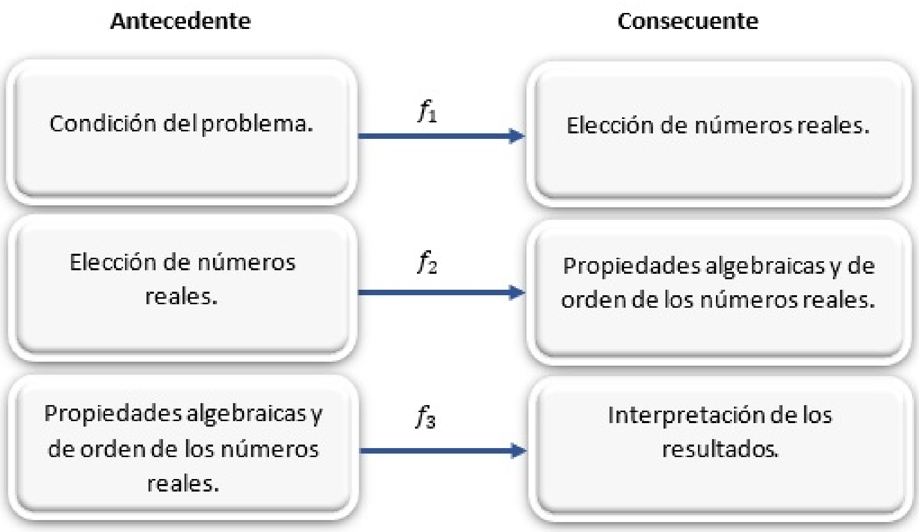


Figura 5.7: Funciones semióticas establecidas en el Ejercicio 3.

La falta de establecimiento o establecimiento incorrecto de esta función f_3 se podría vincular nuevamente con la categoría definida como “Errores debido a la dificultad del lenguaje”, pero también podría asociarse a la categoría definida como “Errores debido a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos”, pues la lectura incorrecta de la inecuación resultante del proceso de resolución algebraico o el mal uso de propiedades algebraicas y de orden de los números reales podría llevar a errores en la respuesta, ya sea de interpretación o de operatoria.

En cuanto al Ejercicio 4, se recuerda que la consigna decía:

EJERCICIO 4:

Hallar el conjunto solución de la siguiente inecuación: $x^2 - 5x > -6$ y verificar para algunos elementos del conjunto.

Las funciones semióticas que podrían establecerse en este ejercicio se presentan en la Figura 5.8. La función f_1 relaciona la expresión algebraica con una inecuación cuadrática. Dicha inecuación cuadrática debe ser resuelta y para ello se hace necesario elaborar alguna estrategia de resolución, pues, así como es presentada, no es posible despejar la variable x. La función f_2 establece una relación entre la inecuación y una de las posibles estrategias de resolución que podría ser la de vincular la desigualdad planteada con otra equivalente, $x^2-5x-6 > 0$ y estudiarla desde el punto de vista funcional. Es decir, se establece una relación entre el conjunto solución de la inecuación y el conjunto de positividad de la función cuadrática interviniente. Para ello es necesario que se establezca la función f_3 que vincula el conjunto de positividad de una función con las raíces o ceros de dicha función, pues se necesitan los ceros para poder construir los intervalos donde la función es positiva o negativa. Una vez hallados los ceros de la función cuadrática, se define la función f_4 que permitirá, con la información obtenida, poder hallar los intervalos de la recta real y estudiar el signo de la función en ellos. Una vez que se estudia el signo de la función cuadrática en cada intervalo abierto en los que intervienen los ceros, la función f_5 establece la relación de dichos intervalos con el conjunto solución. Cabe aclarar que estas funciones fueron establecidas tomando como ejemplo un modo de resolución. Dado que los ejercicios pueden abordarse con distintas estrategias, el establecimiento de las funciones semióticas para cada variante no necesariamente será el mismo.

Teniendo en cuenta este proceso explicado que comúnmente coincide con la resolución planteada por el docente en la cursada, la función f_1 es de tipo *conceptual* pues el problema consiste en resolver una inecuación cuadrática que es muy distinto a resolver una ecuación cuadrática. La función f_2 es de tipo *actuativa* pues deberán interpretar la inecuación cuadrática, decidir y llevar a cabo un proceso de resolución de la inecuación. Las funciones f_3 y f_4 son de tipo *conceptual* y *acuativa* dado que deben recordar la definición de raíz o ceros de una función y la manera de calcularlos para luego poder establecer los intervalos en los que la función interviniente es positiva. Por último, la función f_5 es de tipo *proposicional* pues, definidos los ceros de la función cuadrática, deberán reconocer o describir en qué intervalo o intervalos la función cuadrática interviniente es positiva y así poder establecer una relación entre esto y el conjunto solución que deben hallar.

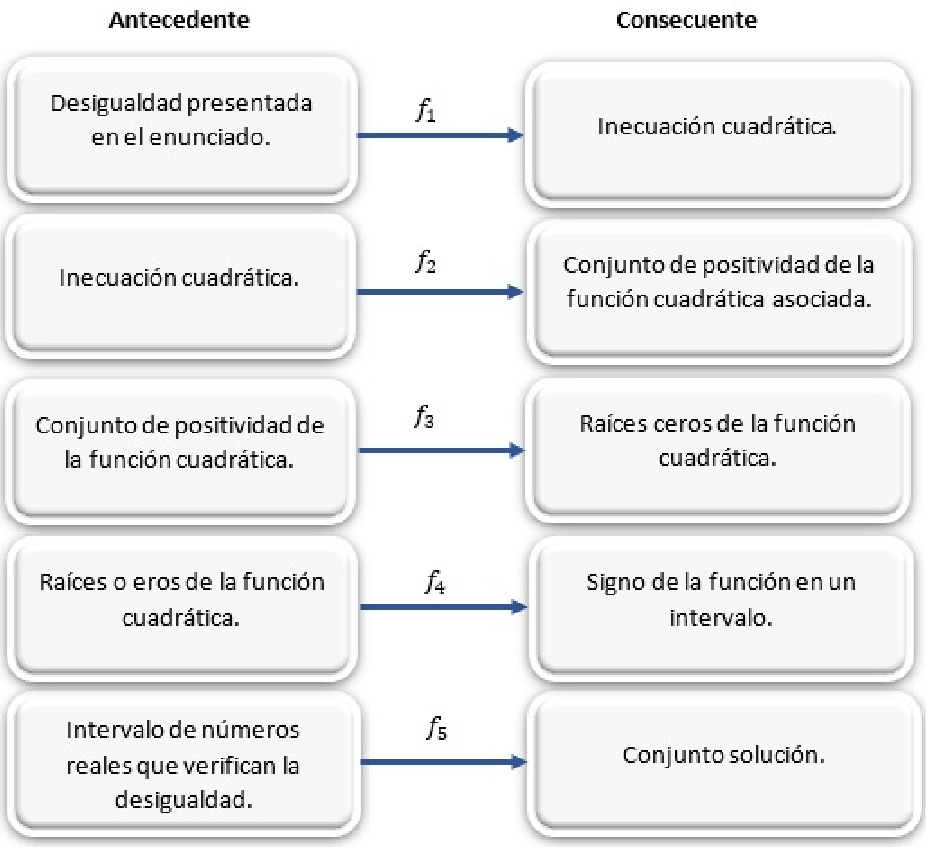


Figura 5.8: Funciones semióticas establecidas en el Ejercicio 4.

La falta de establecimiento de las funciones previamente definidas podrían llevar a mecanismos automáticos de resolución, como ser, aplicar la fórmula de la resolvente para hallar las raíces de una ecuación cuadrática (pues generalmente se relaciona a la función cuadrática directamente con esa fórmula) y no poder establecer relación entre ello y la inecuación planteada. Este hecho podría vincularse con la categroría de errores definida como "Errores debido a la rigidez de pensamiento".

En cuanto al Ejercicio 5, su consigna era:

EJERCICIO 5:

Sean las funciones $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = 1$

a. Graficar ambas funciones en un mismo sistema de ejes cartesianos.

b. ¿Para qué valores de x se tiene que $f(x) = g(x)$?

c. Hallar analíticamente todos los valores de x para los cuáles $f(x) < g(x)$.

Verificar gráficamente las soluciones halladas.

Se establecen en la Figura 5.9 las posibles funciones semióticas para este ejercicio. La función f_1 establece que se reconozcan y grafiquen en un mismo sistema de ejes cartesianos las funciones dadas en el enunciado. Se trata de dos funciones relativamente simples de graficar. La función f_2 relaciona las funciones mediante una igualdad. La función f_3 interpreta esa igualdad de funciones como una ecuación que deben resolver para dar respuesta al ítem b. La función f_4 relaciona ambas funciones con una desigualdad, en este caso, compara $f(x) < g(x)$. La función f_5 propone el planteo de la inecuación y su resolución para poder dar respuesta parcial al ítem c. Por último, la función f_6 vincula todo el proceso llevado a cabo hasta el momento, pues para obtener el conjunto solución se indica la verificación gráfica. De no establecerse correctamente los procesos anteriores es probable que no puedan dar respuesta al ítem c. o bien la respuesta no sea correcta.

Las funciones f_1, f_3 y f_5 son de tipo *actuativa* pues las acciones a llevar a cabo son graficar, resolver una ecuación y resolver una inecuación, respectivamente. Estas dos últimas funciones además son de tipo *proposicional* pues para resolver tanto la ecuación como la inecuación deberán aplicar propiedades algebraicas y de orden de los números reales. En cambio las funciones f_2 y f_4 son de tipo *lingüística*, dado que el objeto final es una expresión que deben interpretar para luego resolver. La función f_6 es de tipo *argumentativa* pues deberían reunir todo el proceso llevado a cabo y construir una respuesta que sea acorde y coherente con todo lo trabajado. Es decir, el conjunto solución que se propone en la respuesta debe poder verse reflejado en la gráfica de las funciones realizada y debe coincidir con el proceso algebraico llevado a cabo durante la resolución de la inecuación planteada en el ítem b.

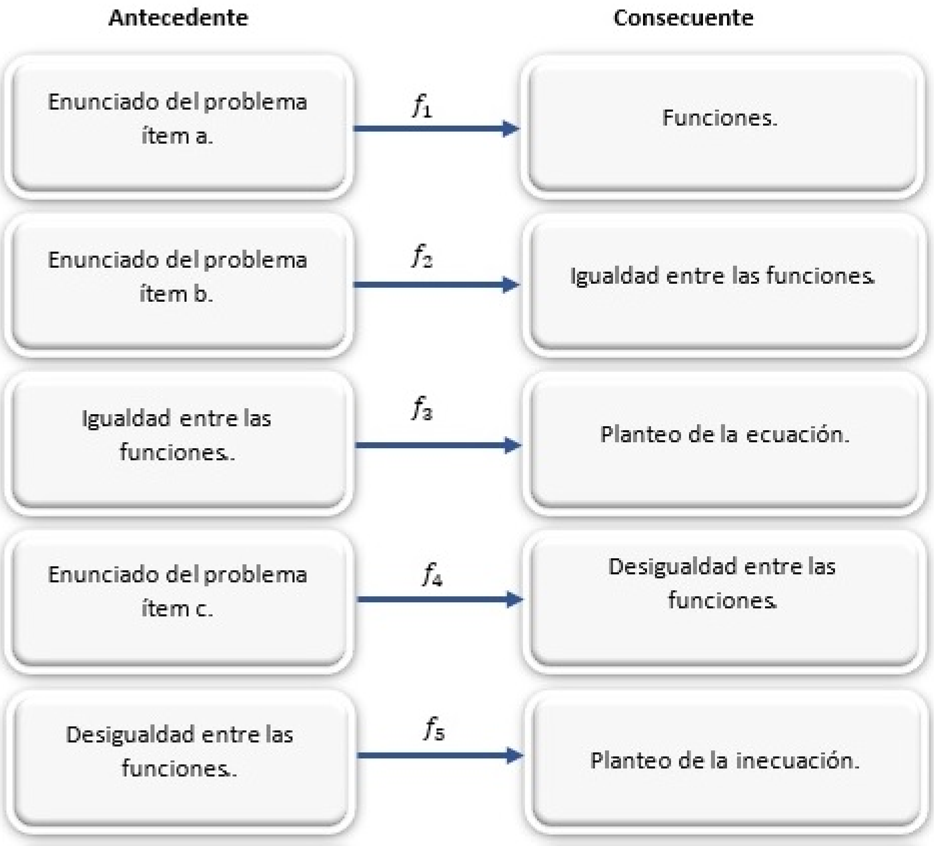


Figura 5.9: Funciones semióticas establecidas en el Ejercicio 5.

El no establecimiento de estas funciones podría asociarse a la categoría definida por Radatz (1979) como "Errores debido a dificultades para obtener información espacial.

Por último, se recuerda que el enunciado del Ejercicio 6 decía lo siguiente:

EJERCICIO 6:

Hallar el conjunto solución de la siguiente inecuación: $\frac{x-2}{x+1} > 2$.

Verificar para al menos 3 elementos del conjunto solución.

En la Figura 5.10 se observan las funciones semióticas establecidas para este ejercicio. Se identifican sólo dos funciones semióticas de tipo *actuativas* dado que la consigna es muy explícita. Además, la función f_1 es de tipo *proposicional* pues deberían recordar las propiedades de orden de los números reales para poder resolver la inecuación planteada.

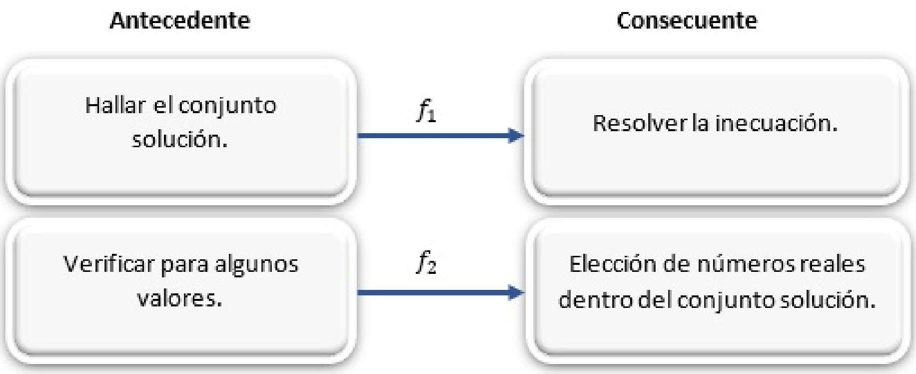


Figura 5.10: Funciones semióticas establecidas en el Ejercicio 6.

El establecimiento incorrecto de estas funciones se vincula con la categoría de errores denominada “Errores debido a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos”.

Hasta aquí se ha descripto la evaluación diagnóstica y la utilización de funciones semióticas para analizar cada uno de los ejercicios propuestos en dicha actividad. Estas funciones permiten entender cómo los estudiantes construyen los significados durante las prácticas. Para profundizar respecto de este tema, se han desglosado los ejercicios definiendo funciones semióticas que el estudiante tendría que establecer para poder resolver los ejercicios correctamente. El establecimiento deficiente de funciones semióticas se manifiesta en prácticas calificadas como erróneas. Estos errores, asociados al incorrecto establecimiento de algunos tipos de funciones semióticas, fueron ubicados o relacionados con las distintas categorías. En el Capítulo siguiente, se identificarán puntualmente los errores cometidos por los estudiantes en la resolución de los ejercicios de la evaluación diagnóstica, para poder agruparlos específicamente en las categorías descriptas en la Sección 4.6.1 y analizarlos con la finalidad de entender las causas que los producen y ofrecer, en el Capítulo 7 una propuesta de enseñanza y reflexiones metodológicas que atiendan esta problemática.

Capítulo 6

Resultados de la prueba diagnóstica

6.1. Corrección de los trabajos

Una vez revisados todos los trabajos producidos por los 28 alumnos, se procede a la corrección de los ejercicios. Una primera corrección arrojó resultados que fueron agrupados en cuatro categorías: BIEN, que se señala con **B** y hace referencia al ejercicio bien resuelto, REGULAR, que refiere al ejercicio que está parcialmente bien resuelto y se señala con **R**, MAL, señalado con **M** que obviamente hace referencia al ejercicio mal resuelto y por último, NO RESUELTO que refiere a aquellos que no resolvieron la actividad y son simbolizados con **NR**. Esta primera categorización se ve reflejada en el Cuadro 6.1. A su vez, los ejercicios parcialmente bien resueltos, los señalados con **R**, se subdividieron en tres categorías: **R TIPO 1** indica que resuelve bien pero omite la respuesta, **R TIPO 2** indica que resuelve bien pero responde mal y **R TIPO 3** indica que el ejercicio está incompleto, es decir, no lo termina de resolver. Por otro lado, también se subdivide a los ejercicios mal resueltos utilizando dos categorías: **M TIPO 1** indica que no muestra el procedimiento que lo lleva a responder mientras que **M TIPO 2** establece que, si bien indica la respuesta, comete errores.

ALUMNO	EJ 1	EJ 2	EJ 3	EJ 4	EJ 5	EJ 6
1	B	R TIPO 1	R TIPO 2	R TIPO 3	NR	M TIPO 2
2	M TIPO 2	R TIPO 2	NR	NR	NR	NR
3	M TIPO 2	NR	M TIPO 2	NR	NR	NR
4	M TIPO 2	M TIPO 2	M TIPO 2	NR	NR	NR
5	B	NR	NR	NR	NR	NR
6	B	M TIPO 2	M TIPO 2	NR	M TIPO 2	NR
7	R TIPO 2	M TIPO 2	NR	NR	NR	NR
8	R TIPO 2	R TIPO 2	M TIPO 2	NR	M TIPO 2	M TIPO 2
9	B	M TIPO 2	R TIPO 2	NR	NR	M TIPO 2
10	M TIPO 2	M TIPO 2	M TIPO 2	M TIPO 2	M TIPO 1	NR
11	M TIPO 2	M TIPO 2	M TIPO 2	M TIPO 2	NR	NR
12	M TIPO 2	M TIPO 2	NR	M TIPO 2	NR	NR
13	R TIPO 2	M TIPO 2	NR	NR	NR	NR
14	B	M TIPO 2	R TIPO 2	M TIPO 2	NR	M TIPO 2
15	B	M TIPO 1	M TIPO 2	R TIPO 2	M TIPO 2	M TIPO 2
16	M TIPO 2	M TIPO 2	M TIPO 2	M TIPO 2	NR	NR
17	B	M TIPO 2	M TIPO 2	NR	M TIPO 2	M TIPO 2
18	B	R TIPO 1	NR	NR	NR	M TIPO 2
19	B	M TIPO 2	R TIPO 1	M TIPO 2	NR	NR
20	B	M TIPO 2	R TIPO 3	R TIPO 3	M TIPO 1	NR
21	B	R TIPO 1	R TIPO 1	M TIPO 2	M TIPO 1	M TIPO 2
22	R TIPO 1	B	B	B	NR	M TIPO 2
23	B	R TIPO 1	R TIPO 2	M TIPO 1	M TIPO 2	M TIPO 2
24	B	M TIPO 1	M TIPO 1	M TIPO 1	NR	M TIPO 1
25	B	R TIPO 2	M TIPO 2	NR	NR	NR
26	B	R TIPO 1	R TIPO 2	M TIPO 2	M TIPO 1	M TIPO 2
27	B	M TIPO 1	B	R TIPO 2	M TIPO 1	M TIPO 1
28	B	M TIPO 2	R TIPO 1	NR	NR	NR

Cuadro 6.1: Corrección de las actividades: primera categorización.

Con los resultados expuestos en el Cuadro 6.1 se realiza un primer análisis descriptivo de los errores. Para mostrar de manera más directa esta corrección, se cuantificaron los datos según las categorías expuestas anteriormente y se analizaron discriminados por ejercicio.

En primer lugar observamos en la Figura 6.1 la cantidad de errores cometidos en el **Ejercicio 1** según esta primera categorización. Se observa que 17 de los 28 estudiantes evaluados, que representa el 60.7 %, responden en forma correcta la primera consigna propuesta. Esto parece indicar que la mayoría de los alumnos reconoce las desigualdades presentadas en lenguaje coloquial, escribe correctamente las inecuaciones correspondientes y verifica dichas desigualdades para algunos valores. También estos estudiantes han representado correctamente esta situación en la recta numérica. En cambio, 7 de los 28 alumnos, o sea, el 25 %, si bien han respondido a la consigna lo han hecho de manera errónea. Los 4 estudiantes restantes, lo que representa el 14,3 %, ha resuelto bien pero omitieron la respuesta o han respondido mal.

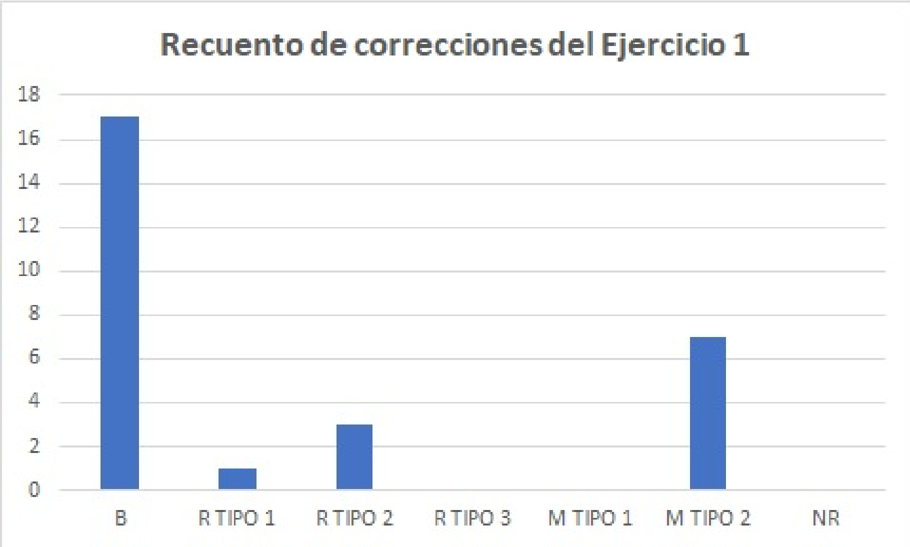


Figura 6.1: Cantidad de errores del Ejercicio 1.

Con respecto al **Ejercicio 2**, tal como se observa en la Figura 6.2, 17 de los 28 estudiantes resuelve mal la inecuación lineal, esto representa el 60,7 % mientras que 8 de 28 estudiantes, o sea, el 28,6 % procede relativamente bien pero omite la respuesta o bien responde mal. Tan sólo 2 alumnos, el 7 %, ha dejado el ejercicio sin resolver.

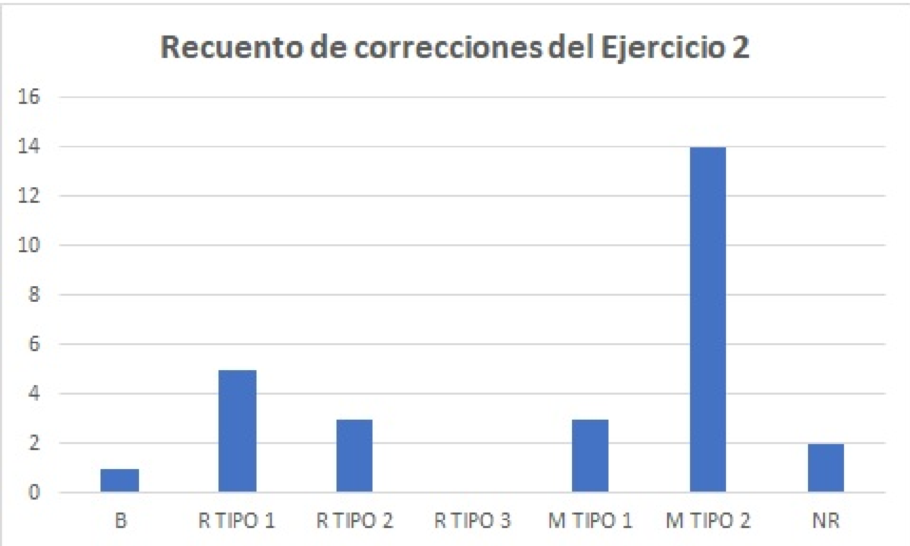


Figura 6.2: Cantidad de errores del Ejercicio 2.

En la Figura 6.3, se presentan los resultados obtenidos respecto al **Ejercicio 3**. Se observa nuevamente una mayor cantidad de ejercicios mal resueltos. En este caso, 11 de 28 alumnos, lo que representa el 39,2 %, ha respondido mal. En cambio 9 de los 28 alumnos, lo que representa un 32,1 %, han procedido relativamente bien, encontrándose 3 alumnos que omitieron la respuesta, 5 que han respondido mal y sólo 1 que ha dejado el ejercicio incompleto. Esto último pareciera indicar que no han podido o sabido interpretar de manera correcta la conclusión obtenida. Cabe mencionar, que el número de alumnos que no ha resuelto la actividad se ha incrementado respecto de los ejercicios anteriores, representando el 21,5 % de los casos.

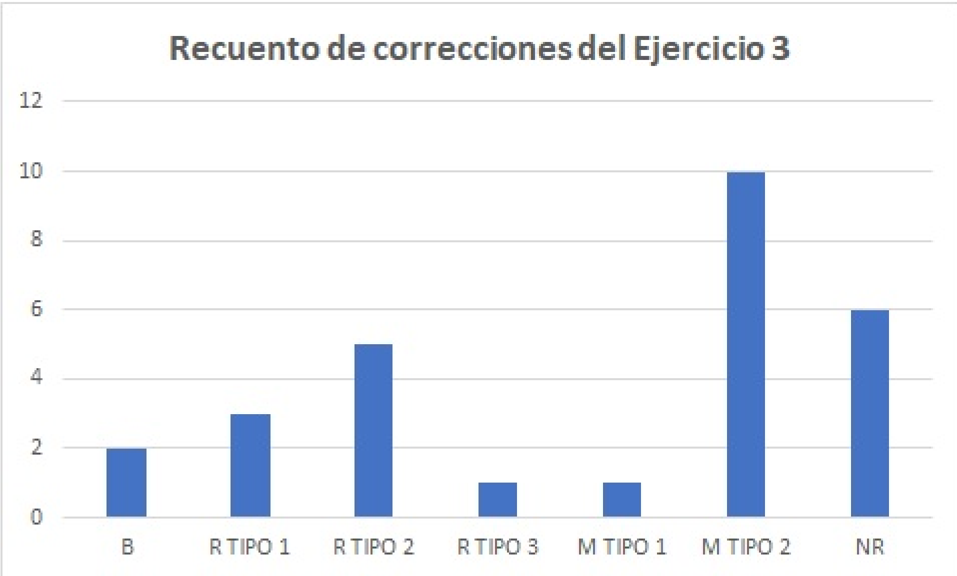


Figura 6.3: Cantidad de errores del Ejercicio 3.

En la Figura 6.4 se pueden observar los resultados del **Ejercicio 4**. Con respecto a este ejercicio, en el que debían resolver una inecuación cuadrática, nuevamente llama la atención el crecimiento del número de casos que no han resuelto el problema. Se puede observar que 13 de los 28 alumnos, lo que representa el 46,4 %, es decir, prácticamente la mitad de los alumnos, no han sabido cómo encarar siquiera la resolución. Quienes sí han abordado la resolución pero procedieron mal o no completaron el procedimiento son 10 de los 28 alumnos, lo que representa el 35,7 %, y tan sólo 4 han encarado la resolución relativamente bien pero han dejado inconcluso el problema, responden mal o directamente omiten la respuesta.

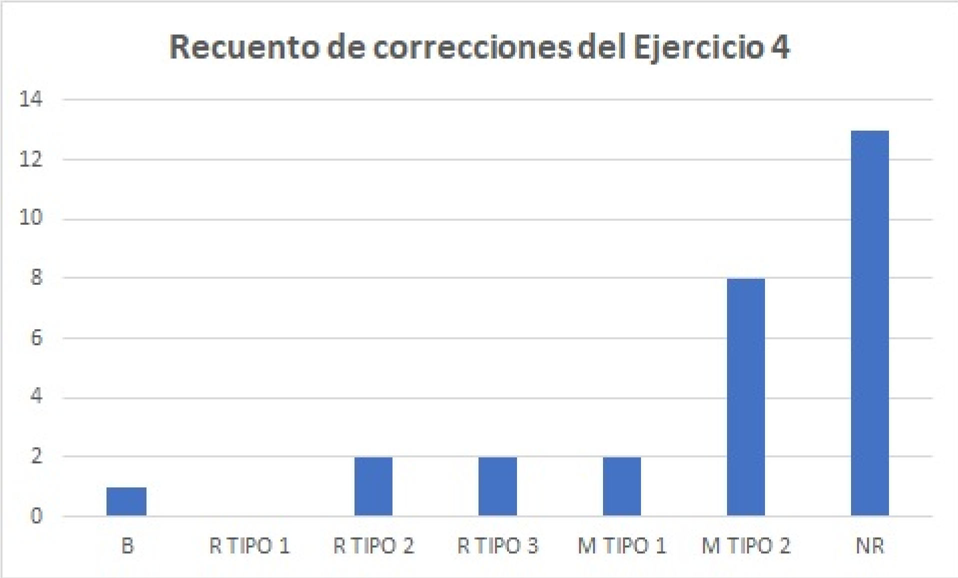


Figura 6.4: Cantidad de errores del Ejercicio 4.

En lo que respecta al **Ejercicio 5**, se puede observar en la Figura 6.5, que un alto porcentaje de alumnos, concretamente el 64,3 %, no ha resuelto el ejercicio y quienes lo han intentado lo hicieron mal.

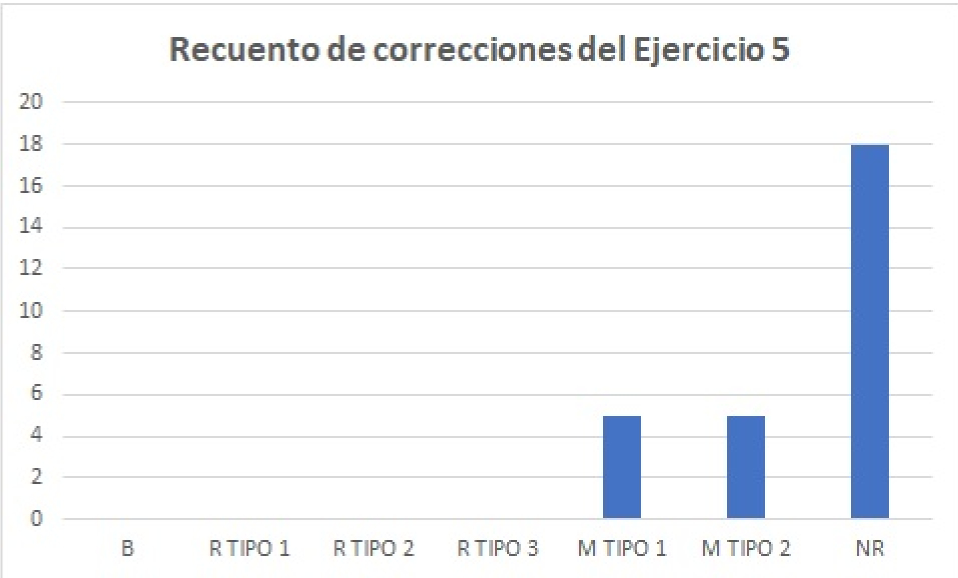


Figura 6.5: Cantidad de errores del Ejercicio 5.

Para finalizar, en la Figura 6.6, se muestran los resultados obtenidos en el **Ejercicio 6**. Se puede observar y es llamativo que ningún alumno ha resuelto correctamente el problema, que 13 de los 28 alumnos, lo que representa el 46,4 %, lo han resuelto mal y el resto directamente no lo ha resuelto.

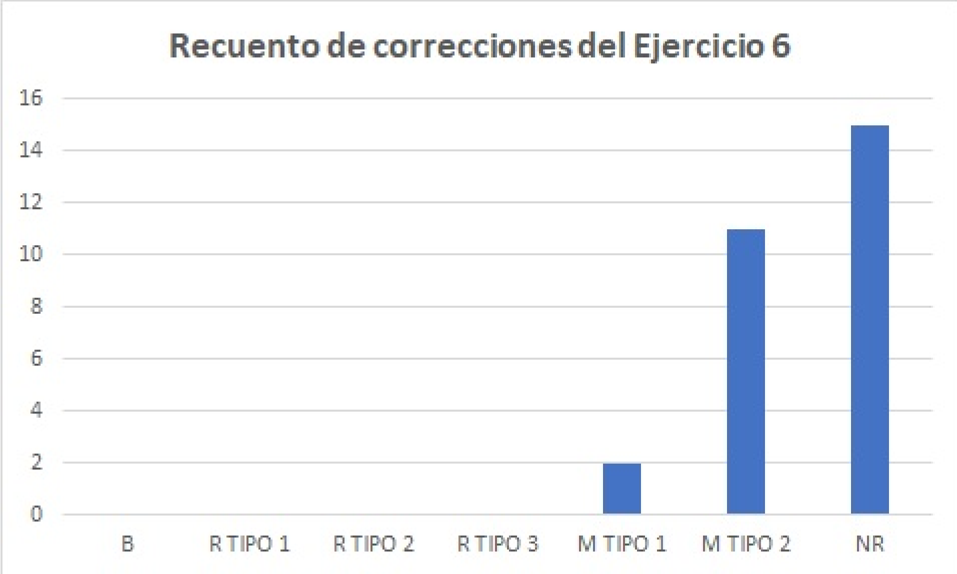


Figura 6.6: Cantidad de errores del Ejercicio 6.

De este análisis descriptivo se observa que, a medida que se iban complejizando las actividades, el número de estudiantes que no resolvían los ejercicios aumentaba también. Particularmente, los últimos dos ejercicios prácticamente no han sido abordados correctamente, ni siquiera de manera parcial.

6.2. Errores detectados en la prueba diagnóstica

El objetivo de esta sección es el de, mediante un análisis cualitativo, realizar un listado de los errores detectados en la resolución de los ejercicios con el fin de agruparlos luego, en la Sección 6.3, según las categorías propuestas por Radatz (1979), descriptas en la Sección 4.6. En dicho análisis se diferencian los tipos de errores cometidos en cada uno de los ejercicios en relación con las desigualdades e inecuaciones. Cabe aclarar que la producciones completas de los estudiantes están disponibles para su consulta en el Apéndice A. Producciones de los alumnos.

6.2.1. Errores detectados en la resolución del Ejercicio 1

Luego de la corrección, se han identificado los siguientes errores respecto del Ejercicio 1.

- **Mal uso de las expresiones matemáticas.**

Aquí se observan errores de notación matemática. Como, por ejemplo, el uso incorrecto de los símbolos $>; <; \leq; \geq$. Dos ejemplos de esto se encuentran en las Figuras 6.7 y 6.8.

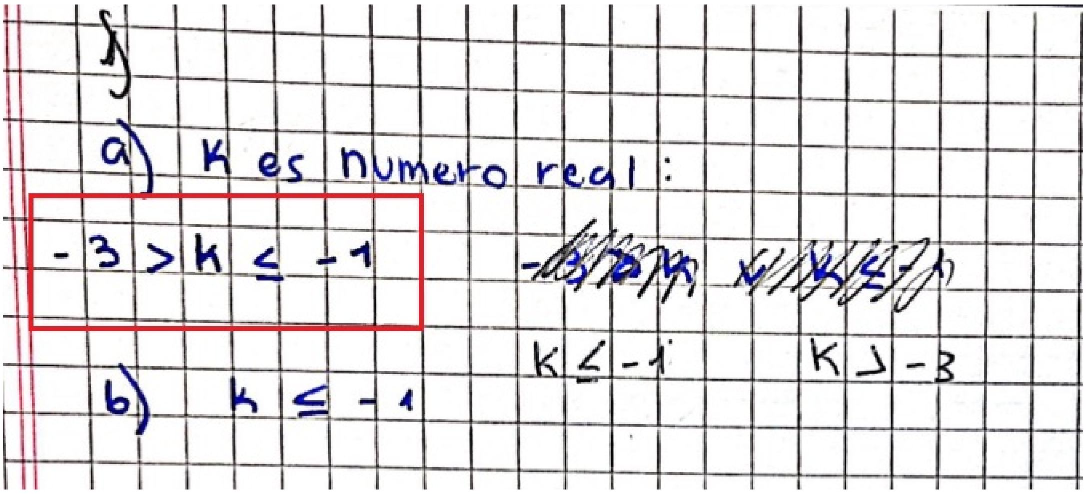


Figura 6.7: Respuesta del Alumno 2 al Ejercicio 1.

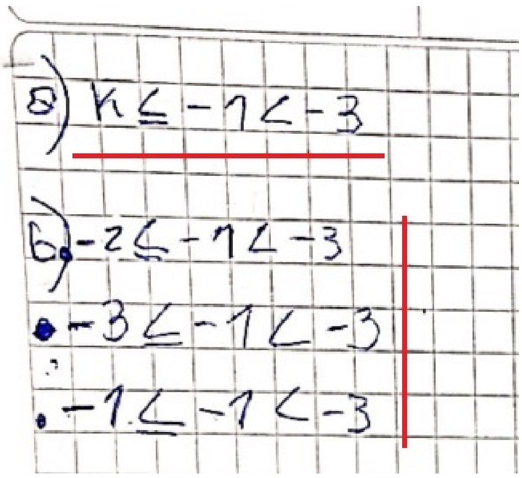


Figura 6.8: Respuesta del Alumno 4 al Ejercicio 1.

- **Error de lectura de los símbolos.**

En este caso, confunden el símbolo de mayor o igual con el de menor o igual, es decir, lo leen en sentido contrario. Ejemplo de esto puede verse en la Figura 6.9.

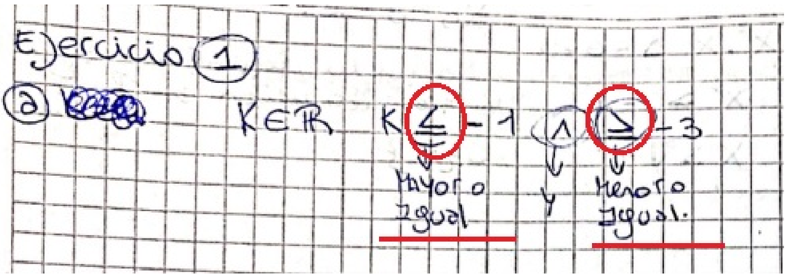


Figura 6.9: Respuesta del Alumno 10 al Ejercicio 1.

- **Error al ubicar los resultados en la recta numérica.**

Aquí se observan dos errores de distinta naturaleza. En la Figura 6.10, un alumno ubica a los números negativos a la derecha de cero. En la Figura 6.11, otro alumno reduce las soluciones del problema ubicando sólo los números racionales con una cifra decimal luego de la coma.

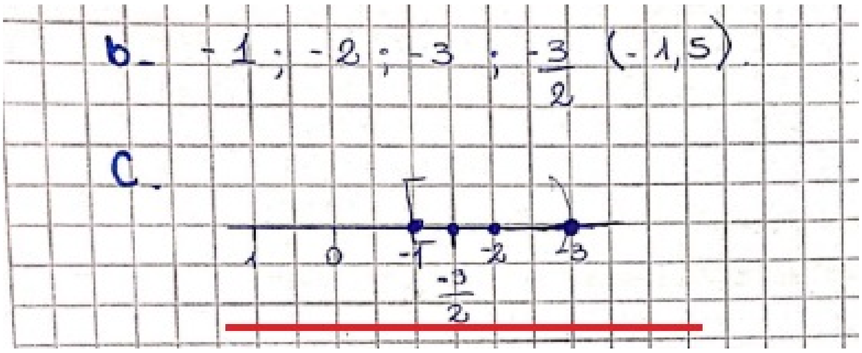


Figura 6.10: Respuesta del Alumno 7 al Ejercicio 1.

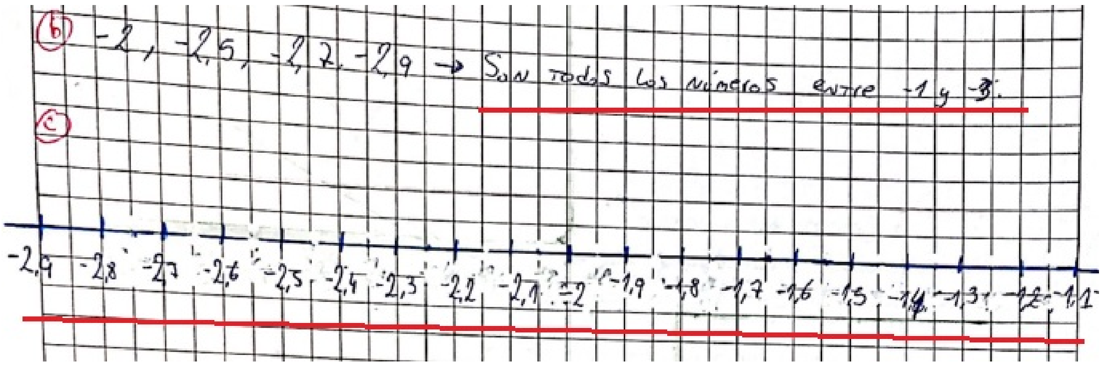


Figura 6.11: Respuesta del Alumno 8 al Ejercicio 1.

6.2.2. Errores detectados en la resolución del Ejercicio 2

Durante la corrección del Ejercicio 2 se han identificado los siguientes tipos de errores.

- **Intentan resolver el problema como si se tratase de una ecuación.**

En la Figura 6.12 se puede observar cómo el alumno toma cada miembro de la desigualdad y lo trabaja como si se tratase de una ecuación. Se observa que utiliza el conectivo lógico de equivalencia para expresar el primer miembro de la inecuación como una igualdad que no tiene ningún sentido, pero que es resuelta como si estuviese igualada a cero. Con el segundo miembro de la desigualdad ocurre lo mismo pero sólo deja escrita la igualdad sin intentar despejar la variable.

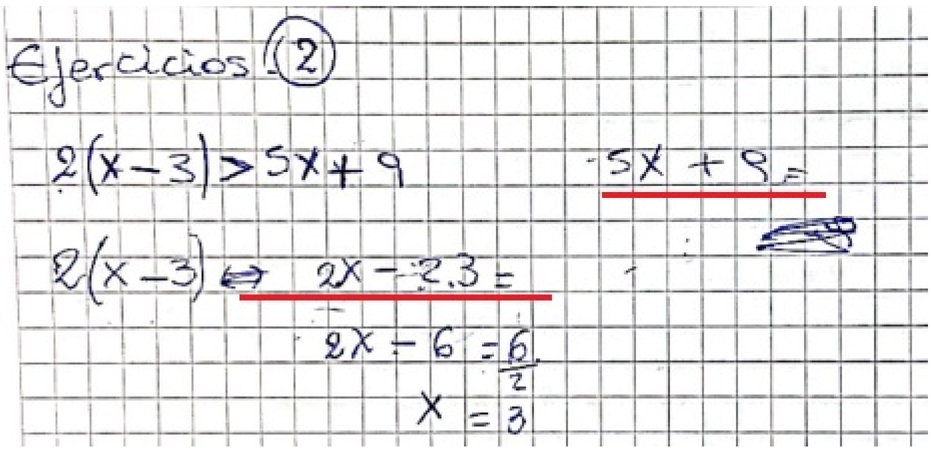


Figura 6.12: Respuesta del Alumno 4 al Ejercicio 2.

- **No invierten el sentido de la desigualdad cuando multiplican o dividen por un número negativo.**

Este es uno de los casos más observados. En los ejemplos presentados en las Figuras 6.13 a 6.17 se puede ver cómo, en todos los casos, dividen ambos miembros de la desigualdad por -3 y en ninguno de ellos invierten el sentido de la desigualdad.

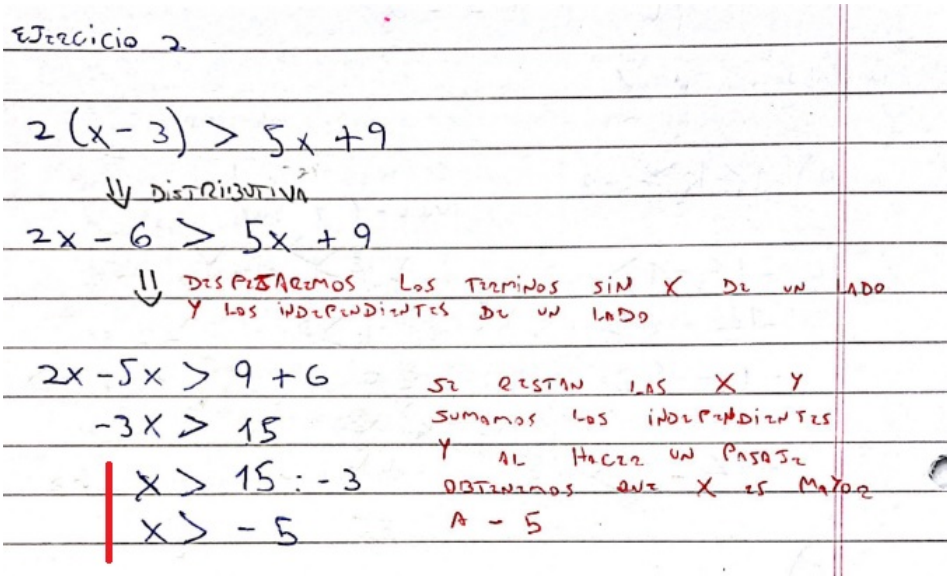


Figura 6.13: Respuesta del Alumno 16 al Ejercicio 2.

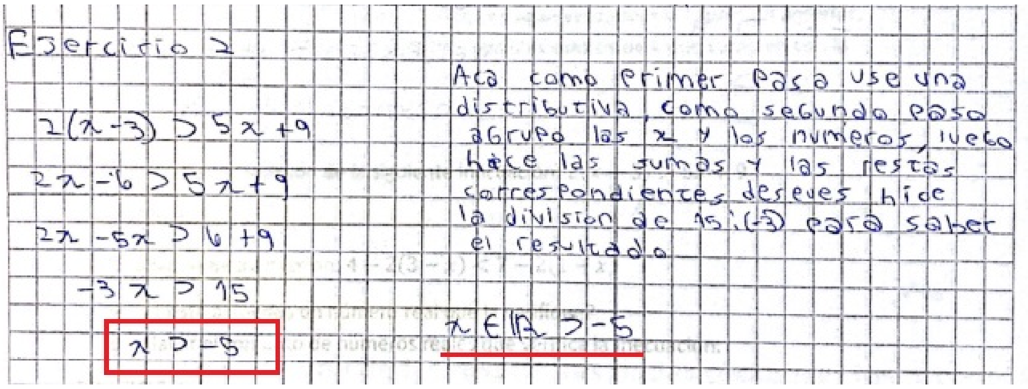


Figura 6.14: Respuesta del Alumno 9 al Ejercicio 2.

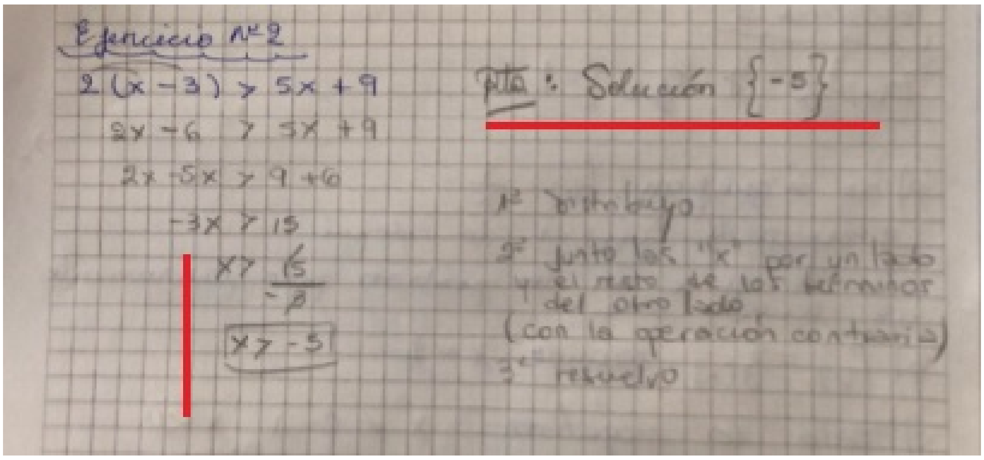


Figura 6.15: Respuesta del Alumno 20 al Ejercicio 2.

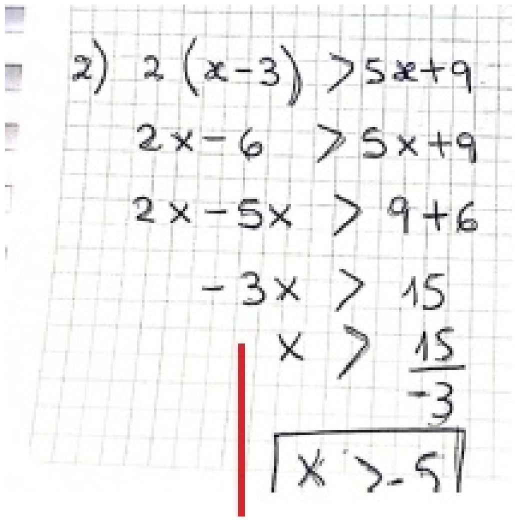


Figura 6.16: Respuesta del Alumno 11 al Ejercicio 2.

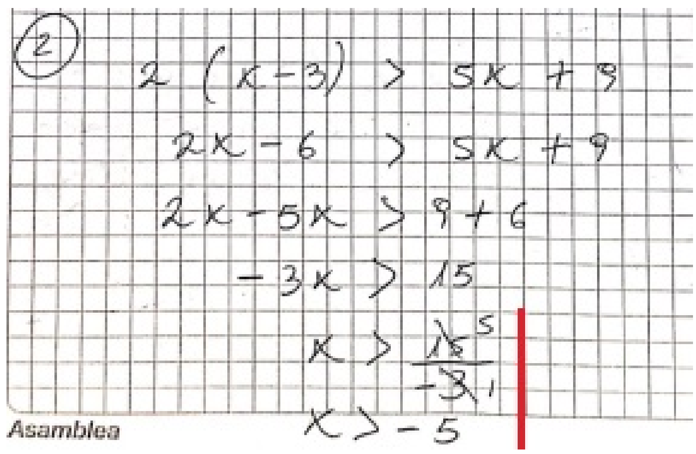


Figura 6.17: Respuesta del Alumno 14 al Ejercicio 2.

- **Errores en el despeje y/o en las operaciones.**

Se pueden observar varios casos. En la Figura 6.18 el alumno realiza mal los pasajes de términos y cuando quiere reagrupar para calcular no separa en términos. En la Figura 6.19 se ve que despeja mal reiteradas veces y aplica de manera incorrecta la propiedad distributiva del producto respecto de la suma. En la Figura 6.20 se observa que el alumno omite un signo al aplicar la propiedad distributiva y pareciera que, como consecuencia de ello, despeja mal uno de los términos. Por último, en la Figura 6.21 hay un error de despeje que parece debido a una distracción, dado que fue el único error cometido.

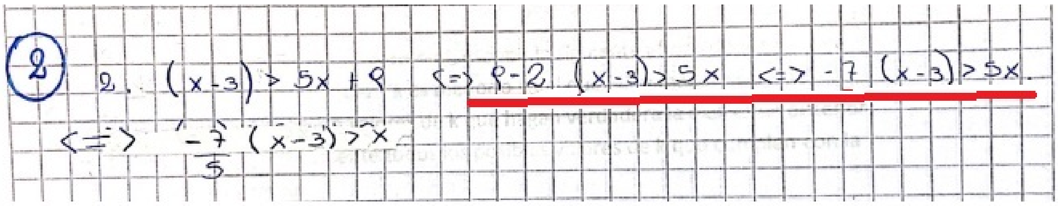


Figura 6.18: Respuesta del Alumno 7 al Ejercicio 2.

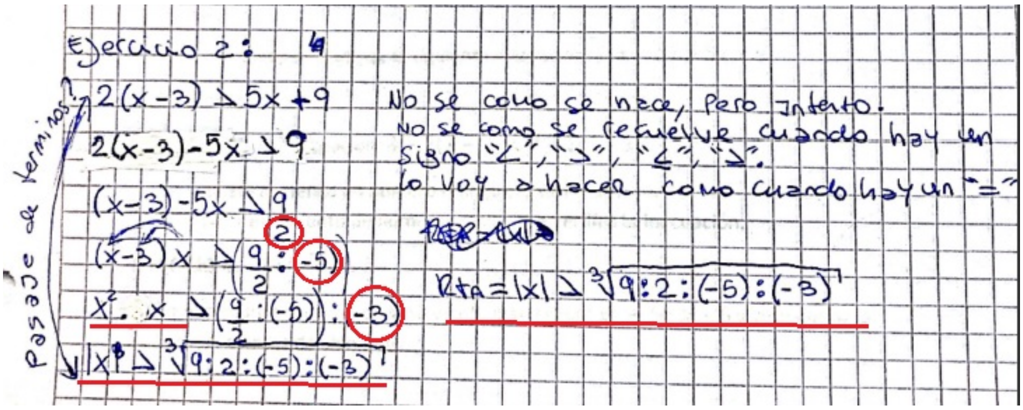


Figura 6.19: Respuesta del Alumno 10 al Ejercicio 2.

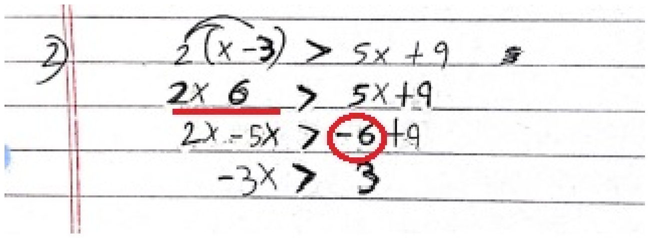


Figura 6.20: Respuesta del Alumno 13 al Ejercicio 2.

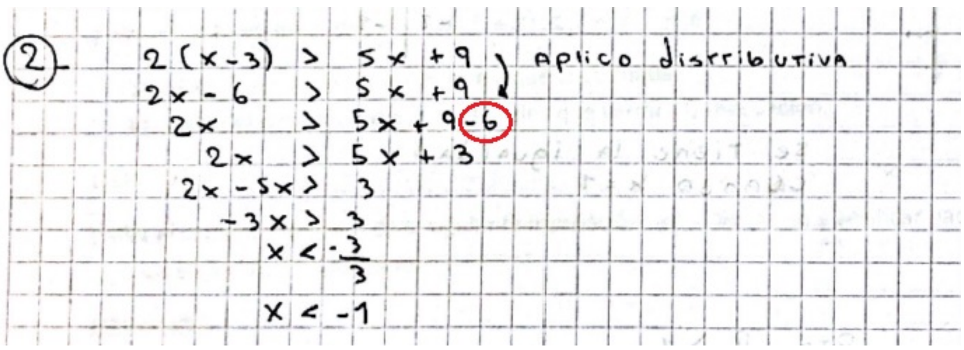


Figura 6.21: Respuesta del Alumno 17 al Ejercicio 2.

- **A partir de un caso particular generalizan las soluciones.**

En la Figura 6.22 se presenta un caso donde el alumno no muestra el procedimiento de resolución y su respuesta se basa únicamente para el caso en el que se anula uno de los términos de la desigualdad.

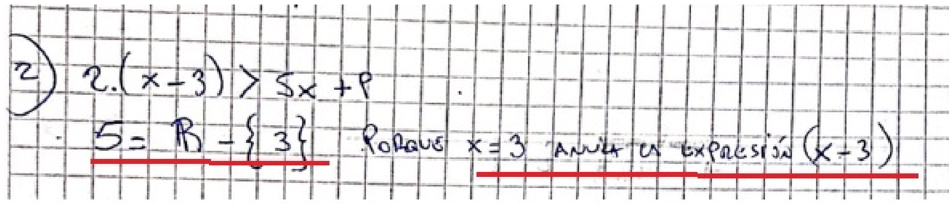


Figura 6.22: Respuesta del Alumno 15 al Ejercicio 2.

- **Error en la escritura del conjunto solución.**

Aquí se pueden observar dos casos:

1. Ejercicios que fueron bien resueltos pero se ha escrito mal el conjunto solución. Ejemplos de ello se pueden observar en las Figuras 6.23 y 6.24.

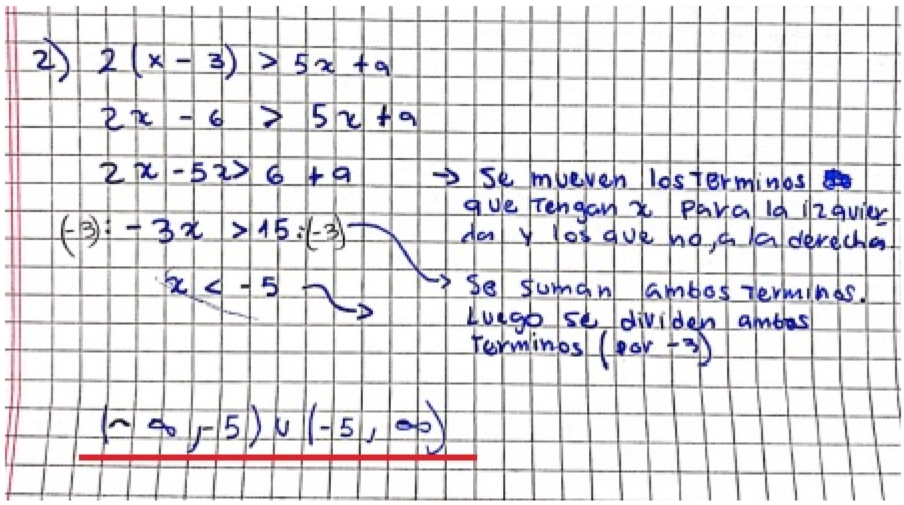


Figura 6.23: Respuesta del Alumno 2 al Ejercicio 2.

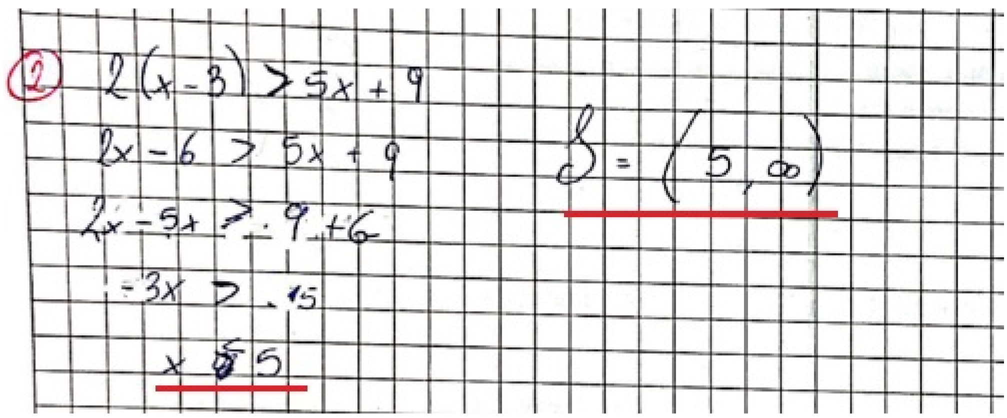


Figura 6.24: Respuesta del Alumno 8 al Ejercicio 2.

Es probable que estos errores sean debido nuevamente a la interpretación que hacen de la simbología, es decir, que confunden el símbolo de mayor con el de menor.

2. Ejercicios resueltos con errores donde el conjunto solución nuevamente no coincide con lo hallado analíticamente, como el ejemplo que se presenta en la Figura 6.25.

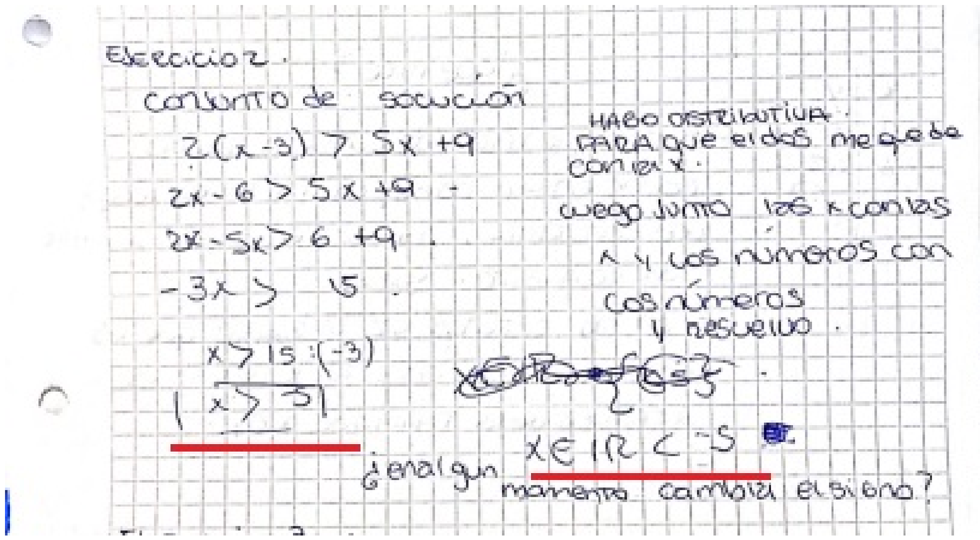


Figura 6.25: Respuesta del Alumno 6 al Ejercicio 2.

El ejemplo propuesto en la Figura 6.25 muestra que, si bien no escribe correctamente el conjunto solución, llama particularmente la atención la pregunta que se formula el alumno al dar la respuesta al ítem b., pues de alguna manera reconoce estar cometiendo un error.

También se observan ejercicios mal resueltos, incompletos o sin resolver en los que los alumnos dan respuesta equivocada al conjunto solución. Como se puede observar, en la Figura 6.26 y en la Figura 6.27. En ambos casos no resuelven la inecuación pero de todos modos dan un conjunto solución erróneo y mal escrito. En la Figrua 6.28, si bien el ejercicio está correctamente resuelto de manera algebraica, el conjunto solución no representa a la respuesta dada en el ítem a.

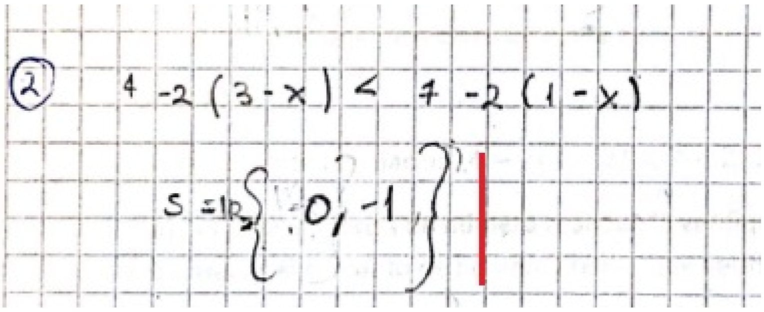


Figura 6.26: Respuesta del Alumno 24 al Ejercicio 2.

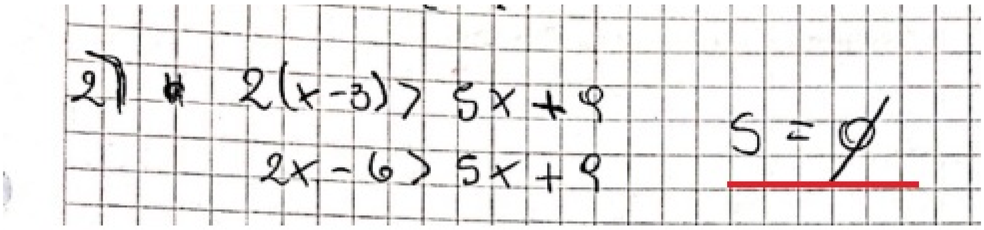


Figura 6.27: Respuesta del Alumno 27 al Ejercicio 2.

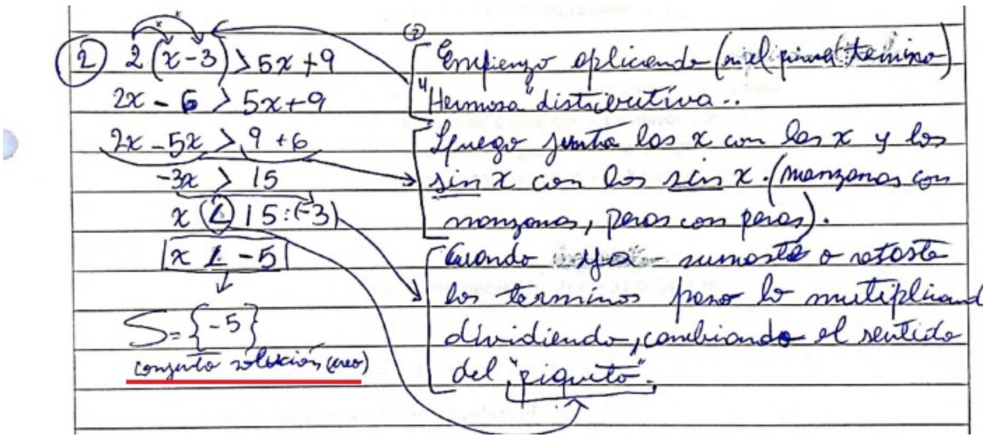


Figura 6.28: Respuesta del Alumno 25 al Ejercicio 2.

6.2.3. Errores detectados en la resolución del Ejercicio 3

Finalizada la corrección del Ejercicio 3, se han identificado los siguientes tipos de errores.

- **Mala interpretación del resultado.**

En muchos casos, los alumnos logran despejar la variable x encontrándose con expresiones como "$0 < 7$" o similares que no saben interpretar, lo que los lleva a responder de manera errónea o simplemente no responder. Ejemplos de esto se ven en las Figuras 6.29 a 6.36.

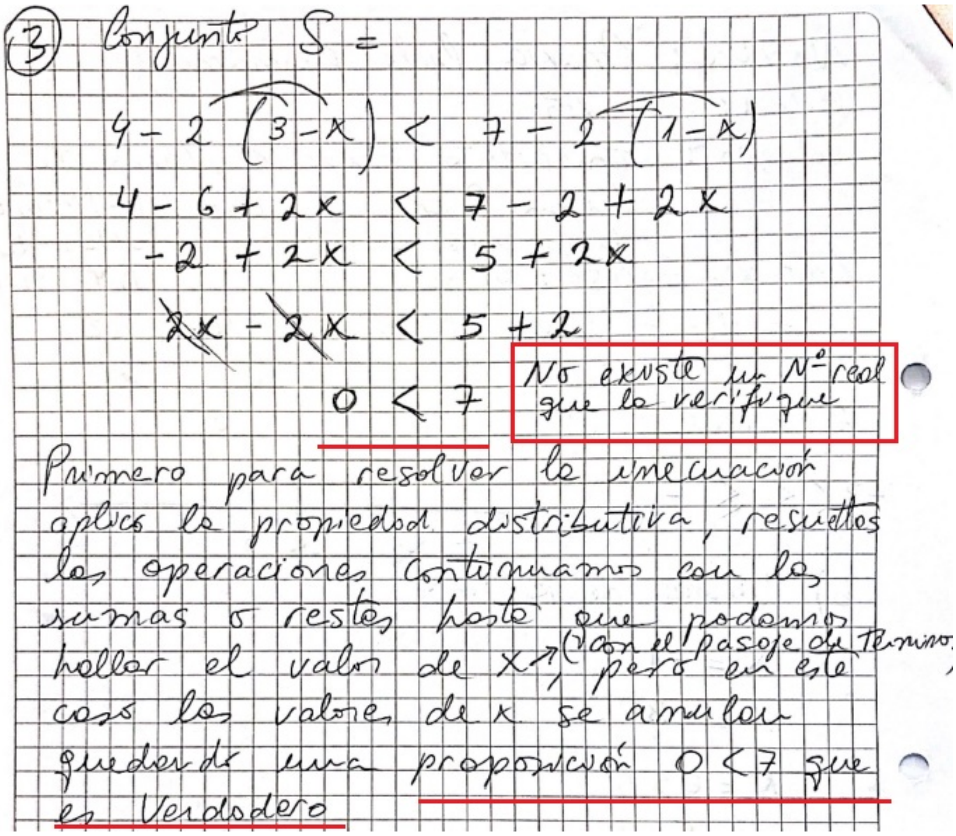


Figura 6.29: Respuesta del Alumno 14 al Ejercicio 3.

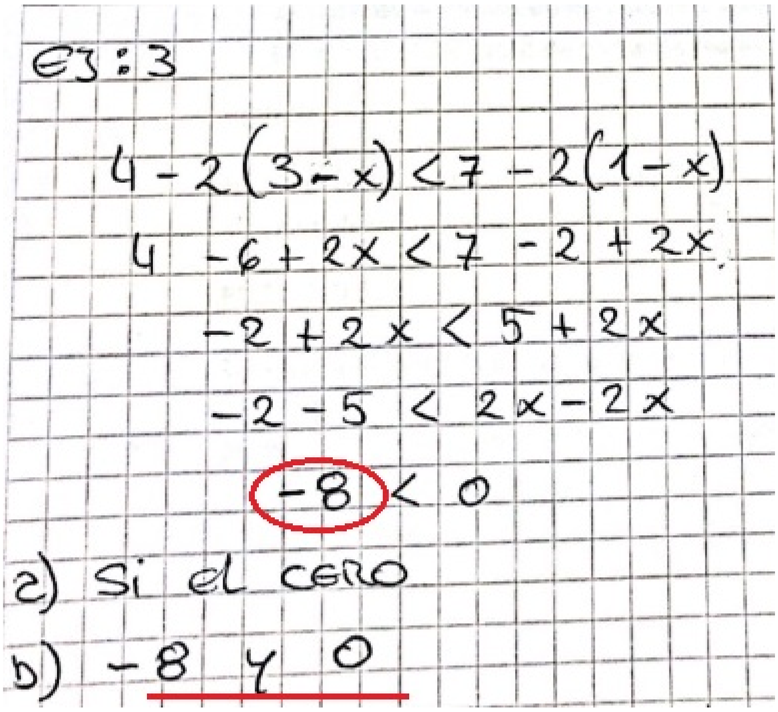


Figura 6.30: Respuesta del Alumno 1 al Ejercicio 3.

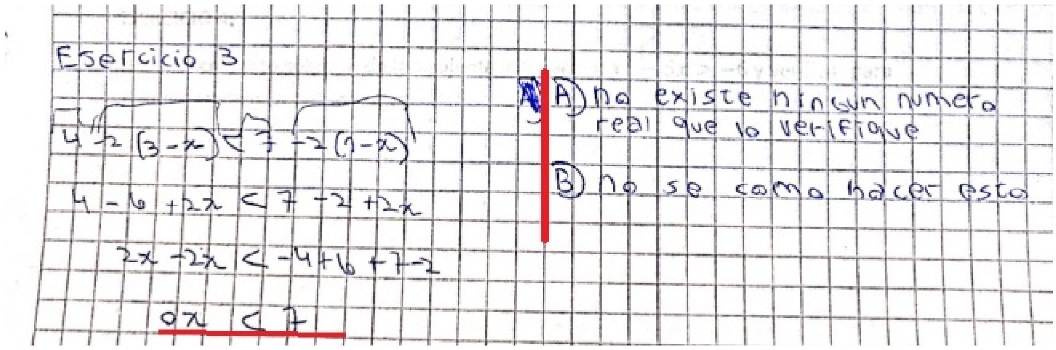


Figura 6.31: Respuesta del Alumno 9 al Ejercicio 3.

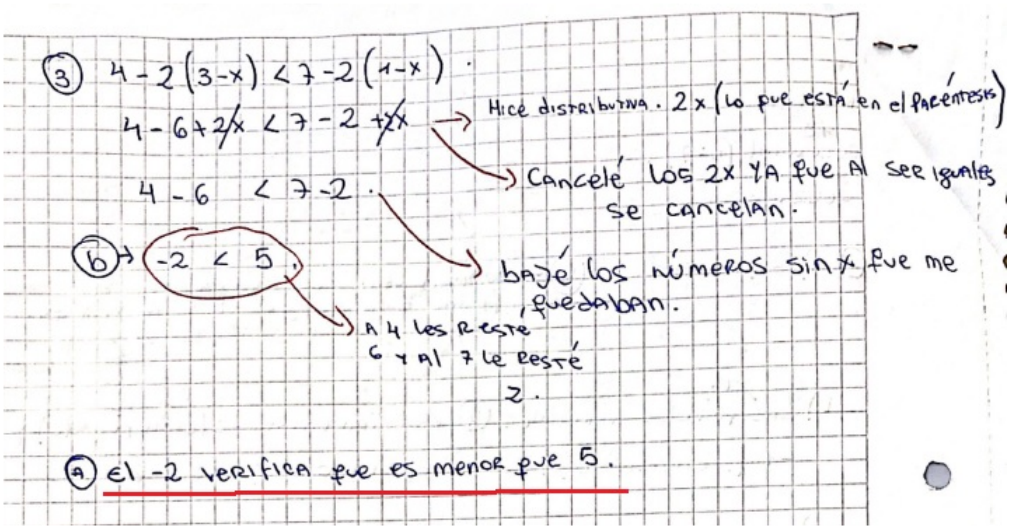


Figura 6.32: Respuesta del Alumno 19 al Ejercicio 3.

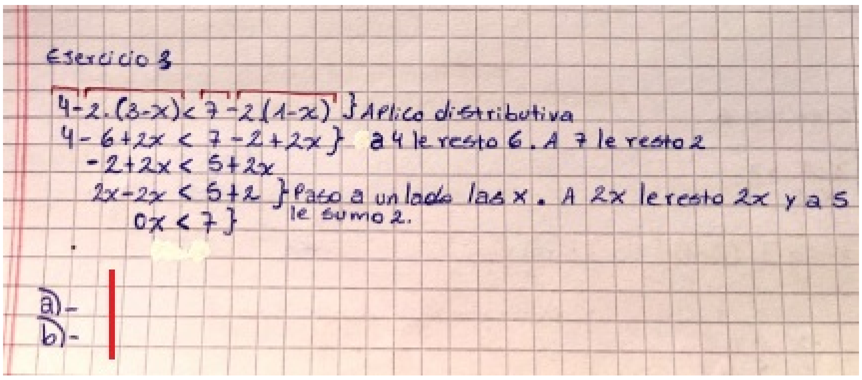


Figura 6.33: Respuesta del Alumno 21 al Ejercicio 3.

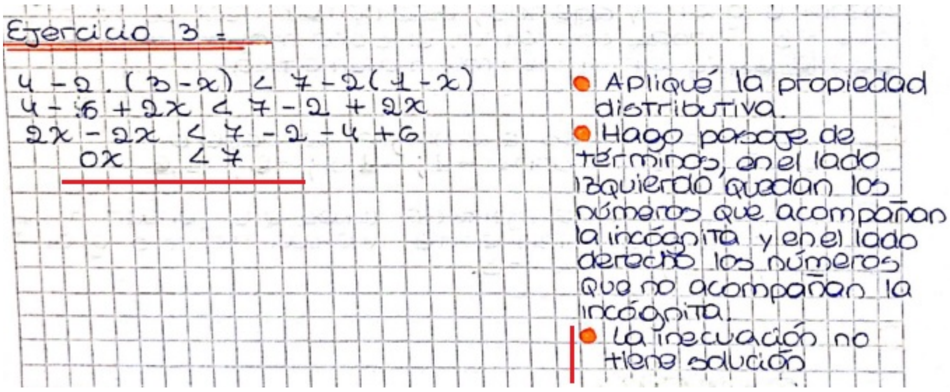


Figura 6.34: Respuesta del Alumno 23 al Ejercicio 3.

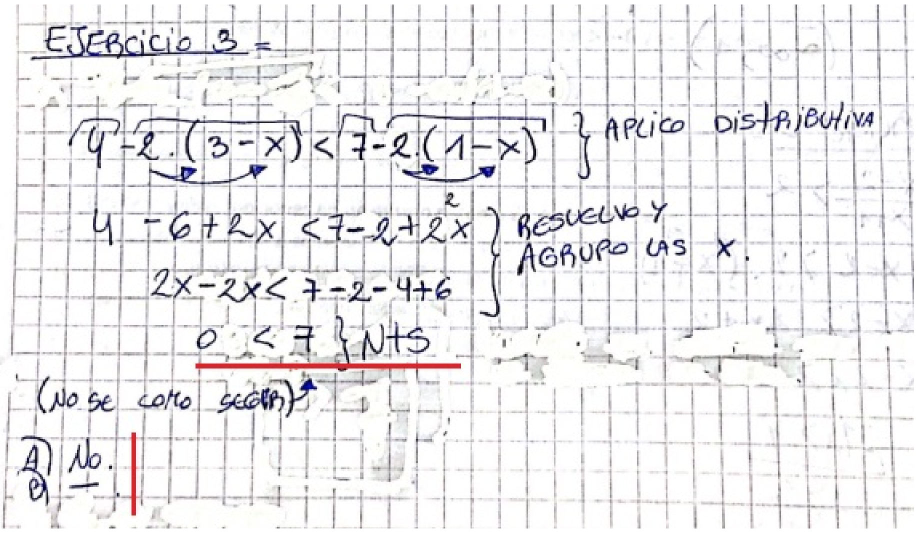


Figura 6.35: Respuesta del Alumno 26 al Ejercicio 3.

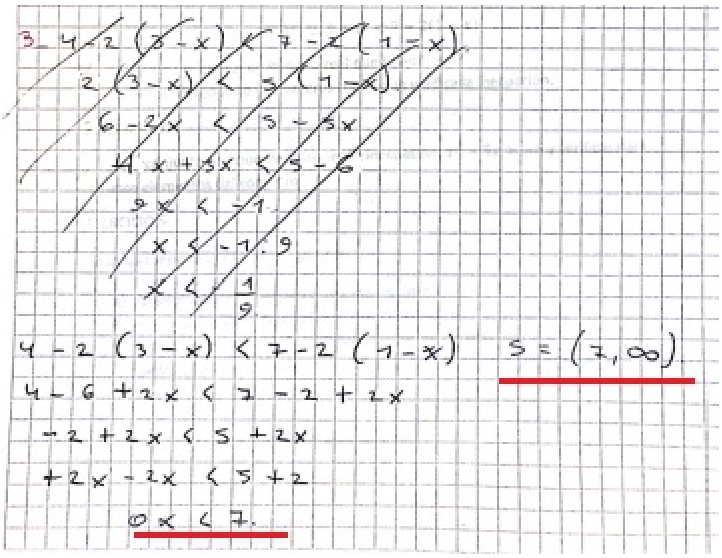


Figura 6.36: Respuesta del Alumno 28 al Ejercicio 3.

- **Dividen por cero al despejar la variable.**

Se observa en la Figura 6.37 que, si bien no explicita la división por cero, en el último paso de la resolución el número cero que acompaña a x ya no aparece y por alguna razón invierte el sentido de la desigualdad. En cambio en la Figura 6.38 la división por cero sí es explícita.

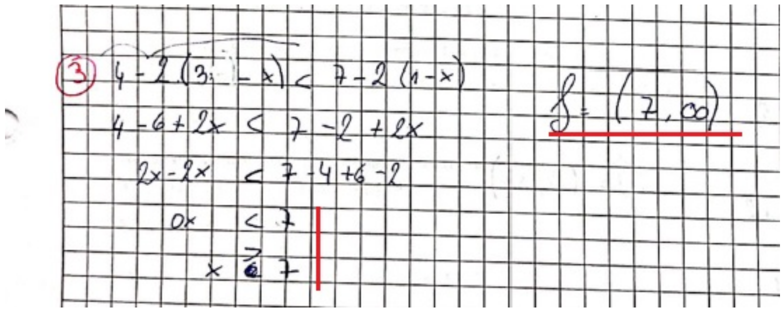


Figura 6.37: Respuesta del Alumno 8 al Ejercicio 3.

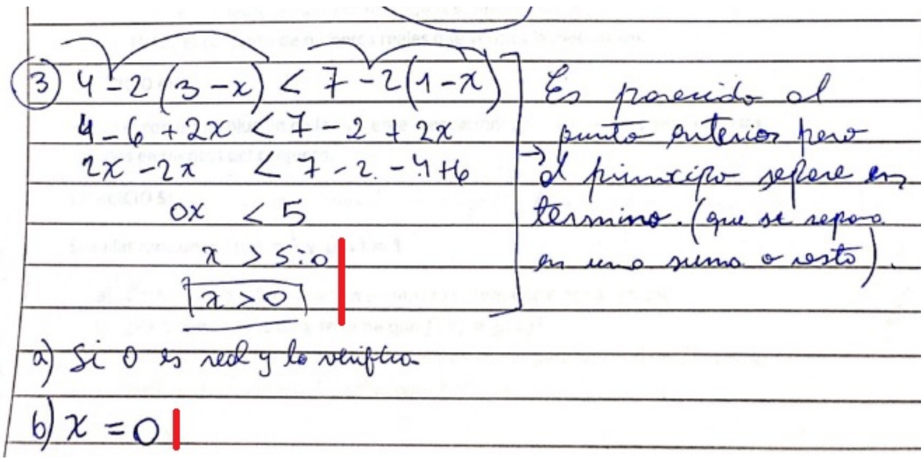


Figura 6.38: Respuesta del Alumno 25 al Ejercicio 3.

- **Errores de operatoria y despeje.**

Tal como se puede observar en la Figura 6.39, el alumno no separa en términos y por lo tanto las operaciones que efectúa en el primer paso no son correctas. En la Figura 6.40 se observa una mala separación de términos y suma los términos numéricos con los términos literales. En la Figura 6.41 realiza pasaje de términos de manera incorrecta dos veces. Por último, en la Figura 6.42 se puede ver que el alumno no sólo separa mal en términos sino que también aplica mal la propiedad distributiva en el primer miembro de la desigualdad.

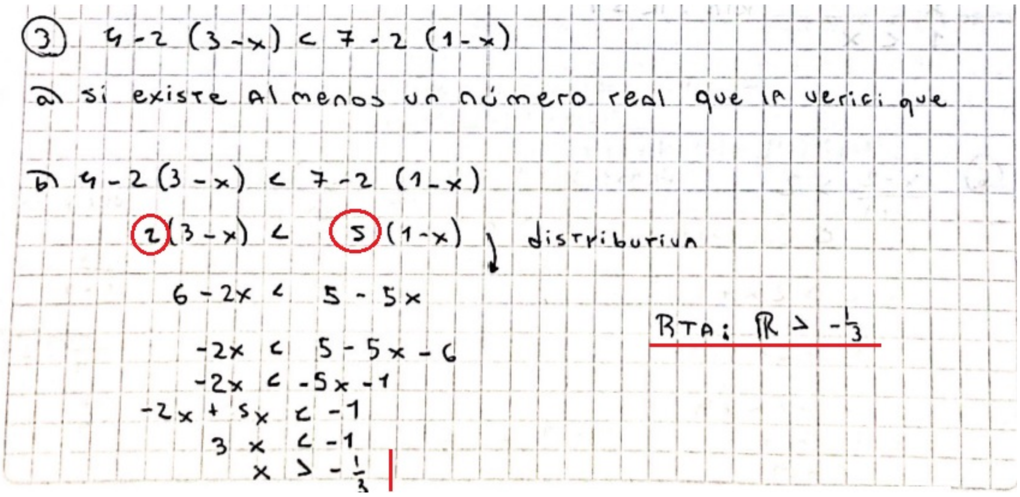


Figura 6.39: Respuesta del Alumno 17 al Ejercicio 3.

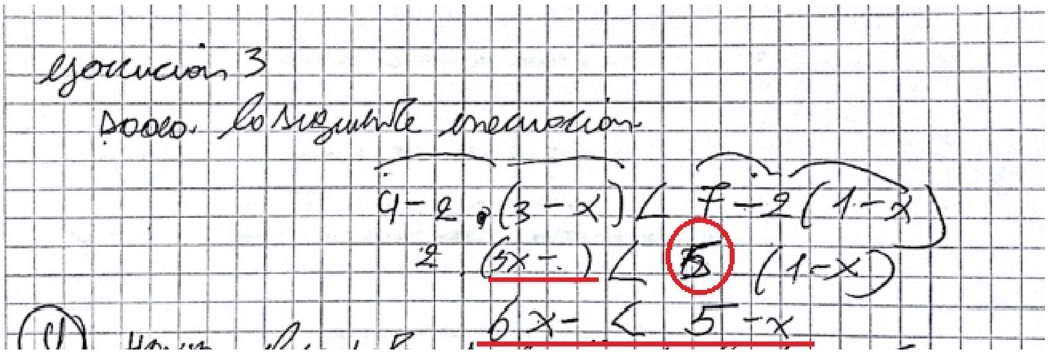


Figura 6.40: Respuesta del Alumno 3 al Ejercicio 3.

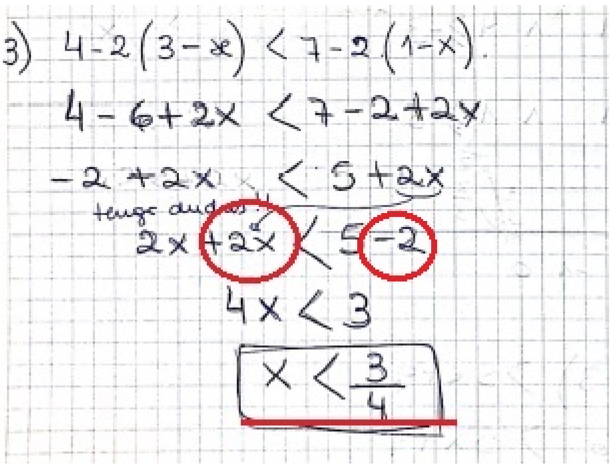


Figura 6.41: Respuesta del Alumno 11 al Ejercicio 3.

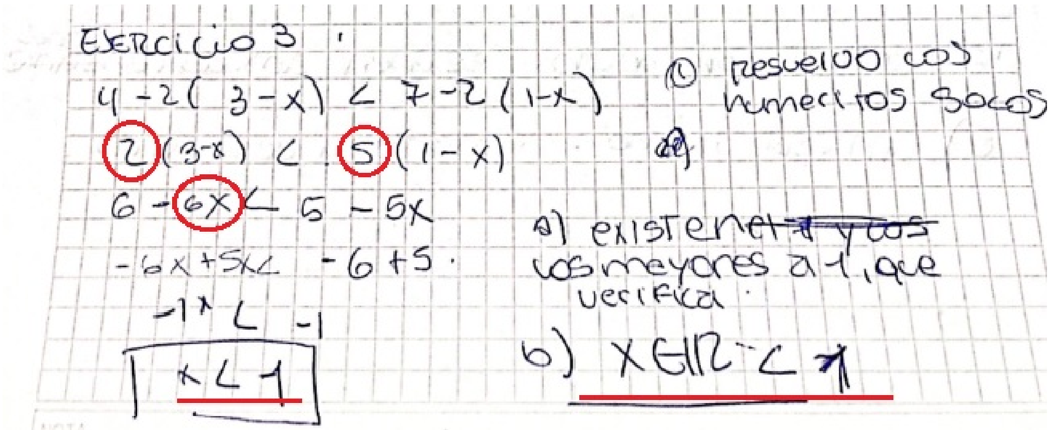


Figura 6.42: Respuesta del Alumno 6 al Ejercicio 3.

6.2.4. Errores detectados en la resolución del Ejercicio 4

Los errores detectados en el Ejercicio 4 fueron los siguientes.

- **Encuentran las soluciones de la ecuación cuadrática con la fórmula resolvente pero no dicen cuál es el conjunto solución o bien responden mal.**

En todos los ejemplos que se muestran a continuación, los alumnos utilizan la fórmula resolvente para hallar las soluciones de la ecuación cuadrática. Se puede observar en la Figura 6.43 que el alumno no responde al problema, en la Figura 6.44 da como respuesta el conjunto de todos los números reales exceptuando las soluciones de la ecuación halladas con la fórmula y, en la Figura 6.45, el alumno manifiesta no saber qué hacer con los valores obtenidos de la fórmula resolvente.

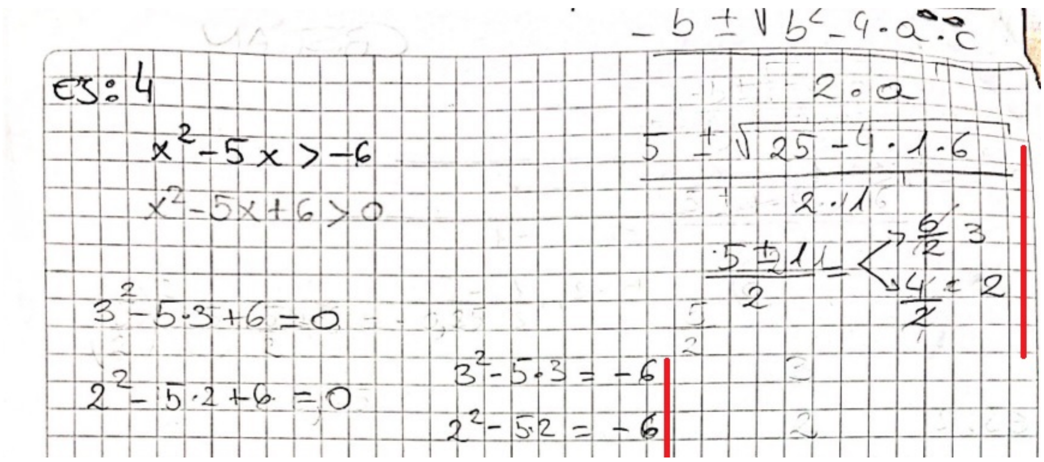


Figura 6.43: Respuesta del Alumno 1 al Ejercicio 4.

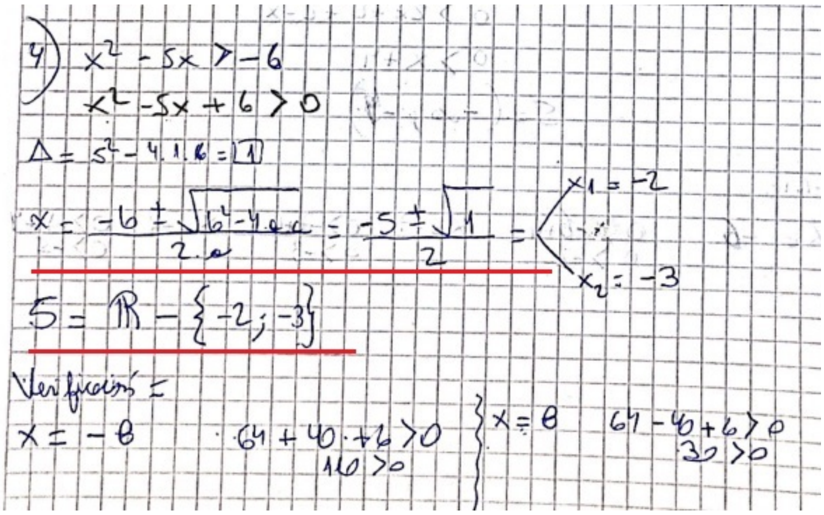


Figura 6.44: Respuesta del Alumno 15 al Ejercicio 4.

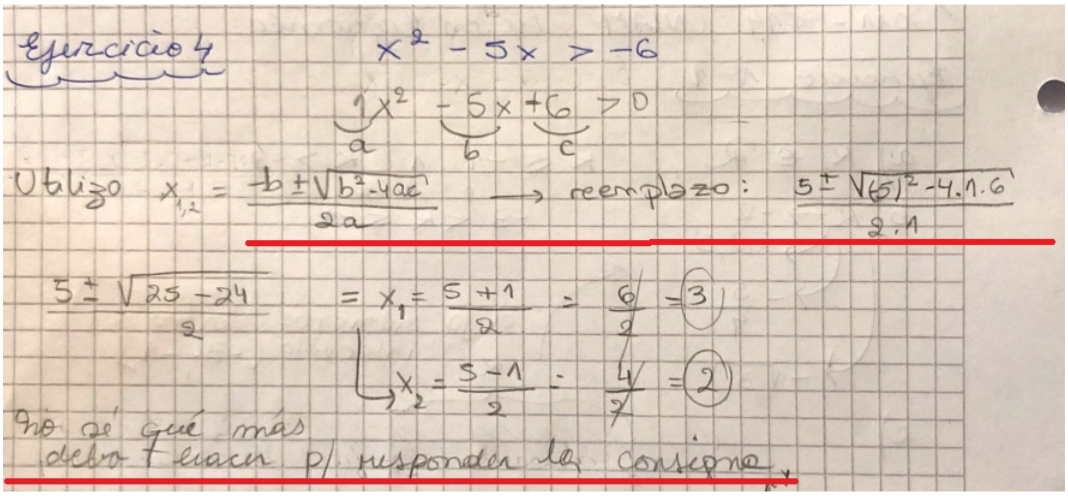


Figura 6.45: Respuesta del Alumno 20 al Ejercicio 4.

- **Errores de despeje y/o de operatoria.**

En los siguientes ejemplos se muestran algunos errores cometidos por los estudiantes en el despeje y las operaciones realizadas al resolver una inecuación cuadrática.

En la Figura 6.46 se observa que el alumno despeja mal una potencia par pues en el pasaje de términos cancela el cuadrado de x poniendo módulo. Además deja dos expresiones con módulo conectadas mediante el conectivo lógico $\wedge$ y responde que el problema no tiene solución sin dar ningún tipo de explicación.

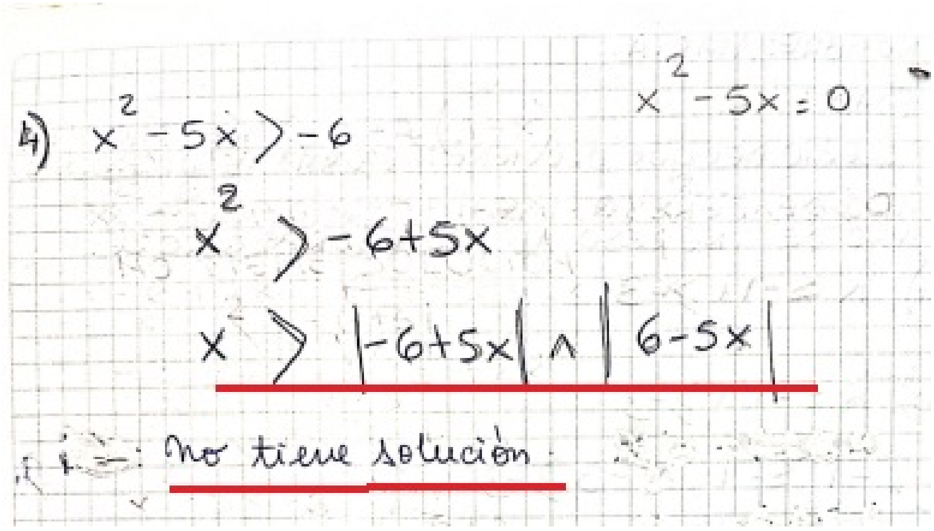


Figura 6.46: Respuesta del Alumno 11 al Ejercicio 4.

En el ejemplo mostrado en la Figura 6.47 se observa que el alumno cancela la potencia dos con una raíz cuadrada en sólo uno de los términos de la inecuación, dejando expresada la raíz cuadrada del número -6 e indicando que dicho número es un número decimal. Opera los términos restantes sin terminar de despejar la variable. Este alumno no da respuesta al ejercicio.

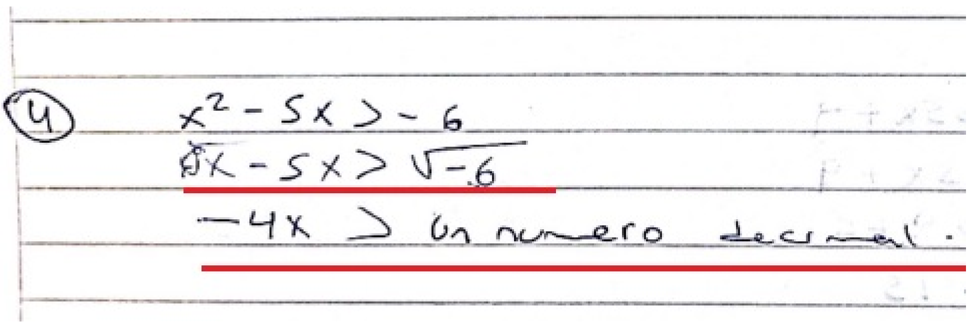


Figura 6.47: Respuesta del Alumno 12 al Ejercicio 4.

En cuanto al ejemplo mostrado en la Figura 6.48, el alumno transforma la inecuación cuadrática en una inecuación lineal dividiendo ambos miembros de la desigualdad por x. Esta división no es correcta pero sigue operando hasta llegar a una expresión que no tiene ninguna relación aparente con la última desigualdad escrita.

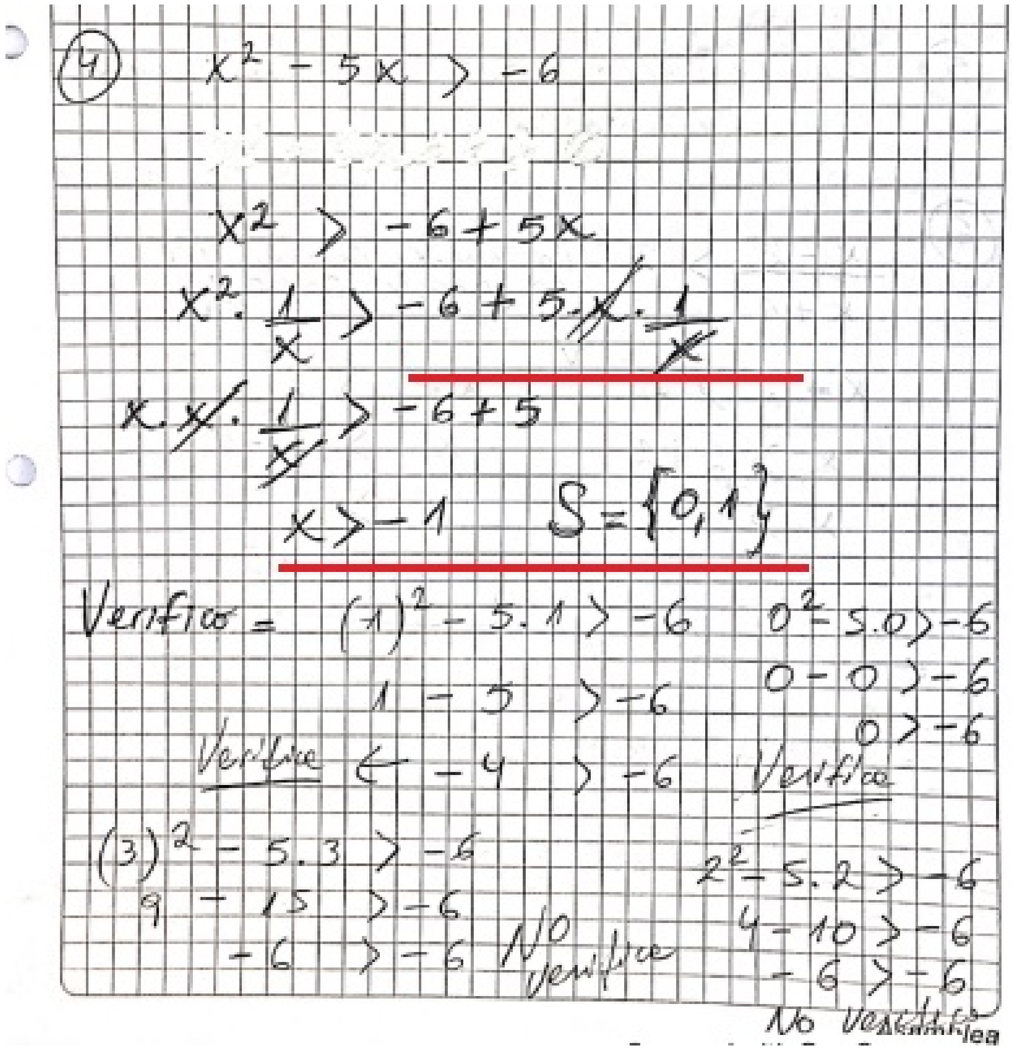


Figura 6.48: Respuesta del Alumno 14 al Ejercicio 4.

En el ejemplo mostrado en la Figura 6.49 se ve que el alumno suma dos monomios de distinto grado convirtiendo la inecuación cuadrática en una cúbica y explica que ha sumado los exponentess al agrupar los términos que contienen x. Este alumno tampoco da respuesta al problema.

En la Figura 6.50 despeja el término lineal de la inecuación pero omite la variable con lo cual obtiene dos términos numéricos que puede sumar quedándole planteada una desigualdad entre un término cuadrático y uno numérico, desigualdad que interpreta que no tiene solución.

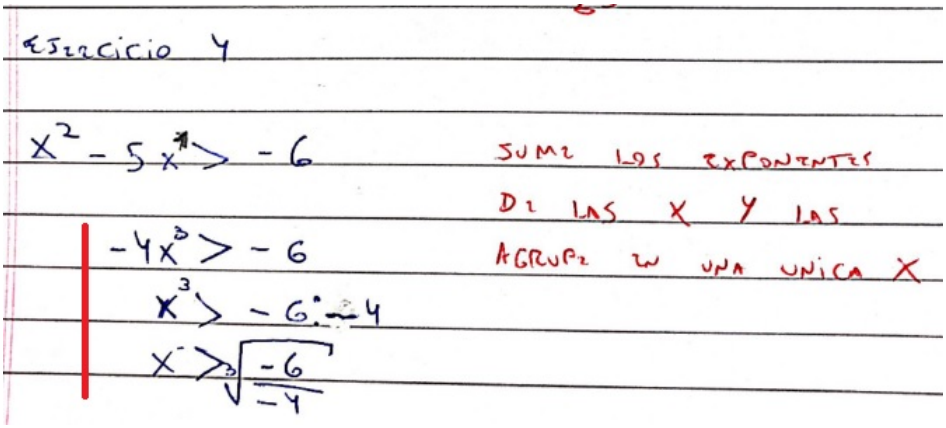


Figura 6.49: Respuesta del Alumno 16 al Ejercicio 4.

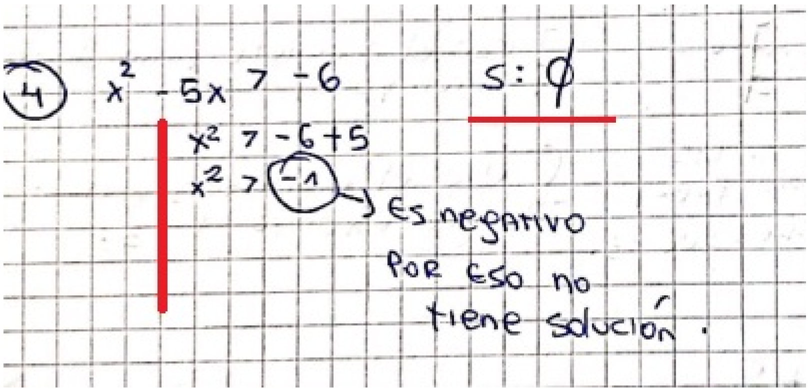


Figura 6.50: Respuesta del Alumno 19 al Ejercicio 4.

Por último, en las Figuras 6.51 y 6.52, los alumnos factorizan el primer miembro de la desigualdad pero al paso siguiente descartan uno de los factores del producto sin razón aparente, transformando la inecuación cuadrática en una lineal. El conjunto solución que escriben es idéntico en ambos casos y no refleja la última desigualdad escrita en el proceso de resolución.

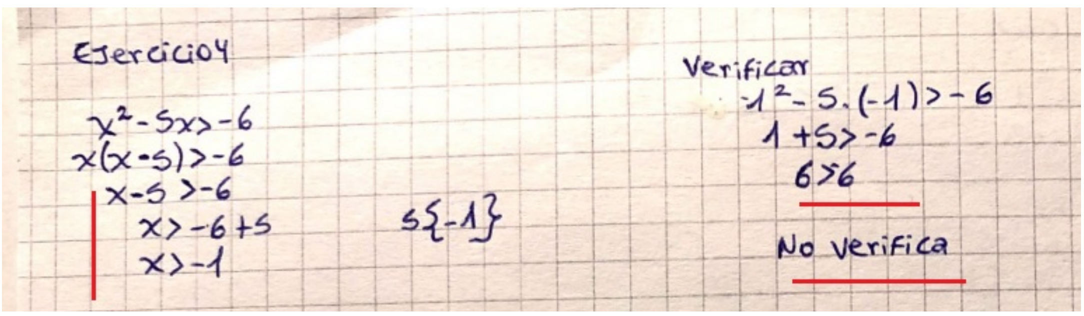


Figura 6.51: Respuesta del Alumno 21 al Ejercicio 4.

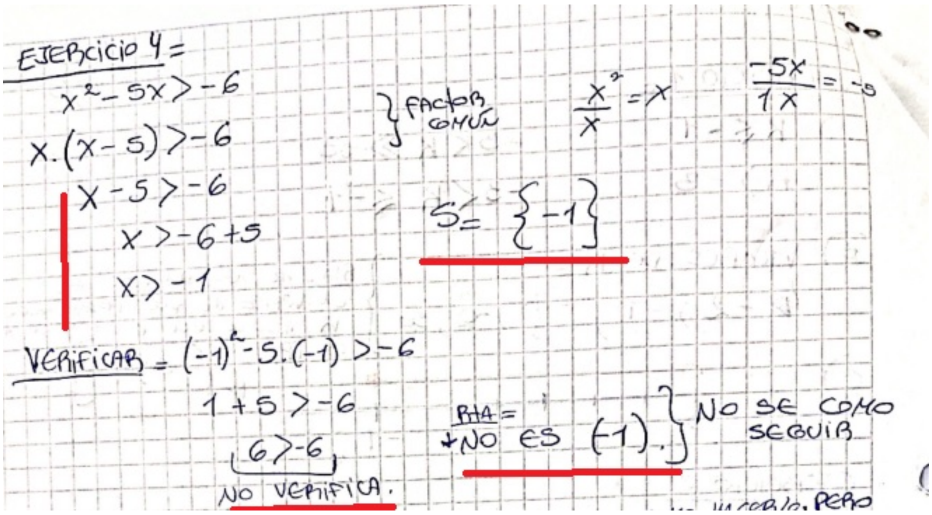


Figura 6.52: Respuesta del Alumno 26 al Ejercicio 4.

- **Resuelven como si fuera una ecuación.**

En la Figura 6.53 el alumno utiliza el conectivo lógico de equivalencia ($\Longleftrightarrow$) para indicar que la inecuación presentada en este ejercicio es equivalente a resolver la ecuación cuadrática y da como respuesta las soluciones halladas en la ecuación cuadrática.

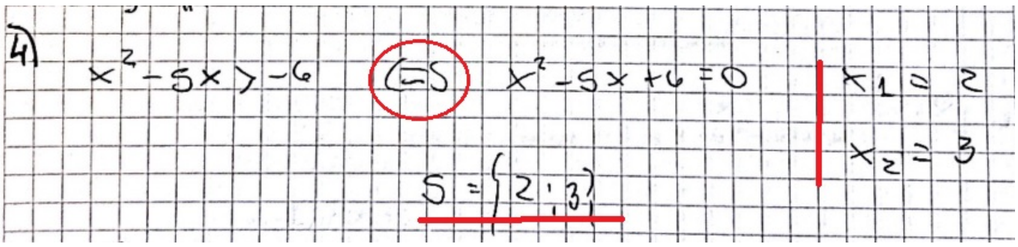


Figura 6.53: Respuesta del Alumno 27 al Ejercicio 4.

Cabe señalar que sólo 1 de los 28 alumnos logró resolver el ejercicio correctamente. Este caso se observa en la Figura 6.54.

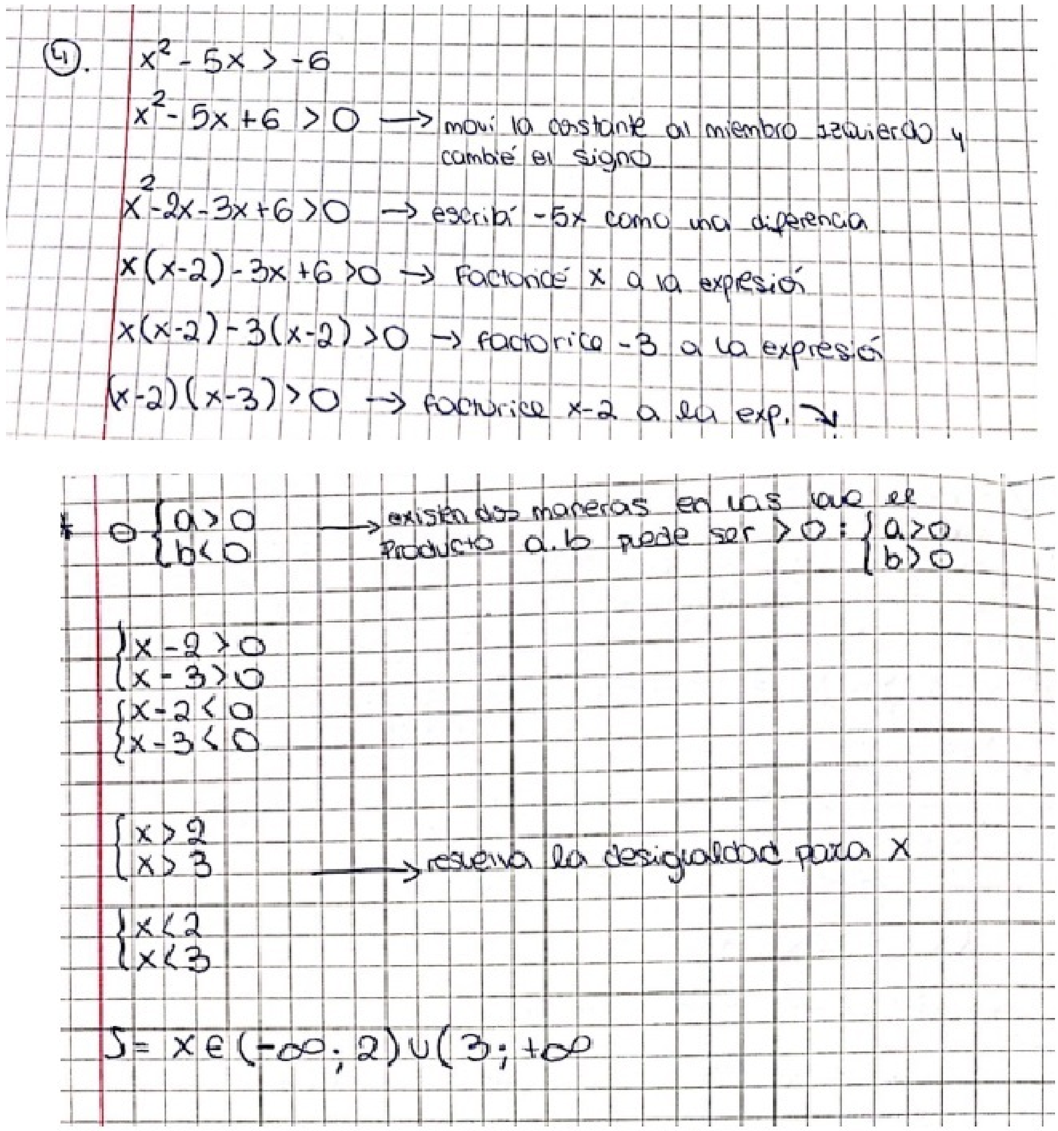


Figura 6.54: Respuesta del Alumno 22 al Ejercicio 4.

6.2.5. Errores detectados en la resolución del Ejercicio 5

En el análisis de los errores detectados en el Ejercicio 5, se observa un mayor desconocimiento del tema. Recordemos que, para este ejercicio, 13 de los 28 alumnos expresan en la hoja donde han desarrollado las actividades no haber visto funciones o no recuerdan cómo hacerlo y 5 dejaron el ejercicio sin resolver. En los demás casos, se presentan dos tipos de situaciones.

- **Grafican mal las funciones.**

En los ejemplos presentados en las Figuras 6.55 y 6.56, se observa que la función constante es graficada correctamente mientras que la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ está mal graficada. En ambos casos, los alumnos utilizan tabla de valores para graficar. Responden correctamente el ítem b. planteando y resolviendo la ecuación, pero cuando deben dar respuesta a la desigualdad lo hacen de manera incorrecta sin siquiera observar si lo que están respondiendo es coherente con el gráfico realizado en el ítem a.

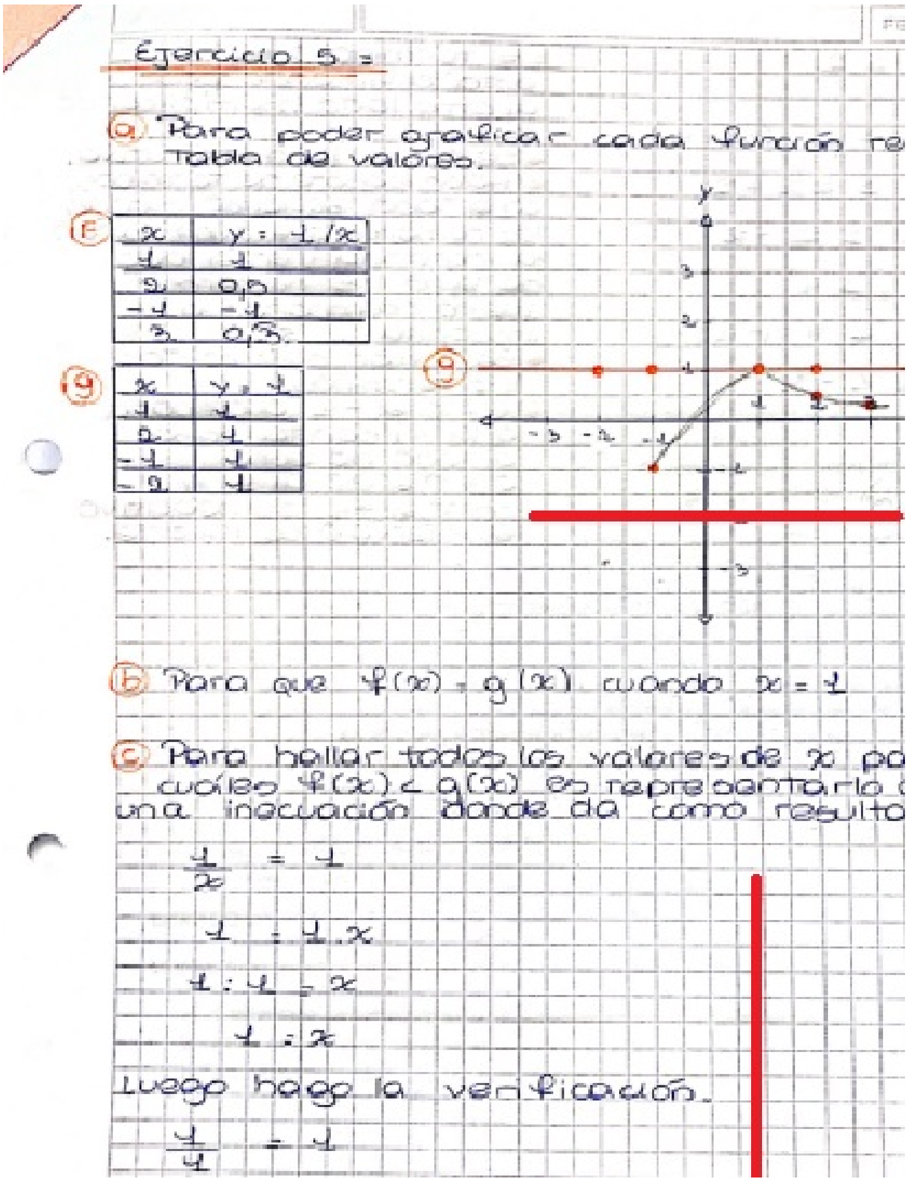


Figura 6.55: Respuesta del Alumno 23 al Ejercicio 5.

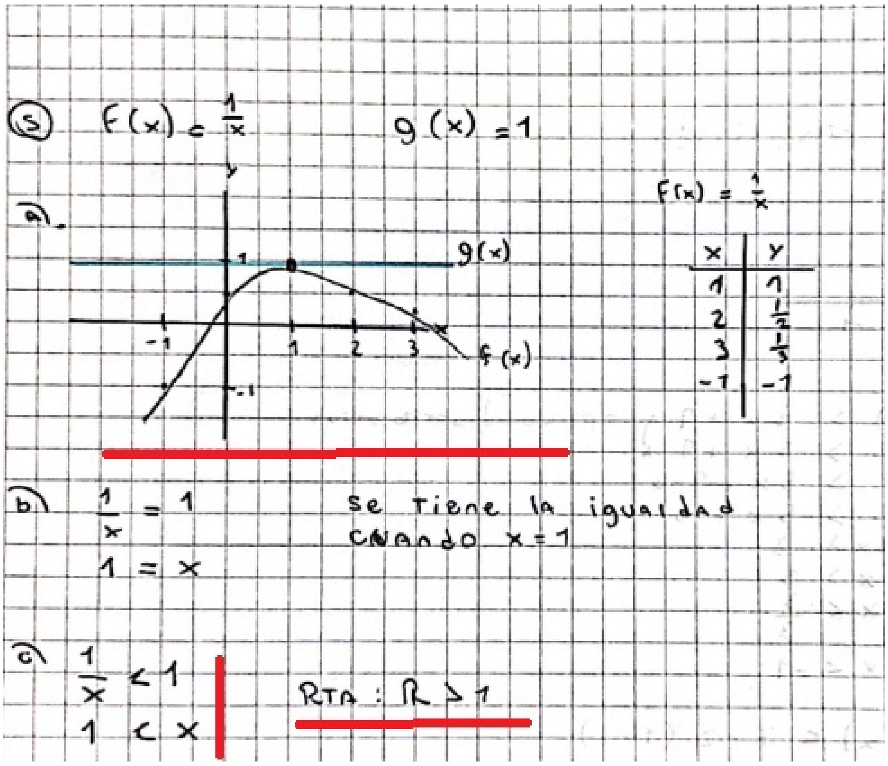


Figura 6.56: Respuesta del Alumno 17 al Ejercicio 5.

En el ejemplo presentado en la Figura 6.57 nuevamente está mal realizado el gráfico de la función homográfica pero, a diferencia de los ejemplos anteriores, el error en el gráfico es que trazó las ramas de la función de manera rectilínea. El hecho de trazar las ramas verticales de esta forma hace que la gráfica no represente a una función.

En cambio, en la Figura 6.58, se observa que el alumno realiza algunos cálculos erróneos con la intención de hallar los puntos de ambas funciones. A pesar de ello, realiza mal un único gráfico, sin distinguir a qué función hace referencia. Responde el ítem b. de manera correcta sin realizar ningún planteo pero el último ítem lo responde mal.

Por último, en la Figura 6.59, el alumno toma valores no negativos de la variable para representar ambas gráficas por separado. Las demás respuestas se basan en el gráfico y en la tabla de valores sin realizar ningún tipo de planteo.

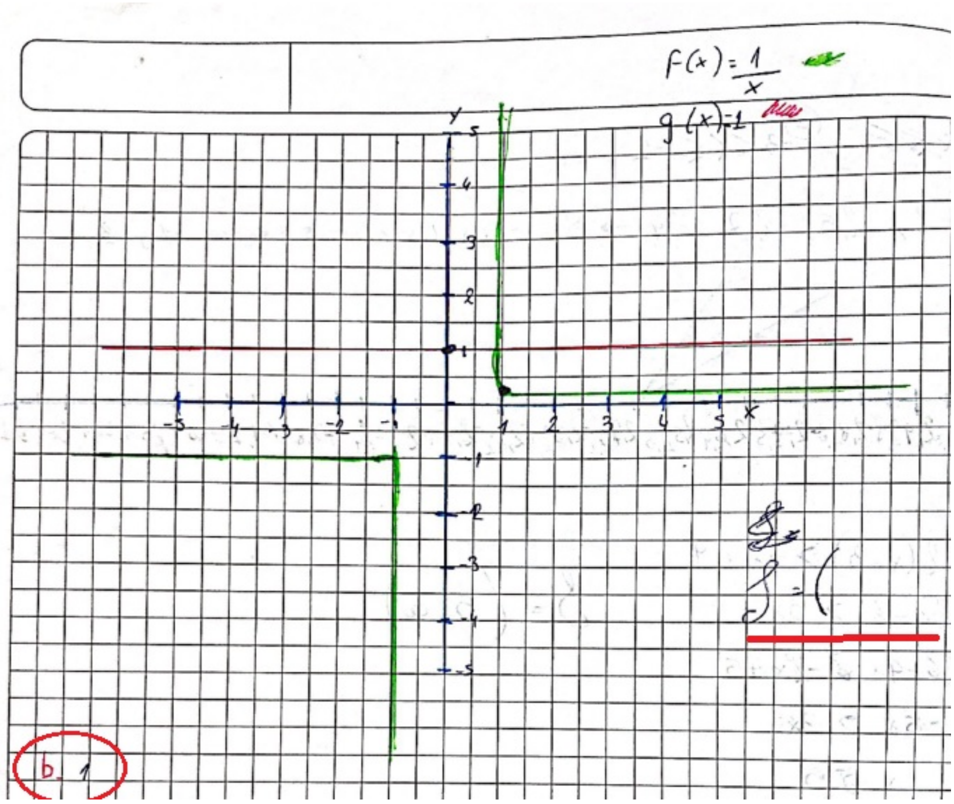


Figura 6.57: Respuesta del Alumno 8 al Ejercicio 5.

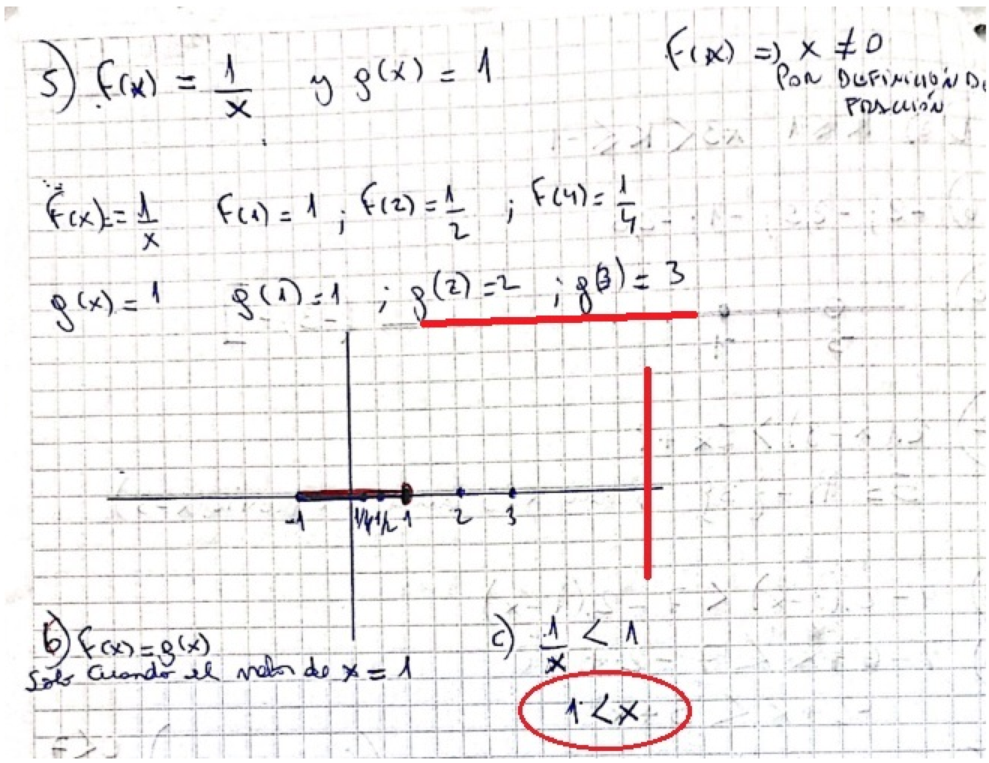


Figura 6.58: Respuesta del Alumno 15 al Ejercicio 5.

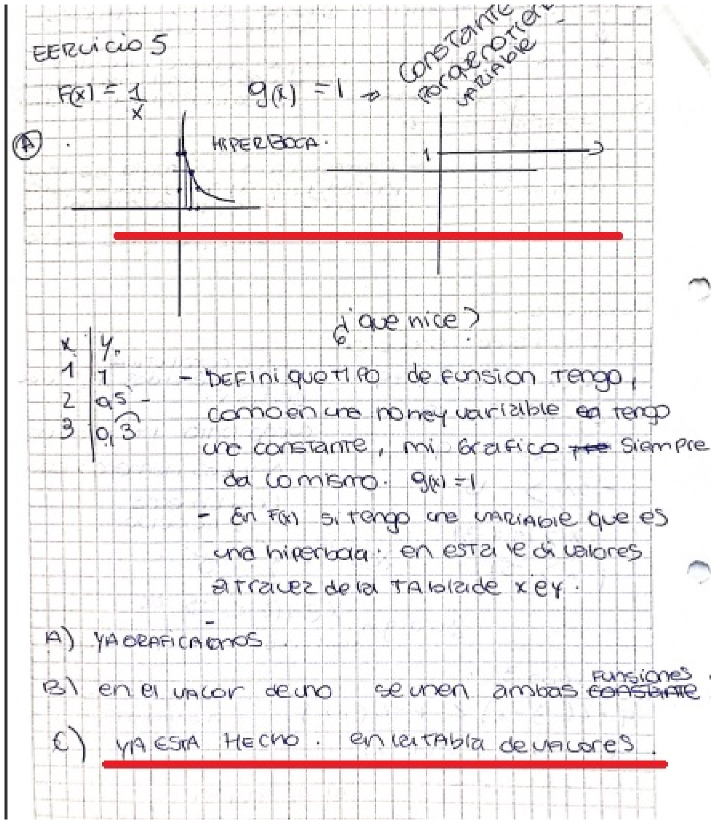


Figura 6.59: Respuesta del Alumno 6 al Ejercicio 5.

- **No grafican las funciones.**

En los ejemplos presentados a continuación, en las Figuras 6.60 y 6.61, se observa que los alumnos no han representado gráficamente las funciones intervinientes y han dejado escrito que no saben o no recuerdan cómo hacerlo. Las respuestas del ítem c. no están acompañadas de ninguna explicación.

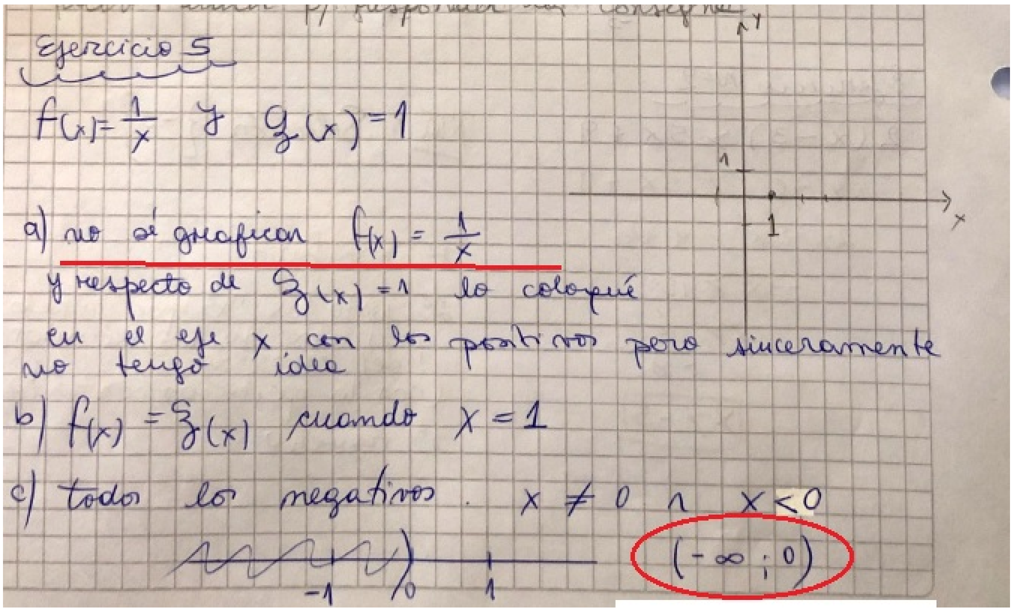


Figura 6.60: Respuesta del Alumno 20 al Ejercicio 5.

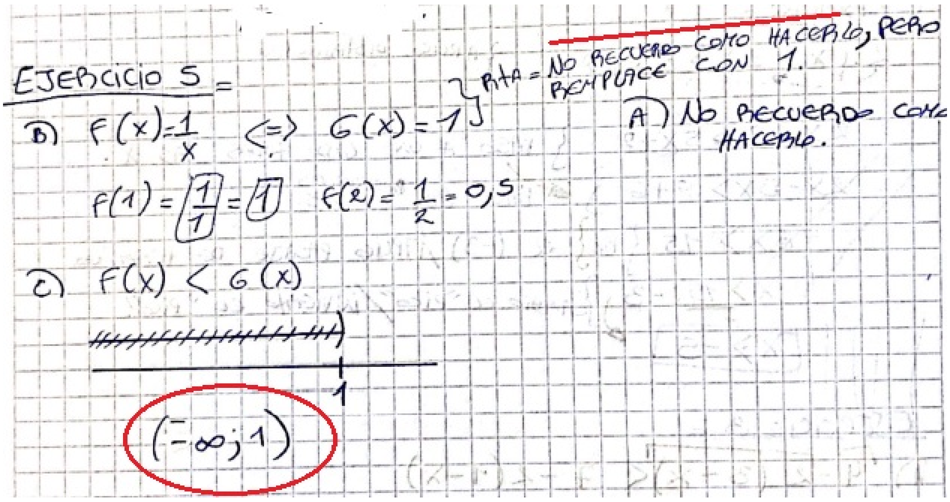


Figura 6.61: Respuesta del Alumno 26 al Ejercicio 5.

6.2.6. Errores detectados en la resolución del Ejercicio 6

Por último, se analiza el Ejercicio 6. Para este caso, recordamos que se han encontrado 8 alumnos que manifiestan explícitamente no saber hacerlo y 7 que escriben el número de actividad pero no lo resuelven o simplemente omiten la transcripción del ejercicio. En la Figura 6.62 se presenta el caso del único alumno que resuelve parcialmente bien este ejercicio. Si bien la respuesta es correcta, en el procedimiento llevado a cabo copia mal una expresión lo que supone una distracción al transcribir. De todos modos, responde correctamente a lo que pide el enunciado.

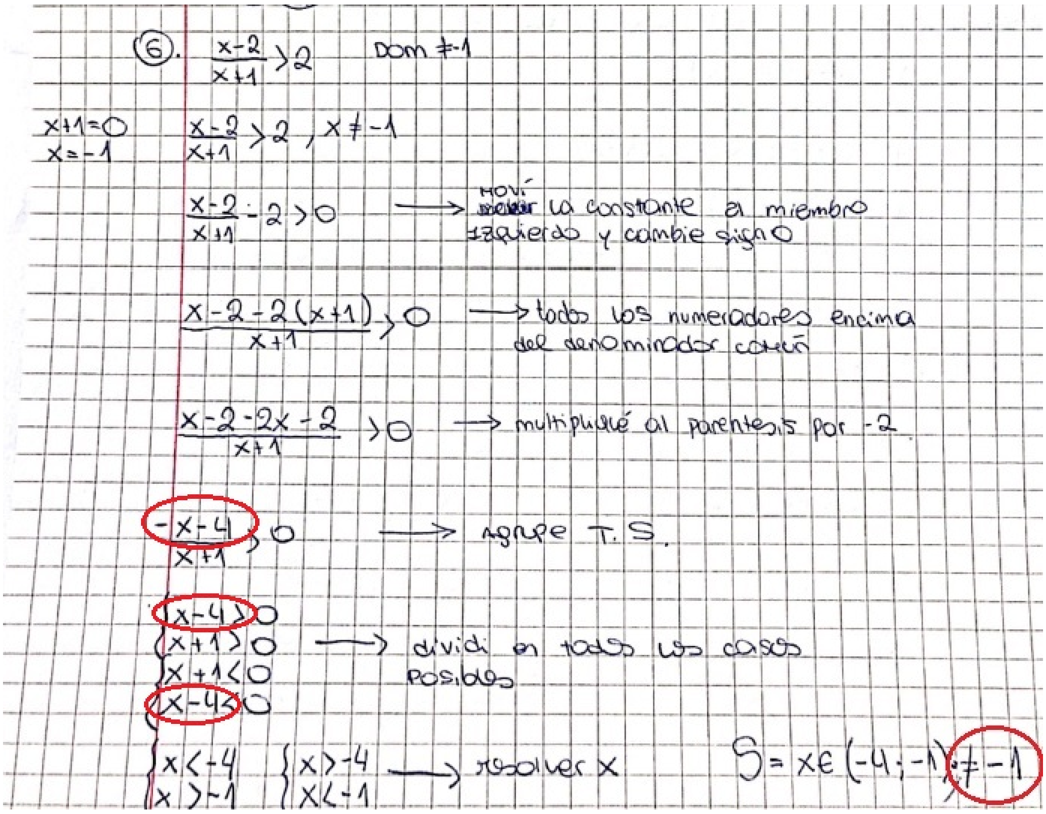


Figura 6.62: Respuesta del Alumno 22 al Ejercicio 6.

Respecto de los demas casos, los errores más frecuentes encontrados en el Ejercicio 6 son los siguientes.

- **Multiplican ambos miembros de la inecuación racional por la expresión algebraica que figura en el denominador pero no tienen en cuenta el signo**

En todos los ejemplos que se presentan a continuación y que se pueden observar en las Figuras 6.63 a 6.70, los estudiantes han multiplicado ambos miembros de la desigualdad por la expresión algebraica $(x + 1)$ sin haber estudiado los distintos casos de signos posibles para dicha expresión. Este hecho los lleva a responder un intervalo solución que no es el correcto.

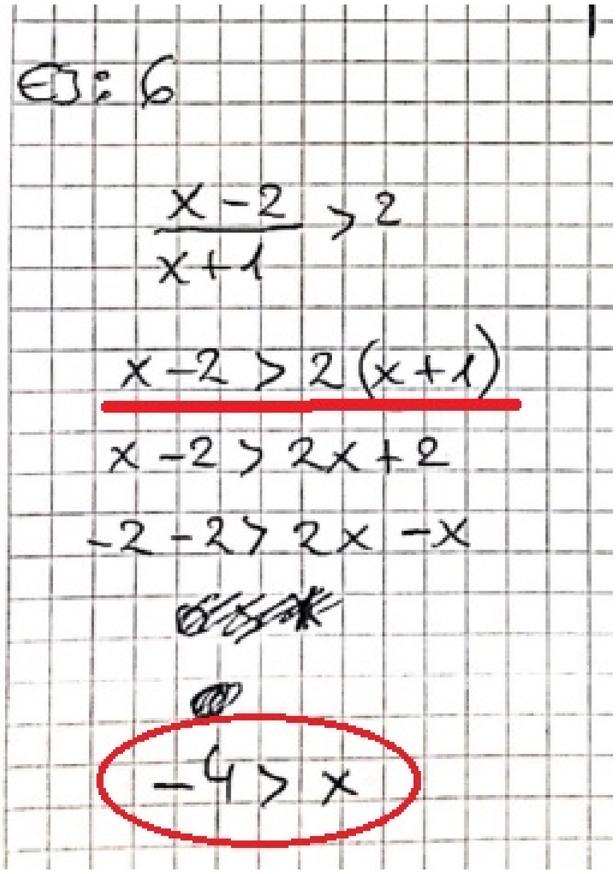


Figura 6.63: Respuesta del Alumno 1 al Ejercicio 6.

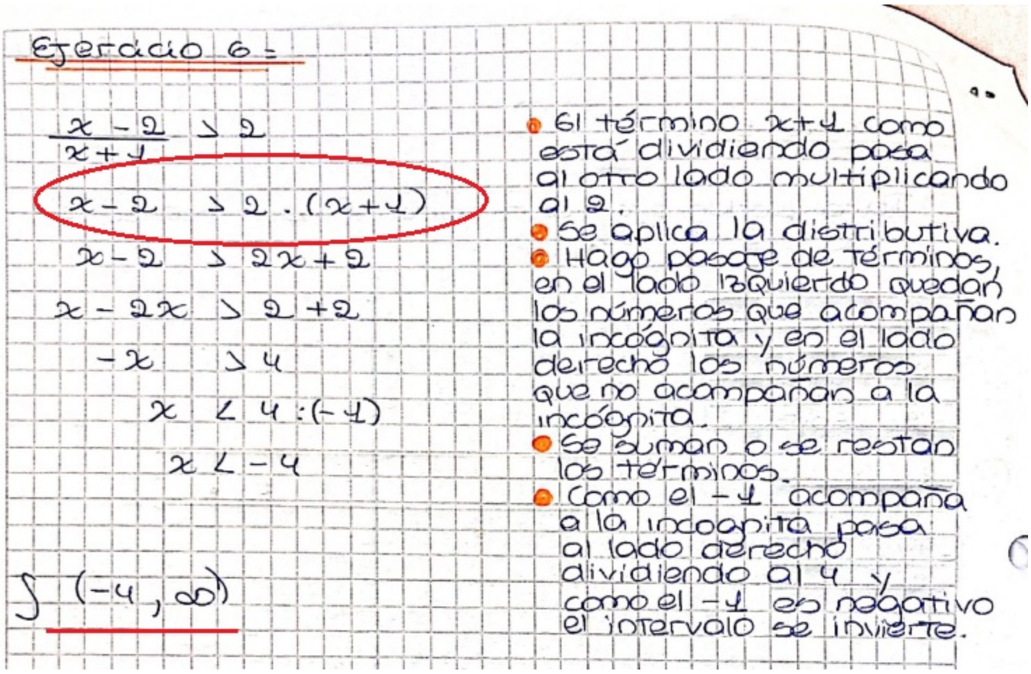


Figura 6.64: Respuesta del Alumno 23 al Ejercicio 6.

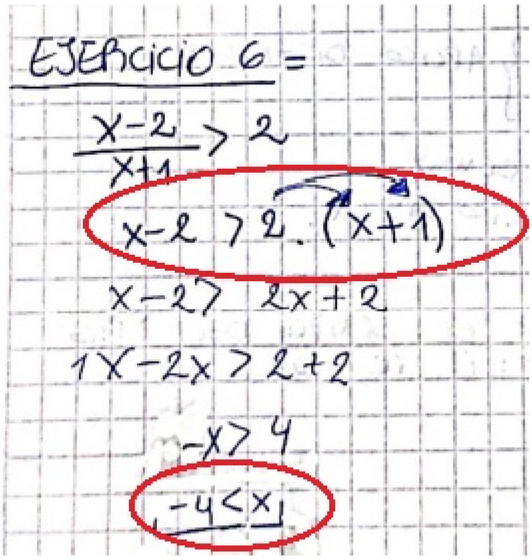


Figura 6.65: Respuesta del Alumno 26 al Ejercicio 6.

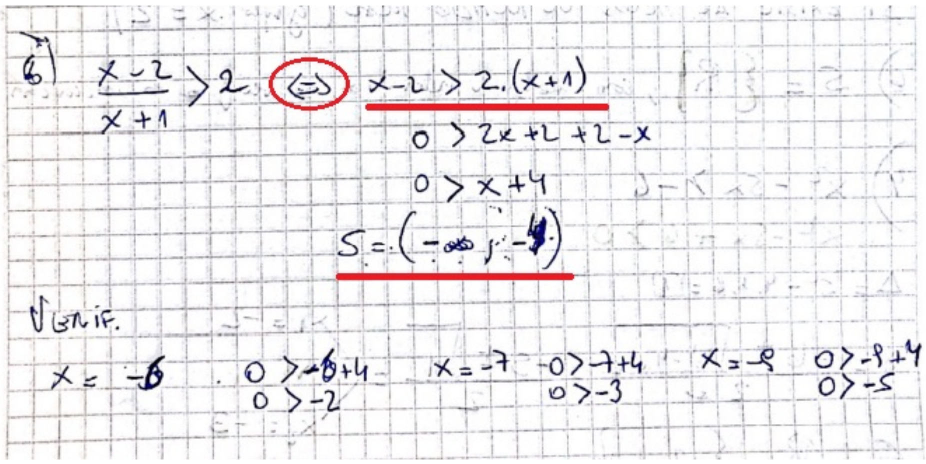


Figura 6.66: Respuesta del Alumno 15 al Ejercicio 6.

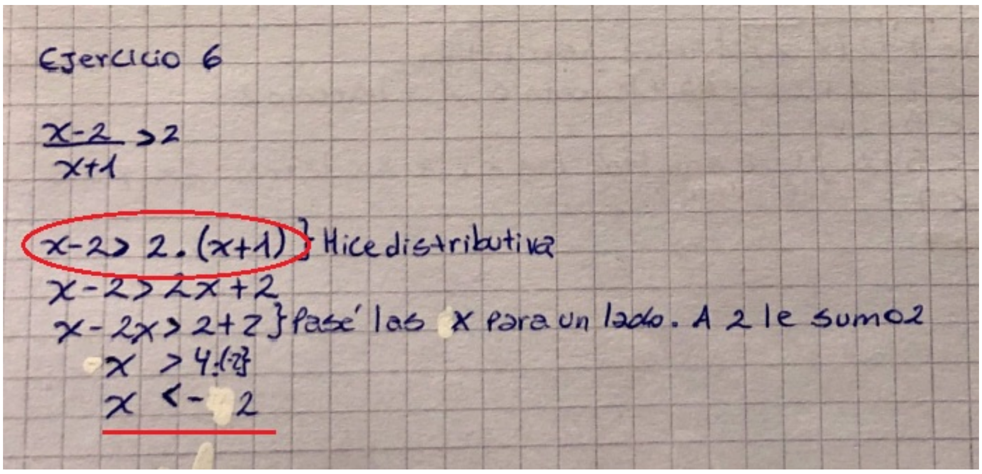


Figura 6.67: Respuesta del Alumno 21 al Ejercicio 6.

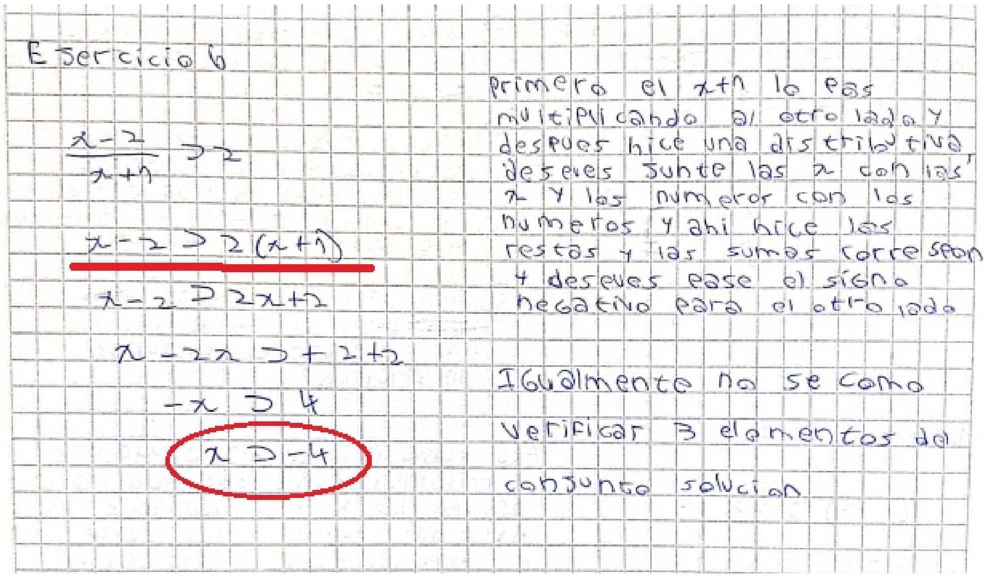


Figura 6.68: Respuesta del Alumno 9 al Ejercicio 6.

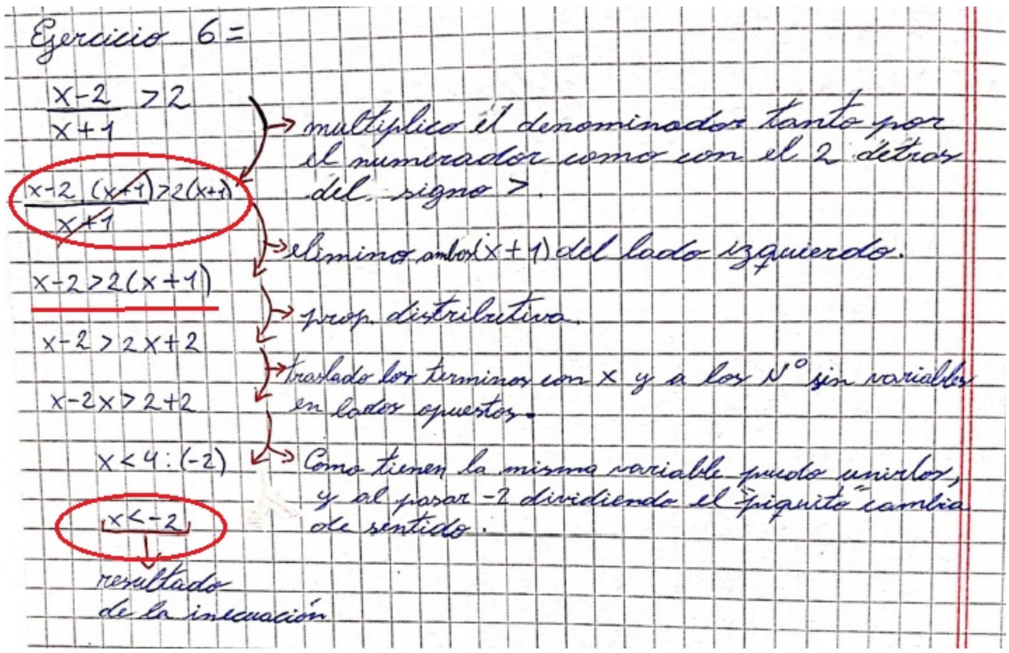


Figura 6.69: Respuesta del Alumno 18 al Ejercicio 6.

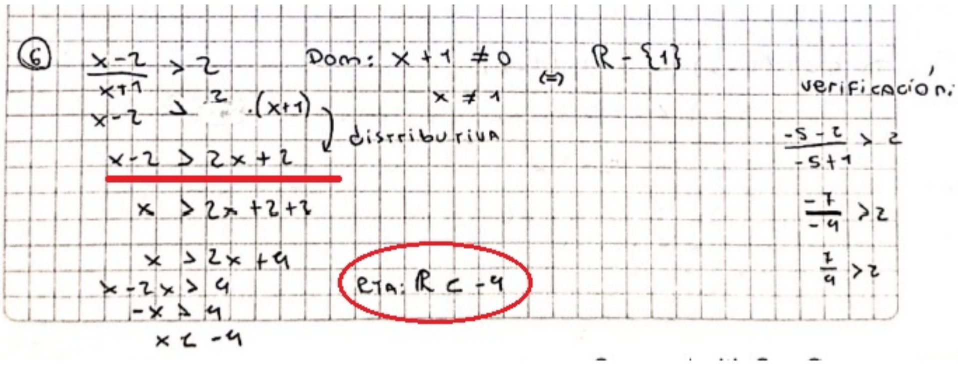


Figura 6.70: Respuesta del Alumno 17 al Ejercicio 6.

- **Estudia la desigualdad por casos de manera incorrecta**

Este error es cometido en un único caso que se muestra en el Figura 6.71. Se puede observar que el alumno analiza dos casos. En el primero de ellos, compara el numerador de la expresión con el número 2 y, en el segundo, compara la expresión del denominador con el número 2. En ningún momento del desarrollo explica el porqué de esta separación en casos. Se observa también que el conjunto solución está formado por números naturales.

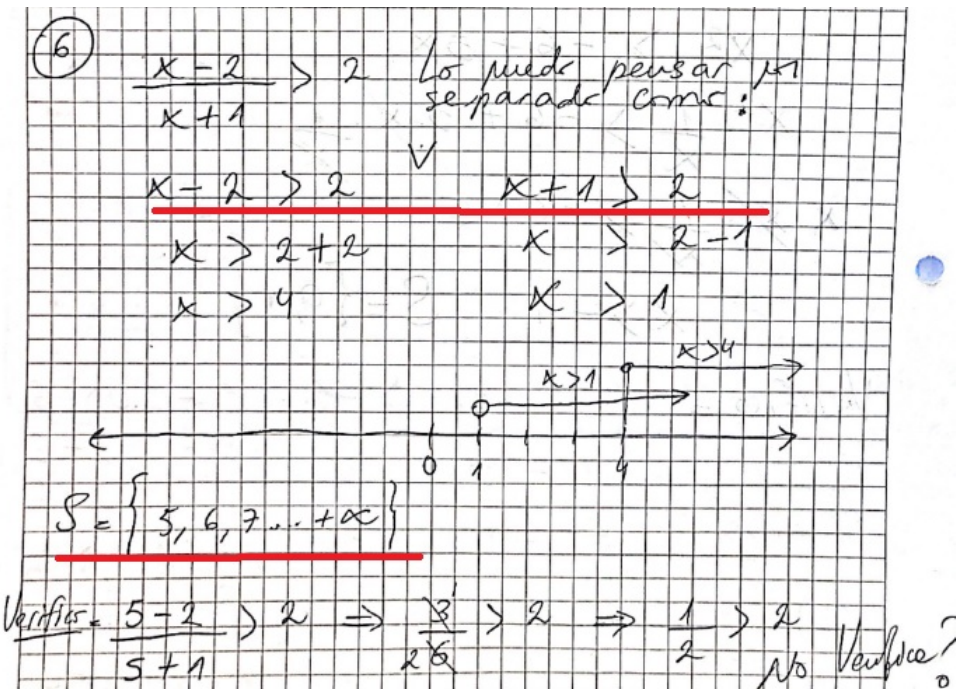


Figura 6.71: Respuesta del Alumno 14 al Ejercicio 6.

- **Errores de despeje.**

El siguiente ejemplo presentado en la Figura 6.72, muestra que el estudiante despeja los términos independientes tanto del numerador como del denominador y luego simplifica mal la fracción que obtuvo. Se observa también que en el último paso invierte el sentido de la desigualdad sin dar ningún tipo de justificación pero no lo ha tenido en cuenta en el conjunto solución..

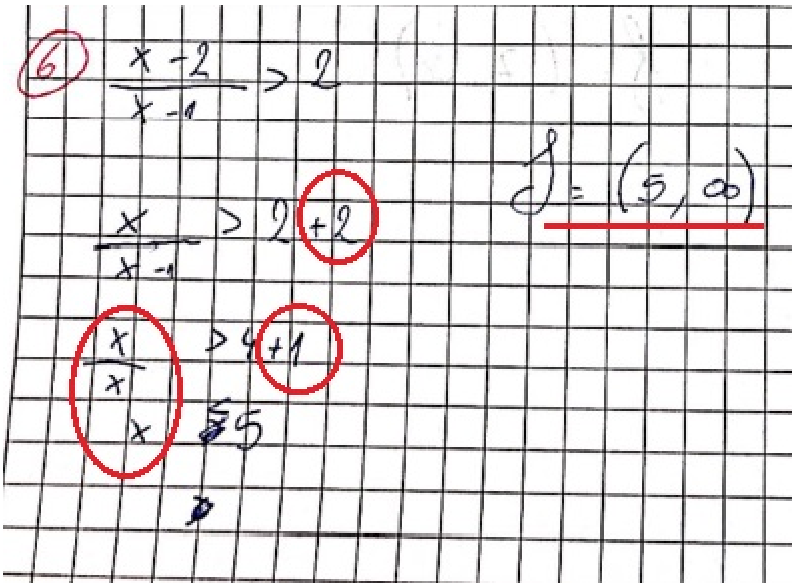


Figura 6.72: Respuesta del Alumno 8 al Ejercicio 6.

6.3. Clasificación de los errores detectados

A continuación se presenta una posible categorización de los errores detectados en el diagnóstico teniendo en cuenta la clasificación hecha por Radatz (1979), presentada en la Sección 4.6. Los tipos de errores detectados y analizados en la sección anterior son señalados en esta sección con una letra mayúscula y un número, según la categoría a la que mejor se ajusten, a los efectos de lograr una mejor visualización en los gráficos presentados posteriormente. Cabe aclarar, que cada categoría presentada por Radatz llevará una letra distinta y que, dentro de cada categoría, los errores distintos llevarán números distintos.

Categoría 1: Errores debido a la dificultad del lenguaje.

- **A1**: Mal uso de las expresiones matemáticas.
- **A2**: Error en la lectura de símbolos.
- **A3**: Error en la escritura del conjunto solución.
- **A4**: Mala interpretación de los resultados.

Categoría 2: Errores debido a dificultades para obtener información espacial.

- **B1**: Error al ubicar los resultados en la recta numérica.
- **B2**: Grafican mal las funciones.
- **B3**: No grafican las funciones.

Categoría 3: Errores debido a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.

- **C1**: No invierten el sentido de la desigualdad cuando multiplican o dividen por un número negativo.
- **C2**: Errores en el despeje y/o en las operaciones.
- **C3**: Dividen por cero al despejar la variable.
- **C4**: Multiplican ambos miembros por la expresión algebraica que figura en el denominador pero no tienen en cuenta el signo.

Categoría 4: Errores debido a la rigidez de pensamiento.

- **D1**: Intentan resolver el problema como si se tratase de una ecuación.
- **D2**: Encuentran las soluciones de la ecuación cuadrática con la fórmula resolvente pero no dicen cuál es el conjunto solución o bien responden mal.

Categoría 5: Errores debido a la aplicacion de reglas o estrategias irrelevantes.

- **E1**: A partir de un caso particular generalizan las soluciones.
- **E2**: Estudia la desigualdad por casos de manera incorrecta.

Una vez identificadas las categorías y los errores que corresponderían a cada una de ellas, se asignó a la corrección de cada ejercicio uno o más tipos de error, de acuerdo a las resoluciones observadas y mencionadas en la Sección 6.2. Cabe aclarar que como se contabilizan los tipos de error en los distintos ejercicios, el número total de errores por categoría podría superar al número de estudiantes. Los resultados de la clasificación hecha por ejercicio y por alumno pueden verse en el Cuadro 6.2.

ALUMNO	**EJ 1**	**EJ 2**	**EJ 3**	**EJ 4**	**EJ 5**	**EJ 6**
1	-	-	A4	D2	-	C4
2	A1	A3	-	-	-	-
3	A1	-	C2	-	-	-
4	A1	D1	D1	-	-	-
5	-	-	-	-	-	-
6	-	C1	C2	-	B2	-
7	A1 B1	C2	-	-	-	-
8	B1	C2 A3	C3	-	B2	C4
9	-	C1	A4	-	-	C4
10	A2 B1	C2	C2	C2	B3	-
11	A1 A2 B1	C1	C2	C2	-	-
12	B1	C2 A3	-	C2	-	-
13	A1	C2	-	-	-	-
14	-	C1	A4	C2	-	E2
15	-	E1	C2	D2	B2	C4
16	A1 B1	C1	C2	C2	-	-
17	-	C2	C2	-	B2	C4
18	-	-	-	-	-	C4
19	-	C2	A4	C2	-	-
20	-	C1	A4	D2	B3	-
21	-	-	-	C2	B3	C4
22	-	-	-	-	-	C2
23	-	-	A4	E1	B2	C4
24	-	A3	A4	A3	-	A3
25	-	A3	C3	-	-	-
26	-	-	A4	C2	B3	C4
27	-	A3	-	D2	B3	A3
28	-	C1	A3 A4	-	-	-

Cuadro 6.2: Errores según la categorización de Radatz.

A efectos de una mejor interpretación de los errores observados, en lo que sigue se presenta un análisis gráfico para cada categoría.

Categoría 1: Errores debido a la dificultad de lenguaje

Como se observa en la Figura 6.73, la mayor cantidad de errores detectados corresponde a la incorrecta escritura del conjunto solución (**A3**) y a la mala interpretación de los resultados (**A4**). Esto pareciera estar relacionado con el mal uso de las expresiones matemáticas, (**A1**) pues es de esperar que un alumno que tiene dificultades con la lectura y/o escritura de las expresiones matemáticas también tenga dificultades para escribir otro tipo de expresiones relacionadas con ellas como, por ejemplo, el conjunto solución de una inecuación.

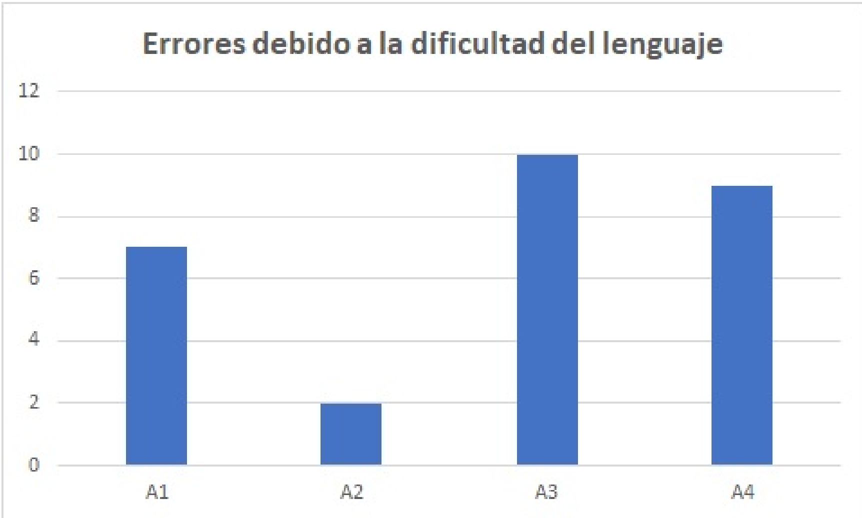


Figura 6.73: Cantidad de errores de la Categoría 1.

Categoría 2: Errores debido a dificultades para obtener información espacial

En la Figura 6.74 se observa que los errores detectados y agrupados en esta Categoría son relativamente similares. De los 16 casos contabilizados, las dificultades que se presentaron se encuentran entre el 31,25 % (**B2**) y (**B3**), y el 37,5 %, (**B1**).

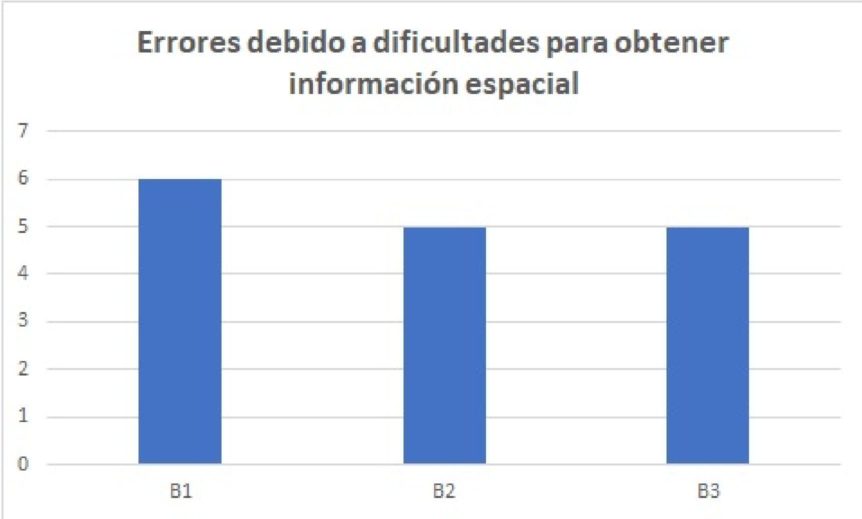


Figura 6.74: Cantidad de errores de la Categoría 2.

Categoría 3: Errores debido a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos

Tal como se observa en la Figura 6.75, 23 de los 41 casos contabilizados en esta Categoría, se corresponden con los errores de operatoria y/o despeje, (**C2**). Estos errores de tipo aritméticos y algebraicos, representan el 56 % de los casos, mientras que los errores que se derivan del mal uso de las propiedades de orden de los números reales como, por ejemplo, invertir el sentido de una desigualdad al multplicar por un número negarivo, (**C1**), son 7 de 41, lo que representa el 17 % de los casos. En cuanto a los errores que devienen de analizar el signo de una expresión algebraica que se multiplica a ambos miembros de una desigualdad, (**C4**), se han observado 9 de 41 casos, lo que representa aproximadamente el 22 %.

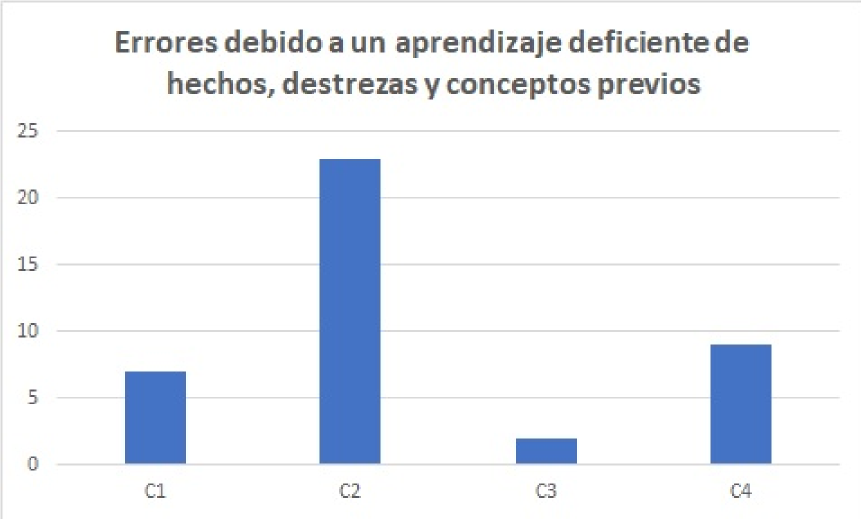


Figura 6.75: Cantidad de errores de la Categoría 3.

Categoría 4: Errores debido a la rigidez de pensamiento

Como se puede observar en la Figura 6.76, este tipo de errores son los menos frecuentes, pues se han contabilizado tan sólo 6 casos. El que más notoriedad tiene es el (**D2**) que refiere a la utilización de la fórmula resolvente para ecuaciones cuadráticas. Los alumnos que han encarado la resolución de la inecuación cuadrática, no han podido o no han sabido trasladar los resultados obtenidos mediante la fórmula a la situación planteada por lo que no han dado respuesta al problema o bien las respuestas dadas fueron incorrectas. Aquí ayudaría muchísimo el enfoque gráfico para dar respuesta a este problema.

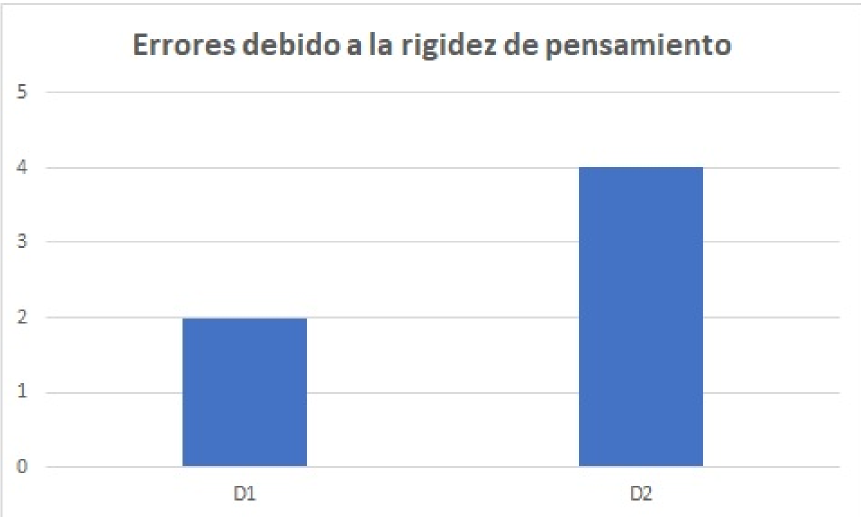


Figura 6.76: Cantidad de errores de la Categoría 4.

Categoría 5: Errores debido a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes

En la Figura 6.77 se observa que los casos analizados en esta Categoría han sido pocos. Se detectaron sólo 2 casos en los que trabajaron la inecuación como ecuación (**E1**) y 1 que realizó un estudio de casos de manera errónea (**E2**).

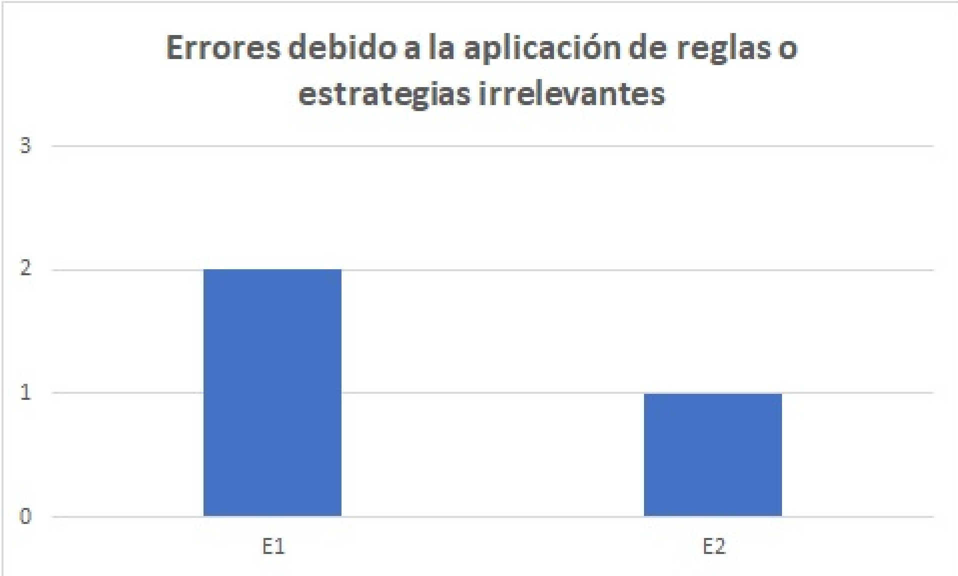


Figura 6.77: Cantidad de errores de la Categoría 5.

Este análisis sobre los errores detectados en la resolución de los ejercicios de la prueba diagnóstica permite vislumbrar que muchos de los errores cometidos por los estudiantes se deben a dificultades de tipo aritmética y/o algebraica. Es decir, en casi todos lo casos, el abordaje de los ejercicios ha sido exclusivamente algebraico, lo que ha puesto de manifiesto que muchos de los errores cometidos en la resolución fueron debido al incorrecto uso o aplicación de las propiedades algebraicas y de orden de los números reales.

También se han observado errores de interpretación, ya sea por una lectura incorrecta de la simbología matemática, por no saber representar gráficamente determinadas situaciones o bien, por no poder vincular los gráficos realizados con los procesos algebraicos puestos en juego en la resolución de algunos ejercicios. Respecto de esto último, la resolución de aquellos ejercicios que sugieren la representación gráfica, cuya intención es apoyar el proceso algebraico realizado por los alumnos, no se ha explicitado en ningún caso. Esta ausencia o deficiente habilidad para graficar hay que reforzarla o superarla, pues se considera que el enfoque gráfico muy probablemente ayudaría, en muchos casos, a responder a las situaciones planteadas de una manera mucho más simple.

A partir del análisis anterior, el cual nos permite contar con un entidimiento exhaustivo de las dificultades que presentan los estudiantes en la resolución de ineuaciones, como uno de los objetivos específicos para este trabajo, se propone generar un conjunto de sugerencias metodológicas que tengan en cuenta los errores detectados y tales que ayuden a mitigar las dificultades encontradas. En este sentido, teniendo en cuenta los aportes positivos que podría dar el enfoque gráfico a la resolución de este tipo de problemas, en el próximo Capítulo, se ofrece una propuesta didáctica en la que el enfoque gráfico cobra gran importancia, pues intenta otorgar mayor claridad conceptual y al mismo tiempo convertirse en una herramienta que valide un procedimiento algebraico llevado a cabo en la resolución de inecuaciones. Además, es posible vincular este abordaje gráfico de resolución de inecuaciones con algunos aspectos del estudio esquemático de funciones, tema central en las útlimas unidades del programa de la Unidad Curricular dónde se llevó a cabo esta experiencia.

Capítulo 7

Sugerencias metodológicas

7.1. Introducción

Como se sabe, la inecuación es un objeto matemático que se introduce en el transcurso de la educación secundaria. En el PESM, se retoma dicho objeto y se estudia con mayor profundidad. Es por ello que para estos alumnos no debería ser un objeto matemático novedoso ya que se supone que han trabajado y estudiado términos y simbología presentes en las inecuaciones como ser las desigualdades que, como es sabido, son introducidas cuando los estudiantes ordenan los números en la recta numérica. A pesar de que las inecuaciones se estudian durante la escuela secundaria, en el nivel superior se siguen viendo muchas carencias y dificultades a la hora de resolverlas, tal como se ha mostrado en el Capítulo 6.

Para minimizar este hecho, y en vistas de los errores cometidos detectados en la prueba diagnóstica, se propone una serie de actividades de integración junto con sugerencias metodológicas que pretende mejorar la enseñanza y aprendizaje de las inecuaciones mediante la introducción del enfoque gráfico cuya finalidad es dar sentido a las inecuaciones y relacionar el significado con los métodos algebraicos de resolución. El abordaje de este objeto matemático desde este enfoque pretende brindar a los alumnos herramientas para que éstos sean capaces de visualizar o intrepretar los resultados y no simplemente realizar un procedimiento sin saber, en más de una ocasión, qué es lo que se está realizando.

Tal como se ha mencionado en el Capítulo 3, la representación gráfica está cobrando importancia a la hora de llevar a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje de las inecuaciones. En su trabajo de investigación acerca de esta temática, Torres (2013) sostiene que enseñar desde un enfoque meramente procedimental no necesariamente alcanza la comprensión del objeto de estudio pues, a pesar de que a priori puede parecer que el alumno es capaz de resolver las inecuaciones que se le plantean, muchas veces da una solución a los ejercicios sin comprender lo que está haciendo realmente. Las representaciones gráficas ayudan a enseñar los conceptos desde un enfoque distinto al tradicional o algebraico con el fin de que los alumnos razonen esas soluciones y sobre todo puedan visualizarlas. Si bien en muchas ocasiones no puedan dar un resultado tan exacto como desde un método algebraico, con un método de resolución gráfica sí serán capaces de dar una solución aproximada y más intuitiva.

7.2. Sobre el diseño curricular

La Dirección Provincial de Educación Superior, en el diseño curricular del PESM, establece que la finalidad del espacio curricular Introducción al Cálculo debe ser la articulación entre el trabajo realizado en la escuela secundaria con el nivel terciario, y este trabajo debe tender al fortalecimiento de la formación de los ingresantes a través de un aprendizaje activo y creativo que intente recuperar los conocimientos de matemática adquiridos en el nivel anterior y abordarlos con mayor profundidad junto con las otras asignaturas del primer año en pos de facilitar la inserción de los estudiantes a la carrera. Dicho diseño propone que el estudiante, futuro profesor de Educación Secundaria en Matemática, vaya construyendo sus conocimientos progresivamente, recuperando y actualizándolos a partir de situaciones intra y extra-matemáticas que favorezcan la construcción y reconstrucción de elementos propios del cálculo, en funciones de una variable, ampliando y profundizando los saberes previos sobre las funciones. Por ello, los propósitos de la unidad curricular donde se abordan, entre otros temas, los objetos matemáticos estudiados en la presente investigación son:

- colaborar para que los estudiantes revisen conocimientos que han construido, los profundicen, enriquezcan y construyan otros nuevos en el marco de la enseñanza de los mismos,

- dar lugar para revisar, ejercitar y profundizar algunos contenidos matemáticos indispensables para fortalecer las destrezas, técnicas y habilidades que seguramente emplearán en las primeras asignaturas de la carrera,
- promover la utilización del Análisis Matemático para la resolución de problemas,
- promover la valoración e importancia de los conceptos fundamentales de Análisis Matemático en el estudio de distintas ciencias, y
- promover el uso de herramientas tecnológicas para propiciar aprendizajes específicos sobre los contenidos tratados en clase.

Los alumnos que ingresan al PESM inician el campo de la formación específica con "Cálculo real univariado" el cual se compone de las siguientes unidades curriculares: "Introducción al cálculo", correspondiente al primer año de la carrera, cuya finalidad es articular el trabajo con los saberes previos adquiridos en el nivel secundario; "Cálculo", correspondiente al segundo año de la carrera, destinada a favorecer la construcción y reconstrucción de elementos propios del cálculo diferencial e integral con funciones de una variable real; y "Complementos de Cálculo", correspondiente al tercer año de la carrera, destinada al trabajo con funciones de dos o más variables reales. Es por ello que, desde la asignatura "Introducción al Cálculo", espacio en el cual se llevó a cabo esta experiencia, y, a través de este trabajo, se ofrece una propuesta en la que se aborda la enseñanza y aprendizaje de las inecuaciones estudiadas en el nivel medio pero, se suma al estudio, el análisis de funciones. Es decir, se propone hacer hincapié en la vinculación entre el estudio de funciones y las inecuaciones. Este hecho permite poner énfasis en el registro gráfico con el fin de lograr una mayor claridad conceptual a la hora de resolver inecuaciones. Dicha propuesta, detallada en la Sección 7.4, consta de una serie de actividades en las que se propone a los estudiantes que ya ingresaron al PESM, vincular los métodos de resolución algebraicos con el estudio de funciones. Esta vinculación se va a obtener mediante el pedido de la detección y el posterior análisis de las funciones involucradas en las inecuaciones, pues el foco de la asignatura está puesto en el análisis de funciones y se considera un hecho oportuno para poder vincular dos métodos de resolución a fin de lograr una mayor claridad conceptual.

7.3. Consideraciones generales

Teniendo en cuenta lo que propone el diseño curricular y el análisis de las dificultades realizado en el Capítulo 6, en la Sección 7.4 se presentan algunas actividades similares a las trabajadas en la actividad de diagnóstico y se sugiere su abordaje desde el enfoque gráfico con el objetivo de reflexionar sobre lo trabajado en la actividad de diagnóstico y complementar el aprendizaje con lo estudiado a lo largo de la cursada. Para ello se tiene en cuenta que la secuencia de actividades será introducida en el segundo cuatrimestre del primer año, en la misma asignatura donde se llevó a cabo la experiencia, al finalizar la **Unidad 4** del programa de que se muestra a continuación.

Contenidos del programa de la asignatura Introducción al Cálculo

Unidad 1: Revisión de conceptos fundamentales.

Números. Números naturales. Números enteros. Módulo o valor absoluto. Números racionales. Expresión decimal. Operaciones. Fracciones y porcentaje. Números irracionales. Números reales. Potenciación. Radicación. Operaciones y propiedades. Intervalos acotados y no acotados. Ecuaciones e inecuaciones.

Unidad 2: Expresiones algebraicas.

Polinomios. Operaciones con polinomios: suma y resta, multiplicación. División. Regla de Ruffini. Teorema del resto. Raíces de un polinomio. Factorización. Expresiones algebraicas racionales. Operaciones: suma y resta, multiplicación y división.

Unidad 3: Funciones de una variable.

Definición. Representación de funciones. Dominio e imagen. Análisis gráfico. Raíces. Funciones crecientes y decrecientes. Tasa de cambio promedio. Funciones pares e impares. Funciones básicas. Identidad, cuadrática, cúbica, raíz cuadrada, homográfica. Función escalonada y definida por partes. Transformaciones rígidas de funciones básicas. Traslaciones horizontales y verticales. Simetrías. Composición de funciones. Función inversa.

Unidad 4: Funciones polinomiales y racionales.

Funciones lineales. Rectas. Ecuación de la recta. Paralelismo y perpendicularidad. La función módulo. La función cuadrática. Parábolas. Elementos de la parábola. Ecuación de segundo grado. Funciones polinomicas de grado mayor a dos. Esbozo gráficas. Raices reales. Multiplicidad. Ceros de funciones polinomiales. Función potencia. Estudio y esbozo de funciones potencia. Funciones racionales. Estudio esquemático de las funciones racionales.Dominio e imagen. Ceros. Nociones iniciales del concepto de límite. Asíntotas de las funciones racionales. Esbozo de gráficas.

Unidad 5: Funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.

Función exponencial y logarítmica. Definiciones. Propiedades. Gráficos. Ecuaciones e inecuaciones exponenciales y logarítmicas. Modelos exponenciales y logarítmicos. Funciones trigonométricas. Nociones de trignometría plana. Medición de ángulos en grados y en radianes. Seno , coseno y tangente de un ángulo. Gráficas de las funciones seno, coseno y tangente. Amplitud y período. Traslaciones.

Las actividades que se proponen en el presente Capítulo integrarán la resolución algebraica con el análisis de funciones, cuya intención es lograr que el alumno maneje de una mejor forma los distintos registros de representación, y pueda, en el futuro, resolver correctamente las situaciones problemáticas planteadas en relación a las inecuaciones. Los contenidos abordados en las **Unidades 1** y **2** proponen a los estudiantes trabajar con ecuaciones e inecuaciones desde un enfoque algebraico. La idea de esta propuesta es retomar la resolución de aquellas inecuaciones, sobre todo aquellas que presentaron mayor dificultad en la actividad de diagnóstico, y articular los contenidos estudiados en las cuatro primeras unidades del programa con el fin de lograr una mayor comprensión del objeto de estudio.

Teniendo en cuenta el análisis realizado en el Capítulo 6 donde se ha observado una gran cantidad de casos en los que los alumnos manifiestan no saber representar gráficamente las funciones dadas o bien lo hacen de manera incorrecta y que la propuesta se llevará a cabo en la asignatura Introducción al Cálculo, en la que el foco se pone en el análisis esquemático de funciones, es que para el diseño de las actividades se pone énfasis en la resolución mediante el enfoque gráfico.

Se recuerda que la secuencia de actividades será implementada en el segundo cuatrimestre al finalizar la **Unidad 4** del programa. Será implementada en una clase cuya duración es de tres horas. Esta secuencia ofrecerá a los estudiantes un trabajo que, si bien es meramente práctico, tiene la intención de abordar las actividades integrando los conceptos teóricos trabajados en la asignatura. De estos contenidos trabajados se recuperarán o volverán a utilizar los conjuntos numéricos junto a las operaciones y propiedades que fueron estudiados en la **Unidad 1** para justificar los procedimientos algebraicos, como así también el estudio y análisis de distintas funciones estudiadas en las **Unidades 3** y **4** para realizar un estudio gráfico de las desigualdades.

7.4. Secuencia de actividades

La secuencia de actividades propuesta presenta cuatro ejercicios de inecuaciones similares a los trabajados en la prueba diagnóstica. Tiene como finalidad no sólo la de trabajar cada actividad integrando los enfoques algebraico y gráfico y así lograr mejorar la comprensión del objeto matemático en estudio sino también la de reflexionar acerca de los errores y dificultades que se han detectado en el análisis de los resultados de la prueba diagnóstica presentada en el Capítulo 6.

7.4.1. Objetivos y conocimientos previos

Con las actividades que se proponen se espera que el alumno sea capaz de:

- abordar la resolución de inecuaciones relacionando los conceptos teóricos estudiados tanto en este espacio curricular como así también en los disitntos espacios curriculares que cursan;

- dadas dos funciones, plantear una desigualdad entre ellas y resolver la inecuación transformándola en otras equivalentes utilizando las propiedades algebraicas y de orden estudiadas en la **Unidad 1** de este espacio curricular;
- interpretar una inecuación planteada como una comparación entre funciones;
- utilizar el marco funcional para poder visualizar las situaciones planteadas;
- utilizar el análisis de las funciones estudiadas como herramienta para la resolución de una inecuación;
- vincular el conjunto de positividad o negatividad de una función con la resolución de la inecuación;
- hallar e implementar estrategias de resolución de inecuaciones cuadráticas;
- hallar estrategias de resolución de inecuaciones racionales;
- implementar mecanismos de verificación, asignando a la variable diversos valores que hagan que las desigualdades resulten verdaderas o bien falsas;
- integrar todo el trabajo realizado para construir el conjunto solución. Reflexionar sobre lo trabajado.

Los conocimientos previos necesarios para el abordaje de las actividades corresponden a las **Unidades 1** a **4** que ya han sido enunciadas previamente y estudiados durante el transcurso del primer cuatrimestre y mediados del segundo.

7.4.2. Actividades

A continuación se presentan las actividades que conforman la secuencia metodológica sugerida junto con los posibles abordajes que realizarían los estudiantes y las intervenciones esperadas a realizar por el docente.

Actividad 1:

Sean las funciones $f(x) = -3x + 1$ y $g(x) = 4$ definidas en su dominio natural.

a. Plantear y resolver la siguiente desigualdad $f(x) > g(x)$.

b. Elegir cuatro números reales que verifiquen la desigualdad planteada en el ítem anterior y cuatro números que no la verifiquen.

c. Representar en un mismo sistema de ejes cartesianos ambas funciones e identificar el valor de x para el cuál ambas funciones coinciden.

d. Teniendo en cuenta todo lo realizado hasta el momento, escribir el conjunto solución utilizando la notación de intervalos y marcar en el gráfico realizado dicho conjunto.

Intervenciones del docente

El problema presentado invita al alumno a pensar en una inecuación desde un marco funcional, es decir, se toman ambas funciones y se comparan en su dominio natural. A su vez, el primer ítem pide que se plantee y se resuelva la inecuación, por lo que será necesario abordarlo desde el marco algebraico comenzando por escribir las siguientes expresiones que son equivalentes entre sí:

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow -3x + 1 > 4$$

Hay que tener presente que resolver una inecuación consiste en hallar el conjunto solución o una descripción más simple, es por ello que muchas veces, resolver una inecuación algebraicamente, implica hacer transformaciones sucesivas por medio del empleo de propiedades de los números reales. De ahí la importancia de que el alumno sepa cuáles de ellas puede utilizar para obtener inecuaciones equivalentes. Por ello, el docente sugerirá que se revisen y transcriban las propiedades algebraicas y de orden de los números reales que van a utilizar para poder transformar la inecuación planteada en otra equivalente cuya expresión sea más simple.

Para este caso, las transformaciones sucesivas aplicadas a la inecuación planteada llevan a las siguientes expresiones equivalentes:

$$-3x + 1 > 4 \Leftrightarrow$$

$$-3x + 1 - 1 > 4 - 1 \Leftrightarrow -3x > 3$$

$$-3x : (-3) < 3 : (-3) \Leftrightarrow$$

$$x < -1$$

Se indicará al alumno que escriba la propiedad que utiliza en cada paso para asegurar que la nueva expresión obtenida sea equivalente a la anterior.

Para resolver a la consigna del ítem b. se invita al alumno a que seleccione distintos valores de x para que tanto la desigualdad propuesta como la última desigualdad equivalente obtenida resulten verdaderas o falsas. Para ello, se propondrá, por ejemplo, completar una tabla con el siguiente formato o similar:

Valor de x	$f(x)$	$g(x)$	Valor de Verdad de $f(x) > g(x)$
$x = 0$	1	4	Falso
$x = -1$	4	4	Falso
$x = -\frac{1}{3}$	2	4	Falso
$x = 5$	-14	4	Falso
$x = -2$	7	4	Verdadero
$x = -\frac{3}{2}$	$\frac{11}{2}$	4	Verdadero
...	...	...	...

Cuadro 7.1: Ejemplo de tabla que podría utilizarse en la Actividad 1.

El objetivo de construir esta tabla es que el alumno pueda observar qué sucede con las imágenes de las funciones para algunos valores de la variable independiente. En este caso particular, la imagen de $g(x)$ es constante y para los distintos valores de x seleccionados, algunas de las imágenes de $f(x)$ verifican la condición de ser mayor a 4 y otras no. Luego, conviene que el docente haga notar, si es que los alumnos no lo han hecho, que los valores de x que verifican la desigualdad propuesta justamente son aquellos que resultan ser menores a -1, tal como lo expresa la última desigualdad obtenida durante el proceso de resolución algebraica.

Una vez realizado cuadro, comienza a materializarse el conjunto solución. Para completar esta tarea y que el alumno pueda convencerse de que el trabajo realizado hasta el momento es correcto se solicita, en el ítem c., la representación gráfica de dichas funciones. La idea es que puedan visualizar a priori que ambas funciones coinciden en el punto de abscisa $x = -1$, tal como se observa en la Figura 7.1, y puedan comparar las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en intervalos que contengan valores menores y mayores a -1 .

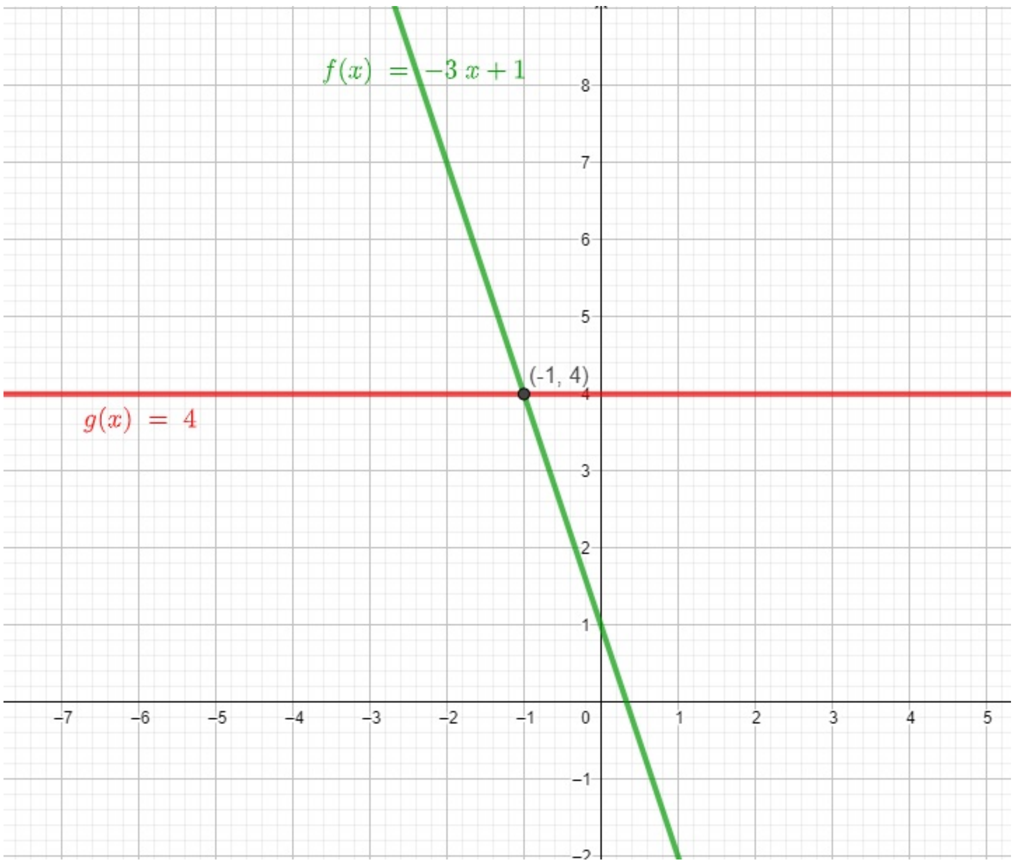


Figura 7.1: Gráfico de las funciones de la Actividad 1, ítem c.

Para hallar el valor de x para el cual las funciones coinciden se plantea la ecuación $f(x) = g(x)$ y el docente resaltaría la diferencia entre lo que debemos hallar como respuesta al problema y el dato que se pide en el ítem b. Es decir, se debería buscar resaltar la diferencia entre resolver una ecuación y una inecuación.

Ya hallado y visualizado en el gráfico el valor de x para el cual ambas funciones coinciden, es momento de revisar el trabajo realizado y cotejar si en el intervalo solución encontrado algebraicamente en el ítem a. se observa la relación existente entre las gráficas de las funciones, es decir, si efectivamente $f(x) > g(x)$ para $x < -1$.

En la Figura 7.2 se puede observar fácilmente que, en el intervalo $(-\infty; -1)$, pintado de color azul, la función $f(x)$ representada con una recta de color rojo, está por encima de la función $g(x)$, en este caso representada por una recta de color verde. Es así como se puede visualizar para qué valores de x se cumple $f(x) > g(x)$.

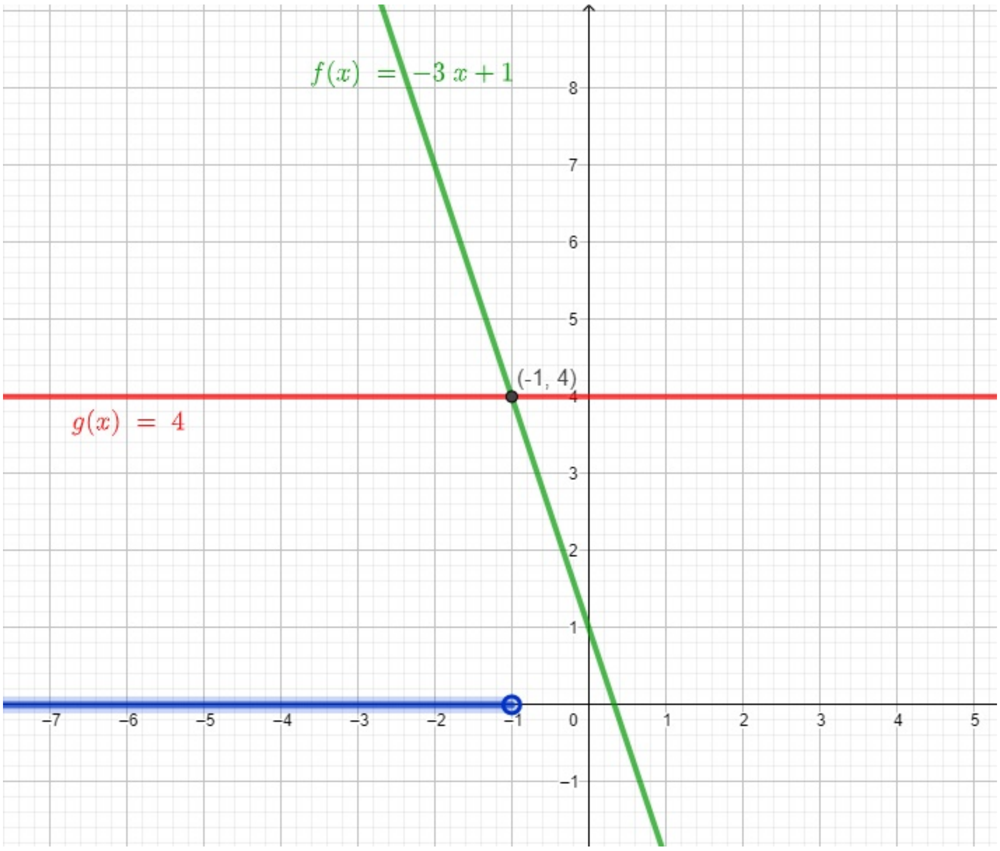


Figura 7.2: Gráfico de las funciones de la Actividad 1, ítem d.

Luego se construye el conjunto solución, que en este caso es el intervalo $(-\infty; -1)$, y se da respuesta a la totalidad del problema.

Actividad 2:

Resolver la siguiente inecuación:

$$2(x-3) \geq 8+2x$$

a. ¿Podrías pensar la situación planteada como una comparación entre dos funciones? ¿Cuáles serían esas funciones?

b. Resolver la inecuación y luego representar en un mismo gráfico las funciones identificadas en el ítem anterior.

c. ¿Para qué valores de la variable resulta la proposición verdadera? ¿Cuál es el conjunto solución?

Intervenciones del docente

En esta actividad, el problema es presentado desde un marco algebraico si bien en el ítem a. se invita al alumno a pensar la desigualdad desde un marco funcional. Por lo tanto se comienza a trabajar de manera similar a lo realizado en la primera actividad. Se identifican las funciones, que en este caso son dos funciones lineales: la función de la izquierda de la desigualdad que se puede denominar como $f(x) = 2(x-3)$ y la función de la derecha como $g(x) = 8+2x$.

Para abordar el ítem b. nuevamente se sugiere que se enuncien las propiedades utilizadas que permiten transformar la inecuación dada en una equivalente más simple que la presentada. En tal caso, se obtienen, por ejemplo, las siguientes inecuaciones equivalentes:

$$2(x-3) \geq 8+2x \Leftrightarrow 2x-6 \geq 8+2x \Leftrightarrow 2x-6+6 \geq 8+2x+6$$
$$\Leftrightarrow 2x \geq 14+2x \Leftrightarrow 2x-2x \geq 14+2x-2x \Leftrightarrow 0 \geq 14$$

Cabe aclarar que esta secuencia de inecuaciones es una alternativa posible pues no es la única sucesión de inecuaciones equivalentes.

En el análisis del diagnóstico llevado a cabo en el Capítulo 6 se ha observado que, llegado a este tipo de expresiones, los alumnos no saben qué responder dado que la variable ha “desaparecido”. Entonces se considera conveniente que grafiquen las funciones definidas en el ítem a. con la intención de que puedan visualizar qué relación existe entre ellas para luego poder interpretar la última desigualdad obtenida en este ítem.

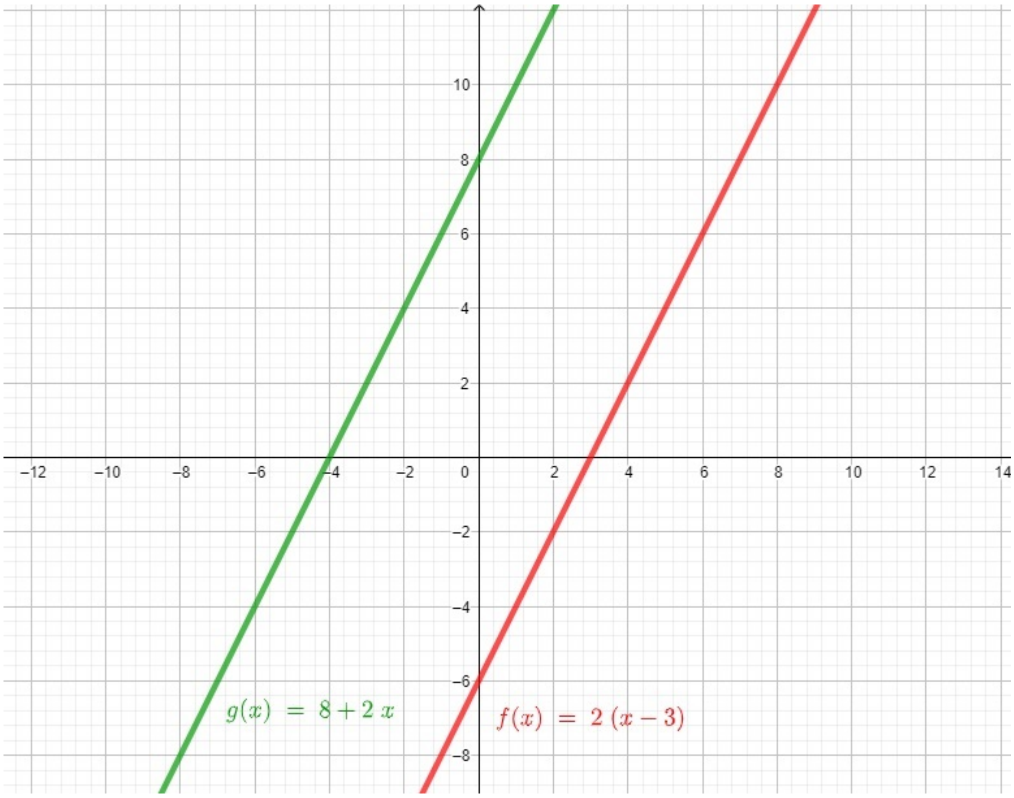


Figura 7.3: Gráfico de las funciones de la Actividad 2, ítem b.

Tal como se puede ver en la Figura 7.3, una vez graficadas las funciones, se observa que la función f, representada en color rojo, está por debajo de la función g, representada en color verde, para todo su dominio de definición. Por lo que resultará imposible que exista algún valor de la variable x que haga que la función $f(x) \geq g(x)$. Esto se evidencia en el hecho de que las rectas resultan ser paralelas no coincidentes, por lo tanto no existe, en este caso, un punto para el cual las funciones coincidan y, por ende, una función es “siempre mayor” que la otra, en este caso, $g(x) > f(x)$, para todo número real, lo que lleva a la conclusión de que la desigualdad resulta falsa cualquiera sea el valor de x. Observando esta situación se puede concluir que el conjunto solución no tendrá elementos, es decir, el conjunto solución será conjunto vacío.

Si aún quedan dudas al respecto de esta conclusión, en el ítem c. se les pregunta a los alumnos qué valores de la variable x hacen que la inecuación resulte verdadera y qué valores de la variable hacen que la proposición resulte falsa. Se invita a los alumnos a que seleccionen algunos valores de la variable x y los sustituyan en la inecuación propuesta en el ítem a. De esta forma, notarán que los resultados obtenidos serán todos falsos. Esta tarea tiene como finalidad convencer a los alumnos que la inecuación no tiene solución. Esto también se evidencia algebraicamente pues la última desigualdad escrita no depende de los valores que se asignen para que resulte o bien verdadera o bien falsa. Es decir, que la última inecuación resultará verdadera o falsa independientemente del valor de la variable x. En este caso, resulta evidente que la igualdad es falsa dado que 0 no es mayor o igual que 14, por lo tanto, no habrá números reales que la verifiquen, concluyendo así que el conjunto solución será vacío.

Finalizada esta actividad se los invitará a pensar qué sucede si la inecuación planteada hubiera sido $f(x) \leq g(x)$. De manera análoga se procede y se extraen las conclusiones para este caso.

Actividad 3:

Dada la siguiente inecuación:

$$-x^2 + 2x + 8 \geq 0$$

a. Hallar al menos tres valores de x que verifiquen la desigualdad.
b. La función cuadrática que interviene en la desigualdad está escrita en forma polinómica. Escribir dicha función utilizando otro tipo de ecuaciones y resolver la desigualdad para cada caso.
c. Esbozar la gráfica de la función cuadrática interviniente en la desigualdad y marcar sobre el gráfico el conjunto solución de la inecuación.

Intervenciones del docente

Este problema es muy amplio en cuanto a las estrategias de resolución. Podría abordarse de varias maneras. En el primer ítem los alumnos deberán explorar algunos valores de la variable que verifiquen la desigualdad. En este caso irán seleccionando valores de x y reemplazando en la expresión para saber si los resultados obtenidos son o no solución de la inecuación. El docente sugerirá que es conveniente graficar la función cuadrática para hacer más simple la elección de los valores de x. El gráfico de la función cuadrática interviniente en la inecuación puede verse en la Figura 7.4.

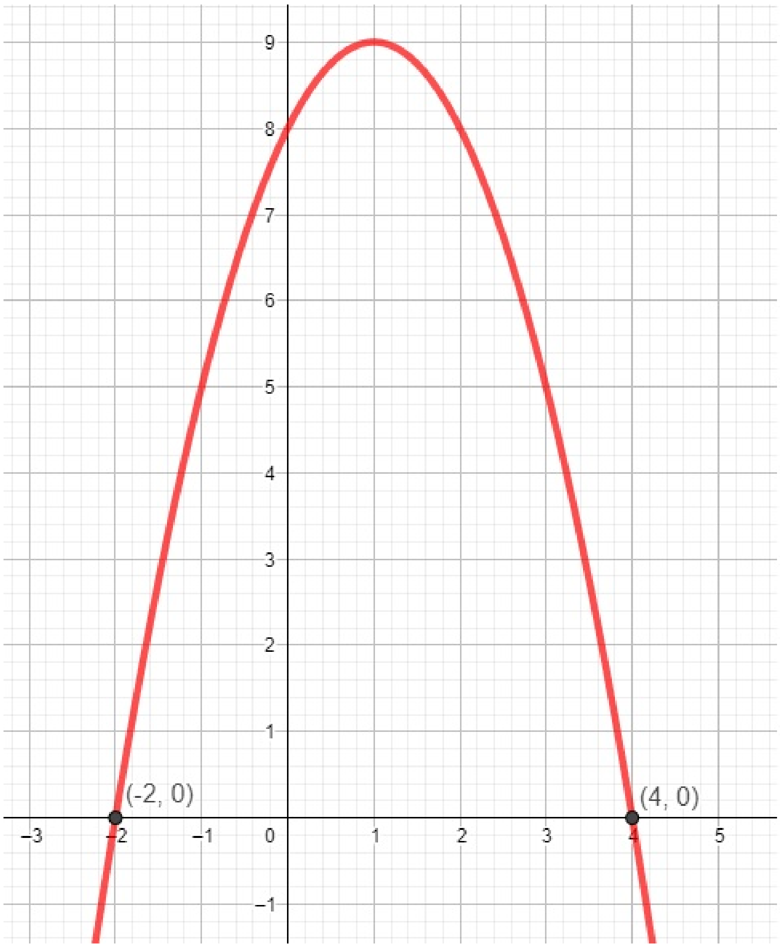


Figura 7.4: Gráfico de la función de la Actividad 3.

La consigna del ítem b. los invita a pensar la función $f(x) = -x^2 + 2x + 8$ en forma factorizada y en forma binómica. Estos temas se han abordado en el estudio de la función cuadrática donde fueron presentados los distintos tipos de ecuaciones en los que puede venir definida la función. La idea de esta consigna es notar que si la función se escribe en forma factorizada, en este caso la inecuación quedaría $-(x-4)(x+2) \geq 0$, es posible resolverla recordando la regla de los signos para el producto de números reales, es decir, pensando en el signo de cada uno de los factores para que el producto sea un número no negativo. En cambio si se expresa la función cuadrática en forma binómica, en este caso quedaría $-(x-1)^2 + 9 \geq 0$, es posible despejar la variable x y hallar el conjunto solución.

Para el caso en el que escriban la función cuadrática en forma factorizada, deben identificar las raíces de la función. En esta instancia se recuerda que hallar las raíces de una función cuadrática equivale a encontrar las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. Los valores hallados serán utilizados para expresar a la función dada en forma factorizada, quedando entonces planteadas dos inecuaciones equivalentes:

$$-x^2 + 2x + 8 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -(x-4)(x+2) \geq 0$$

Ahora sí, para el abordaje algebraico de esta inecuación se espera que los alumnos analicen el signo del producto de los factores. Una alternativa a plantearse es pensar la última inecuación escrita de la siguiente manera:

$$-(x-4)(x+2) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-4)(x+2) \leq 0$$

Quienes optan por escribir la inecuación en este formato deberán analizar las siguientes situaciones:

$$\begin{cases} x-4 \leq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \qquad \text{o} \qquad \begin{cases} x-4 \geq 0 \\ x+2 \leq 0 \end{cases}$$

Aquellos alumnos que encaren la resolución mediante esta estrategia deberán revisar los temas *Sistemas de ecuaciones* y *Unión e intersección de conjuntos*. Para poder llegar a una conclusión y así responder cuál es el conjunto solución de la inecuación planteada deben resolver cada uno de los sistemas.

Para el primer sistema planteado se tiene que:

$$\begin{cases} x-4 \leq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \qquad \text{o sea} \qquad \begin{cases} x \leq 4 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

De este sistema surge el intervalo $[-2; 4]$.

Y al resolver el sistema

$$\begin{cases} x - 4 \geq 0 \\ x + 2 \leq 0 \end{cases} \quad \text{o sea} \quad \begin{cases} x \geq 4 \\ x \leq -2 \end{cases}$$

resulta que este último no tiene solución, o bien, el conjunto solución es el conjunto vacío. Por lo tanto, el conjunto solución de la inecuación dada es el intervalo $[-2; 4]$ que se obtiene como resultado de unir al primero de los conjuntos solución hallados con el segundo conjunto solución que es el conjunto vacío.

La otra manera de escribir la función cuadrática interviniente en la desigualdad es la "forma binómica". En este caso, quienes opten por reescribir la inecuación de esta manera obtendrán las siguientes equivalencias:

$$-x^2 + 2x + 8 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -(x-1)^2 + 9 \geq 0$$

En esta situación es recomendable hacer notar que este formato de escritura tiene ventajas por sobre los otros dos dado que, pensar a la inecuacón de esta manera, hace más simple el despeje de la variable y en consecuencia resulta más inmediato encontrar el conjunto solución.

Quienes decidan ir por este camino deberán recordar el *Método de completar cuadrados* para pasar de la ecuación polinómica a la ecuación binómica, o bien deberán recordar cómo hallar las coordenadas del vértice de la parábola para poder escribir la función en dicho formato. Además, para el momento del despeje, deberán recordar, entre otras, las propiedades de valor absoluto. Nuevamente se sugiere que los alumnos indiquen qué propiedades utilizan en cada caso para obtener inecuaciones equivalantes. De esta manera, inecuaciones equivalentes a la dada podrían ser:

$$-x^2 + 2x + 8 \geq 0 \Leftrightarrow -(x-1)^2 + 9 \geq 0 \Leftrightarrow -(x-1)^2 + 9 - 9 \geq 0 - 9$$
$$\Leftrightarrow -(x-1)^2 \geq -9 \Leftrightarrow -(x-1)^2 : (-1) \leq -9 : (-1) \Leftrightarrow (x-1)^2 \leq 9$$
$$\Leftrightarrow |x-1| \leq \sqrt{9} \Leftrightarrow -3 \leq x - 1 \leq 3 \Leftrightarrow -3 + 1 \leq x - 1 + 1 \leq 3 + 1$$
$$\Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4$$

La última inecuación escrita define al conjunto solución.

Se invita a los alumnos a reflexionar sobre los distintos formatos en lo que puede escribirse una función cuadrática y las ventajas o desventajas que tiene cada uno de ellos a la hora de resolver una inecuación cuadrática de manera algebraica.

Ahora se aborda el ítem c. de la consigna. En él se pide que se grafique la función cuadrática. Este es un tema estudiado y trabajado en la **Unidad 4**.

Una vez realizado el gráfico se visualiza para qué valores de x la función resulta mayor o igual a cero y se marca el intervalo solución tal como se observa en la Figura 7.5.

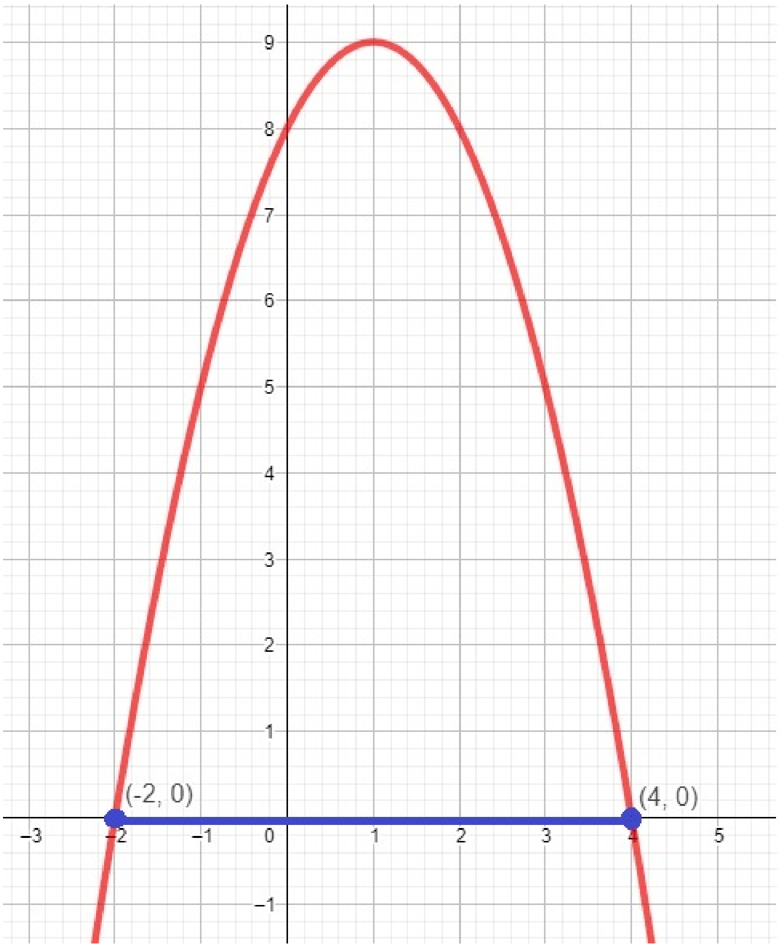


Figura 7.5: Gráfico de la función de la Actividad 3, ítem c.

En esta instancia se les pide a los alumnos que visualicen la situación y traten de vincular la inecuación con alguno de los temas que se han estudiado repecto del análisis gráfico de una función cuadrática. Por ello, se los irá orientando para que descubran que la inecuación planteada es equivalente a encontrar el conjunto de positividad de la función. En este caso además se deben incluir los ceros.

La idea es que adviertan que con el trazado de la gráfica de la función cuadrática pueden arribar al mismo conjunto solución pero de una manera más inmediata y sin tanto enredo de cuentas y cálculos algebraicos.

Cabe señalar que quienes hayan trabajado con la desigualdad:

$$-x^2 + 2x + 8 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - 8 \leq 0$$

estudiarán el conjunto de negatividad de esta nueva función cuadrática. Esta situación se puede observar en la Figrua 7.6. Aquí es importante resaltar que si bien el estudio ha cambiado dado que la función cuadrática interviniente en este caso es otra, dicha situación es equivalente a la anterior ya que el conjunto solución es el mismo.

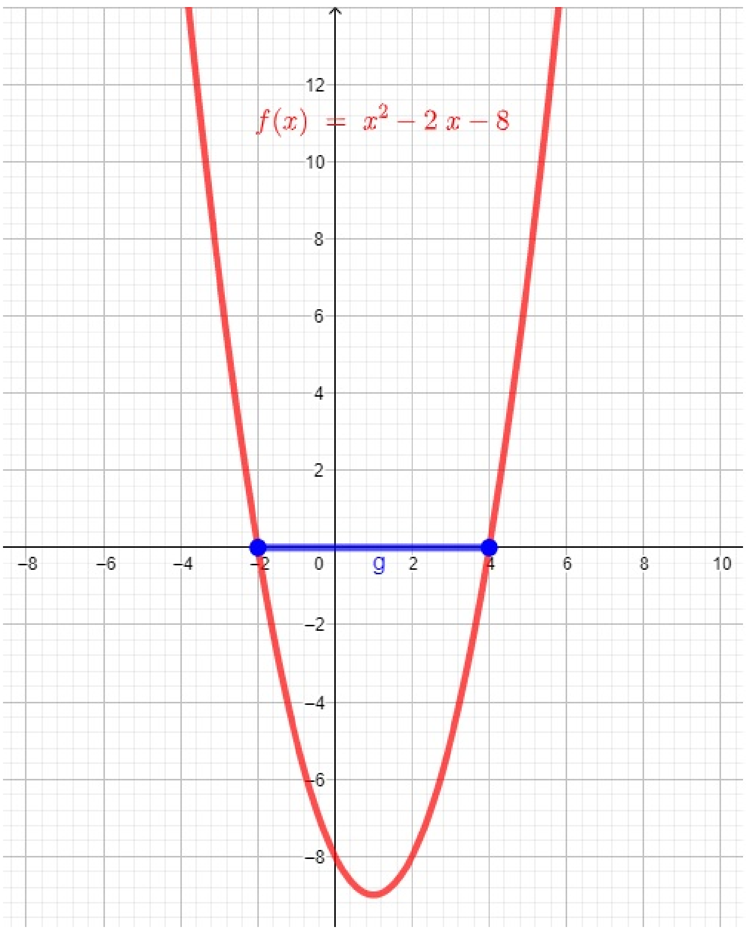


Figura 7.6: Alternativa de gráfico de la función de la Actividad 3, ítem c.

Por último, se presenta otra actividad en la que nuevamente se relaciona la resolución de una inecuación con la comparación gráfica de funciones.

Actividad 4:

Dada las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x-3} \text{ y } g(x) = 1$$

a. Graficar ambas funciones en un mismo sistema de ejes cartesianos.

b. Hallar al menos tres números reales que verifiquen $f(x) \leq g(x)$.

c. Hallar, si existen, valores de x tales que se verifique $f(x) = g(x)$.

d. Resolver la inecuación propuesta en el ítem b. de manera algebraica y observar los resultados obtenidos en el gráfico realizado en el ítem a.

Intervenciones del docente

Para esta actividad se tiene pensado que utilicen todo lo estudiado hasta el momento de gráfica de funciones. En este caso, realizarán el estudio esquemático de la función racional $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-3}$ y la compararán con la función constante $g(x) = 1$. Aquí mirarán los dominios de ambas funciones advirtiendo que la función $f(x)$ no está definida para $x = 3$. Realizado el estudio de la función $f(x)$ se grafican ambas funciones, tal como se muestra en la Figura 7.7.

Para poder responder al ítem b., podrían mirar el gráfico y elegir algunos valores de x que hagan verdadera la desigualdad. Este control servirá también para chequear, al menos parcialmente, si los gráficos realizados podrían ser correctos o parecen serlo. En caso de detectar alguna irregularidad, revisarán nuevamente el estudio, cotejarán con sus compañeros y podrán recurrir a una calculadora gráfica para corregir, si hiciera falta, los gráficos. Es importante aquí que puedan visualizar entre qué valores de x, $f(x)$ está por debajo de $g(x)$. Esta visualización permitirá anticipar, al menos de manera aproximada, el posible conjunto solución, con lo cuál resultará más sencilla la selección de los valores pedidos en el ítem b. En este caso podría sugerirse que construyan una tabla como la presentada en el Cuadro 7.1 que fue utilizada para responder a uno de los ítems de la Actividad 1.

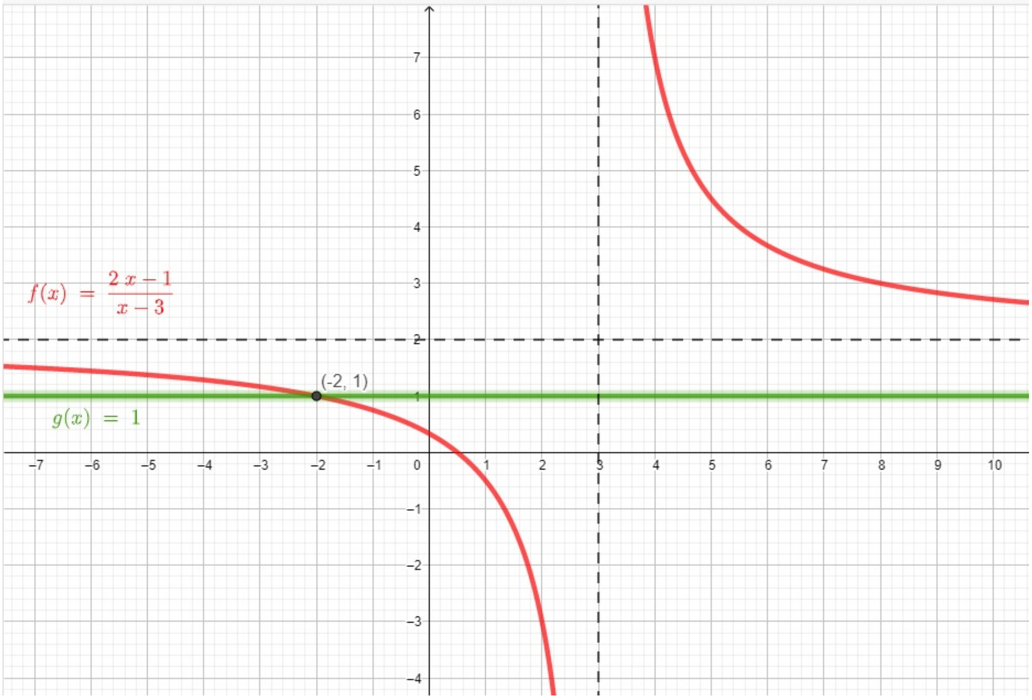


Figura 7.7: Gráfico de las funciones de la Actividad 4.

En la Figura 7.8 se observa el intervalo de color azul que, en este caso, representa al conjunto solución de la inecuación.

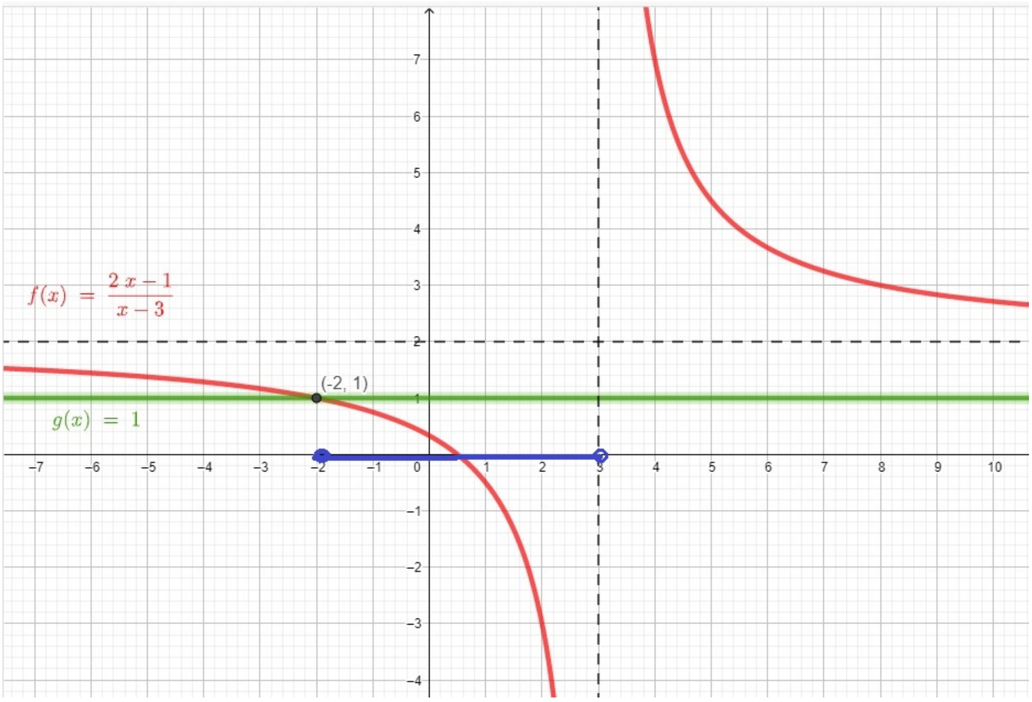


Figura 7.8: Gráfico de las funciones de la Actividad 4, ítem b.

La idea del ítem c. es resolver una ecuación racional. Es decir, buscar algebraicamente aquellos valores de x en los que ambas funciones coinciden, para así, nuevamente a través del gráfico, puedan chequear en qué intervalos las funciones no coinciden, es decir, en qué intervalos $f(x) > g(x)$ o $f(x) < g(x)$. Para hallar los valores de x para los cuales las funciones coinciden, deben resolver la ecuación racional $f(x) = g(x)$. Es decir:

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x-1}{x-3} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 1 = x - 3 \quad \Leftrightarrow$$
$$2x - 1 - x = x - 3 - x \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 = -3 \quad \Leftrightarrow$$
$$x - 1 + 1 = -3 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2$$

Para la resolución algebraica propuesta en el ítem d., se orientará a los alumnos para que trabajen con inecuaciones equivalentes más simples de resolver. Un ejemplo para este caso podría ser la siguiente secuencia de inecuaciones equivalentes:

$$f(x) \leq g(x) \quad \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x-3} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x-1}{x-3} - 1 \leq 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\frac{2x-1-x+3}{x-3} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+2}{x-3} \leq 0$$

Esta última desigualdad, equivalente a las anteriores, pueden resolverla o encararla al menos de dos maneras. La primera, como el estudio de casos, es decir, analizando el signo de la expresión numerador y la del denominador quedando así planteados dos casos:

$$\begin{cases} x+2 \leq 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \qquad \text{o} \qquad \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x-3 < 0 \end{cases}$$

La segunda opción es multiplicar miembro a miembro por $(x-3)^2$. Esta expresión es siempre positiva en el dominio de la función $h(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$, quedando planteado un producto de factores, $(x+2)(x-3) \leq 0$, en los que el estudio es similar a la opción anterior. También pueden notar que hallar el conjunto solución de la inecuación racional planteada es equivalente a hallar el conjunto solución de la inecuación cuadrática $(x+2)(x-3) \leq 0$ en el dominio de la función $h(x)$. Esta última inecuación es mucho más simple de resolver.

Por último, si no lo han relacionado, también se orienta para que vinculen el conjunto solución de la inecuación plateada en el ítem b. con el conjunto de negatividad en el que también se incluyen a los ceros de la función $h(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$. De esta manera, sólo estudiarán el signo de la función como lo han venido haciendo durante el año con todas las funciones trabajadas hasta el momento. En la Figura 7.9 se puede observar el conjunto de negatividad incluyendo los ceros de la función $h(x)$.

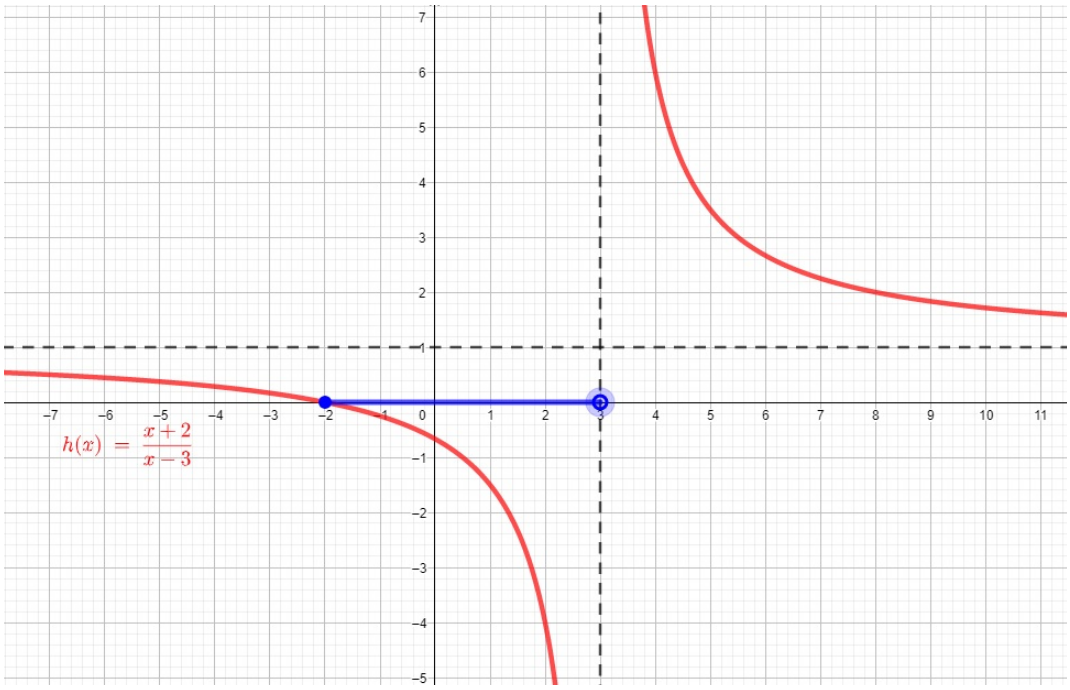


Figura 7.9: Gráfico de la función $h(x)$ de la Actividad 4, ítem d.

En definitiva, en esta secuencia de actividades, el concepto de inecuación se ha abordado desde dos perspectivas que provienen de diferentes construcciones mentales. La primera consiste en la inecuación vista como un objeto matemático manipulable en el que deben emplearse determinadas propiedades del conjunto de los números reales, como ser, operar, analizar equivalencias, verificar elementos de un conjunto o subconjuntos que satisfacen o no la inecuación, es decir, se debe analizar qué tipos de transformaciones son permitidas, qué alteraciones sufrió el conjunto solución después de ellas, cuál es el mejor método para resolver una inecuación dada y cómo minimizar los cálculos. La segunda, en la que la inecuación es analizada desde el punto de vista gráfico tratando de entender qué funciones pueden ser utilizadas para que el esbozo gráfico represente la inecuación que se quiere resolver, cuándo se deben comparar dos gráficos dados analizando los signos de las imágenes, o bien estudiar alguna característica de otra función que resulte de una inecuación equivalente a las anteriores.

La idea de esta propuesta es lograr que el estudiante explore los registros algebraico y gráfico, para que pueda comprender e interpretar el problema con dos posibles miradas diferentes y así entienda bajo qué condiciones puede transformar una inecuación, las razones por las cuales tales transformaciones son convenientes y por qué funcionan. Es decir, que se apunta a que los alumnos tomen conciencia de la legitimidad de las transformaciones empleadas para obtener inecuaciones equivalentes más simples y puedan establecer relaciones entre ellas. Además, el enfoque gráfico ayuda a que los estudiantes puedan contar con otro soporte que les permita afirmar o refutar lo que han construido algebraicamente, debido a que la visualización es una herramienta potente para lograr dicho fin.

Capítulo 8

Resultados obtenidos

Los errores y dificultades presentes en las prácticas matemáticas, puntualmente en la resolución de inecuaciones, han despertado mi interés por estudiar, analizar y reflexionar sobre ellos, principalmente, en el ámbito de la educación terciaria, en el PESM de la ciudad de Luján.

Para llevar a cabo este trabajo se comenzó con una revisión teórica acerca de esta temática. Durante dicha revisión se encontraron numerosos trabajos dedicados al estudio de los errores en el aprendizaje de la matemática en general y en el aprendizaje de las inecuaciones en particular. Luego de un análisis exhaustivo del estado del arte, se seleccionaron y presentaron investigaciones donde se explica la importancia del análisis de los errores en el aprendizaje de la matemática y las ventajas que ofrecen las herramientas de la TFS inmersas en el marco teórico EOS para la detección y análisis de los mismos, como así también investigaciones acerca de las dificultades presentes en la resolución de inecuaciones en distintos niveles del sistema educativo. Para profundizar aún más sobre el estudio de los errores en el aprendizaje de la matemática, se indagó acerca de las carácterísticas de los mismos y las posibles causas que los originan, haciendo foco en las clasificaciones y categorizaciones de errores existentes propuestas por diversos investigadores y expertos en el tema. En el caso de este trabajo, se seleccionó la categorización ofrecida por Radatz (1979) con la finalidad de poder crear esquemas para lograr una mejor interpretación de los errores.

A partir de allí, se definió como objetivo general de esta investigación "Estudiar los errores que cometen los alumnos ingresantes al PESM a la hora de resolver inecuaciones y desarrollar una propuesta didáctica que pueda ser utilizada para salvar dichos errores".

Teniendo en cuenta el objetivo general, se propuso como primer objetivo específico que, "mediante un examen diagnóstico, se pueda identificar y caracterizar los errores cometidos por los alumnos ingresantes al primer año de la carrera de PESM en la resolución de inecuaciones'. Para cumplir con este primer objetivo se comenzó por diseñar una evaluación diagnóstica. Con las actividades propuestas en dicha evaluación se buscó poner en evidencia las dificultades y errores cometidos por los alumnos ingresantes al PESM en la resolución de inecuaciones. Este diagnóstico fue implementado al inicio de la cursada del espacio curricular Introducción al Cálculo durante el año 2022 y fueron veintiocho los alumnos que lo realizaron.

Una vez implementada la evaluación diagnóstica, se procedió al análisis de los resultados y se llevó a cabo la corrección de los seis ejercicios propuestos. Esta primera corrección arrojó resultados que fueron agrupados en cuatro categorías referidas a la correcta o no resolución de los mismos. De dicho análisis, detallado en la Sección 6.1, se obtuvieron los siguientes resultados principales:

- Respecto del Ejercicio 1, que esencialmente consistía en escribir una expresión utilizando simbología matemática, se observó que la mayoría de los estudiantes resolvió bien esta actividad y el 25 % procedió mal. Sin embargo todos pudieron trabajarla en alguna escala, es decir, no se observaron casos en los que el ejercicio planetado no se haya resuelto.

- En cuanto al Ejercicio 2, más de la mitad de los estudiantes resolvieron mal la inecuación lineal mientras que casi el 30 % de los casos procedieron bien pero respondieron mal. Tan sólo un alumno resolvió correctamente este ejercicio y se observaron dos casos en los que la actividad no fue resuelta.

- Respecto del Ejercicio 3, el 40 % aproximadamente resolvió mal la inecuación mientras que el 32 % resolvió relativamente bien el ejercicio pero respondiendo mal o bien, omitiendo la respuesta. Sólo dos casos resolvieron bien la inecuación y el número de casos en los que el ejercicio no fue resuelto aumentó notoriamente respecto de los anteriores.

- Para el Ejercicio 4, en el que debían resolver una inecuación cuadrática, el porcentaje de estudiantes que dejó el problema sin resolver fue de casi el 50 %. Respecto al otro 50 %, si bien intentaron resolverlo, dejaron el ejercicio inconcluso o lo resolvieron mal.
- El Ejercicio 5 y el Ejercicio 6 consistían en resolver una inecuación racional y representar gráficamente las funciones que formaban parte de la inecuación. En ambos casos, el número de estudiantes que dejó el ejercicio sin resolver superó el 50 %. Los pocos alumnos que intentaron abordar estos ejercicios cometieron errores no sólo en la representación gráfica sino también al momento de resolver la inecuación racional, pues al despejar la variable omitieron estudiar el signo de una expresión algebraica por la cual multiplicaron ambos miembros de una desigualdad.

Se observó que a partir del Ejercicio 4 el número de alumnos que no respondió a las consignas aumentó notoriamente con respecto a los primeros tres ejercicios, aunque no se presentaron casos de producciones con los seis ejercicios totalmente sin respuesta.

Ya con esta información, se continuó con un análisis más detallado de los errores buscando así responder con el segundo de los objetivos específicos del presente trabajo. Es decir, se buscó detectar qué tipo de errores fueron los cometidos en cada uno de los ejercicios propuestos, para luego agruparlos en distintas categorías. Para este trabajo se utilizó la clasificación de errores propuesta por Radatz (1979). La elección de esta clasificación se basó en el hecho de que se considera una de las categorizaciones más relevantes y es una de las que mejor se ajusta a este trabajo dado que puede llevarse a cabo sobre los resultados obtenidos de la implementación de una prueba diagnóstica.

Del análisis detallado de los errores cometidos por los estudiantes en la resolución de los ejercicios propuestos en la actividad de diagnóstico, surgieron quince tipos de errores que posteriormente se agruparon en las categorías propuestas por Radatz (1979). Los errores mas relevantes, agrupados ya en categorías, fueron los siguientes:

- Respecto de la primera categoría de errores definida como "Errores debido a la dificultad del lenguaje", los tipos de error encontrados fueron: mal uso de las expresiones matemáticas, error en la lectura de símbolos, error en la escritura del conjunto solución y mala interpretación de los resultados. Para este caso, el mayor número de casos observados fue respecto a la mala escritura del conjunto solución seguido de una mala interpretación de los resultados.
- Los tipos de errores ubicados en la categoría "Errores debido dificultades para obtener información espacial" fueron: error al ubicar los resultados en la recta numérica, graficar mal las funciones y no graficar las funciones. Se observó que la mayor cantidad de errores se encontró en la ubicación de los resultados en la recta numérica seguido de errores relacionados con la gráfica de funciones.
- En la categoría "Errores debido a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos" se encontraron los siguientes tipos de error: no invertir el sentido de la desigualdad cuando multiplican o dividen por un número negativo, errores en el despeje y/o en las operaciones, dividir por cero al despejar la variable y multiplicar ambos miembros por la expresión algebraica que figura en el denominador pero sin tener en cuenta el signo. Para este caso, fue notoria la cantidad de casos observados en cuanto a errores de operatoria y/o despeje.
- Para la categoría "Errores debido a la rigidez de pensamiento" se encontraron dos tipos de errores: intentar resolver el problema como si se tratase de una ecuación y encontrar soluciones de la ecuación cuadrática con la fórumula resolvente pero sin decir cuál es el conjunto solución. Aquí se observó que la mayor cantidad de casos estuvo relacionado con las soluciones de una ecuación cuadrática. Los estudiantes no supieron cómo vincular los resultados obtenidos con la respuesta que debían dar en el Ejercicio 4.

- Por último, para la categoría "Errores debido a la aplicación de estrategias irrelevantes" los tipos de error hallados fueron: a partir de un caso particular generalizar las soluciones y estudiar la desigualdad por casos de manera incorrecta. En esta categoría observaron dos casos para el primer tipo de error y tan sólo uno para el segundo.

Al finalizar este estudio, se observaron dos cuestiones relevantes. La primera de ellas fue que todos los abordajes realizados por los estudiantes fueron meramente algebraicos. No hubo casos donde el alumno se apoyase en un gráfico para resolver alguno de los ejercicios. La segunda cuestión fue que todos los ejercicios en los que se pedía la representación gráfica han sido mal resueltos o estaban incompletos, ya sea porque la mayoría de los estudiantes manifestaron no saber graficar o porque quiénes sí graficaron, lo hicieron de manera errónea.

Cabe aclarar que todos los tipos de errores detectados en la corrección fueron ubicados en la categoría correspondiente, sin quedar tipos de errores sin agrupar. Es decir, cada categoría propuesta por Radatz contenía al menos un tipo de error.

Luego del análisis descriptivo expuesto en el Capítulo 6, se procedió a presentar una serie de actividades cuya intención era promover el aprendizaje reflexivo y la disminución de errores en la resolución de inecuaciones, tal como se planteó en el tercero de los objetivos de este trabajo. Teniendo en cuenta que los estudiantes han mostrado ciertas dificultades respecto de la representación gráfica de funciones y que los abordajes de los problemas propuestos en la evaluación diagnóstica fueron meramente algebraicos (aunque no siempre resolviéndose de forma correcta), es que la metodología elegida para la propuesta se centró en la resolución de inecuaciones bajo un enfoque mixto, es decir, se intenta mejorar el abordaje algebraico y se enfatiza el enfoque gráfico para favorecer la relación entre los registros. Dicha elección tiene como objetivo conseguir que los estudiantes adquieran otro tipo de herramientas que les sean útiles para validar los procesos puestos en juego en la resolución de las inecuaciones. La propuesta realizada en el Capítulo 7 constó de una serie de 4 actividades similares a las propuestas en la evaluación diagnóstica que a su vez fue acompañada de sugerencias metodológicas y de posibles intervenciones del docente.

En resumen, el trabajo realizado en la presente investigación cumplió con los objetivos específicos pues, en una primera instancia, se realizó un examen diagnóstico con el objetivo de identificar y caracterizar los errores cometidos por los estudiantes que ingresan al PESM. A partir de allí, se analizaron los errores y dificultades presentados en las producciones de los alumnos para luego poder agruparlos y categorizarlos según la clasificación de errores propuesta por Radatz (1979). Este análisis permitió repensar, reflexionar y presentar una propuesta metodológica que intenta promover la disminución de errores en la resolución de inecuaciones y al mismo tiempo generar un aprendizaje más significativo e integral.

Capítulo 9

Conclusiones

9.1. Reflexiones finales

El objetivo principal del presente trabajo fue estudiar los errores cometidos en torno al tema inecuaciones por los alumnos que ingresan al PESM de la ciudad de Luján. El objeto matemático inecuaciones fue elegido por varias razones:

- las desigualdades matemáticas están presentes en muchos temas de matemática y a lo largo de todas las asignaturas de la carrera,
- el tratamiento que se le da al tema durante el primer año de carrera es escaso y poco reflexivo,
- la presentación de dicho tema en los libros de textos que utilizan los alumnos de nivel superior es abstracta, llena de algoritmos, recetas y propiedades a recordar y poco se reflexiona en torno al tema,
- los alumnos trabajan con las inecuaciones de manera automática, como si se tratase de ecuaciones, y no reflexionan en torno a las soluciones, y, por último,
- muchos alumnos presentan serias dificultades de operatoria y en la resolución de inecuaciones se hacen visibles.

Luego de realizar un recorrido por varias investigaciones que abordaron este tema, se realizó una actividad de diagnóstico cuya finalidad fue la de indagar sobre los procesos puestos en juego a la hora de resolver inecuaciones para posteriormente poder analizarlos y detectar errores y dificultades presentadas en cada actividad. Las dificultades que considero más relevantes y que confirman las hipótesis planteadas en la presente investigación fueron las siguientes:

- dificultades en torno a las operaciones, es decir, errores del tipo aritmético o algebraico. A lo largo de toda la actividad de diagnóstico se han observado: errores de operatoria; de mal uso de las propiedades algebraicas y de orden de los números reales; errores tales como mal uso de la propiedad distributiva, de pasaje de términos, de simplificación; errores en la separación de términos, de despeje, etc. Este tipo de errores se observaron, en general, en la mayoría de las actividades propuestas. Esto confirma la cuarta hipótesis planteada, es decir, confirma que varios alumnos ingresantes a la carrera PESM tienen dificultades para operar algebraicamente.

- dificultades para interpretar los resultados. Se han observado algunos casos en los que los estudiantes proceden de manera correcta hasta cierto punto, pero llegado el caso de situaciones como $0 < 7$ o bien $0x < 7$ no logran interpretar la desigualdad y hasta, en algunos casos, intentan despejar x dividiendo por cero ambos miembros de la desigualdad. Situaciones como esta me llevan a pensar que los estudiantes no sólo no saben interpretar los resultados sino que también tienen dificultades para comunicarlos pues hubo casos en los que la justificación a la respuesta dada consistía en el relato ordenado de las acciones que fueron llevadas a cabo. Esto evidencia que algunos estudiantes tienen dificultades para argumentar pues confunden argumentación con explicación de lo realizado. Ante situaciones como las presentadas, tampoco se detuvieron a reflexionar: ¿qué significa una expresión del tipo $0x < 7$?, ¿para qué valores resultaría verdadera o falsa la desigualdad?, etc. Simplemente, en muchos casos, siguieron despejando de manera automática sin detenerse a pensar en lo que estaban haciendo. Esto da muestras de lo planteado en la segunda hipótesis de esta investigación, pues muchos alumnos poseen falta de argumentación y problemas de comunicación.

- dificultades para representar gráficamente. Estos casos fueron los más observados a lo largo de toda la actividad. La gran mayoría de los estudiantes no supo graficar las situaciones pedidas y aquellos que lo hicieron, lo graficaron mal. Fue notoria la gran cantidad de casos en los que manifestaron no saber representar funciones en el plano cartesiano. Considero que este tipo de dificultades está vinculado al hecho de que el tratamiento que se le otorga a la resolución de inecuaciones es meramente algebraico, es decir, no se vincula la resolución de inecuaciones a otros contextos que no sea el algebraico, por lo que esta situación me lleva a confirmar la tercera hipótesis planteada que afirma que el tratamiento que se la otorga a la resolución de inecuaciones no considera todos los componentes necesarios para su aprendizaje a partir de su complejidad.

Todos los errores detectados y analizados en el Capítulo 6 dejan en evidencia que son muchos los alumnos que cometen errores en la resolución de las inecuaciones y que poco se reflexiona sobre el trabajo realizado, pues han dado respuestas a los ejercicios que se contradicen con el proceso de resolución llevado a cabo. Estas situaciones confirman que los alumnos ingresantes al PESM no sólo presentan dificultades en la resolución de inecuaciones sino que tampoco reflexionan sobre ello, tal como se planteó en la primera hipótesis de la presente investigación.

Analizados ya los resultados y teniendo mayor claridad acerca de cuáles fueron las dificultades que presentaron los estudiantes, se ofreció una serie de actividades con sugerencias metodológicas que invitan a replantear la manera de enseñar y de aprender estos temas, sobre todo porque estos estudiantes serán profesores de matemática que también deberán enseñar inecuaciones en la escuela secundaria. El objetivo entonces es lograr disminuir los posibles errores que los alumnos cometen en relación a este objeto matemático. Por ello, se diseñó una serie de actividades que integran muchos de los contenidos trabajados en el espacio curricular donde se llevó a cabo esta experiencia, haciendo hincapié en las ventajas que ofrece el enfoque gráfico a la hora de resolver inecuaciones.

El trabajo realizado develó la necesidad de ofrecer a los estudiantes, en este caso que ingresan a una carrera docente, herramientas que le permitan llevar a cabo un proceso de resolución de inecuaciones de una manera más simple, integral y fluida con el objetivo de garantizar un aprendizaje efectivo, con clara aprehensión de conceptos y minimización de errores. Considero que es importante que se estimule la reflexión en cuanto a los errores cometidos, como así también a contrastar distintas maneras de resolución, elegir estrategias y poder visualizar las distintas situaciones planteadas, pensar en problemas equivalentes a los dados, etc. A su vez, esto ofrece un abanico de posibilidades en torno a la resolución que apunta a minimizar los errores y permite a los estudiantes adquirir herramientas de argumentación y validación de los resultados cuya finalidad es mejorar la comprensión del estudio de, en este caso, las inecuaciones.

El propósito de esta tesis no sólo fue estudiar y analizar los errores cometidos por los estudiantes en torno a la resolución de inecuaciones, sino también ayudar a que el docente reflexione junto a sus alumnos sobre los errores cometidos en relación a la resolución de inecuaciones y también a los diferentes objetos matemáticos que estarán presente a lo largo de toda su estadía en el profesorado y en su futura vida profesional.

9.2. Trabajos futuros

El estudio realizado acerca de los errores cometidos en la resolución de inecuaciones permitió reflexionar y ofrecer una serie de sugerencias metodológicas para su abordaje. Los desafíos que quedan por delante son:

- implementar la secuencia metodológica en el primer año del Profesorado de Matemática, analizar los resultados obtenidos y compararlos con los resultados de la prueba diagnóstica realizada en el marco de este trabajo.
- ampliar el estudio a otros contenidos matemáticos del espacio curricular con el fin de mejorar la comprensión de los mismos en estudiantes del PESM.

Bibliografía

Abrate, R., Pochulu, M., y Vargas, J. (2006). Errores y dificultades en matemática: análisis de causas y sugerencias de trabajo. *Villa María: Universidad Nacional de Villa María*.

Aguerrea, M., Solís, M. E., y Huincahue, J. (2022). Errores matemáticos persistentes al ingresar en la formación inicial de profesores de matemática: El caso de la linealidad. *Uniciencia*, *36*(1), 1-18.

Arnawa, M., Nita, S., y Yerison. (2019). Errors and misconceptions in learning elementary linear algebra. *Journal of Physics: Conference Series*, *1321*(2), 1-6.

Astolfi, J. P. (2004). El error, un medio para enseñar. *Díada/SEP Biblioteca para la actualización del Magisterio. México*, 7–25.

Azevedo, J. P., Hasan, A., Goldemberg, D., Geven, K., y Iqbal, S. A. (2021). Simulating the potential impacts of covid-19 school closures on schooling and learning outcomes: A set of global estimates. *The World Bank Research Observer*, *36*(1), 1-40.

Aznar, A., Baccelli, S., Figueroa, S., Distéfano, M. L., y Anchorena, S. (2016). Las funciones semióticas como instrumento de diagnóstico y abordaje de errores. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *30*, 670-690.

Barbosa, K. (2003). La enseñanza de inecuaciones desde el punto de vista de la teoría apoe. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *6*(3), 199-219.

Barbosa, K. (2006). *Inecuaciones: un análisis de las construcciones mentales de estudiantes universitarios* (Tesis de Doctorado, Instituto Politécnico Nacional, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada). Descargado de `http://tesis.ipn.mx/handle/123456789/1732`

Bernardis, S. (2014). *Rupturas en el tratamiento de las desigualdades matemáticas* (Tesis de Maestría, Universidad Nacional del Litoral). Descargado de http://hdl.handle.net/11185/716

Bernardis, S., Nitti, L., y Scaglia, S. (2017). Indagación de la historia de las desigualdades matemáticas. *Educación matemática*, *29*(3), 161-187.

Booth, L. R. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors: A report of the strategies and errors in secondary mathematics project.* Nfer Nelson.

Borello, M. (2013). *Relación entre las concepciones del maestro y el aprendizaje de los alumnos en el caso de las desigualdades. un estado del arte* (Tesis de Maestría, Instituto Politecnico Nacional). Descargado de http://repositoriodigital.ipn.mx/handle/123456789/11701

Borello, M., y Lezama, J. (2009). Hacia una resignación de las desigualdades e inecuaciones a partir de las prácticas del profesor. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *(24)*, 921–929. Descargado de https://www.clame.org.mx/documentos/alme24.pdf

Boyer, C. B., y Merzbach, U. C. (2011). *A history of mathematics.* John Wiley & Sons.

Cadenas, R. (2007). Carencias, dificultades y errores en los conocimientos matemáticos en alumnos del primer semestre de la escuela de educación de la universidad de los andes. *Orbis: revista de Ciencias Humanas*, *2*(6), 68-84.

Cai, J., y Knuth, E. (2011). *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives.* Springer Science & Business Media.

Chavez, A. (2009). Errores en el aprendizaje de la función afín: un análisis ontosemiótico. *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa*, *31*(2), 1315-1323.

Chevallard, Y. (1992). Concept fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *12*(1), 73-112. Descargado de https://revue-rdm.com/1992/concepts-fondamentaux-de-la-didactique/

Contreras, A., Font, V., Luque, L., y Ordóñez, L. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *25*(2), 151-186.

Contreras, A., y Ordóñez, L. (2006). Complejidad ontosemiótica de un texto sobre la introducción a la integral definida. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *9*(1), 65-84.

D'amore, B. (2003). The noetic in mathematics. *Scientia paedagogica experimentalis*, *39*(1), 75-82.

Dávila, J. (2018). *Idoneidad didáctica para el aprendizaje de las medidas de tendencia central de estudiantes de educación básica, mediante el enfoque ontosemiótico* (Tesis de Maestría, Universidad Tecnológica de Pereira). Descargado de `https://hdl.handle.net/11059/9593`

Davis, R. (1984). *Learning mathematics: The cognitive science approach to mathematics education.* Greenwood Publishing Group.

De La Torre, S. (2004). *Aprender de los errores: el tratamiento didáctico de los errores como estrategias innovadoras.* Bueno Aires: Magisterio del Río de la Plata.

Del Puerto, S., Minnaard, C. L., y Seminara, S. (2006). Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las matemáticas. *Revista Iberoamericana de educación*, *38*(4), 1-13. doi: 10.35362/rie3842646

Díaz Quezada, V., y Poblete, Á. (2019). Competencias matemáticas: Desempeño y errores en la resolución de problemas de límites. *Paradigma*, *40*(1), 358-383.

Diez, M. (1995). *Sobre la simbolización en el álgebra. aplicación al proceso de aprendizaje de las desigualdades en educación secundaria* (Tesis de Doctorado, Universidad Complutense de Madrid, España). Descargado de `http://www.ucm.es/BUCM/tesis/199`

Distéfano, M. L., Aznar, M. A., y Pochulu, M. (2012). Errores asociados a la representación geométrica-vectorial de números complejos: un análisis ontosemiótico. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *30*, 61-80.

Doz, D. (2021). Students' mathematics achievements: A comparison between pre-and post-covid-19 pandemic. *Education and Self Development*, *16*(4), 36-47.

Duval, R. (2000). Basic issues for research in mathematics education. *ERIC*(ED466737), 55-69. Descargado de `https://eric.ed.gov/?id=ED466737`

Engler, A., Gregorini, M. I., Müller, D., Vrancken, S., y Hecklein, M. (2004). Los errores en el aprendizaje de matemática. *Premisa*, *23*, 23-32.

Engzell, P., Frey, A., y Verhagen, M. D. (2021). Learning loss due to school closures during the covid-19 pandemic. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *118*(17). doi: 10.1073/pnas.2022376118

Esteley, C., y Villareal, M. (1996). Análisis y categorización de errores en matemática. *Revista de Educación Matemática*, *11*(1), 16-35.

Esteley, C., y Villarreal, M. (1990). Categorización de errores en matemática. *XIII Revista de Educación Matemática. San Luis*.

Fuentes, M., y Ramos Rodríguez, E. (2018). Estrategias en la resolución de inecuaciones lineales y racionales en educación superior desde la teoría apoe. *Revista Chilena de Educación Matemática*, *11*(1), 38-44.

Gamboa Araya, R., Castillo Sánchez, M., y Hidalgo Mora, R. (2019). Errores matemáticos de estudiantes que ingresan a la universidad. *Actualidades investigativas en educación*, *19*(1), 1-31.

Gamboa Graus, M., y Fonseca Pérez, J. (2017). Los errores en el aprendizaje de las matemáticas. su importancia didáctica. *Didasc@ lia: didáctica y educación ISSN 2224-2643*, *8*(5), 227-246. Descargado de `https://revistas.ult.edu.cu/index.php/didascalia/article/view/681`

Garrote, M., Hidalgo, J., y Blanco, L. (2004). Dificultades en el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones. *Suma*, *46*, 37-44.

Gatica, N., y Maz Machado, A. (2012). Estudio de inecuaciones de dos variables. *XIV Congreso de Educación y Aprendizaje Matemático. Saem Thales*, 68-78.

Godino, J. (2003). Teoría de las funciones semióticas. *Un enfoque ontológico semiótico de la cognición e instrucción matemática. Trabajo de investigación presentado para optar a la Cátedra de Universidad de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.* Descargado de `https://www.ugr.es/ jgodino/funciones-semioticas/teoriafs.PDF`

Godino, J. (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros.* Proyecto Edumat-Maestros. Descargado de `https://www.ugr.es/ jgodino/edumat-maestros/`

Godino, J., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, *27*, 151-169.

Godino, J., Batanero, C., y Font, V. (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39*, 127-135.

Godino, J., Batanero, C., y Roa, R. (2005). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics*, *60*(1), 3-36.

González, T., De la Rubia, M., Hincz, K., Comas-Lopez, M., Laia, S., Santi, F., y Sacha, G. (2020). Influence of covid-19 confinement on students' performance in higher education. *PLOS ONE*, *10*(15). doi: 10.1371/journal.pone.0239490

Gore, J., Fray, L., Miller, A., Harris, J., y Taggart, W. (2021). The impact of covid-19 on student learning in new south wales primary schools: an empirical study. *The Australian Educational Researcher*, *48*(4), 605-637.

Heredia, M., y Palacios, M. A. (2014). *Las inecuaciones lineales en la escuela: algunas reflexiones sobre la enseñanza a partir de la identificación de dificultades y errores en su aprendizaje* (Tesis de Licenciatura, Universidad del Valle). Descargado de https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/handle/10893/7743

Lemus-Cortez, N., y Escobar, H. (2021). Modelación matemática en la construcción conceptual de las inecuaciones al comparar magnitudes: uso de una norma medioambiental en la música. *Revista Espacios*, *42*(1), 50-66.

Lucchini, G., Cuadrado, B., y Tapia, L. (2006). Errar no es siempre un error. *Arauco Fundación Educacional*. Descargado de https://www.fundacionarauco.cl/wp-content/uploads/2018/07/file$_{3}878_{e}rrar-$ $no - es - siempre - un - error - 1.pdf$

Marín Ortega, P. (2020). *Análisis de textos y análisis de errores en futuros profesores de matemática frente a actividades evaluativas sobre la ecuación cuadrática bidimensional bajo el enfoque ontosemiótico* (Tesis de Maestría, Universidad Católica de la Santísima Concepción). Descargado de http://repositoriodigital.ucsc.cl/handle/25022009/2808

Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence. *The Journal of Mathematical Behavior*, *3*(1), 93-166.

Meeter, M. (2021). Primary school mathematics during the covid-19 pandemic: No evidence of learning gaps in adaptive practicing results. *Trends in Neuroscience and Education*, *25*, 100-163. doi: 10.1016/j.tine.2021.100163

Mendoza, S. M., Ramírez, P., y Serpa, A. M. (2021). Errores y dificultades vinculadas al razonamiento cuantitativo entre estudiantes de nuevo ingreso en la carrera de ingeniería. *Revista Boletín Redipe*, *10*(11), 379-399. doi: 10.36260/rbr.v10i11.1545

Minnaard, C. (2015). *Los errores en probabilidad y estadística: un análisis desde el enfoque ontosemiótico* (Tesis de Doctorado, Atlantic International University). Descargado de `http://repositorio.unlz.edu.ar:8080//handle/123456789/288`

Miranda, V. C. (2007). Análisis de errores de estudiantes y profesores en expresiones combinadas con números naturales. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *3*(11), 19-57.

Mollà, R. M. (2001). *Diagnóstico pedagógico: un modelo para la intervención psicopedagógica.* Grupo Planeta (GBS).

Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O., y Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for research in mathematics Education*, *18*(1), 3-14. doi: 10.2307/749532

Ortiz, G. P. T. (2021). Dificultades de comprensión y métodos de enseñanza de inecuaciones lineales en la universidad. *Revista Científica Hallazgos 21*, *6*(2), 124-137. Descargado de `https://revistas.pucese.edu.ec/hallazgos21/article/view/516`

Pochulu, M. (2009). Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la universidad. *Colección Digital Eudoxus*.

Pozo, J., y Gómez, M. (2006). Aprender y enseñar ciencia. *Ediciones Morata*.

Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in mathematics Education*, *10*(3), 163-172. doi: 10.2307/748804

Radatz, H. (1980). Students' errors in the mathematical learning process: a survey. *For the learning of Mathematics*, *1*(1), 16-20. Descargado de https://www.jstor.org/stable/40247696

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. Descargado de http://funes.uniandes.edu.co/486/1/RicoL95-100.PDF

Rosales, L. (2022). Errores del área de matemática presentes en el aprendizaje de la física. *Negotium: revista de ciencias gerenciales*, *17*(51), 5-18.

Salas, F. D. (2022). Estrategia didáctica para el aprendizaje conceptual de las desigualdades a través de las representaciones semióticas. *Revista Boletín Redipe*, *11*(2), 401-417.

Sánchez, N. N. (2012). *La resolución de problemas con inecuaciones cuadráticas: una propuesta en el marco de la teoría de situaciones didácticas* (Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Catolica del Perú). Descargado de http://hdl.handle.net/20.500.12404/1641

Schult, J., Mahler, N., Fauth, B., y Lindner, M. A. (2022). Did students learn less during the covid-19 pandemic? reading and mathematics competencies before and after the first pandemic wave. *School Effectiveness and School Improvement*, *33*(4), 544-563. doi: 10.1080/09243453.2022.2061014

Searle, J. R. (1997). *La construcción de la realidad social.* Paidós.

Serradell, C. B., Buisán Serradell, C., y Marín Gracia, M. (1987). *Cómo realizar un diagnóstico pedagógico.* OIKOS-TAU SA.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, 125-154.

Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. análisis desde el enfoque lógico semiótico. *XI Simposio de la SEIEM*, 19-52. Descargado de https://www.seiem.es/pub/actas/index.shtml

Soto-Meza, C. E., Del Rosario Soto-Meza, M., y Vergaray, J. (2022). La educación virtual en el aprendizaje de la matemática durante la covid-19. revisión teórica. *Revista Científica Arbitrada Mul-*

tidisciplinaria PENTACIENCIAS, *4*(2), 158-174. Descargado de `http://www.editorialalema.org/index.php/pentaciencias/article/view/82`

Tamayo, G., Solano, Á., Torres, P., Ortiz, J., y Fernández, A. (2008, 16 al 18 de octubre). Tecnología digital, actos y procesos semióticos en la definición de límite funcional de weierstrass. 9° Encuetro Colombiano de Matemática Educativa.

Torres, A. (2013). Aplicación del enfoque gráfico en la enseñanza de inecuaciones: Una revisión de la experiencia didáctica desde la perspectiva ontosemiótica. *El cálculo y su enseñanza*, *4*, 83–102.

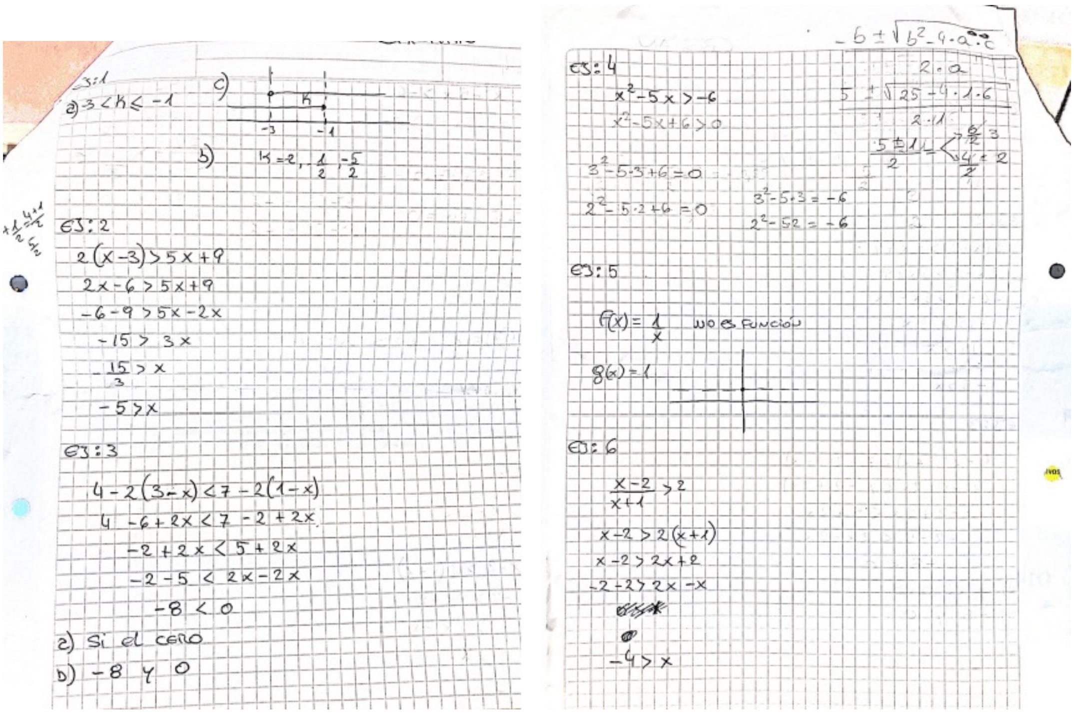
Vargas, A. P. M. (2013). Propuesta para la enseñanza y aprendizaje de las inecuaciones lineales. *Revista educación*, *37*(2), 1–16.

Zierer, K. (2021). Effects of pandemic-related school closures on pupils' performance and learning in selected countries: A rapid review. *Education Sciences*, *11*(6), 252. doi: 10.3390/educsci11060252

Apéndice A

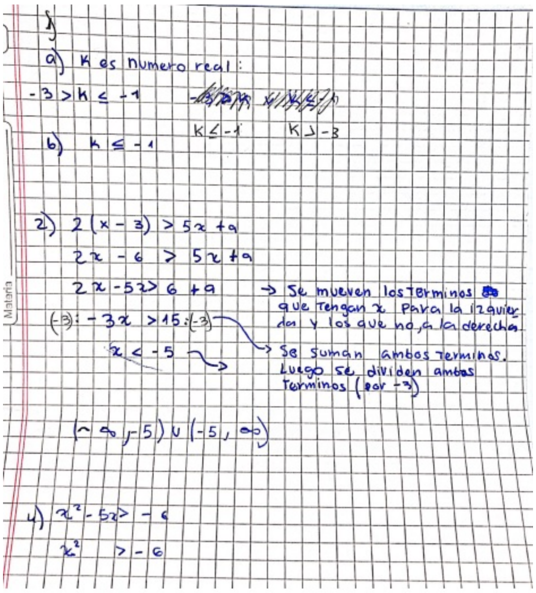
Producciones de los alumnos

En este apartado se encuentran las producciones realizadas por los alumnos que trabajaron con los ejercicios propuestos en el diagnóstico.



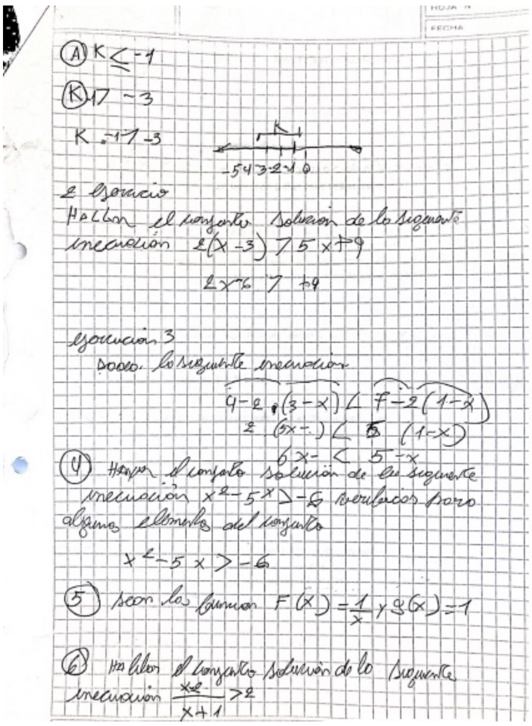
(a) pág.1 (b) pág.2

Figura A.1: Resolución Alumno 1.



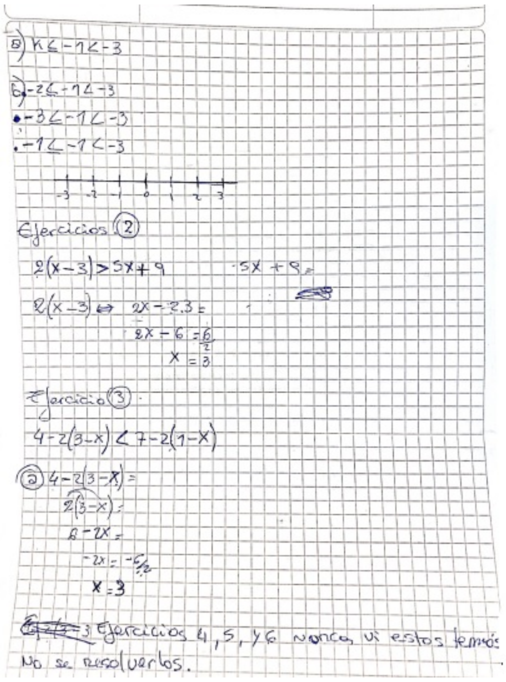
(a) pág.1

Figura A.2: Resolución Alumno 2.



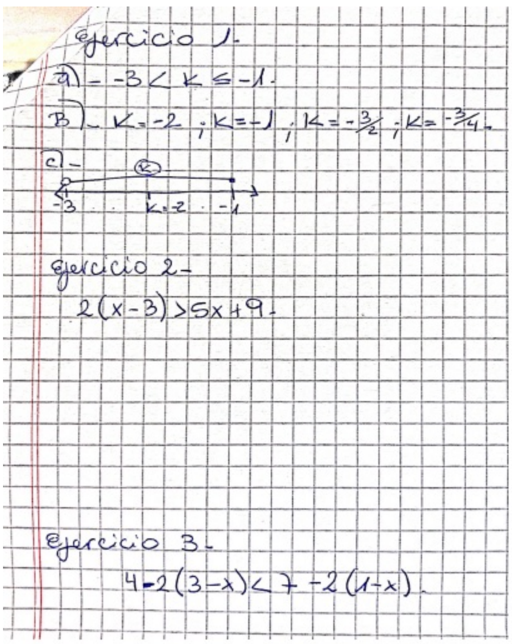
(a) pág.1

Figura A.3: Resolución Alumno 3.



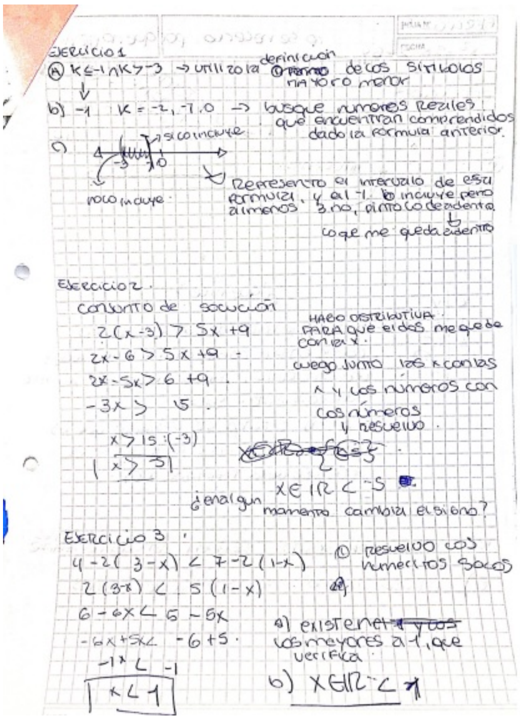
(a) pág.1

Figura A.4: Resolución Alumno 4.

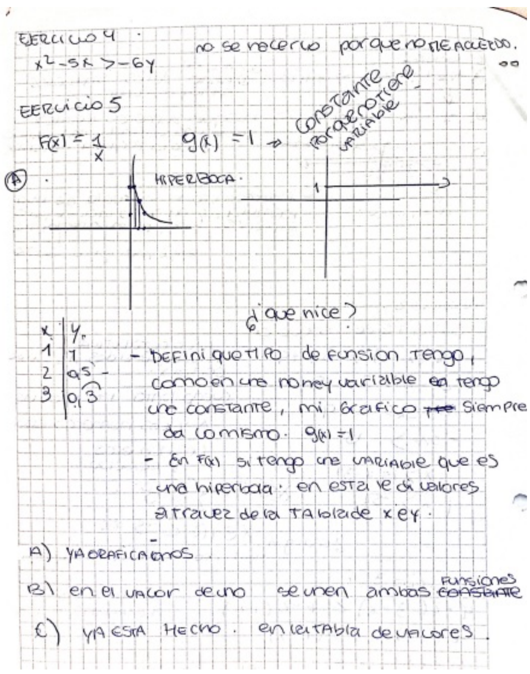


(a) pág.1

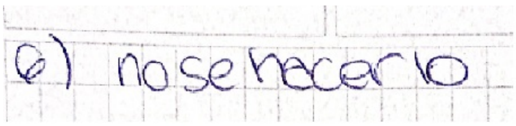
Figura A.5: Resolución Alumno 5.



(a) pág.1

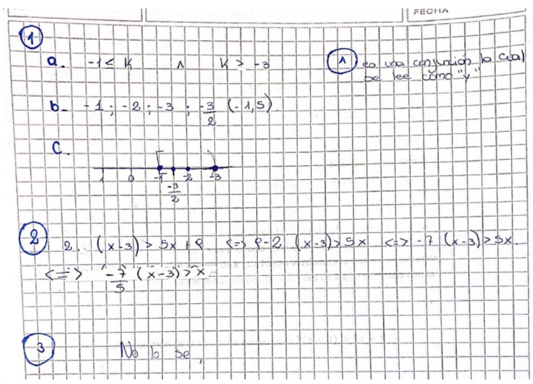


(b) pág.2



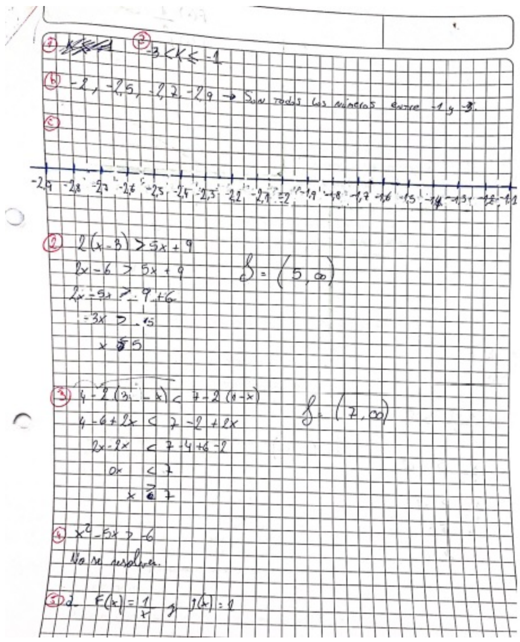
(c) pág.3

Figura A.6: Resolución Alumno 6.

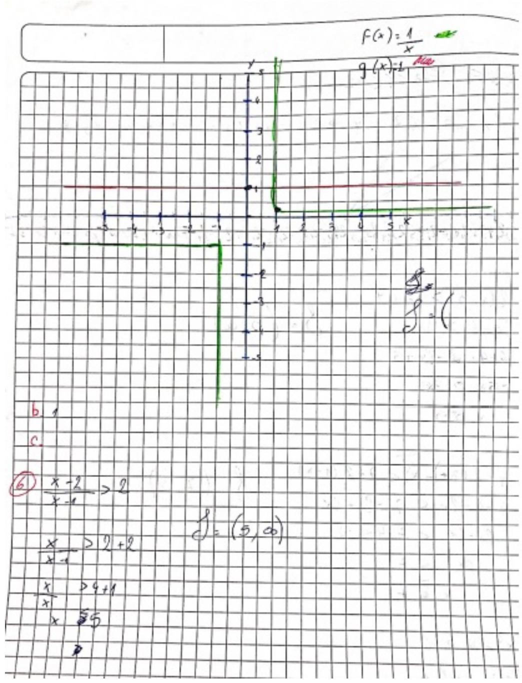


(a) pág.1

Figura A.7: Resolución Alumno 7.

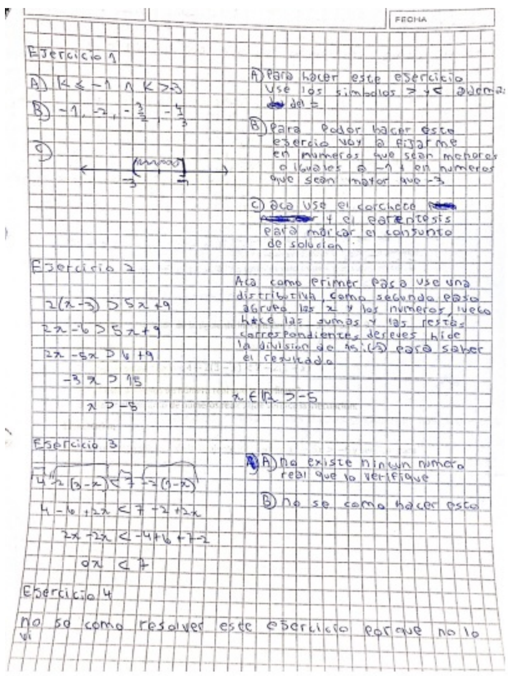


(a) pág.1

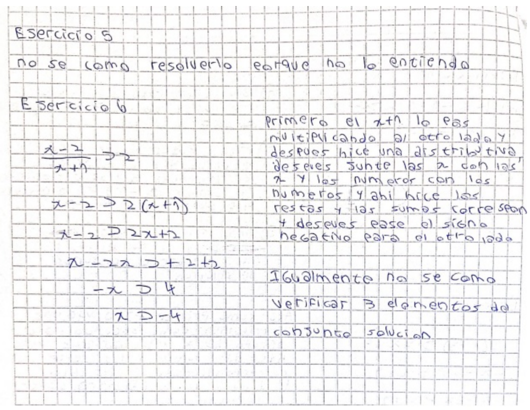


(b) pág.2

Figura A.8: Resolución Alumno 8.

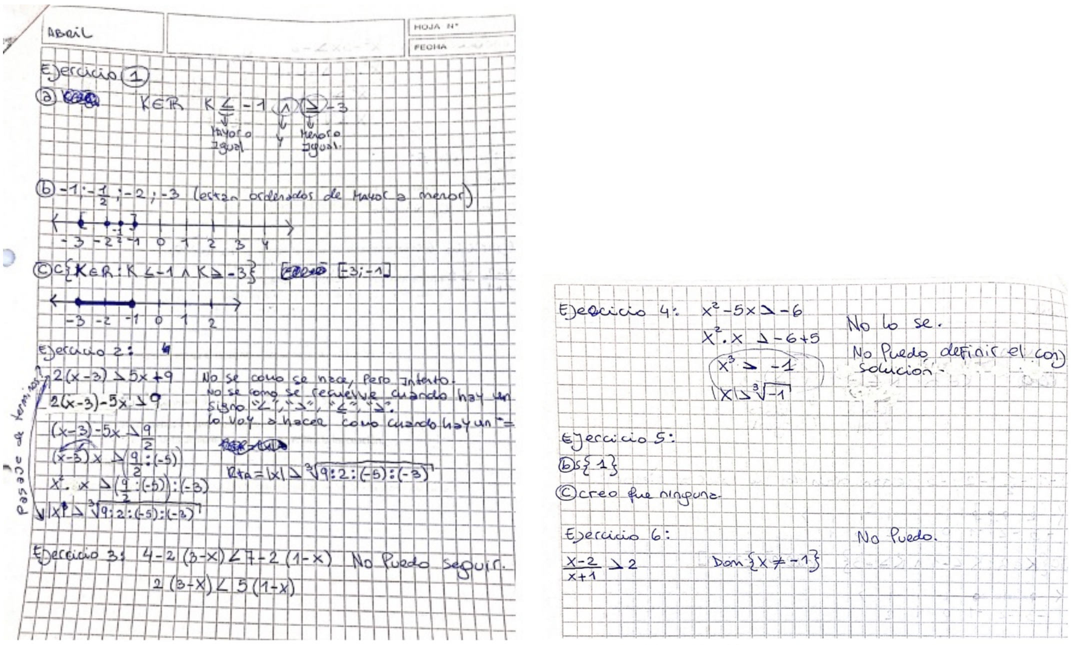


(a) pág.1



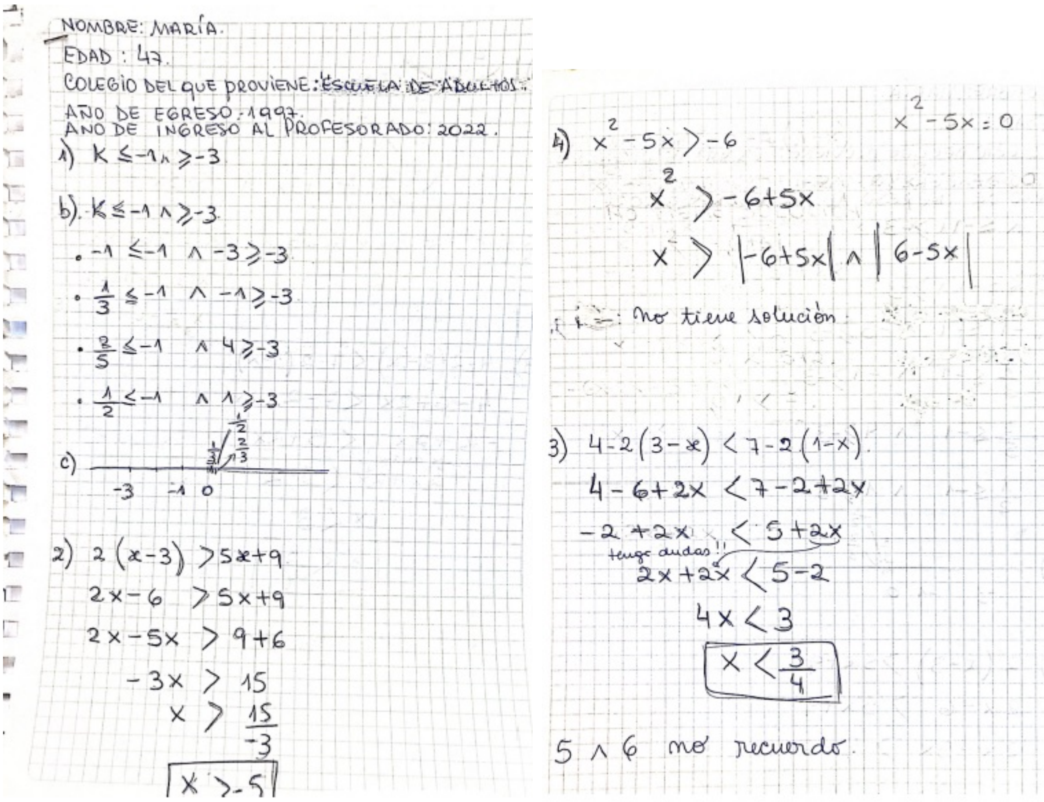
(b) pág.2

Figura A.9: Resolución Alumno 9.



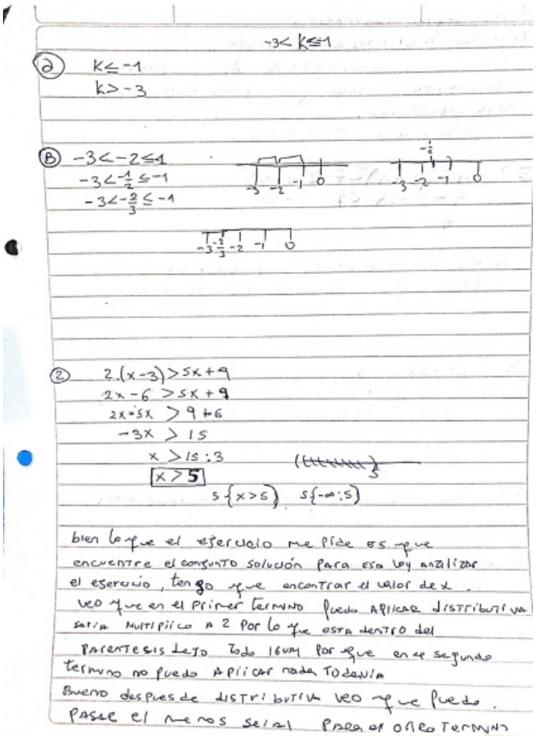
(a) pág.1 (b) pág.2

Figura A.10: Resolución Alumno 10.

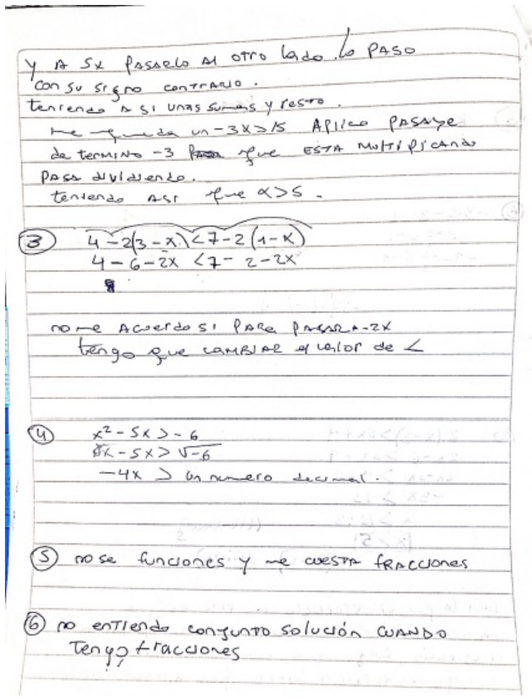


(a) pág.1 (b) pág.2

Figura A.11: Resolución Alumno 11.

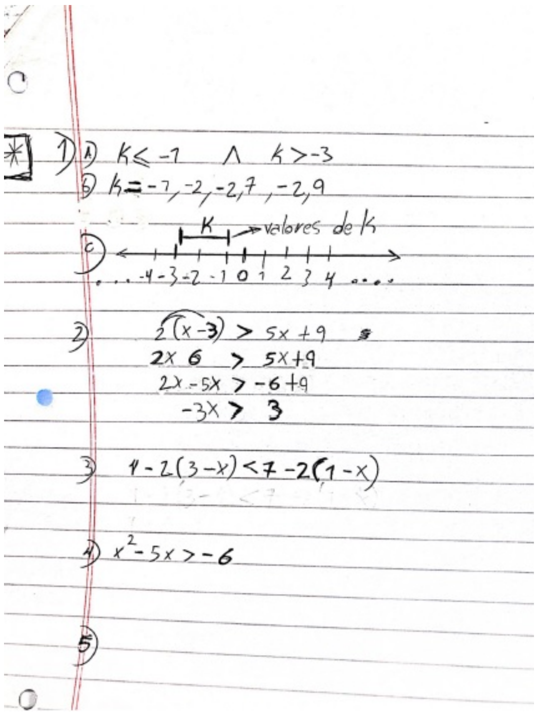


(a) pág.1



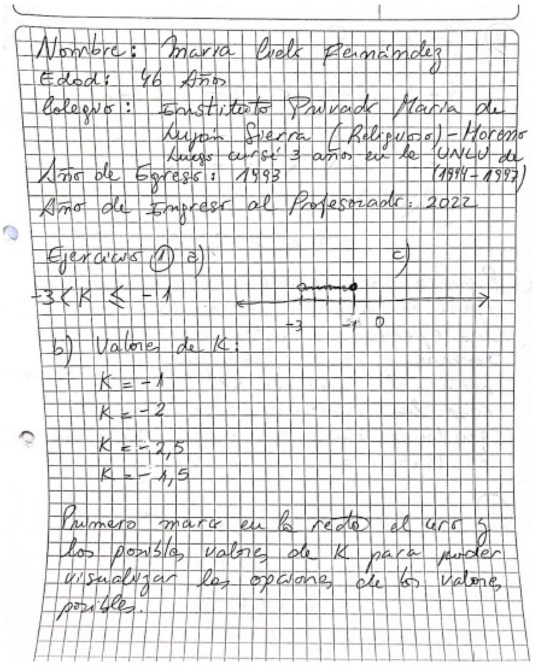
(b) pág.2

Figura A.12: Resolución Alumno 12.



(a) pág.1

Figura A.13: Resolución Alumno 13.



Nombre: María [illegible] Fernández
Edad: 46 Años
Colegio: Instituto Privado María de Luján Sierra (Religioso) - Moreno
Luego cursé 3 años en la UNLU de (1994-1997)
Año de Egreso: 1993
Año de Ingreso al Profesorado: 2022

Ejercicio 1 a) c)

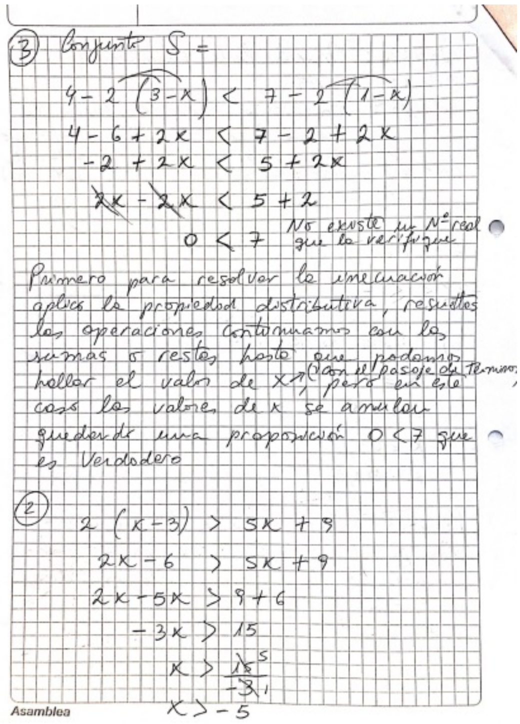
$-3 < K \leq -1$

b) Valores de K:

$K = -1$
$K = -2$
$K = -2,5$
$K = -1,5$

Primero marco en la recta el uno y los posibles valores de K para poder visualizar las opciones de los valores posibles.

(a) pág.1



3 Conjunto S =

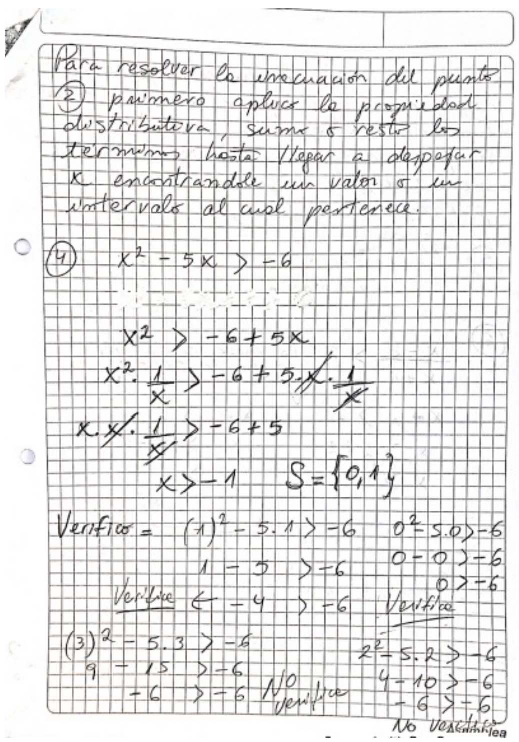
$4 - 2(3-x) < 7 - 2(1-x)$
$4 - 6 + 2x < 7 - 2 + 2x$
$-2 + 2x < 5 + 2x$
$\cancel{2x} - \cancel{2x} < 5 + 2$
$0 < 7$ No existe un N° real que la verifique

Primero para resolver la inecuación aplico la propiedad distributiva, resuelvo las operaciones, continuamos con las sumas o restas hasta que podamos hallar el valor de x (con el pasaje de término), pero en este caso los valores de x se anulan quedando una proposición 0 < 7 que es Verdadera

2 $2(x-3) > 5x + 9$
$2x - 6 > 5x + 9$
$2x - 5x > 9 + 6$
$-3x > 15$
$x > \frac{15}{-3}$
$x > -5$

Asamblea

(b) pág.2



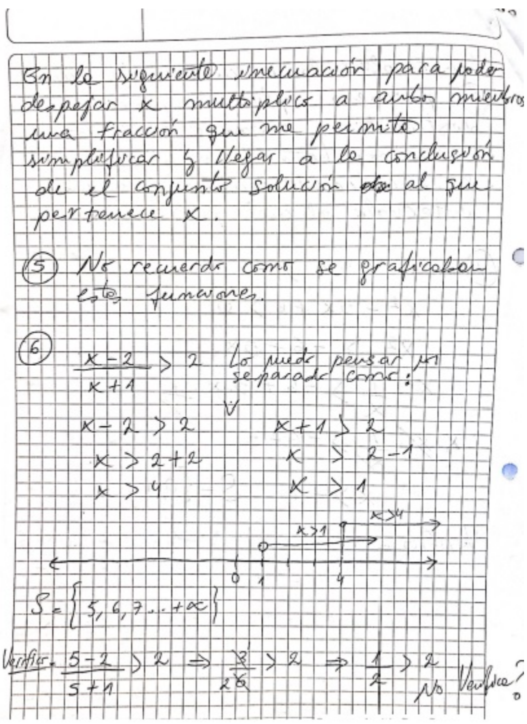
Para resolver la inecuación del punto 2 primero aplico la propiedad distributiva, sumo o resto los términos hasta llegar a despejar x encontrándole un valor o un intervalo al cual pertenece.

4 $x^2 - 5x > -6$
$x^2 > -6 + 5x$
$x^2 . \frac{1}{x} > -6 + 5\cancel{x} . \frac{1}{\cancel{x}}$
$x . \cancel{x} . \frac{1}{\cancel{x}} > -6 + 5$
$x > -1$ $S = \{0, 1\}$

Verifico = $(1)^2 - 5.1 > -6$ $0^2 - 5.0 > -6$
$1 - 5 > -6$ $0 - 0 > -6$
Verifica ← $-4 > -6$ $0 > -6$ Verifica
$(3)^2 - 5.3 > -6$ $2^2 - 5.2 > -6$
$9 - 15 > -6$ $4 - 10 > -6$
$-6 > -6$ No verifica $-6 > -6$ No Verifica

Asamblea

(c) pág.3



En la siguiente inecuación para poder despejar x multiplico a ambos miembros una fracción que me permite simplificar y llegar a la conclusión de el conjunto solución al que pertenece x.

5 No recuerdo como se graficaban estas funciones.

6 $\frac{x-2}{x+1} > 2$ Lo puedo pensar por separado como:

$x - 2 > 2$ $x + 1 > 2$
$x > 2 + 2$ $x > 2 - 1$
$x > 4$ $x > 1$

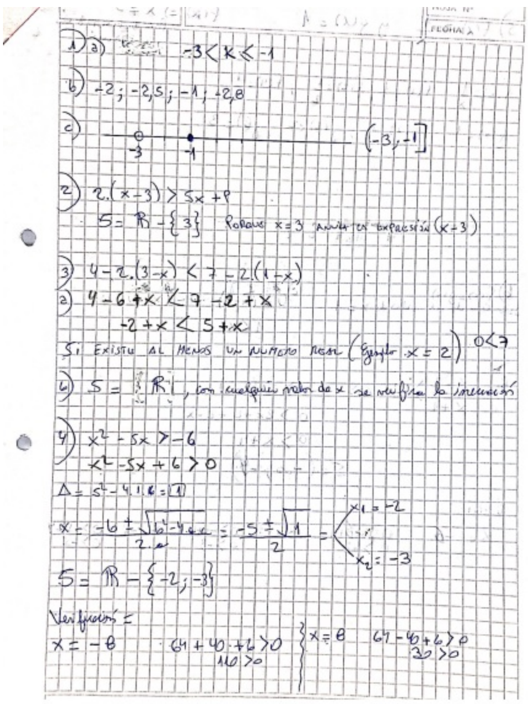
$x > 1$ $x > 4$

$S = \{5, 6, 7, \ldots + \infty\}$

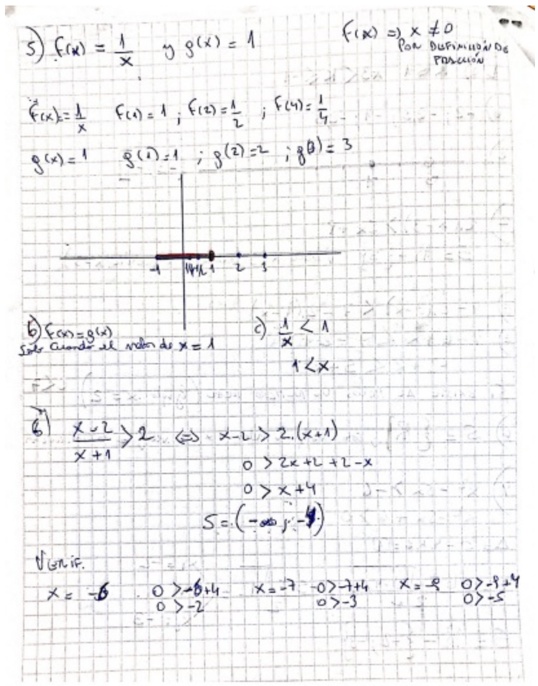
Verifico. $\frac{5-2}{5+1} > 2 \Rightarrow \frac{3}{6} > 2 \Rightarrow \frac{1}{2} > 2$ No Verifica.

(d) pág.4

Figura A.14: Resolución Alumno 14.

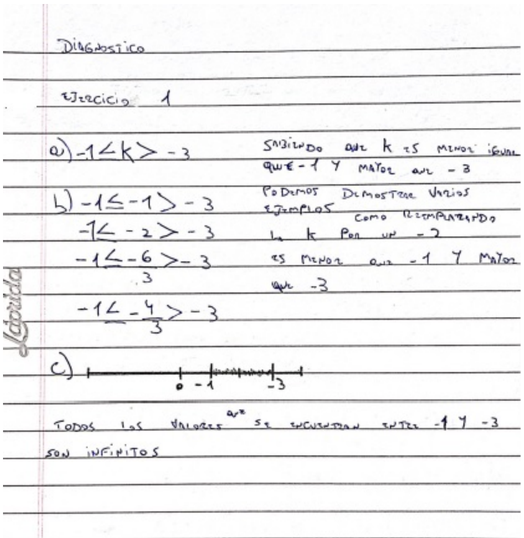


(a) pág.1

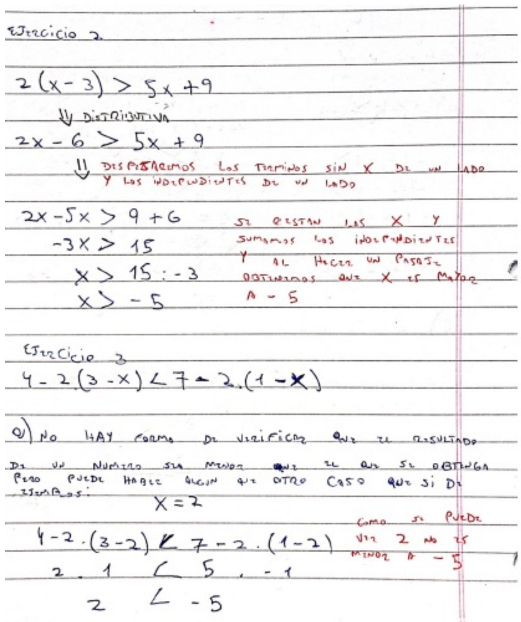


(b) pág.2

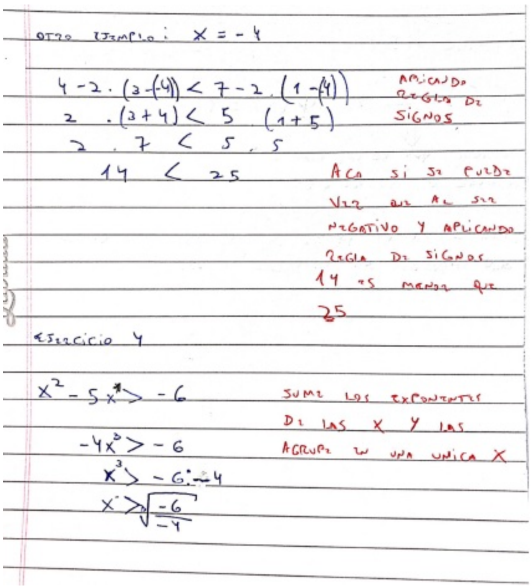
Figura A.15: Resolución Alumno 15.



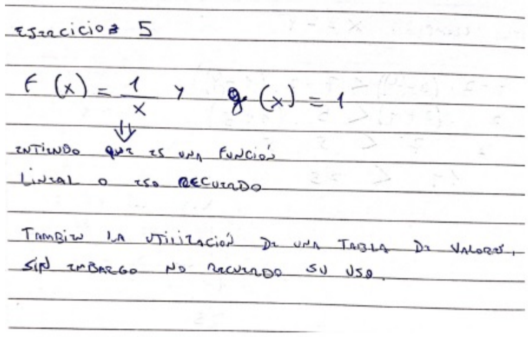
(a) pág.1



(b) pág.2

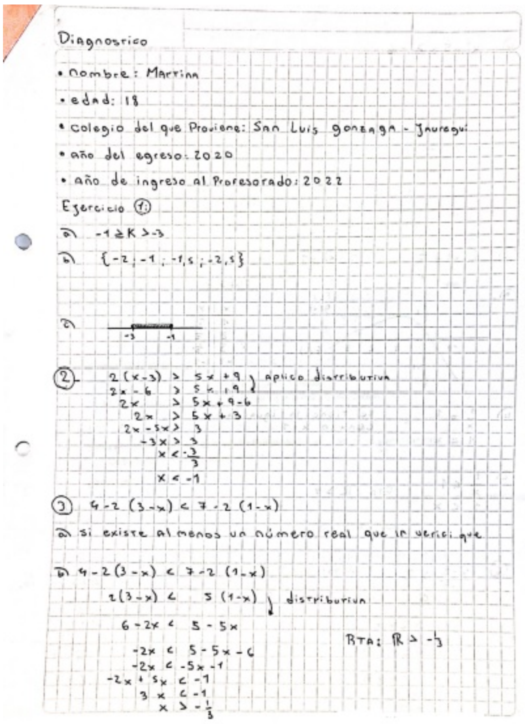


(c) pág.3

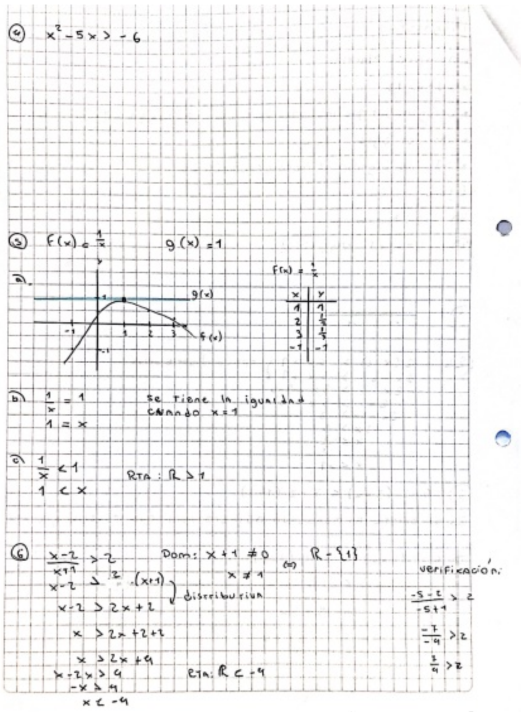


(d) pág.4

Figura A.16: Resolución Alumno 16.

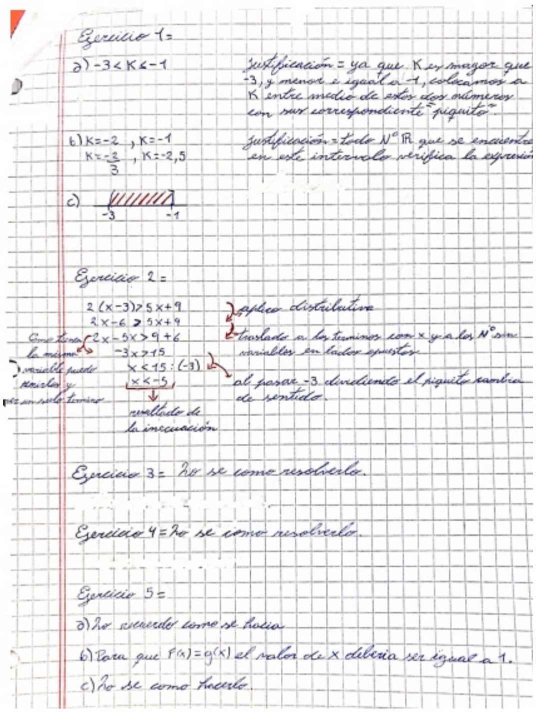


(a) pág.1

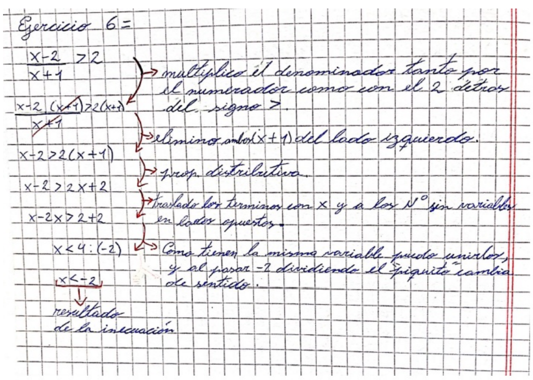


(b) pág.2

Figura A.17: Resolución Alumno 17.

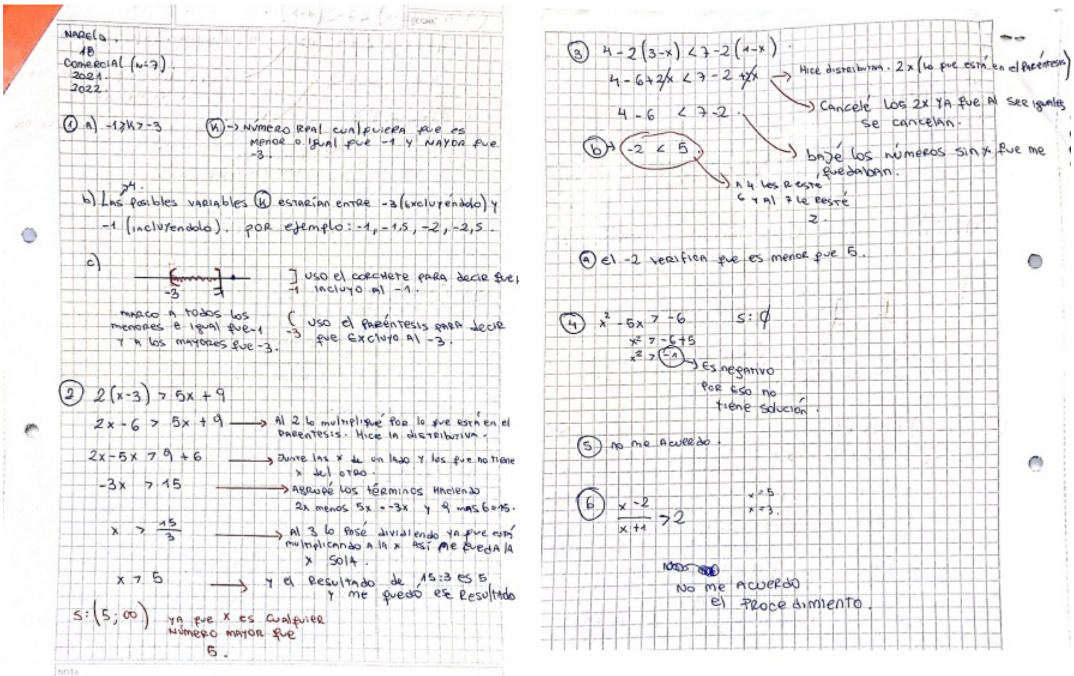


(a) pág.1



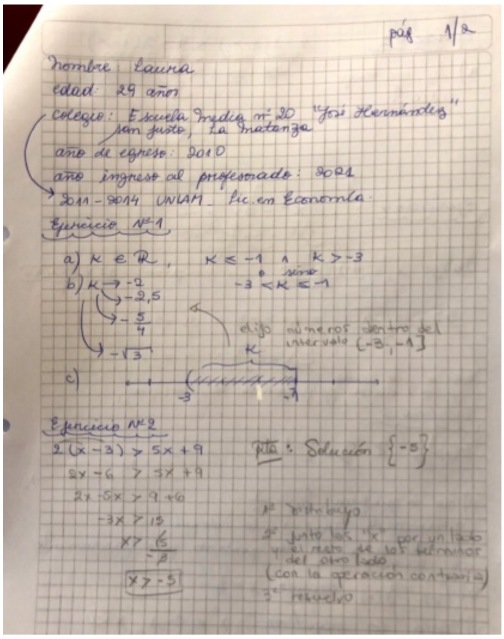
(b) pág.2

Figura A.18: Resolución Alumno 18.



(a) pág.1 (b) pág.2

Figura A.19: Resolución Alumno 19.



pág 1/2

nombre: Laura
edad: 29 años
colegio: Escuela Media nº 20 "José Hernández"
San Justo, La Matanza
año de egreso: 2010
año ingreso al profesorado: 2021
2011 - 2014 UNLAM Lic. en Economía

Ejercicio Nº 1

a) $K \in \mathbb{R}$, $K \leq -1 \wedge K > -3$
o sino
$-3 < K \leq -1$

b) $K \to -2$
$\to -2{,}5$
$\to -\frac{5}{4}$
$\to -\sqrt{3}$

elijo números dentro del intervalo $(-3, -1]$

c) K; -3; -1

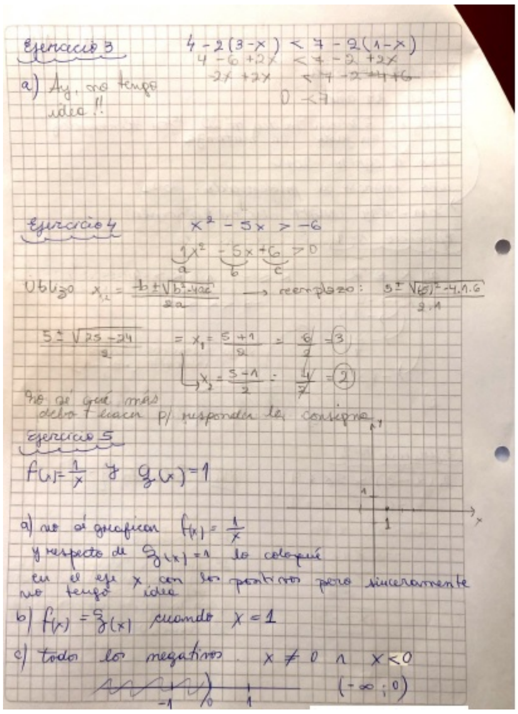
Ejercicio Nº 2

$2(x-3) > 5x+9$
$2x-6 > 5x+9$
$2x-5x > 9+6$
$-3x > 15$
$x > \frac{15}{-3}$
$\boxed{x > -5}$

Rta: Solución $\{-5\}$

1º distribuyo
2º junto las "x" por un lado y el resto de los términos del otro lado, (con la operación contraria)
3º resuelvo

(a) pág.1



Ejercicio 3

$4-2(3-x) < 7-2(1-x)$
$4-6+2x < 7-2+2x$
$-2x+2x < 7-2-4+6$
$0 < 7$

a) Ay, no tengo idea!!

Ejercicio 4

$x^2-5x > -6$
$\underbrace{1x^2}_{a} \underbrace{-5x}_{b} \underbrace{+6}_{c} > 0$

Utilizo $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ → reemplazo: $\frac{5 \pm \sqrt{(5)^2-4.1.6}}{2.1}$

$\frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = x_1 = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$
$x_2 = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$

no sé qué más debo hacer p/ responder la consigna

Ejercicio 5

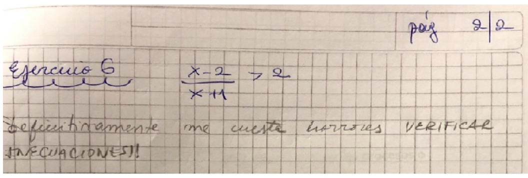
$f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = 1$

a) no sé graficar $f(x) = \frac{1}{x}$
y respecto de $g(x) = 1$ lo coloqué en el eje x con los positivos pero sinceramente no tengo idea

b) $f(x) = g(x)$ cuando $x = 1$

c) todos los negativos $x \neq 0 \wedge x < 0$
$(-\infty; 0)$
-1 0 1

(b) pág.2



pág 2/2

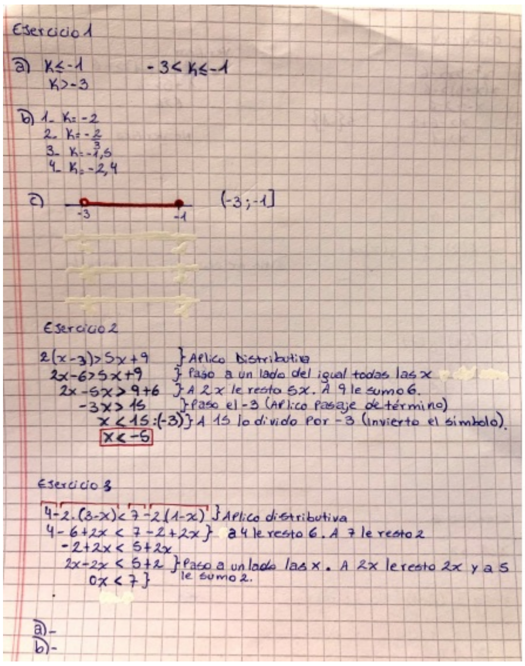
Ejercicio 6

$\frac{x-2}{x+1} > 2$

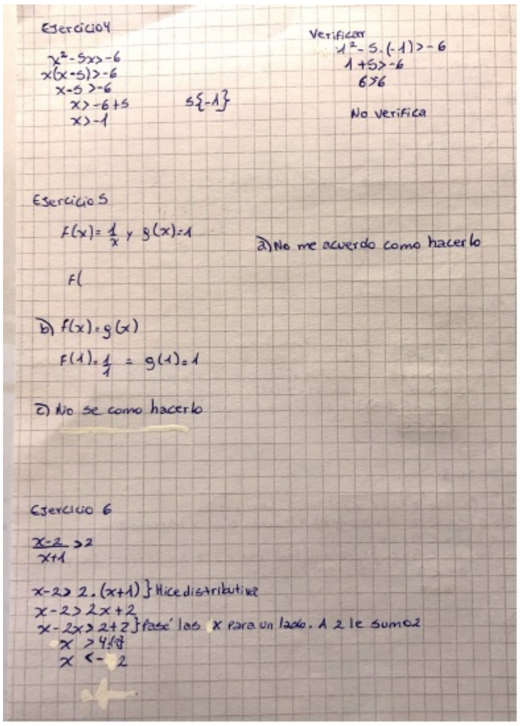
Sinceramente me cuesta horrores VERIFICAR INECUACIONES!!

(c) pág.3

Figura A.20: Resolución Alumno 20.

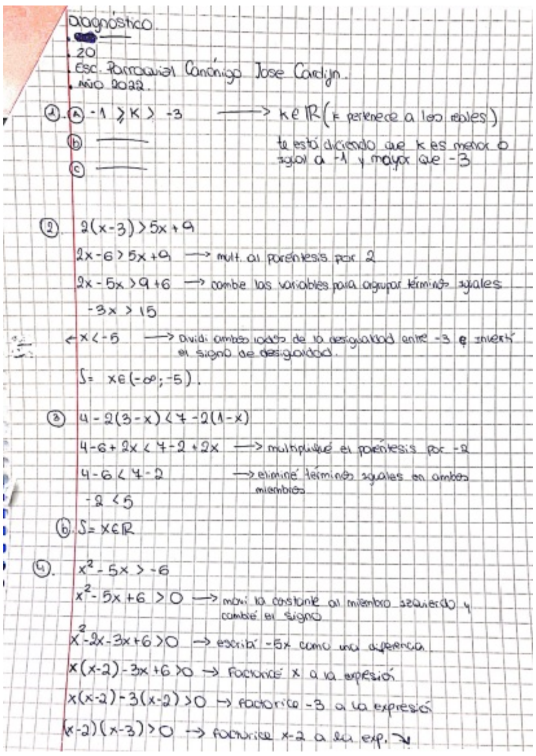


(a) pág.1

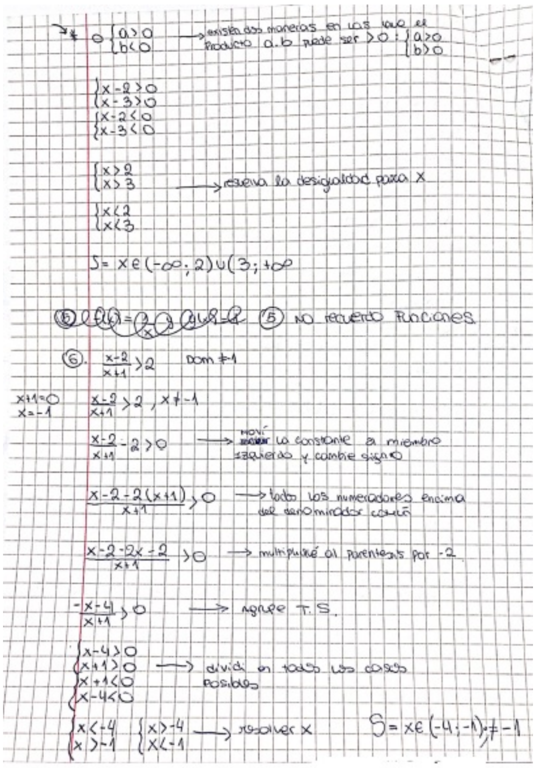


(b) pág.2

Figura A.21: Resolución Alumno 21.

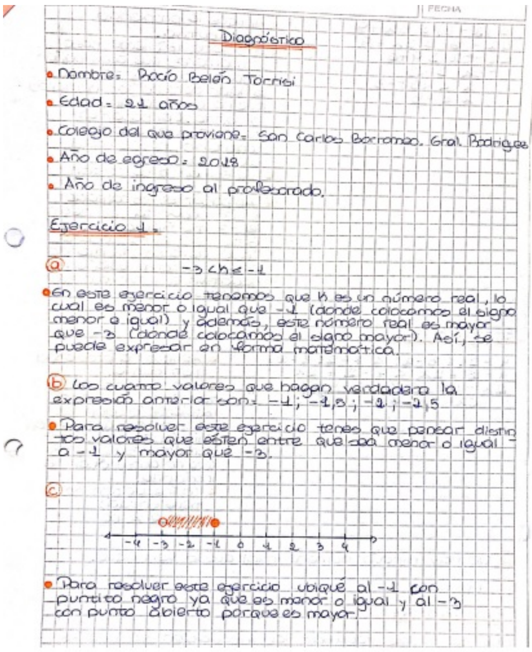


(a) pág.1



(b) pág.2

Figura A.22: Resolución Alumno 22.



Diagnóstico

- Nombre: Rocío Belén Torrisi
- Edad: 21 años
- Colegio del que proviene: San Carlos Borromeo. Gral. Rodriguez
- Año de egreso: 2018
- Año de ingreso al profesorado.

Ejercicio 1.

(a) $-3 < h \leq -1$

- En este ejercicio tenemos que h es un número real, lo cual es menor o igual que -1 (donde colocamos el signo menor o igual) y además, este número real es mayor que -3 (donde colocamos el signo mayor). Así, se puede expresar en forma matemática.

(b) Los cuatro valores que hagan verdadera la expresión anterior son: -1; $-1,5$; -2; $-2,5$

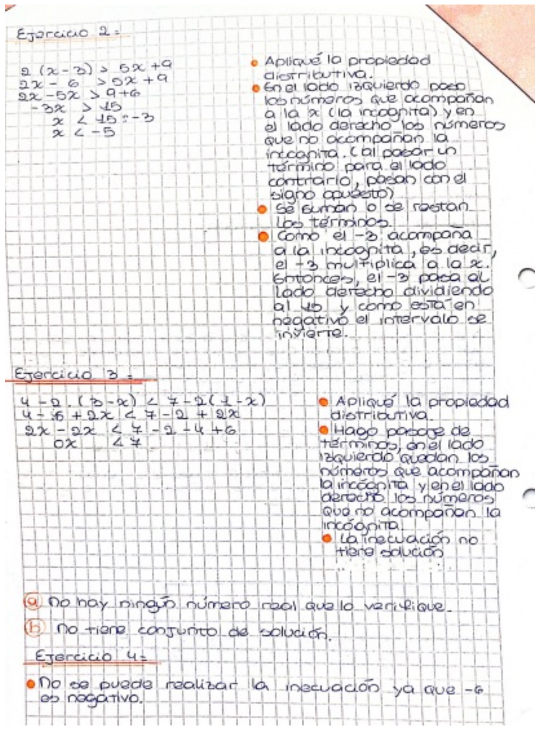
- Para resolver este ejercicio tenes que pensar distintos valores que estén entre que sea menor o igual a -1 y mayor que -3.

(c)

$-4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$

- Para resolver este ejercicio ubiqué al -1 con puntito negro ya que es menor o igual y al -3 con punto abierto porque es mayor.

(a) pág.1



Ejercicio 2:

$2(x-3) > 5x+9$
$2x - 6 > 5x + 9$
$2x - 5x > 9 + 6$
$-3x > 15$
$x < 15 : -3$
$x < -5$

- Apliqué la propiedad distributiva.
- En el lado izquierdo paso los números que acompañan a la x (la incógnita) y en el lado derecho los números que no acompañan la incógnita. (al pasar un término para el lado contrario, pasan con el signo opuesto)
- Se suman o se restan los términos.
- Como el -3 acompaña a la incógnita, es decir, el -3 multiplica a la x. Entonces, el -3 pasa al lado derecho dividiendo al 15 y como está en negativo el intervalo se invierte.

Ejercicio 3:

$4 - 2.(3-x) < 7 - 2(1-x)$
$4 - 6 + 2x < 7 - 2 + 2x$
$2x - 2x < 7 - 2 - 4 + 6$
$0x < 7$

- Apliqué la propiedad distributiva.
- Hago pasaje de términos, en el lado izquierdo quedan los números que acompañan la incógnita y en el lado derecho los números que no acompañan la incógnita.
- La inecuación no tiene solución

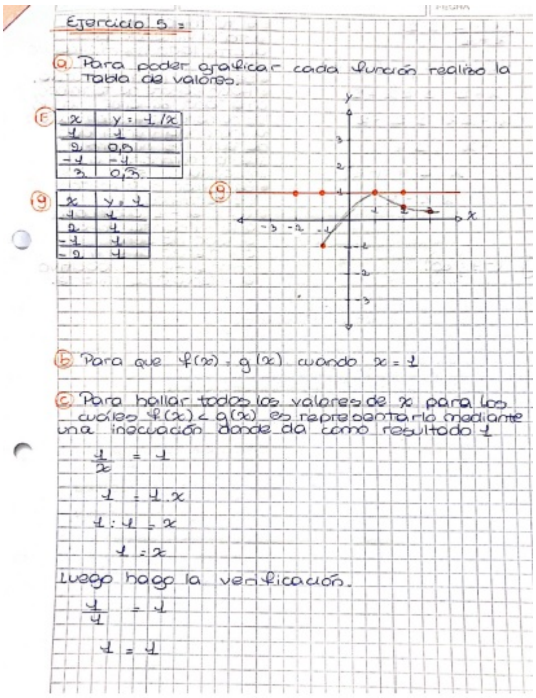
(a) No hay ningún número real que lo verifique.

(b) No tiene conjunto de solución.

Ejercicio 4:

- No se puede realizar la inecuación ya que -6 es negativo.

(b) pág.2



Ejercicio 5:

(a) Para poder graficar cada función realizo la tabla de valores.

(f)

x	$y = 1/x$
1	1
2	0,5
-1	-1
3	$0,\overline{3}$

(g)

x	$y = 1$
1	1
2	1
-1	1
-2	1

(b) Para que $f(x) = g(x)$ cuando $x = 1$

(c) Para hallar todos los valores de x para los cuáles $f(x) < g(x)$ es representarlo mediante una inecuación donde da como resultado 1

$\frac{1}{x} = 1$

$1 = 1.x$

$1 : 1 = x$

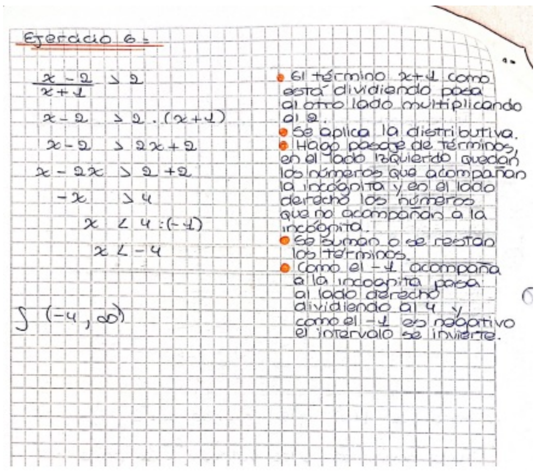
$1 = x$

Luego hago la verificación.

$\frac{1}{1} = 1$

$1 = 1$

(c) pág.3



Ejercicio 6:

$\frac{x-2}{x+1} > 2$

$x - 2 > 2.(x+1)$

$x - 2 > 2x + 2$

$x - 2x > 2 + 2$

$-x > 4$

$x < 4 : (-1)$

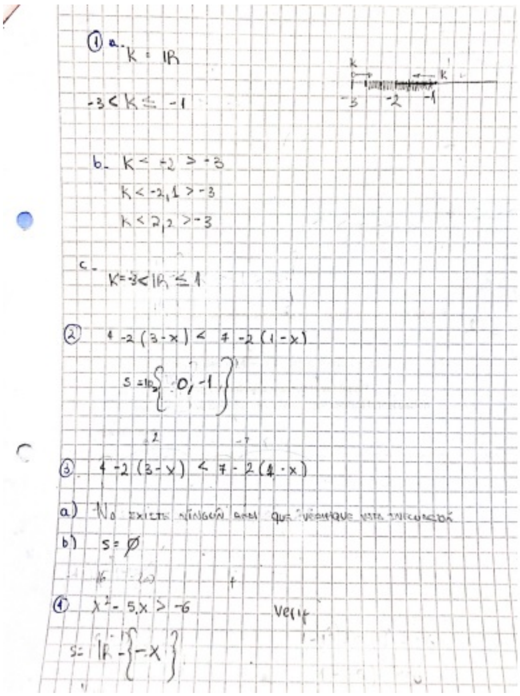
$x < -4$

$S\ (-4, \infty)$

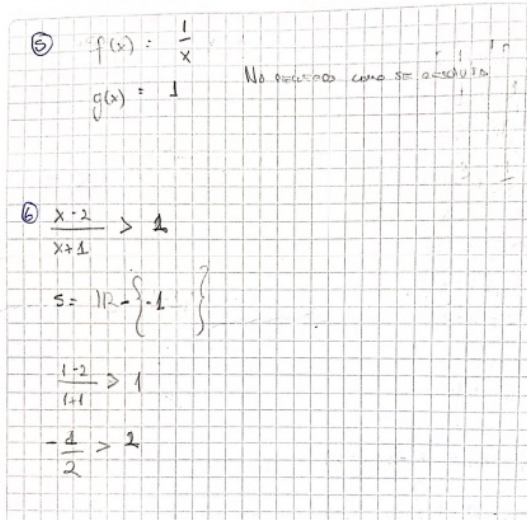
- El término $x+1$ como está dividiendo pasa al otro lado multiplicando al 2.
- Se aplica la distributiva.
- Hago pasaje de términos, en el lado izquierdo quedan los números que acompañan la incógnita y en el lado derecho los números que no acompañan a la incógnita.
- Se suman o se restan los términos.
- Como el -1 acompaña a la incógnita pasa al lado derecho dividiendo al 4 y como el -1 es negativo el intervalo se invierte.

(d) pág.4

Figura A.23: Resolución Alumno 23.

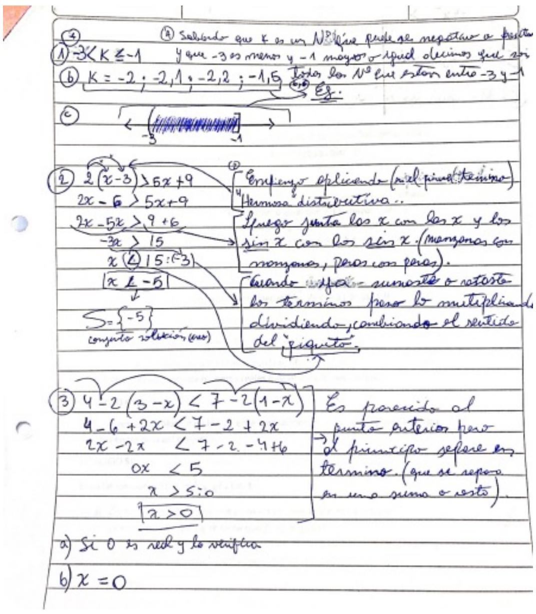


(a) pág.1

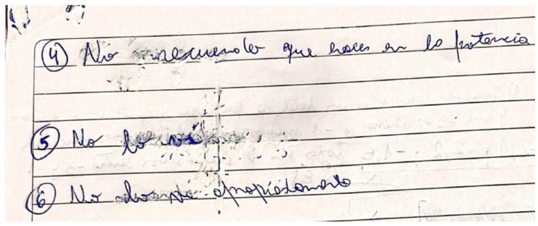


(b) pág.2

Figura A.24: Resolución Alumno 24.

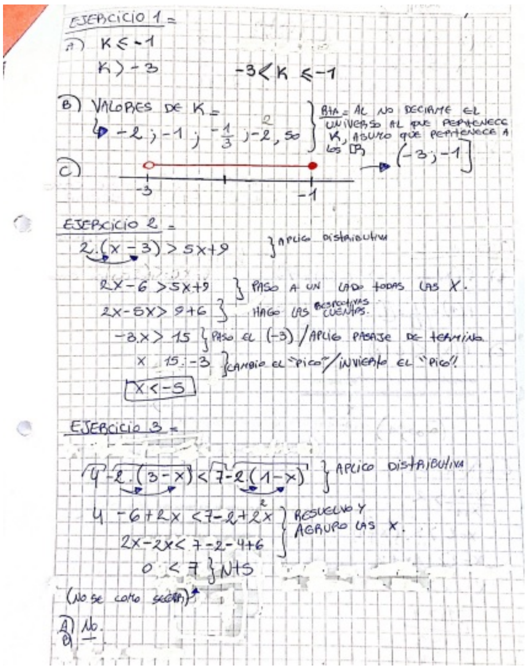


(a) pág.1

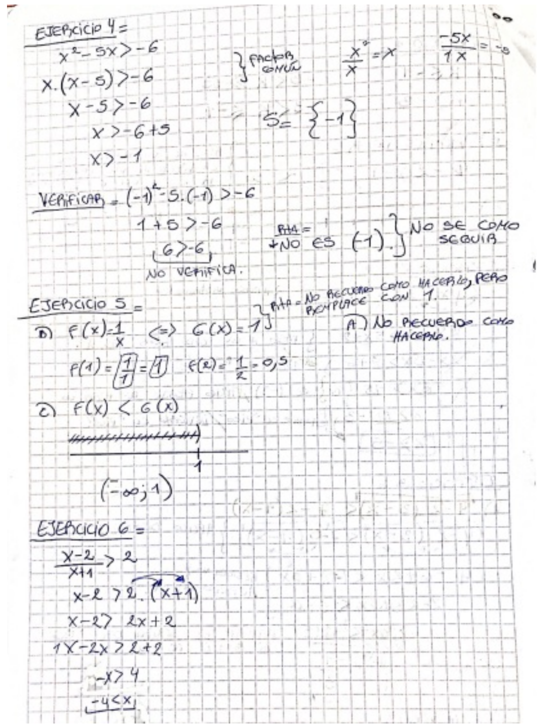


(b) pág.2

Figura A.25: Resolución Alumno 25.

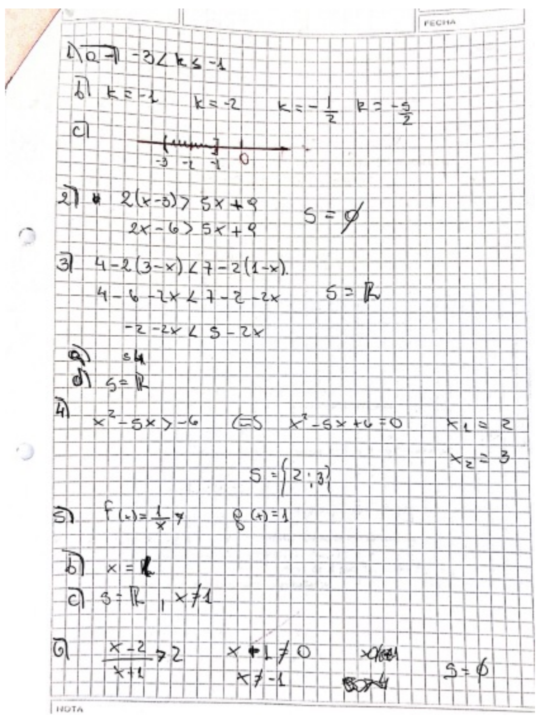


(a) pág.1



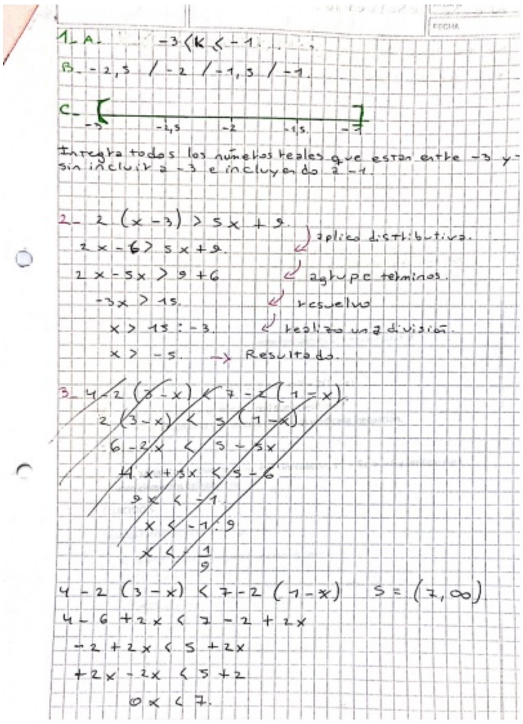
(b) pág.2

Figura A.26: Resolución Alumno 26.



(a) pág.1

Figura A.27: Resolución Alumno 27.



1- A. $-3 < k \leq -1$

B. $-2,5$ / -2 / $-1,5$ / -1.

C. -3 $-2,5$ -2 $-1,5$ -1

Integra todos los numeros reales que estan entre -3 y -1 sin incluir a -3 e incluyendo a -1.

2- $2(x-3) > 5x+9$ aplico distributiva.

$2x-6 > 5x+9$ agrupe terminos.

$2x-5x > 9+6$ resuelvo

$-3x > 15$. realizo una division.

$x > 15 : -3$.

$x > -5$. → Resultado.

3- ~~$4-2(3-x) < 7-2(1-x)$~~

~~$2(3-x) < 5(1-x)$~~

~~$6-2x < 5-5x$~~

~~$4x+5x < 5-6$~~

~~$9x < -1$~~

~~$x < -1 : 9$~~

~~$x < -\frac{1}{9}$~~

$4-2(3-x) < 7-2(1-x)$ $S = (7, \infty)$

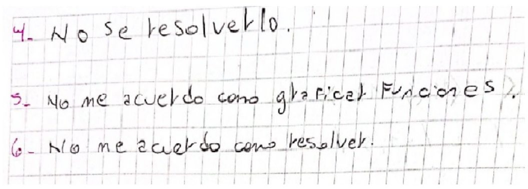
$4-6+2x < 7-2+2x$

$-2+2x < 5+2x$

$+2x-2x < 5+2$

$0x < 7$.

(a) pág.1



4- No se resolverlo.

5- No me acuerdo como graficar Funciones.

6- No me acuerdo como resolver.

(b) pág.2

Figura A.28: Resolución Alumno 28.