Universidad Nacional del Comahue

Facultad de Ingeniería

"Exploración sobre la comprensión del valor absoluto y sus usos en estudiantes de Ingeniería en la Universidad Nacional de Luján"

Tesis presentada para optar al título de Magíster en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Autor: Anabela Luján Erni

Directora: Alejandra Mercedes Martínez
Codirectora: Teresa Braicovich

Buenos Aires – Argentina
2022

DEDICATORIA

A mis padres, Abel y Mirta, que siempre me apoyaron en mis decisiones y me brindaron todo su amor y apoyo incondicional.

A mi esposo, Juan Esteban, que con amor y experiencia supo darme ánimos, guiarme y me impulsó a culminar este trabajo.

A mis hijos, Fausto y Helena, que son mi fortaleza y lo más preciado que me ha dado la vida.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a los profesores que me han formado en el trayecto de estos años de estudios, al doctor Alberto Formica quien me brindó la oportunidad para realizar mi exploración en la asignatura en la que él es responsable, a la magister Teresa Braicovich por sus aportes y tiempo, y especialmente a la doctora Alejandra Martínez quien me acompañó, con paciencia y dedicación, en la asesoría de esta investigación.

RESUMEN

El valor absoluto (VA) es un objeto matemático imprescindible en el campo de las matemáticas y utilizado en diferentes disciplinas, cuya comprensión presenta varias dificultades para los estudiantes.

Este trabajo procura, a partir de la indagación de los conocimientos previos que poseen los alumnos al ingresar a las carreras de Ingeniería en Alimentos e Industrial de la Universidad Nacional de Luján (UNLu), desarrollar e implementar una propuesta didáctica que permita la comprensión significativa de la noción del VA basándose en la teoría de los registros de representación (Duval, 2004) y utilizando el esquema de representación propuesto por Wilhelmi, Godino y Lacasta (2007).

Para ello, se diseña una evaluación inicial y se analizan sus resultados a fin de desarrollar e implementar una secuencia de clases abordando los distintos usos y significados que presenta el VA. Luego, se estudia dicha propuesta de manera cuali y cuantitativa mediante una evaluación final comparándose estos resultados con los obtenidos previamente.

En conclusión, se muestra que la propuesta didáctica llevada a cabo influye de manera favorable y significativa en la comprensión de los usos y significados que presenta el VA en los alumnos ingresantes a las carreras de Ingeniería en Alimentos e Industrial de la UNLu.

PALABRAS CLAVES: Valor absoluto, Usos y significados, Registros de Representación, Análisis cualitativo, Análisis cuantitativo.

ABSTRACT

The absolute value (VA) is an essential mathematical object in the field of mathematics which is used in different disciplines and whose understanding presents various difficulties for students.

This work seeks, from the investigation of the previous knowledge that the students have when entering the Food and Industrial Engineering careers of the National University of Luján (UNLu), to develop and implement a didactic proposal that allows the significant understanding of VA notion based on the theory of representation registers (Duval, 2004) and using the representation scheme proposed by Wilhelmi, Godino and Lacasta (2007).

In order to attain such goal, an initial evaluation is designed and its results are analyzed in order to develop and implement a sequence of lessons addressing the different uses and meanings that AV presents. Then, this proposal is studied qualitatively and quantitatively through a final evaluation, comparing these results with those obtained previously.

In conclusion, it is shown that the didactic proposal carried out has a favorable and significant influence on the understanding of the uses and meanings that the VA presents in the students entering the Food and Industrial Engineering careers of the UNLu.

KEY WORDS: Absolute value, Uses and meanings, Representation Registers, Qualitative analysis, Quantitative analysis.

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS

Figura 16. Representación gráfica de un número real x cuya distancia al cero es menor o igual que seis.

Figura 17. Representación gráfica de un número real x cuya distancia a -1 es menor o igual que tres.

Figura 18. Representación gráfica de un número real x cuya distancia al origen es mayor o igual que tres.

Figura 19. Representación gráfica de un número real x cuya distancia al origen es menor o igual a a.

Figura 20. Representación gráfica de un número real x cuya distancia al origen es mayor o igual a a.

Figura 21. Representación gráfica de la función $y = |x|$.

Figura 22. Representación gráfica de la función $g(x) = |x| + 2$.

Figura 23. Representación gráfica de las funciones $f(x) = |x|$ y $g(x) = |x| + 2$.

Figura 24. Representación gráfica de las funciones $f(x) = |x|$ y $h(x) = |x| - 3$.

Figura 25. Desplazamientos verticales de gráficas. En Precálculo Matemáticas para el cálculo (5ta edición), por J. Stewart, L. Redlin y S. Watson, 2007, en México D.F: Cengage Learning.

Figura 26. Representación gráfica de la función $j(x) = |x - 1|$.

Figura 27. Representación gráfica de las funciones $f(x) = |x|$ y $j(x) = |x - 1|$.

Figura 28. Desplazamientos horizontales de gráficas. En Precálculo Matemáticas para el cálculo (5ta edición), por J. Stewart, L. Redlin y S. Watson, 2007, en México D.F: Cengage Learning.

Figura 29. Representación gráfica de la función $l(x) = -|x|$

Figura 30. Representación gráfica de las funciones $f(x) = |x|$ y $l(x) = -|x|$.

Figura 31. Representación gráfica de la función $m(x) = |-x|$.

LISTA DE TABLAS

CAPÍTULO I

Introducción

1.1 Descripción y justificación del problema

El valor absoluto (VA) es una noción elemental en el campo de las matemáticas y utilizado transversalmente en diferentes disciplinas. Varios investigadores como Horak (1994), Cerizola, Peréz y Martínez (2000) y Wilhelmi, Godino y Lacasta (2007) entre otros evidencian que la comprensión de este concepto resulta difícil para los alumnos. Por ello, es necesario indagar sobre diferentes estrategias de enseñanza – aprendizaje que conlleven a la apropiación del objeto matemático. Exploraciones realizadas en el campo de la didáctica de las matemáticas fortalecen la idea de incorporar en el aprendizaje la utilización de los diferentes registros de representación para tal fin.

Se considera que la presente investigación es relevante dado que la noción de VA es básica dentro del contexto matemático y además resulta ser un recurso necesario para abordar contenidos fundamentales en el álgebra, el análisis matemático, la estadística, etc. Muchos investigadores como Prieto, F y Vicente, S. (2006), Gagatsis, A. y Panaoruma, A. (2014), Doria Rodriguez, S. y Ugarte Guerra, F. (2020), entre otros, manifiestan que alumnos universitarios ya avanzados en sus carreras aún presentan grandes dificultades en el aprendizaje de este concepto. Como docente de “Elementos de Matemática”, asignatura que recibe a los estudiantes ingresantes de las carreras de Ingeniería en Industrial y en Alimentos de la Universidad Nacional de Luján (UNLu), he observado muchos obstáculos en el aprendizaje de conceptos básicos que asocian temas que están incluidos en el programa como repaso de los últimos años de la enseñanza del nivel medio; entre ellos los usos y significados de la noción del VA.

Asimismo, en una exploración realizada por Poggio, Bontti, Aloisio y Piedrabuena (2014), se observó que los alumnos de la asignatura “Análisis Matemático I” de la UNLu, correlativa de la asignatura “Elementos de Matemática”, manifiestan dificultades al abordar situaciones que requieran el dominio y empleo del concepto

VA. Esta investigación obliga a revisar mi tarea como docente de la asignatura “Elementos de Matemática” y a contemplar nuevos procesos de enseñanza que conlleven a que el alumno se apropie del objeto matemático en estudio a fin de obtener la comprensión integral del mismo.

Es imprescindible estudiar no solo las dificultades u obstáculos que poseen los alumnos ingresantes a las carreras de Ingeniería en Alimentos e Industrial de la UNLu, sino que, a su vez, exige diseñar estrategias de enseñanza – aprendizaje que permitan la comprensión significativa de los usos y significados asociados al concepto del VA considerando sus diferentes representaciones. Por tal motivo, este trabajo se fundamentará en la Teoría de Registros de Representación Semiótica desarrollada por Raymond Duval y se enmarcará en el esquema de representación propuesto por Wilhelmi et al. (2007).

1.2 Objetivos de la investigación

El objetivo principal de esta investigación es el de, mediante el estudio de los conocimientos previos en relación con el concepto de VA con los que los alumnos ingresan al nivel superior, desarrollar una propuesta didáctica eficiente que permita lograr una comprensión más integral de la noción del VA, para luego implementarla y estudiar sus resultados. Entre los objetivos específicos se pueden mencionar:

1) Estudiar aquellos registros de representación asociados a la noción del valor absoluto que los alumnos dominan al ingresar a la UNLu.
2) Proponer e implementar una propuesta didáctica con el fin de fortalecer aquellos registros que menos dominen y así favorecer la compresión del objeto matemático en estudio.
3) Analizar los resultados de la propuesta didáctica mediante estudios cuantitativos y cualitativos.

1.3 Organización del trabajo

La presente investigación se organiza de la siguiente manera: en el Capítulo 2, marco teórico y metodológico, se exponen los aportes teóricos y los antecedentes del problema que dan lugar a la actual investigación. Allí también, se describen los instrumentos, la muestra y los procedimientos utilizados para llevar adelante este trabajo. En el Capítulo 3 se realiza el análisis de los conocimientos previos que poseen los alumnos en relación con el concepto del VA. En el Capítulo 4 se expone la propuesta de la unidad didáctica adaptada a los resultados obtenidos en el capítulo anterior y ajustados a la estructuración del concepto de VA dada por Wilhelmi et al. (2007), mientras que en el Capítulo 5 se presenta el diseño de la implementación de la secuencia de clases didácticas en donde se expone la planificación y desarrollo de éstas. En el Capítulo 6, se realizan estudios cuali y cuantitativos con el fin de evaluar los resultados tras la implementación de la propuesta didáctica, y finalmente en el Capítulo 7 se presentan las conclusiones y recomendaciones.

CAPÍTULO II

Marco teórico y metodológico

2.1 Aportes teóricos y antecedentes del tema

En Argentina, durante los últimos 30 años, las investigaciones en educación matemática han tenido un desarrollo relevante a causa de la masificación de la escuela secundaria obligatoria y la renovación de los programas de enseñanza. El interés por estudiar los conocimientos de los alumnos y, consecuentemente, enriquecer las estrategias de enseñanza - aprendizaje resultan ser un campo privilegiado para investigar actividades cognitivas como la conceptualización, la reflexión, la resolución de problemas, la compresión de consignas y enunciados, entre otros.

En el aprendizaje de las matemáticas dichas actividades requieren además del lenguaje habitual o el de las imágenes, el empleo de otros registros de expresión y de representación como notaciones simbólicas, escrituras algebraicas, lógicas y funcionales convirtiendo el lenguaje habitual en un leguaje semejante para significar relaciones, operaciones, elementos geométricos, gráficos cartesianos, entre otros.

Estos sistemas de representación resultan ser un medio imprescindible para interpretar un objeto matemático. Por ello, este trabajo se fundamenta en la Teoría de Registros de Representación Semiótica desarrollada a partir de 1970 por Raymond Duval, profesor de la Universidad del Litoral Costa de Ópalo, Francia, quién ha investigado el aprendizaje matemático y el papel que estos registros de representación presentan para la aprehensión del conocimiento matemático.

Un objeto matemático tiene la singularidad de contar con distintas formas de representación semiótica, como es el caso de la noción del VA que posee distintos registros de representación, tales como: registro verbal, registro tabular, registro simbólico, registro algebraico o registro gráfico. Según Duval (2004), en la teoría de registros de representación semiótica, a la actividad relacionada con la elaboración de una representación se la denomina semiosis, mientras que a la adquisición por parte del alumno del conocimiento matemático se la llama noesis. Es decir que, la semiótica es la que establece las condiciones para el ejercicio de la noética, con lo cual no habrá aprendizaje sin el recurso de sistemas de representación semiótica incluyendo la coordinación entre ellos por parte del sujeto. Un registro de representación debe cumplir con tres actividades cognitivas inherentes a toda representación: identificación, tratamiento y conversión. La primera constituye un conjunto de signos evidentes reconocibles e identificables de un registro. Por ejemplo, un enunciado en lenguaje habitual, la elaboración de un gráfico, la escritura de una expresión algebraica, etcétera. La segunda consiste en la transformación de la representación de manera que pueda constituir un aporte de conocimiento en relación con la representación inicial. Por ejemplo, la transformación en una expresión algebraica. Y la tercera convierte la representación en un registro distinto al registro que fue dado permitiendo manifestar otras significaciones relativas a lo que se representa, actividad que resulta esencial para la articulación de registros. Por ejemplo, la transformación de una expresión algebraica en una gráfica o viceversa. Ahora bien, el pasaje de un sistema de representación a otro no resulta tan evidente para el sujeto, sino que es preciso generar actividades que lo conduzcan a ello.

El proceso de enseñanza - aprendizaje del concepto del VA es problemático pero imprescindible dado que interviene en diferentes áreas de las matemáticas. Prueba de ello resulta de la cantidad y heterogeneidad de investigaciones que se han desarrollado: Cerizola et al. (2000) analiza el concepto del valor absoluto como un principio esencial de la Matemática, Horak (1994) indaga acerca del uso de calculadoras gráficas en el concepto del VA, Arcidiacono (1983) justifica la noción del VA mediante el análisis gráfico, Prieto y Vicente (2006) analiza cualitativamente la noción de intervalo y el concepto de distancia en la recta real, Poggio et. al (2014) manifiesta las limitaciones que presentan los estudiantes al abordar situaciones que requieren el dominio y el empleo oportuno del concepto VA, Garcia Palacios (2014) realiza un estudio exploratorio del VA y desarrolla una propuesta basada en criterios de idoneidad didáctica, Engler, Vrancken, Müller y Hecklein (2015) indaga la noción del VA como distancia en las producciones de sus alumnos, entre otros.

También es posible examinar en los libros de escuela secundaria que no se pone demasiado el acento en diseñar situaciones didácticas que trabajen de forma integrada todas las representaciones que el valor absoluto presenta. Por ejemplo, en Kaczor, P., Schaposchnik, R., Franco, E., Cicala, R. y Díaz, B. (1999) se desarrolla exhaustivamente la definición y la métrica del VA trabajando los registros verbal, algebraico y gráfico pero deja de lado su relación con la función módulo y por ende su vinculación con el gráfico cartesiano, el trabajo de Beiro, A., Colombo, M., D´Albano, C., Sardella, O., Zapico, I. y Arroyo, D. (2001) utiliza distintos registros enfocándose en los significados del VA de manera fragmentada sin buscar la vinculación entre ellos, Blythe, P., Fensom, J., Forrest, J., Waldman de Tokman. P. (2015) manifiestan el VA a partir de la utilización de la potenciación y radicación, omitiendo el uso y la asociación que este presenta con la métrica y el análisis, es decir, se centra sólo en los registros verbal y algebraico.

Para alcanzar la apropiación de un objeto matemático es preciso no sólo trabajar las diferentes representaciones, sino que además se debe lograr una buena articulación entre ellas. Por lo tanto, para que el sujeto pueda alcanzar la construcción cognitiva de un objeto matemático es crucial transitar por aquellos procesos cognitivos mencionados (identificación, tratamiento y conversión), donde la producción y la elección oportuna de las representaciones semióticas en actividades que se le proponga jueguen un papel primordial para reconocer, interpretar y afrontar nuevas dificultades en otros contextos. Según Duval (1993), “La comprensión (integral) de un contenido conceptual está basada en la coordinación de al menos dos registros de representación, y esta coordinación queda de manifiesto por medio del uso rápido y la espontaneidad de la conversión cognitiva”.

En Wilhelmi et al. (2007), se sustenta que “el matemático profesional identifica una misma estructura formal en la variedad de objetos y prácticas (operatorias y discursivas); estructura que considera como el objeto matemático. Esta estructura formal representa la referencia implícita en la resolución de tipos de problemas asociados a la variedad de sistemas de prácticas y objetos emergentes en los distintos contextos de uso". En la Figura 1 (Wilhelmi et al., 2007) se manifiesta una estructuración de modelos y significados asociados al concepto del VA, considerando inmersas diferentes representaciones, el cual está dividido en cuatro modelos: analítico (función a trozos, máximo, composición), topológico (distancia), aritmético (aritmética) y geométrico (vectorial).

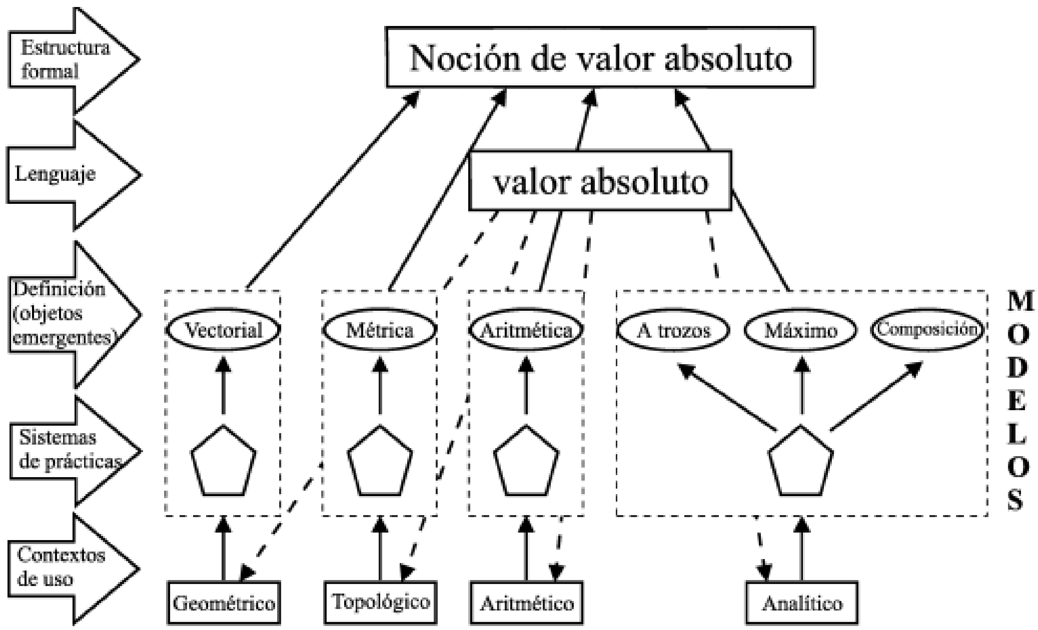


Figura 1: Estructuración de los modelos y significados asociados a la noción de VA.

Según Wilhelmi et al. (2007), cada definición interpreta un objeto emergente de un sistema de prácticas en un contexto concreto de uso. Es decir, que cada grupo de objeto emergente y su respectivo sistema de práctica establece un modelo de la noción del VA; donde éste resulta acorde a un contexto de uso específico. Por lo tanto, cada grupo modela un aspecto particular del significado de la noción del VA. En el *modelo aritmético*, define el valor absoluto de un número real x, designado $|x|$, de la siguiente manera:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Se establece así una "regla" donde los números negativos pasan a positivos y los positivos o cero quedan invariantes. De esta manera, el VA asigna al conjunto de los números reales una métrica dado que la distancia de un número real x al origen, 0, queda definida por $d(x, 0) = |x|$, dando lugar así al *modelo topológico*. Asimismo, el VA puede ser interpretado vectorialmente como el módulo de un vector, v, unidimensional ($|x| = |\vec{v}|$) el cual establece el *modelo geométrico*. En relación con el *modelo analítico*, se hallan tres categorizaciones: la definición del VA como noción básica para la fundamentación del análisis matemático reformulada en términos de función máximo: $|x| = máx\,\{-x, x\}$ (*modelo analítico: máximo*); el VA mediante la utilización de una función por tramos o a trozos en el conjunto de los números reales (*modelo analítico: a trozos*), y luego mediante la fusión de dos operaciones matemáticas utilizada en la relación $\sqrt{x^2} = |x|\,, \forall x \in \mathbb{R}$ (*modelo analítico: composición*).

De esta manera, se establecen algunas directrices para institucionalizar el concepto del VA en los contextos mencionados, destacando el papel instrumental del VA en el cálculo, en la distancia, en la resolución de ecuaciones e inecuaciones, en la formulación de funciones algebraicas, etc. Con lo cual predominan diferentes nociones acerca del VA obedeciendo al contexto en el que se estudie.

En definitiva, mientras que por un lado los registros de representación semiótica resultan ser una herramienta didáctica esencial para manipular el objeto matemático e interpretar esta manipulación en diferentes contextos discriminando los objetos emergentes, por el otro, la esquematización previamente mencionada del VA permite al sujeto, por medio de la exploración y utilización de diferentes registros de representación, transitar las configuraciones de los objetos emergentes y la función significante de cada modelo, es decir, interpretar el uso y significado de cada modelo facilitando la vinculación entre ellos de manera flexible, contemplando sus limitaciones a fin de alcanzar la comprensión integral de la noción del VA. Por esta razón, la presente investigación se enmarca en el esquema de representación propuesto por Wilhelmi et al. (2007).

En la UNLu, se realizó una exploración en relación al VA realizada por Poggio et al. (2014), donde se observa que los alumnos que cursaron “Elementos de Matemática” manifiestan inconvenientes en relación con los significados y usos que el objeto de estudio en cuestión presenta, mostrándose algunas barreras para el aprendizaje de la posterior asignatura: “Análisis Matemático I”. Esta investigación obliga a revisar mi tarea como docente y a contemplar nuevos procesos de enseñanza que conlleven a que el alumno se apropie del objeto matemático en estudio a fin de obtener la comprensión integral del mismo.

Siendo que “Elementos de Matemática” de las carreras de Ingeniería en Alimentos e Ingeniería Industrial abre las puertas a las restantes asignaturas del área dado que es correlativa con todas ellas, resulta imprescindible la comprensión de todos los contenidos que esta asignatura presenta, y en particular la noción del VA.

Por todo lo expuesto, surge la necesidad de estudiar, mediante procedimientos cuantitativos y cualitativos, la comprensión que los alumnos ingresantes logran en relación con los significados y usos de la noción del valor absoluto, y desarrollar herramientas que les permitirían obtener un conocimiento más integral de este objeto matemático.

2.2 Tipo de diseño de la investigación

El presente trabajo de acuerdo con sus objetivos obedece a una investigación aplicada dado que se centra en encontrar estrategias, que permitan alcanzar un objetivo concreto: la comprensión del valor absoluto y sus usos en los estudiantes de Ingeniería en Alimentos e Ingeniería Industrial de la UNLu.

Por consiguiente, en el presente trabajo se investigan aspectos concretos que los estudiantes manifiestan en relación con la noción del VA, tratando de encontrar y analizar patrones significativos para, a partir de sus resultados, establecer explicaciones de la situación planteada. Para ello, se emplean técnicas cualitativas y cuantitativas ya que no sólo se centra en aspectos descriptivos, sino que además se realizan procedimientos basados en la medición donde la estadística constituye una herramienta principal para lograr la meta. Asimismo, se caracteriza por ser longitudinal pues se realiza un seguimiento de los alumnos a lo largo de un determinado período: marzo – junio 2019.

2.3 Hipótesis

Atendiendo a los objetivos planteados, se plantean las siguientes hipótesis de investigación:

- Los alumnos ingresantes a la carrera de Ingeniería en Alimentos e Ingeniería Industrial poseen dificultades en relación con el concepto de VA y sus distintos usos.
- Los alumnos privilegian usar y aplicar sólo algunos registros de representación del concepto del VA.
- Es posible utilizar los sistemas de representación para diseñar actividades acerca del VA y sus usos que proporcionen la comprensión de este objeto matemático.

2.4 Población y muestra

La población considerada para esta investigación son los estudiantes ingresantes a las carreras de Ingeniería en Alimentos e Ingeniería Industrial de la UNLu, sede Luján, en la asignatura de "Elementos de Matemática" correspondiente al primer cuatrimestre del año 2019. Dicha asignatura cuenta con 398 estudiantes de dichas carreras distribuidos en seis comisiones como se detallan en la Tabla 1.

Número de Comisión	**Cantidad de alumnos por comisión**	**Horario**	**Docentes a cargo**
1	51	Lunes y miércoles de 9 a 12 hs	Lucía Millicic y Enrique Guill Pirez Barracosa
2	49	Lunes y miércoles de 9 a 12 hs	Mónica Yañez y Gustavo Caragvano
3	60	Lunes y miércoles de 9 a 12 hs	Anabela Erni y Vanina Martínez
4	45	Lunes y miércoles de 9 a 12 hs	Susana Perez y Belén Cansini
7	86	Lunes y miércoles de 13 a 16 hs	Ana Clara Torelli y Nicolás Murrone

11	107	Lunes y miércoles de 19 a 22 hs	Andrea Piedrabuena, Gustavo Caragvano y Nicolás Gómez

Tabla 1. Distribución de estudiantes y docentes en las comisiones de Elementos de Matemática.

Mediante un muestreo aleatorio simple se seleccionan alumnos de las comisiones 2 y 3 mencionadas. El tipo de muestreo que se utiliza para la presente investigación es por conglomerados, siendo éste cada comisión, considerando en ellas un grupo heterogéneo y representativo de la población.

2.5 Instrumentos

Para recabar la información se emplean cuestionarios de evaluación a fin de luego analizar de forma descriptiva e inferencial el avance de los estudiantes. Estos cuestionarios están sincrónicamente entrelazados con la problemática en estudio brindando sus aportes para construir conclusiones sostenibles. Para procurar que la información recolectada sea válida y confiable, se dialoga con los estudiantes solicitándoles su participación voluntaria y su franqueza al momento de responder las consignas de los cuestionarios. Asimismo, se aclara que su colaboración no tendrá ningún efecto en la nota de la asignatura en la cual se realiza la presente investigación.

Para el análisis cuantitativo la información se obtiene a partir de dos pruebas diagnósticas, inicial y final, con las mismas características, realizadas en dos fases diferentes de la investigación. Estas pruebas son diseñadas mediante preguntas de opción múltiple cuyo orden se dispone al azar. La información recabada se analiza mediante un estudio estadístico apoyándose en la utilización del software y lenguaje de programación R. Se considera este programa dado que es una herramienta estadística potente, confiable y de vanguardia porque es un software de código abierto, gratuito y de libre distribución, el cual se encuentra constantemente sostenido por especialistas que incorporan nuevas funciones haciéndolo además muy versátil.

En cuanto al análisis cualitativo se tiene en cuenta la resolución de dos ejercicios de desarrollo propuestos con el objeto de estudiar el rendimiento de los alumnos, con el fin de detectar las fortalezas y debilidades en sus producciones escritas. Se establecen algunos objetivos que se desean observar a partir de los ejercicios a desarrollar.

2.6 Procedimiento de la investigación

El diseño de la presente investigación se realiza en tres etapas diferentes:

La primera etapa consiste en indagar mediante una prueba diagnóstica inicial los conocimientos previos que poseen los alumnos sobre los diferentes registros de representación que presenta el VA al instante de ingresar a la asignatura “Elementos de Matemática” de las carreras de Ingeniería en Alimentos e Ingeniería Industrial de la UNLu. En esta instancia, mediante la aplicación de herramientas estadísticas (descriptivas e inferenciales) que se detallan en el Capítulo 3, se exploran las respuestas correctas e incorrectas que presentan los estudiantes en la resolución de ejercicios propuestos, determinando de esta manera los modelos que más manejan, así como los que menos.

La segunda etapa consiste en el diseño y la implementación de clases tendientes a fortalecer aquellos modelos del VA que los alumnos menos manejan o desconocen, y a la vez, alcanzar la vinculación entre ellos por medio del uso de dos o más registros representación. Para ello, se elabora una secuencia de tareas y actividades enmarcadas en la estructuración de los modelos y significados asociados al concepto de VA de Wilhelmi et al. (2007). Asimismo, se proponen ejercicios de desarrollo en donde la interacción entre por lo menos dos registros es necesaria. Esta fase intermedia se desarrolla en los Capítulos 4 y 5.

En la última o tercera etapa, expuesta en el Capítulo 6, se analiza cuali y cuantitativamente los resultados obtenidos tras la implementación de la secuencia de tareas presentada en la etapa anterior. Para ello, se realiza una prueba diagnóstica final de acuerdo con la estructura desarrollada por Wilhelmi et al. (2007). Esta información se analiza cuantitativamente mediante la utilización de herramientas estadísticas y se la compara con los resultados obtenidos en la primera prueba diagnóstica. A su vez, mediante la evaluación de dos ejercicios prácticos que integren dos o más registros de representación referidos al VA se analiza en forma cualitativa la descripción de las fortalezas y debilidades que se presentan.

CAPÍTULO III
Análisis de conocimientos previos

Con el objeto de indagar los conocimientos previos que poseen los alumnos sobre los diferentes registros de representación que presenta el VA al instante de ingresar a la asignatura "Elementos de Matemática" de las carreras de Ingeniería en Alimentos e Ingeniería Industrial de la UNLu, se considera pertinente en principio realizar un trabajo de investigación estadístico mediante una prueba diagnóstica inicial, la cual figura en el Anexo 1.

3.1 Diseño y ejecución de la prueba diagnóstica inicial

En primer lugar, se solicitó autorización para llevar adelante la presente investigación al responsable de la asignatura, Dr. Alberto Formica, quien aceptó muy amablemente y apoyó el proyecto desde un principio con el fin de mejorar las prácticas educativas.

Se realiza una prueba diagnóstica para comenzar la investigación. Ésta consiste en una prueba de elección múltiple que consta de 16 ejercicios, de los cuales los alumnos deberán decidir entre dos opciones siendo sólo una de ellas correcta, utilizando en su mayoría las opciones Verdadero o Falso.

Las actividades se enmarcan en la estructuración de los modelos y significados asociados a la noción del VA propuestos por Wilhelmi et al. (2007), considerando entre éstos al *modelo topológico, aritmético y analítico*, desglosado este último en: *función a trozos y composición*. Si bien dicha estructuración presenta más modelos descriptos todos ellos en la Sección 2.1, la elección realizada se debe a la relación que presentan los modelos mencionados con los contenidos que se dictan en la asignatura "Elementos de Matemática" (ver Anexo 2).

El cuestionario se inicia con una pregunta para averiguar si el alumno ha visto el concepto de valor absoluto o módulo de un número real en su escuela secundaria. Luego, se prosigue con los 16 ejercicios cuyo orden fue dispuesto al azar en el diseño de la prueba diagnóstica. Aquí, el alumno debe responder cada uno de ellos de acuerdo con las alternativas planteadas. Para la prueba diagnóstica inicial, se consideran los modelos formulados por Wilhelmi et al. (2007):

- topológico, que se presenta en los ejercicios 1, 8, 12 y 14 (ver Tabla 2).
- aritmético, se trabaja en los ejercicios 2, 3, 6 y 10 (ver Tabla 3).
- analítico, que se categoriza en composición y función a trozos:
- analítico: composición: corresponde a los ejercicios 4, 7, 11 y 15 (ver Tabla 4).
- Analítico: función a trozos: incumbe a los ejercicios 5, 9, 13 y 16 (ver Tabla 5).

La prueba diagnóstica inicial tal como fue presentada a los alumnos puede verse en el Anexo 1. A continuación, se exponen, de acuerdo con cada modelo, el número de ejercicio en la prueba diagnóstica con su enunciado y objetivo propuesto.

Modelo topológico
1.- La distancia entre los números x e y es igual a $\|y - x\|$. *Objetivo: Identificar el concepto de distancia entre dos números reales asociado a la definición del VA.*
8.- Si x es un número negativo, entonces la distancia de x al cero es igual al opuesto de x. *Objetivo: Reconocer que si $x < 0$ entonces $-x > 0$. Asociar el concepto de distancia entre dos números a la noción del VA de un número real.*
12.- La expresión $\|3 - 10\|$ es lo mismo que la distancia entre -10 y 3. *Objetivo: Vincular la noción de distancia entre dos números reales a la definición del VA.*
14.- Si $\|x\| < 3$, entonces la distancia entre x y el cero es menor que 3. *Objetivo: Relacionar la noción de distancia con la definición del VA.*

Tabla 2. Enunciado y objetivo correspondiente a cada ejercicio de la prueba diagnóstica inicial, según modelo topológico.

Modelo Aritmético
2.- La ecuación $|x-3|=2$ tiene como única solución a $x=5$. *<u>Objetivos</u>: Aplicar la definición del VA, o bien recordar las propiedades del VA asociadas a la definición.*
3.- $|-10|=|10|$ *<u>Objetivo</u>: Aplicar la definición del VA, o bien recordar propiedades del VA.*
6.- Para todo número real, se tiene que: $|x|>0$. *<u>Objetivo</u>: Reflexionar que el valor de un número real puede ser positivo o cero.*
10.- $|2|-|3|=5$ *<u>Objetivo</u>: Operar con valores absolutos utilizando la definición del VA.*

Tabla 3. Enunciado y objetivo correspondiente a cada ejercicio de la prueba diagnóstica inicial, según modelo aritmético.

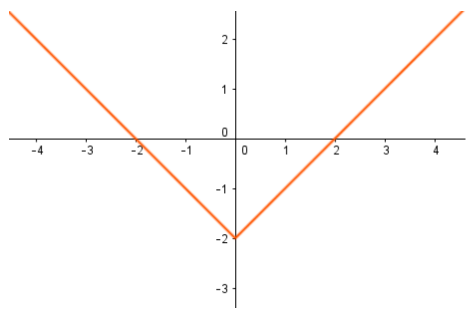
Modelo analítico “Composición”
4.- $\sqrt{x^2}=|x|$ *<u>Objetivo</u>: Aplicar el modelo analítico: composición (considerar que al tratarse de una raíz de índice par el resultado deberá ser siempre positivo, quedando implícito el módulo en el radicando).*
7.- Para todo número real a, se cumple que: $\sqrt{(1-a)^2}=1-a$ *<u>Objetivo</u>: Identificar que la base de potencia par puede tomar tanto valores positivos como negativos (o cero), quedando implícito el VA en la base.*
11.- La ecuación $\sqrt{(x+1)^2}=4$ tiene como única solución a $x=3$. *<u>Objetivo</u>: Identificar que simplificar el cuadrado con la raíz queda implícito en la base de la potencia el VA. Asociar esto a la propiedad: $\sqrt{x^2}=|x|$.*
15.- La ecuación $\sqrt{x^2}+4=8$, tiene como única solución $x=4$. *<u>Objetivo</u>: Utilizar la interpretación del modelo analítico, composición:* $\sqrt{x^2}=|x|$.

Tabla 4. Enunciado y objetivo correspondiente a cada ejercicio de la prueba diagnóstica inicial, según modelo analítico: composición.

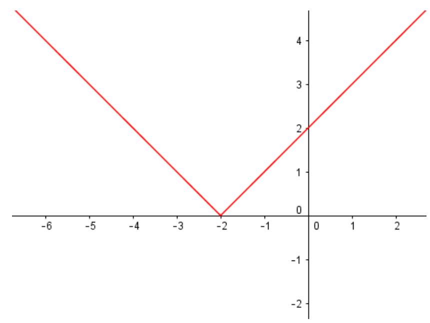
Modelo analítico "Función a trozos"

5.- La gráfica de la función f, definida por $f(x) = |x| - 2$ es:

a)



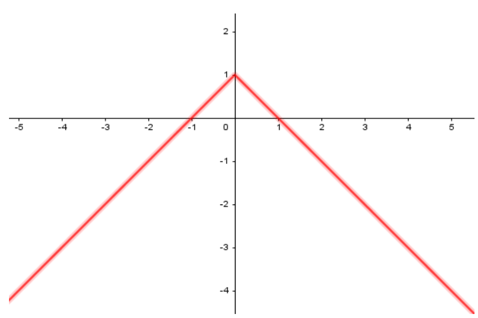
b)



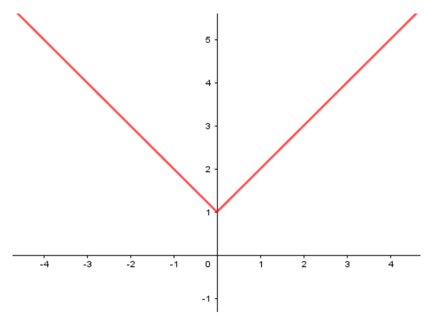
<u>Objetivo</u>: Reconocer la traslación vertical de función valor absoluto $y = |x|$.

9.- La gráfica de la función f, definida por: $f(x) = -|x| + 1$ es:

a)



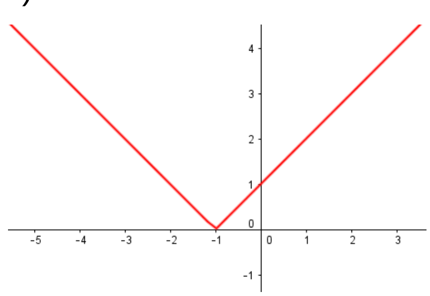
b)



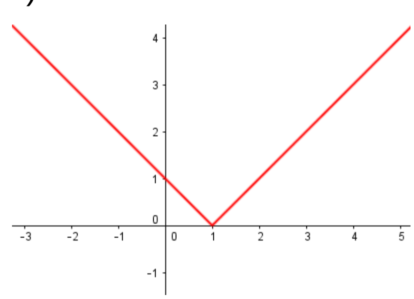
<u>Objetivo</u>: Identificar la reflexión y traslación de la función valor absoluto $y = |x|$.

13.- La gráfica de la función f, definida por $f(x) = |x - 1|$ es:

a)



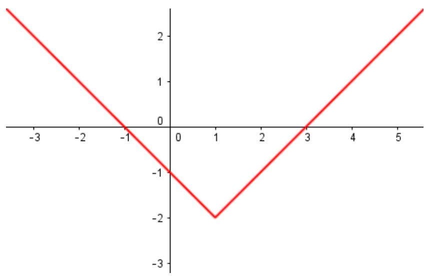
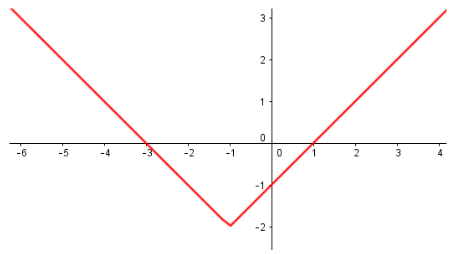
b)



<u>Objetivo:</u> Identificar la traslación horizontal de la función valor absoluto

$y = |x|$.

16.- La gráfica de la función f, definida por $f(x) = |x-1| - 2$ es:

a)	b)
	

<u>Objetivo</u>: Identificar los corrimientos que se aplican a la función valor absoluto

$y = |x|$.

Tabla 5. Enunciado y objetivo correspondiente a cada ejercicio de la prueba diagnóstica inicial, según modelo analítico: función a trozos.

El miércoles 13 de marzo de 2019, correspondiente al segundo día de clases, se convocó a 70 estudiantes de la asignatura “Elementos de Matemática” a responder un cuestionario de evaluación, siendo éste la prueba diagnóstica inicial. Se les explicó previamente el objetivo de este trabajo y se dejó en claro que su participación no afectaría de ningún modo en la nota de la asignatura. El tiempo estimado que se brinda para responder la prueba es de 20 minutos.

3.2 Análisis y Resultados de la prueba diagnóstica inicial

3.2.1 Organización de la información

Dado que la prueba diagnóstica inicial consiste en una prueba de elección múltiple, se codifica 1 en caso de elegir la respuesta correcta y 0 en caso contrario. Luego, se procede a tabular los datos en un archivo Excel, como se presentan en la imagen de la Figura 2, considerando diecisiete columnas, siendo éstas Nombre y Apellido, Vió el tema, Ej1, Ej2, Ej3, Ei4, Ej5, Ej6, Ej7, Ej8, Ej9, Ej10, Ej11, Ej12, Ej13, Ej14, Ej 15 y Ej 16.

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1	VioElTema	Ej1	Ej2	Ej3	Ej4	Ej5	Ej6	Ej7	Ej8	Ej9	Ej10	Ej11	Ej12	Ej13	Ej14	Ej15	Ej16
2	NO	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1
3	SI	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	NO	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
5	SI	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1
6	SI	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0
7	NO	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0
8	SI	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0
9	SI	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0
10	SI	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1
11	SI	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
12	SI	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0
13	SI	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1
14	SI	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
15	SI	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1
16	SI	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0
17	SI	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0
18	SI	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0
19	SI	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1
20	SI	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
21	SI	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1
22	SI	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1
23	NO	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1
24	SI	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0
25	SI	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0

RESULTADOSPRUEBADIAGNOSTICAINIC

Figura 2: Resultados de prueba diagnóstica inicial.

3.2.2 Procesamiento de datos

Una vez organizada la información en un archivo Excel, con extensión .csv, se realiza su estudio mediante el programa estadístico R.

De 70 alumnos que resolvieron la prueba diagnóstica inicial, 54 de ellos han visto el tema en su escuela secundaria.

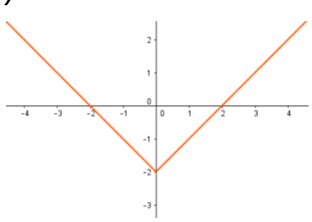
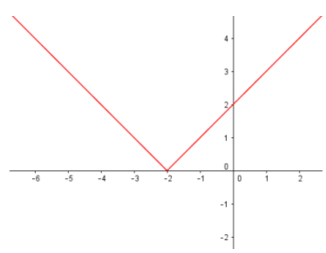
- VieronElTema <- (1:length(VioElTema))[VioElTema==”SI”]
- length(VieronElTema)

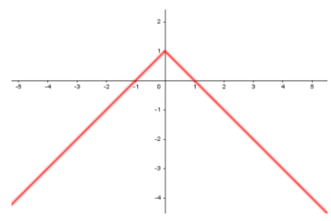
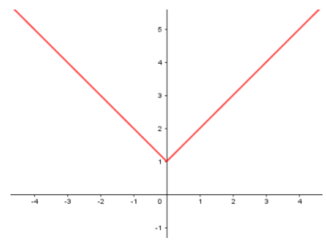
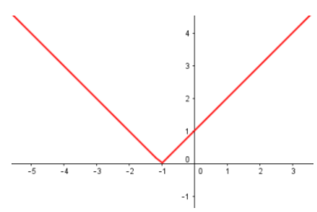
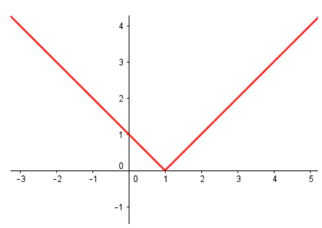
[1] 54

Es decir que, de la muestra aproximadamente el 77% ha visto el tema en su escuela secundaria.

Interesa entonces a partir de aquí, estudiar sólo a los alumnos que han visto el tema previamente, dado que éstos comprenden la notación que se presenta en los ejercicios, de lo contrario se estaría acertando al azar.

En principio, se realiza un estudio descriptivo de los ejercicios propuestos. En la Tabla 6 se observa la cantidad y el porcentaje de respuestas correctas de aquellos alumnos que vieron el tema en cada ejercicio. Se identifica con un color a cada modelo: topológico (marrón), aritmético (violeta), analítico: composición (verde) y analítico: función a trozos (celeste).

Ejercicio	**Cantidad de respuestas correctas**	**Porcentaje de respuestas correctas**
1.- La distancia entre los números x e y es igual a $\lvert y-x\rvert$	**37**	**68,51852%**
2.- La ecuación $\lvert x-3\rvert=2$ tiene como única solución a $x=5$	**20**	**37,03704%**
3.- $\lvert -10\rvert=\lvert 10\rvert$	**38**	**70,37037%**
4.- Para todo número real x , se tiene que: $\sqrt{x^2}=\lvert x\rvert$	**39**	**72,22222%**
5.- La gráfica de la función f, definida por $f(x)=\lvert x\rvert-2$ es: a)  b) 	**37**	**68,51852%**
6.- Para todo número real, se tiene que: $\lvert x\rvert>0$.	**27**	**50%**
7.- Para todo número real a , se cumple que: $\sqrt{(1-a)^2}=1-a$	**16**	**29,62963%**
8.- Si x es un número negativo, entonces la distancia de$x$ al cero es igual al opuesto de x.	**53**	**98,14815%**

9.- La gráfica de la función f, definida por: $f(x) = -\lvert x \rvert + 1$ es a)  b) 	**43**	**79,62963%**
10.- $\lvert 2 \rvert - \lvert -3 \rvert = 5$	**30**	**55,55555%**
11.- La ecuación $\sqrt{(x+1)^2} = 4$ tiene como única solución a $x = 3$	**13**	**24,07407%**
12.- La expresión $\lvert 3 - 10 \rvert$ es lo mismo que la distancia entre -10 y 3.	**39**	**72,22222%**
13.- La gráfica de la función f, definida por $f(x) = \lvert x - 1 \rvert$ es: a)  b) 	**25**	**46,29630%**
14.- Si $\lvert x \rvert < 3$, entonces la distancia entre x y el cero es menor que 3.	**38**	**70,37037%**
15.- La ecuación $\sqrt{x^2} + 4 = 8$, tiene como única solución $x = 4$	**10**	**18,51852%**
16.- La gráfica de la función f, definida por $f(x) = \lvert x - 1 \rvert - 2$ es:	**28**	**51,85185%**

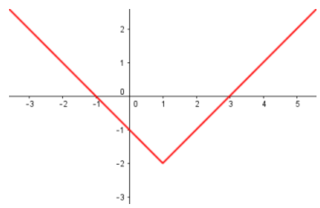
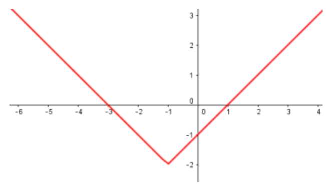
a) 	b) 		

Tabla 6. Cantidad y porcentaje de respuestas correctas de cada ejercicio sobre los 54 estudiantes que vieron el tema.

Resulta interesante analizar aquellos ejercicios que fueron respondidos incorrectamente al menos por el 50% de los alumnos.

Ejercicio 2: La ecuación $|x-3|=2$ tiene como única solución a $x=5$.

Pareciera que los alumnos no advierten que al tratarse de una ecuación en la que el VA es igualado a un valor distinto de cero dará como resultado dos soluciones diferentes. Aproximadamente el 63% de los estudiantes respondió mal esta afirmación.

Ejercicio 6: Para todo número real, se tiene que:$|x|>0$

Aquí parece que los alumnos presentan la idea de que el VA de un número real resulta siempre positivo, olvidando el caso que cuando $x=0$ su VA resulta también cero, es decir se ignora el neutro. El 50% de los alumnos estuvo en esta situación.

Ejercicio 7: Para todo número real a, se cumple que: $\sqrt{(1-a)^2}=1-a$

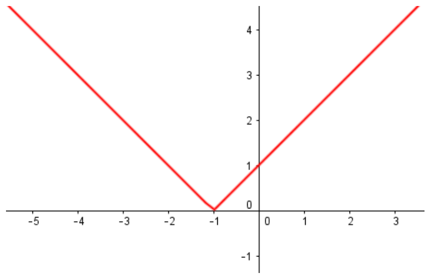
Se tiene la percepción que los alumnos suprimen la potencia par con la raíz sin reparar que la base de esa potencia puede ser tanto positiva o negativa. Aproximadamente el 70% de los estudiantes contestaron mal esta proposición.

Ejercicio 11: La ecuación $\sqrt{(x+1)^2}=4$ tiene como única solución a $x=3$.

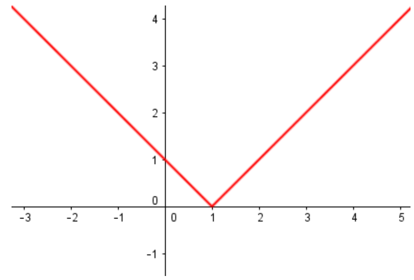
En esta afirmación aproximadamente el 76% de los alumnos respondió mal. Es probable que la mayoría considere suprimir la potencia con la raíz sin aplicar valor absoluto, o sin reflexionar que la base de la potencia par puede ser tanto positiva o negativa.

Ejercicio 13: La gráfica de la función f, definida por $f(x) = |x - 1|$ es:

a)



b)



Aquí, pareciera que los alumnos no poseen el conocimiento en relación con el desplazamiento horizontal de una función, en el caso particular de la función VA. Se observa que el 53,7% responde mal.

Ejercicio 15: La ecuación $\sqrt{x^2} + 4 = 8$, tiene como única solución $x = 4$.

Esta proposición sugiere una situación planteada similar a la del Ejercicio 11, en donde probablemente no se tenga en cuenta la aplicación del módulo al eliminar la potencia con la raíz o bien no se considere que x es la base de una potencia par pudiendo tomar tanto un valor positivo como negativo. Aproximadamente el 81,5% responde mal.

En resumen, 6 de las 16 afirmaciones fueron respondidas incorrectamente por al menos el 50% de los alumnos.

En la universidad UNLu un examen se aprueba a partir del 60% de las respuestas correctas, en el caso hipotético que ésta prueba diagnóstica inicial fuese un parcial de esta universidad, considerando todos los ejercicios con el mismo puntaje, los alumnos deberían contestar correctamente 10 de los 16 ejercicios que se ofrecen en esta prueba para alcanzar su aprobación.

Interesa, entonces, analizar la distribución de las notas de los alumnos, considerando **"Nota"** a la cantidad de respuestas correctas que presenta un alumno, es decir que esta variable puede alcanzar valores entre 0 y 16.

En la Tabla 7, se advierte la distribución de las notas correspondientes a los 54 alumnos.

Nota	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Frecuencia	5	7	13	6	11	6	2	2	0	2

Tabla 7. Distribución de las notas correspondientes a los 54 alumnos.

A continuación, para una mejor visualización, en la Figura 3, se presenta el histograma correspondiente a la distribución de las notas de los 54 alumnos.

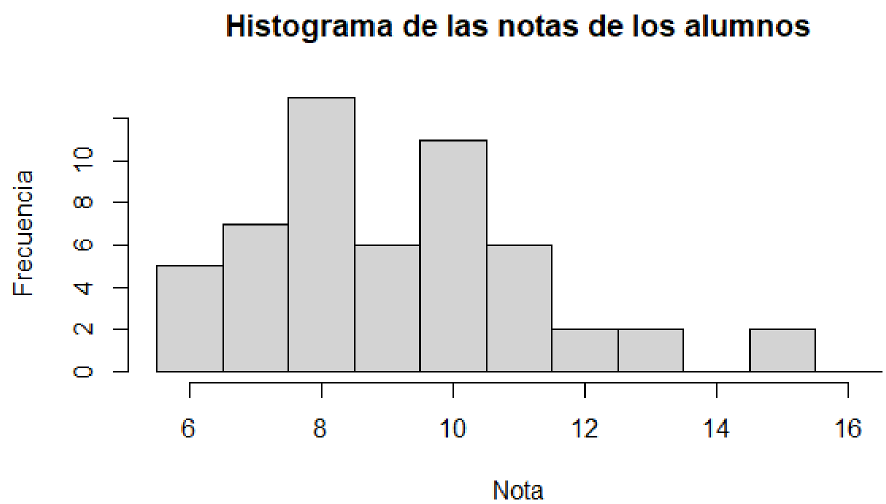


Figura 3: Histograma de las notas de los alumnos en la prueba diagnóstica inicial.

Se examinan algunas medidas descriptivas de la variable "Nota" obteniéndose:

• summary(Nota)

Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
6.00	8.00	9.00	9.13	10.00	15.00

El valor mínimo de "Nota" resultó ser 6. El primer cuartil, que representa el 25% inferior de la muestra, dio 8. La mediana, que significa el valor central de la muestra que divide el conjunto en dos mitades del mismo tamaño, es 9. El promedio de las notas resultó 9,13; muy próximo al valor de la mediana. Sin embargo, se observa que la distribución de las notas de los alumnos no resultaría ser simétrica. El tercer cuartil, que simboliza el 75% inferior de la muestra, fue de 10. El valor máximo de "Nota" resultó ser 15.

Para tener un dato más preciso con respecto a la situación de aprobación de los alumnos, se halla mediante el programa R el porcentaje de aprobados:

```
• umbral <- 0.60*16
• sum(Nota>=umbral)/length(Nota)*100
[1] 42.59259
```

Se obtiene que aproximadamente el $42{,}6$ % de los alumnos que contestaron haber visto el tema previamente hubieran aprobado este examen.

Es preciso testear si las elecciones de respuesta de estos alumnos han sido en su totalidad al azar o con conocimiento sobre el tema. Para responder esto, plantearemos un modelo matemático.

Supongamos que tenemos $\boldsymbol{X}_1, \dots\dots., \boldsymbol{X}_{54}$ *vectores aleatorios con* $\boldsymbol{X}_i \in \mathbb{R}^{16}$*,*

$1 \leq i \leq 54$*, es decir,*

$$\boldsymbol{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots\dots\dots, X_{i16})$$

Con $X_{ik} \in \{0;\ 1\}$ para $1 \leq i \leq 54$ y $1 \leq k \leq 16$ donde se considera: $X_{ik} = 1$ si el k-ésimo ejercicio es respondido correctamente por el i-ésimo individuo, y $X_{ik} = 0$ si su respuesta es incorrecta.

Supondremos que los $\boldsymbol{X}_i$ $(1 \leq i \leq 54)$ son vectores independientes porque corresponden a individuos diferentes, sin embargo, para cada $\boldsymbol{X}_i$ sus coordenadas no son independientes entre sí. Supondremos además que representan una muestra aleatoria de un vector $\boldsymbol{X}$ = ”resultado de un alumno en la prueba diagnóstica inicial que consta de 16 ejercicios”, con $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_{16})$.

Para cada $1 \leq i \leq 54$ se define la nota N_i como aquella que varía entre 0 y 16 y la cual se obtiene sumando las coordenadas del vector $\boldsymbol{X}_i$, es decir, para $1 \leq i \leq 54$ se define N_i como

$$N_i = \sum_{k=1}^{16} X_{ik}$$

la nota del i-ésimo alumno. De esta manera, las notas N_i son una muestra aleatoria de la variable aleatoria N = "nota de un alumno en la prueba diagnóstica inicial", con $N = \sum_{k=1}^{16} X_k$.

Siendo que consideramos $\boldsymbol{X}$ al vector que tiene el resultado de un alumno cualquiera en cada ejercicio, sus coordenadas X_k toman sólo dos valores (0 o 1) y, por lo tanto, $X_k \sim Bernoulli(p_k)$. Observemos además que como supusimos que los $\boldsymbol{X}_i$ forman una muestra aleatoria con la misma distribución que $\boldsymbol{X}$ entonces $X_{ik} \sim Bernoulli(p_k)$. De esta manera, por propiedad de la linealidad de la esperanza, si llamamos $\mu = E(N)$, se tiene que

$$\mu = E(N) = E\ \left(\sum_{k=1}^{16} X_k\right) \underbrace{=}_{\substack{Prop.de\ linealidad \\ de\ la\ esperanza}} \sum_{k=1}^{16} E\ (X_k) = \sum_{k=1}^{16} p_k \quad (1)$$

Si supusiéramos que los alumnos están respondiendo al azar todos los ejercicios, entonces tendríamos que $p_k = \frac{1}{2}$ para todo $k = 1, \ldots, 16$, es decir, $X_{ik} \sim Bernoulli\ \left(\frac{1}{2}\right)$ para todo $1 \leq i \leq 54$ y $1 \leq k \leq 16$.

De esta manera, bajo este supuesto, se tendría que:

$$\mu = E(N) = \sum_{k=1}^{16} p_k = 16.\frac{1}{2} = 8 \quad (2)$$

Luego, resulta de interés realizar el siguiente test

$$H_0: \quad \mu = 8 \quad vs \quad H_1: \quad \mu \neq 8$$

donde recordemos que μ es la nota esperada de un alumno de esta materia.

Para realizar este test y como tenemos una cantidad suficiente de individuos, utilizaremos un test de nivel aproximado. Para la realización de este tipo de tests se suele requerir que la cantidad total de datos sea por lo menos de 30 (y en este caso se cuenta con 54 individuos). El test que realizaremos considera el siguiente estadístico

$$T = \sqrt{n}\frac{\overline{N} - 8}{s}$$

Con $\overline{N} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} N_i$, $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(N_i - \overline{N})^2$ y $n = 54$.

Para evaluar la significancia estadística del test, se examina el p–valor de la prueba comparándolo con el nivel de significancia especificado α, siendo usualmente éste $0{,}05$ o $0{,}01$. El p-valor, que depende exclusivamente de la muestra, es el mínimo valor α para el cual se rechaza la hipótesis nula (H_0). Por lo cual, si el p-valor obtenido es menor que el valor α predeterminado la decisión consiste en rechazar la hipótesis nula. Los valores α controlan la probabilidad de cometer el llamado "Error de Tipo I", es decir, la probabilidad de rechazar H_0 cuando H_0 es cierta; en el caso de decidir rechazar H_0 el único error posible de cometer es éste y, por lo tanto, la probabilidad de equivocarse es baja (menor a α). En tal caso diremos que hay "evidencia estadística suficiente". Si, por el contrario, el p-valor es mayor al nivel de significancia α, no se puede rechazar H_0 y, por lo tanto, el único error que podría cometerse es el llamado "Error de Tipo II", es decir, no rechazar H_0 cuando H_0 es falsa. Este error no resulta controlable por el investigador (al menos sin poder controlar otros elementos del test como, por ejemplo, el tamaño de la muestra) y, por lo tanto, no se puede asegurar que la decisión tomada sea la correcta. Por esta razón, si bien en muchos casos se termina "aceptando" H_0, lo estadísticamente correcto sería decir "no se rechaza H_0".

Utilizando el programa estadístico R, se obtuvo que:

• t.test(Notas, alternative="two.sided", mu=8)

One Sample t-test

data: Notas

t = 3.884, df = 53, **p-value = 0.0002871**

Se observa que el p-valor es pequeño, siendo éste $0{,}0002871$. De esta manera, para cualquier test de nivel aproximado α con α entre los valores más comunes mencionados, se tiene que hay evidencia estadística suficiente para rechazar la hipótesis nula (H_0); por lo consiguiente podemos decir que los alumnos no están respondiendo al azar todos los ejercicios en la prueba diagnóstica.

Interesa observar si existen diferencias entre los diferentes usos y significados del VA propuestos en los ejercicios, es decir si los alumnos reaccionan de la misma manera a cualquiera de los modelos del VA, como se estableció en la sección 2.1.

Siendo que la prueba diagnóstica inicial dispone cuatro ejercicios para cada modelo del VA, se realiza una partición al vector $\boldsymbol{X}$ en función de las cuatro diferentes categorías, es decir, supondremos que:

$$\boldsymbol{X} = \left(\boldsymbol{X}^{(1)}, \boldsymbol{X}^{(2)}, \boldsymbol{X}^{(3)}, \boldsymbol{X}^{(4)}\right)$$

Donde $\boldsymbol{X}^{(j)} = \left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, X_3^{(j)}, X_4^{(j)}\right) \in \mathbb{R}^4$ y $X_k^{(j)} \in \{0; 1\}$, para $1 \leq j \leq 4$ y $1 \leq k \leq 4$.

Considerando el supraíndice (1) para los cuatro ejercicios correspondientes al modelo analítico: función a trozos, el supraíndice (2) refiere a los ejercicios de modelo analítico: composición, el supraíndice (3) corresponde al modelo topológico y el (4) al de aritmético.

Para simplificar notación, observemos que estamos suponiendo que los ejercicios fueron puestos de manera ordenada en la prueba diagnóstica inicial.

En particular, si tenemos el alumno i-ésimo, tendremos que el vector $\boldsymbol{X}_i$ asociado se particiona como:

$$\boldsymbol{X}_i = \left(\boldsymbol{X}_i^{(1)}, \boldsymbol{X}_i^{(2)}, \boldsymbol{X}_i^{(3)}, \boldsymbol{X}_i^{(4)}\right)$$

Donde $\boldsymbol{X}_i^{(j)} \in \mathbb{R}^4$ y cada coordenada de $\boldsymbol{X}_i^{(j)}$ toma valores sólo en el conjunto $\{0; 1\}$.

Observemos entonces que, para cada modelo tendremos una nota que se obtiene sumando las coordenadas del subvector correspondiente, es decir, tendremos

$$N^{(j)} = \sum_{k=1}^{4} X_k^{(j)}$$

que representa la nota que obtiene un alumno en la categoría j. De esta manera, para el i-ésimo individuo tendremos

$$N_i^{(j)} = \sum_{k=1}^{4} X_{ik}^{(j)}$$

Con $1 \leq j \leq 4$ y $1 \leq i \leq 54$.

En la Tabla 8, se analiza la distribución de las notas obtenidas para cada modelo.

Modelo analítico: función a trozos (N1)	**N1**	0	1	2	3	4
	Frecuencia	1	10	19	11	13
Modelo analítico: composición (N2)	**N2**	0	1	2	3	4
	Frecuencia	8	28	9	4	5
Modelo topológico (N3)	**N3**	0	1	2	3	4
	Frecuencia	0	2	9	25	18
Modelo aritmético (N4)	**N4**	0	1	2	3	4
	Frecuencia	0	14	20	19	1

Tabla 8. Distribución de las notas obtenidas para cada modelo.

En la Figura 4, se puede apreciar un histograma de las notas obtenidas para cada modelo.

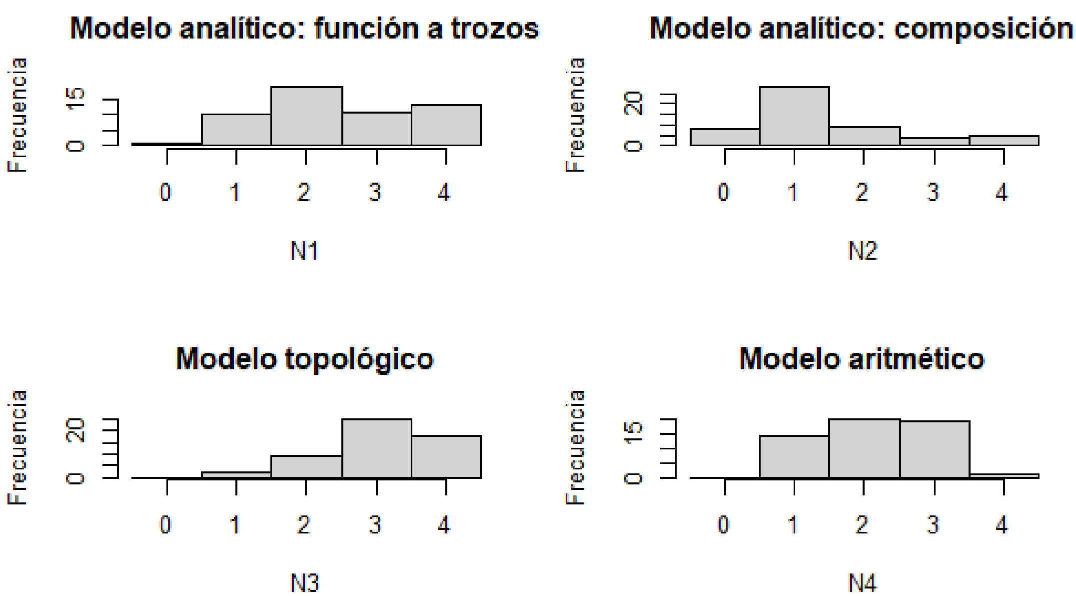


Figura 4: Histogramas de las notas obtenidas en los modelos: analítico: función a trozos, analítico: composición, topológico y aritmético de prueba diagnóstica inicial.

Se advierte que:

- ✓ $N^{(1)}$= "nota obtenida en el modelo analítico: función a trozos" parecería tener una distribución bastante simétrica.

- ✓ $N^{(2)}$= "nota obtenida en el modelo analítico: composición" presenta una asimetría a derecha.
- ✓ $N^{(3)}$= "nota obtenida en el modelo topológico" presenta asimetría a izquierda.
- ✓ $N^{(4)}$= "nota obtenida en el modelo aritmético" presenta simetría alrededor de 2.

Mediante un test de Friedman es posible estudiar si existen diferencias en las respuestas de los alumnos de acuerdo a las cuatro categorizaciones de los modelos que se presentaron en la prueba. Es decir, se quiere decidir entre:

H_0 : no hay diferencias entre las diferentes categorías

vs

H_1 : hay diferencias entre las categorías

Utilizando el software estadístico R se tiene el siguiente resultado:

• friedman.test(N)

Friedman rank sum test

data: N

Friedman chi-squared = 57.448, df = 3, p-value = 2.062e-12

Se puede observar que el p-valor es muy pequeño, siendo éste $2{,}062\,.\,10^{-12}$. De esta manera, se concluye que hay evidencia estadística suficiente para rechazar H_0, es decir que los alumnos no manejan los diferentes usos que presenta el VA de la misma manera.

Por consiguiente, incumbe explorar cuáles son los modelos que más dominan y cuáles no. Para ello, se realiza un test de comparaciones múltiples a posteriori del test de Friedman, éste test es propuesto en Conover e Iman (1979).

• frdAllPairsConoverTest(N)

	N1	N2	N3
N2	0.00017	-	-
N3	0.00741	9.7e-13	-
N4	0.36594	0.05187	8.3e-06

Se puede apreciar que este test estaría indicando que no se detectan diferencias entre las distribuciones de las variables (o categorías, en nuestro caso) $N^{(1)}$ (analítico: función a trozos) y $N^{(4)}$ (aritmético), dado que el p-valor es alto. Sin embargo, sí se detectaron diferencias entre las demás variables.

Se examinan los promedios y las medianas de cada una de las variables con el objeto de observar el grado de dominio de las categorías.

• sort(apply(N,2,mean))

N2	N4	N1	N3
1.444444	2.129630	2.462963	3.092593

• sort(apply(N,2,median))

N2	N1	N4	N3
1	2	2	3

Se contempla que los mejores promedio y mediana de las variables se obtienen con el modelo topológico. Esto muestra que los alumnos poseen dominio sobre el uso del VA en este enfoque. A su vez, en el análisis descriptivo realizado en la Tabla 6 en relación con los ejercicios de este modelo identificados con color marrón, se advirtió que superaban en su mayoría al 60% de respuestas correctas, como se muestra en la Tabla 9.

1.- La distancia entre los números x e y es igual a $\|y-x\|$	**37**	**68,51852%**
8.- Si x es un número negativo, entonces la distancia de x al cero es igual al opuesto de x.	**53**	**98,14815%**
12.- La expresión $\|3-10\|$ es lo mismo que la distancia entre -10 y 3.	**39**	**72,22222%**
14.- Si $\|x\| < 3$, entonces la distancia entre x y el cero es menor que 3.	**38**	**70,37037%**

Tabla 9. Cantidad y porcentaje de respuestas correctas de los ejercicios correspondientes al modelo topológico de prueba diagnóstica inicial.

En cuanto a las categorizaciones que parecieran comportarse de igual manera, $N^{(1)}$ y $N^{(4)}$, se observa que ambas poseen la misma mediana, siendo ésta 2 lo que correspondería con elección al azar, y que $N^{(1)}$ tiene levemente un promedio superior.

Asimismo, se advierte que el promedio y la mediana más bajas (inferiores a 2) de las variables queda de manifiesto en el modelo analítico: composición, lo cual manifiesta que los alumnos no sólo no poseen dominio sobre el uso del VA en este enfoque, sino que además pareciera que lo tienen mal aprendido. Esto mismo se puede examinar en el análisis descriptivo realizado en la Tabla 6, dado que la mayoría de los ejercicios que se brindaron en relación con este modelo manifiestan un porcentaje de respuestas correctas muy inferior al 60% (identificados con color verde), como se observa en la Tabla 10.

4.- Para todo número real x , se tiene que: $\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert$	**39**	**72,22222%**
7.- Para todo número real a , se cumple que: $\sqrt{(1-a)^2} = 1 - a$	**16**	**29,62963%**
11.- La ecuación $\sqrt{(x+1)^2} = 4$ tiene como única solución a $x = 3$	**13**	**24,07407%**
15.- La ecuación $\sqrt{x^2} + 4 = 8$, tiene como única solución $x = 4$	**10**	**18,51852%**

Tabla 10. Cantidad y porcentaje de respuestas correctas de los ejercicios correspondientes al modelo analítico: composición de prueba diagnóstica inicial.

Incumbe conocer si en alguno de estos modelos los alumnos parecieran estar respondiendo al azar o con conocimiento del tema. Para ello, se realizan cuatro tests en los que se testea cada modelo por separado *j = 1, 2, 3 y 4*:

$$H_0:\ \mu^{(j)} \leq 2 \quad \textit{vs} \quad H_1: \mu^{(j)} > 2$$

donde se define como $\mu^{(j)}$ la nota esperada en la categoría j, es decir, $\mu^{(j)} = E\left(N^{(j)}\right)$. De manera análoga a lo realizado en (1) y (2) y recordando que en el caso en que los alumnos estén respondiendo al azar esto indica que $X_k^{(j)} \sim Bernoulli\left(\frac{1}{2}\right)$ y, se tiene que

$$\mu^{(j)} = E\left(N^{(j)}\right) = \sum_{k=1}^{4} E\left(X_k^{(j)}\right) = \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{2} = 4.\frac{1}{2} = 2$$

El test que se realiza para responder a estas hipótesis es, nuevamente, un test de nivel aproximado, pero en este caso unilateral.

- Con respecto al <u>modelo topológico</u>, es decir, para $N^{(3)}$, el resultado obtenido sobre estos datos es el siguiente:

  > t.test(N3, alternative=”greater”, mu=2)

  One Sample t-test

  data: N3

  t = 9.946, df = 53, **p-value = 5.081e-14**

  Se observa que el p-valor es $5.081.10^{-14}$ con lo cual hay evidencia estadística suficiente para rechazar la hipótesis nula (H_0); luego, como era de esperar, se puede decir que los alumnos no están respondiendo al azar en este modelo sino con conocimiento sobre el tema.

- Con relación al <u>modelo analítico: composición</u>, es decir, para $N^{(2)}$,el resultado obtenido para estos datos:

  > t.test(N2, alternative=”greater”, mu=2)

  One Sample t-test

  data: N2

  t = -3.622, df = 53, **p-value = 0.9997**

  Se percibe que el p – valor es $0{,}997$ por lo tanto no se rechaza la hipótesis nula, es decir, los alumnos estarían respondiendo al azar o de forma incorrecta. Esto resulta esperable dado que desde el análisis descriptivo se examinó que los alumnos no tienen dominio del tema en este modelo.

- Con respecto al <u>modelo aritmético</u>, es decir, para $N^{(4)}$, el resultado obtenido es el siguiente:

  • t.test(N4, alternative=”greater”, mu=2)

  One Sample t-test

  data: N4

t = 1.1543, df = 53, **p-value = 0.1268**

El p-valor obtenido es de $0{,}1268$; de acuerdo con los niveles de significación más usuales se decide no rechazar la hipótesis nula, por ende, se podría decir que los alumnos están respondiendo al azar.

- En cuanto al <u>modelo analítico: función a trozos</u>, es decir, para $N^{(1)}$, el resultado obtenido es el siguiente:

  - t.test(N1, alternative=”greater”, mu=2)

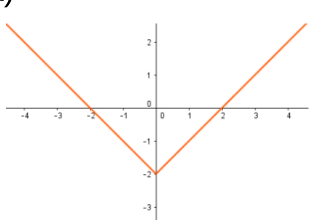
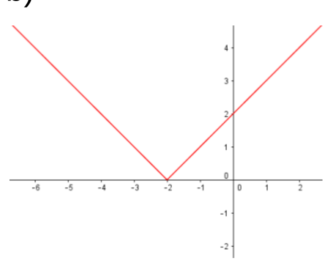
  One Sample t-test

  data: N1

  t = 3.062, df = 53, **p-value = 0.001725**

Se advierte que el valor de p-valor es $0{,}001725$ con lo cual hay evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula (H_0); por consiguiente, los alumnos no están respondiendo al azar en esta categoría.

Por otro lado, reflexionando a partir de los datos considerados mediante el análisis descriptivo, se tiene que la media de este modelo analítico: función a trozos se encuentra al límite del porcentaje de aprobación estipulado en la universidad UNLu, ya que $\frac{2{,}462963}{4} = 0{,}6157$ o sea el 62% aproximadamente. Además, la mediana resultó 2 y en el análisis descriptivo se advierte que en el porcentaje de respuestas correctas dos de los cuatro ejercicios que se presentan se hallaron por debajo del 60%, como se ilustra en la Tabla 11.

5.- La gráfica de la función f, definida por $f(x) = \lvert x \rvert - 2$ es: a)  b) 	**37**	**68,51852%**

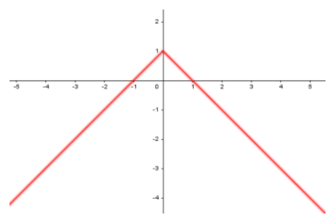
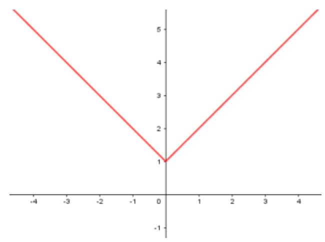
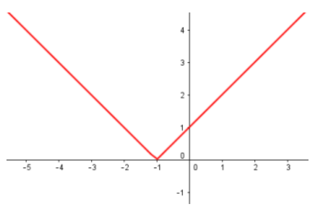
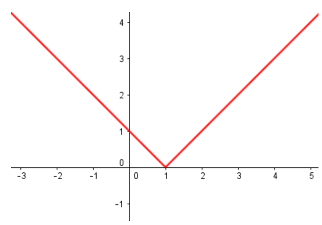
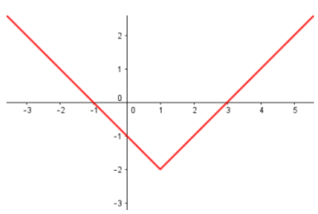
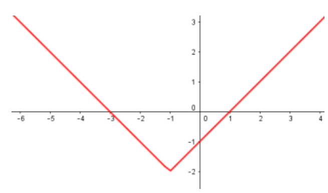
9.- La gráfica de la función f, definida por: $f(x) = -\|x\| + 1$ es a)  b) 	**43**	**79,62963%**
13.- La gráfica de la función f, definida por $f(x) = \|x - 1\|$ es: a)  b) 	**25**	**46,29630%**
16.- La gráfica de la función f, definida por $f(x) = \|x - 1\| - 2$ es: a)  b) 	**28**	**51,85185%**

Tabla 11. Cantidad y porcentaje de respuestas correctas de los ejercicios correspondientes al modelo analítico: función a trozos de prueba diagnóstica inicial.

Estos porcentajes permiten sospechar que probablemente este modelo los alumnos no lo manejen en su totalidad. Con el objeto de estudiar esta conjetura, realizamos un test exacto para la distribución binomial para cada uno de los ejercicios que presenta este modelo. Es decir, queremos decidir entre las siguientes hipótesis:

$$H_0: p_k = \frac{1}{2} \quad vs \quad H_1: p_k > \frac{1}{2}$$

donde recordemos que X_k= ”resultado obtenido en el k-ésimo ejercicio”. En este caso, la hipótesis nula (H_0) significa que la probabilidad de resolución correcta de un ejercicio es ½, mientras que la hipótesis alternativa (H_1) supone que la probabilidad de resolución correcta es mayor a ½. En el caso de rechazar la H_0, esto significaría tener evidencia estadística a favor de que los alumnos elijan con conocimiento la respuesta correcta.

Por consiguiente, se procede a observar si los alumnos responden al azar cada ejercicio.

- Ejercicio5 <- FuncionATrozos[,”Ej5”]
- SumaEj5 <- sum(Ejercicio5)
- binom.test(SumaEj5,70,p=0.5, alternative=”greater”)

Exact binomial test

data: SumaEj5 and 70

number of successes = 37, number of trials = 70, **p-value = 0.3601**

Luego, como no se rechaza H_0, se podría decir que los alumnos están respondiendo al azar este ejercicio, pues $p - value = 0{,}3601$.

- Ejercicio9 <- FuncionATrozos[,”Ej9”]
- SumaEj9 <- sum(Ejercicio9)
- binom.test(SumaEj9,70,p=0.5, alternative=”greater”)

Exact binomial test

data: SumaEj9 and 70

number of successes = 43, number of trials = 70, **p-value = 0.03612**

El p-valor obtenido es de $0{,}03612$. Por esta razón, si consideramos un nivel de significación $\alpha = 0{,}05$ diríamos que hay evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula (H_0) , con lo cual los alumnos no estarían respondiendo al azar este ejercicio ya que $0{,}03612 < 0{,}05$. Mientras que si elegimos un nivel de significación $\alpha = 0{,}01$, como $0{,}01 < 0{,}03612$ no rechazaríamos la hipótesis nula (H_0) de que los alumnos estén respondiendo al azar.

- Ejercicio13 <- FuncionATrozos[,”Ej13”]
- SumaEj13 <- sum(Ejercicio13)
- binom.test(SumaEj13,70,p=0.5, alternative=”greater”)

Exact binomial test

data: SumaEj13 and 70

number of successes = 25, number of trials = 70, **p-value = 0.9942**

En este caso, el p-valor (que resultó ser $0{,}9942$) es muy grande comparado a cualquier nivel de significación razonable, por lo que no se rechaza la hipótesis nula, es decir que los alumnos estarían respondiendo este ejercicio al azar (o de forma errónea).

• Ejercicio16 <- FuncionATrozos[,”Ej16”]

• SumaEj16 <- sum(Ejercicio16)

• binom.test(SumaEj16,70,p=0.5, alternative=”greater”)

Exact binomial test

data: SumaEj16 and 70

number of successes = 28, number of trials = 70, **p-value = 0.9639**

Nuevamente y dado que el p-valor obtenido es grande, se podría decir que los alumnos están respondiendo al azar (o de forma errónea) este ejercicio.

De acuerdo con los cuatro test aplicados, se observa que tres de los cuatro ejercicios estudiados para este modelo no rechazan la hipótesis nula (H_0) considerando un nivel de significación $\alpha = 0{,}05$ o $0{,}01$. Por consiguiente, los alumnos no dominan en su totalidad este modelo analítico: función a trozos.

En definitiva, mediante el análisis estadístico expuesto, se concluye que los alumnos dominan en su totalidad el modelo topológico pero no sucede así con los restantes modelos. Se valora otorgar preponderancia a los modelos aritmético, analítico: composición y analítico: función a trozos en el diseño de las clases.

Resulta de importancia desarrollar una propuesta didáctica que fortalezca los modelos del VA que los alumnos menos dominan con el objeto de alcanzar la apropiación de los usos y significados asociados al concepto de VA propuestos por Wilhelmi et. al. (2007).

CAPÍTULO IV

Propuesta de la unidad didáctica

4.1 Descripción

La compresión del concepto VA resulta un concepto básico en el área de las matemáticas y utilizable en diversos contextos de la disciplina como el análisis matemático, el álgebra, la estadística, la geometría, entre otros. La utilización de diferentes registros de representación (verbal, tabular, simbólico, algebraico, o gráfico) resulta ser un medio imprescindible para interpretar este objeto matemático que tiene la particularidad de contar con diferentes usos y significados, entre ellos, los correspondientes a las cuatro categorías: analítico: función a trozos, analítico: composición, topológico y aritmético.

La asignatura "Elementos de Matemática" de las carreras de Ingeniería en Alimentos e Ingeniería Industrial de la UNLu, tiene como principal objetivo que los estudiantes puedan elaborar racionalmente algunas nociones básicas de la matemática elemental, desarrollar su capacidad en la compresión de textos matemáticos y resolver situaciones problemáticas donde utilicen como herramienta el manejo de los conceptos aprendidos. Esta asignatura cuenta con cuatro bloques temáticos centrados en contenidos básicos de la enseñanza secundaria, en el Anexo 2 se muestra el Programa de Contenidos de esta. Mediante la propuesta de trabajos prácticos o guías de actividades preestablecidas se pretende ayudar a los estudiantes para contribuir en la compresión de los temas dados utilizando toda la información brindada para resolver diferentes situaciones problemáticas.

Dentro de los contenidos que presenta la asignatura, la presente unidad didáctica se enmarca en el Trabajo Práctico N° 3 en el cual se expone brevemente la temática valor absoluto de un número real. Por lo cual, con el objeto de llevar adelante la vigente planificación, se considera no sólo incorporar ejercicios extras al trabajo práctico mencionado, sino que además se incluye un anexo al finalizar el Trabajo Práctico Nº 6 con el objeto de introducir la función VA concepto que no se incluye en los contenidos de la asignatura. En el Anexo 2 se muestra la secuencia de trabajos prácticos con el detalle de su contenido con los que la asignatura cuenta.

La asignatura "Elementos de la Matemática" cuenta con seis comisiones distribuidas en sus tres bandas horarias: cuatro por la mañana, una por la tarde y otra por la noche, y posee una carga horaria de seis horas semanales en el cuatrimestre, dictándose los lunes y miércoles.

Para la presente investigación se decide escoger a alumnos de las comisiones 2 y 3, mediante un muestreo simple al azar, para participar de la propuesta pedagógica.

Se establecen cinco clases distribuidas de la siguiente manera:

- un primer bloque de tres clases sucesivas en las que se aborda el concepto de VA desde sus modelos topológico, aritmético y analítico: composición. Este bloque se lleva a cabo tras finalizar el Trabajo Práctico Nº 2.
- un segundo bloque de dos clases donde se introduce el modelo analítico: función a trozos y, posteriormente, se explora la asociación entre los modelos estudiados. Este tramo ocurre luego de realizado el Trabajo Práctico Nº 6.

El motivo de esta distribución radica no sólo en los conocimientos previos que deben poseer los alumnos al momento de cada explicación, sino que también refiere a la reducida flexibilidad que presenta el cronograma de la asignatura.

4.2 Expectativas de logro

Se espera que el alumno sea capaz de comprender la noción del valor absoluto en sus diferentes usos y significados apoyándose en la articulación de dos o más registros de representación.

4.3 Contenidos de aprendizaje

Recta numérica. Distancia entre dos números reales. Intervalos reales. Potenciación en $\mathbb{R}$: definición y propiedades. Radicación en $\mathbb{R}$: definición y propiedades. Definición del valor absoluto de un número real desde su modelo topológico, aritmético y analítico: composición. Resolución de ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto (o módulo). Resolución de problemas de aplicación. El valor absoluto asociado a una función a tozos: definición de función valor absoluto. Movimientos de la función valor absoluto: traslaciones y reflexiones.

4.4 Secuencia de actividades

En primer lugar, se partirá de la idea intuitiva que los alumnos presentan de la noción de distancia entre dos puntos de la recta numérica. A partir de allí, se buscará definir la distancia de un número real cualquiera a cero, dando lugar a la definición topológica y posteriormente se define la noción del VA desde su modelo aritmético. A su vez, se hará hincapié en las propiedades que intervienen.

Se expondrá a los alumnos a situaciones problemáticas que los lleven a interpretar consignas y resolver ecuaciones e inecuaciones poniendo énfasis en las estrategias de resolución desde los modelos abordados y utilizando las distintas formas de representación que el objeto matemático de estudio presenta.

Desde un pequeño recorrido por las nociones de potenciación y radicación en el conjunto $\mathbb{R}$, se establecerá la necesidad de definir la noción de VA desde la composición de estas dos operaciones: modelo analítico: composición. Se trabajará la resolución de ecuaciones e inecuaciones poniendo acento no sólo en resolverlas desde los modelos: topológico, aritmético y analítico: composición, sino que, a su vez, en explorar la articulación de los registros de representación que se manifiestan en cada modelo trabajado, siendo éstos verbal, simbólico, tabular, gráfico y algebraico. De esta manera se concluirá con el primer bloque de esta propuesta didáctica.

En los trabajos prácticos N° 5 y N° 6, los alumnos estudian el concepto de función (en general) y de función lineal; a partir de dichas nociones se definirá el valor absoluto asociado a una función a trozos: la función valor absoluto (modelo analítico: función a trozos). Se visualizará su gráfica a partir de una tabla de valores: utilizando lo aprendido sobre funciones lineales y con la ayuda del software matemático GeoGebra, software utilizado en diversas instancias de la asignatura para el gráfico de funciones y la realización de algunas operaciones básicas, se

propondrá la construcción del gráfico de una función VA. Se estudiarán también los movimientos de traslación y reflexión de una función VA.
Por último, se buscará vincular desde la resolución de ecuaciones e inecuaciones los diferentes modelos de VA estudiados haciendo énfasis en la utilización y coordinación de los registros de representación que intervienen.

4.5 Estrategias metodológicas

Se plantearán situaciones problemáticas o preguntas preliminares al trabajar los diferentes modelos asociados al VA con el objeto de fomentar en los alumnos la búsqueda de estrategias de resolución y la utilización de los registros de representación, poniendo en marcha la estrategia más conveniente y la justificación de la validez del razonamiento empleado.
Se proponen actividades que procuran el estudio y análisis de casos que lleven al alumno a encontrar regularidades y definir generalizaciones en cada contenido.
Se ofrecerá, en caso de que lo soliciten, a los alumnos la presentación del PowerPoint (en formato .pdf) con el desarrollo de la clase dictada.
Se asignarán actividades domiciliarias para el entrenamiento y el dominio de los procedimientos. En caso de presentarse errores comunes, se propondrá un análisis grupal y minucioso sobre dichos desarrollos erróneos, dando lugar a que los compañeros puedan argumentar el porqué del error, bajo la mirada del docente o intervención en caso de ser necesario.
Se ofrecerá a los alumnos realizar consultas en forma presencial, destinando dos horas semanales los viernes para tal fin, o bien mediante correo electrónico.
Se trabajarán algunas actividades con el software matemático GeoGebra, con el objeto de analizar el comportamiento de las funciones VA, observar ciertas características y verificar resultados obtenidos.
Se realizará juntamente con los alumnos, al cierre de cada clase, una síntesis de los conceptos vistos como forma de estudio y de reflexión sobre lo aprendido.

4.6 Recursos de materiales didácticos

Los recursos didácticos que se utilizarán para realizar las clases son:

- Materiales impresos: guías de trabajos teórico - prácticos (Trabajo Práctico Nº 3 y anexo al Trabajo Práctico Nº 6).
- Materiales de trabajo: pizarrón, tizas de colores y blancas, cañón o proyector, notebook.
- Materiales audiovisuales: material del desarrollo de la clase en PowerPoint y software matemático GeoGebra.

4.7 Organización de espacio y tiempo

Las clases se dictarán en las aulas de la UNLu que tienen capacidad entre 60 a 120 personas según el aula asignada, cuentan con bancos individuales y con los materiales didácticos necesarios para llevarlas a cabo.

Se destinarán cinco clases presenciales de tres horas cada una para abordar los contenidos de la unidad temática planteada distribuidas en dos bloques como se explicó en la Sección 4.1.

4.8 Modalidad de la clase: teórico – práctica

Las clases serán teóricas – prácticas estableciendo clases interactivas entre el docente y el alumno. En principio, el docente indagará o explicará a los estudiantes sobre determinados conceptos necesarios sentando las bases para abordar el contenido, luego mediante una pregunta, situación o ejercicio introducirá el tema buscando la solución conjuntamente con ellos. Además, el docente acompañará sus explicaciones con ejemplos ilustrativos que posibiliten a los alumnos la compresión y su aplicación práctica en la resolución de los ejercicios que se le propongan. En los momentos que el docente considere oportuno, se brindará un espacio para la práctica donde el alumno se enfrentará en forma individual con los ejercicios para buscar estrategias de resolución, examinar procedimientos seguidos y resultados obtenidos, y analizar los aspectos no comprendidos. En esta instancia, además, el docente desarrollará una tarea de asesoramiento y guía en la búsqueda de soluciones adecuadas a la situación planteada.

4.9 Evaluación

Se estipula evaluar a los alumnos en forma individual mediante dos indicadores: uno que consiste en la resolución de dos ejercicios prácticos de desarrollo y el otro en la realización de una prueba diagnóstica final de elección múltiple que constará de 16 afirmaciones, de las cuales los alumnos deberán decidir entre dos opciones (“verdadera” o “falsa”, o “a)” o “b)”) con características similares a la prueba diagnóstica inicial que se desarrolló al principio de la investigación.

Durante el dictado de las clases se observará a los alumnos para advertir las inquietudes y comentarios que manifiesten en forma oral en la resolución de las actividades y en la argumentación de los razonamientos empleados.

CAPÍTULO V
Diseño de la secuencia de clases didácticas

El objetivo de este capítulo consiste en el diseño de clases tendientes a fortalecer aquellos modelos del concepto VA que los alumnos menos manejen o desconozcan, fundamentados en los distintos registros de representación y en la vinculación entre dos o más registros relacionados al objeto de estudio. Para ello, se elabora una secuencia de tareas didácticas que tiene por objeto el aprendizaje del VA en sus diferentes usos y significados desarrollados por Wilhelmi et al. (2007), procurando superar las debilidades detectadas en el Capítulo III. A continuación, se detalla la planificación para cada clase.

5.1 El valor absoluto desde su modelo topológico y aritmético. Ecuaciones con VA. (Clase N° 1)

Descripción de la clase: Siendo que en la Sección 3.2 se observó que los alumnos manejan el modelo topológico, se considera comenzar con la noción de distancia entre dos números reales en la recta numérica y, a partir de allí, asociar y deducir la definición del valor absoluto desde el modelo aritmético. Luego, se introducirá la resolución de ecuaciones con VA desde ambos modelos, de este modo se trabajarán con los registros de representación verbal, simbólico, gráfico y algebraico.

Conocimientos previos: Nociones de lógica (Trabajo Práctico N° 1). Conjuntos numéricos (Trabajo Práctico Nº 2).

Objetivos: Que el alumno sea capaz de:

- calcular y representar la distancia entre dos números reales.
- reconocer y operar con la definición del VA desde el modelo topológico y aritmético.

- resolver ecuaciones mediante los dos enfoques: topológico y aritmético, relacionando ambos significados del VA por medio de los registros de representación.

Contenidos: Recta numérica. Distancia entre dos números reales. Definición del valor absoluto de un número real. Ecuaciones con valor absoluto.

Modalidad de la clase y tiempo: la clase es de carácter teórico – práctico y su duración se estipula en 3 horas.

Desarrollo de clase: *Comenzaremos desarrollando algunos conceptos necesarios para luego abordar el tema central de esta sesión de clase que consiste en comprender la noción del valor absoluto de un número desde dos modelos: topológico y aritmético, y en la resolución de ecuaciones con VA a partir de estas definiciones.*

Primeramente, recordaremos cómo ubicamos puntos en la recta numérica:

<u>Recta numérica (o real)</u>

Para representar gráficamente a los números reales utilizaremos una recta, la cual se denomina *recta numérica*. Para ello, elegiremos dos puntos de referencia arbitrarios sobre la recta: uno el cero al cual llamaremos “origen” y el otro, el uno (seleccionado a derecha de éste) el cual representará la unidad de longitud seleccionada para medir las distancias.

En la Figura 5, asociaremos a cada número real positivo a un punto que se encuentre a una distancia de a unidades del origen en la dirección positiva, esto es situado a la derecha del cero. Y asociaremos a cada número real negativo $-a$ un punto que esté a a unidades de distancia del origen en dirección negativa, es decir situado a la izquierda del cero.

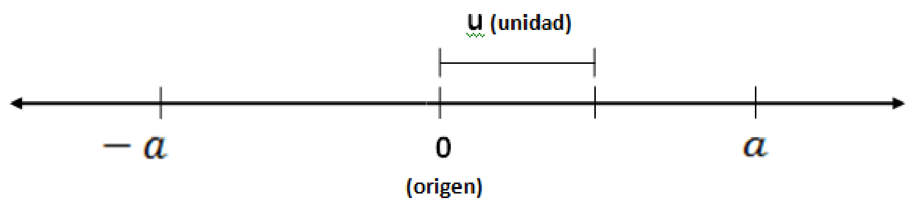


Figura 5. Representación de la recta numérica.

De esta manera, se establece que: a cada número real le corresponde un único punto sobre la recta numérica; y, asimismo a cada punto de la recta numérica le corresponde uno y sólo un número real. Se presenta aquí una correspondencia biunívoca (uno a uno) entre el conjunto de los números reales y el conjunto de puntos en la recta numérica. Por lo tanto, diremos que el conjunto $\mathbb{R}$ es continuo, es decir, cubre o completa toda la recta numérica sin dejar huecos.

Acabamos de recordar cómo ubicar los puntos en la recta numérica, nos preguntaremos ahora cómo podemos calcular la distancia entre dos puntos cualesquiera en la recta numérica.

<u>Distancia entre dos números reales</u>

Si consideramos los números -2 y 8 ¿cuál será la distancia entre estos dos números?

Para ello, nos apoyamos en la recta numérica (registro gráfico) como se muestra en la Figura 6.

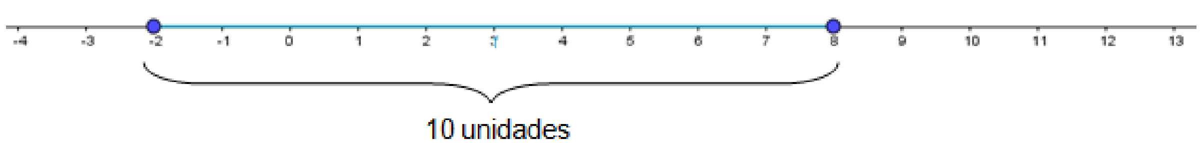


Figura 6. Representación gráfica de la distancia entre los números -2 y 8.

Observamos que la distancia entre estos dos puntos de la recta numérica equivale a la longitud, expresada numéricamente, del segmento de recta que los une. En este caso, resulta que la distancia entre -2 y 8 es 10.

Pero ¿qué cálculo debemos realizar para afirmar que la distancia entre -2 y 8 es 10? Este resultado surge de realizar la diferencia entre 8 y -2; en símbolos podemos escribir:

$$d(-2,8) = 8 - (-2) = 10$$

Con lo cual es posible obtener la distancia entre dos números reales a partir de la diferencia entre el número mayor de ellos y el menor. Es decir; sean a y b números reales, si $a \leq b$ entonces $d(a,b) = b - a$.

Realicemos los siguientes ejercicios: (se otorgan en clase cinco minutos para que los alumnos puedan resolver los ejercicios que se proponen, luego se corrigen en pizarrón).

<u>Ejercicio 1</u>: Representar gráficamente y calcular la distancia entre los siguientes pares de puntos:

a) 1 y 4 *b) 0 y 9* *c) – 1 y 3*

<u>Ejercicio 2</u>: ¿A qué distancia del 0 se encuentra el -2? ¿Es la misma que la distancia del 0 a 2?

En la Figura 7, a partir de la recta numérica, advertimos que la distancia resulta la misma para cada par de puntos de la recta.

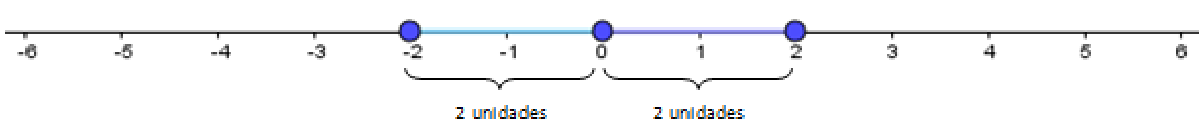


Figura 7. Representación gráfica de la distancia de 2 y de -2 al origen.

Consideremos esta situación para cualquier número real, es decir, ¿a qué distancia del cero se encuentra un número real x?

Pensemos en los diferentes valores que puede tomar x:

- ✓ Si x es positivo, entonces la distancia entre x y 0 resulta: x.
- ✓ Si x es negativo, entonces la distancia de x y 0 resulta: $-x$
- ✓ Si x es cero, entonces la distancia de x y 0 resulta: 0.

En la Figura 8, podemos visualizar la distancia de un número real x al origen:

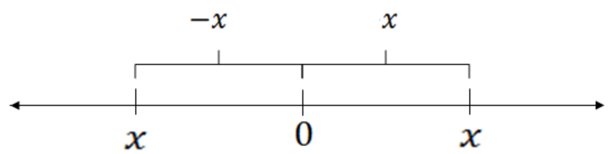


Figura 8. Representación gráfica de la distancia de un número real x al origen.

En efecto;

Si $x > 0$, entonces $d(x, 0) = x$

Si $x = 0$, entonces $d(x, 0) = 0$

Si $x < 0$, entonces $d(x, 0) = -x$

A partir de la noción de distancia entre dos números reales, se desprende el concepto del valor absoluto (o módulo) de un número real. Diremos que:

- ✓ El valor absoluto (VA) de un número real x, desde el <u>modelo topológico,</u> es la *distancia del punto x al origen*. Esto es:

$$d(x,0) = \begin{cases} x & si\, x > 0 \\ -x & si\, x < 0 \\ 0 & si\, x = 0 \end{cases}$$

- ✓ El valor absoluto de un número real x, designado $|x|$, desde el <u>modelo aritmético</u> resulta:

$$|x| = \begin{cases} x & si\, x \geq 0 \\ -x & si\, x < 0 \end{cases}$$

El valor absoluto (VA) de un número real x, desde su modelo topológico, es la distancia del número x a cero lo que equivale al valor absoluto de x . En símbolos: $\forall x \in \mathbb{R},\ d(x, 0) = |x|$.

El número $|x|$ representa geométricamente una longitud, la del segmento cuyos extremos son el punto x y el origen 0, por lo cual su valor será siempre no negativo. Es decir que:

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad d(x,0) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \forall\, x\ \in \mathbb{R},\ \ |x| \geq 0$$

Veamos algunos <u>ejemplos</u>, empleando ambos modelos:

a) $\left|-\frac{3}{4}\right| \underbrace{=}_{pues\ -\frac{3}{4}<0} -\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}$ (aplicando la definición del V.A desde el modelo aritmético)

$d\left(-\frac{3}{4}, 0\right) = \frac{3}{4}$ (aplicando la definición del V.A desde el modelo topológico) como se observa en la Figura 9.

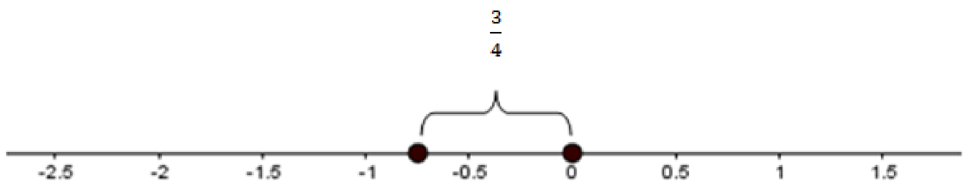


Figura 9. Representación gráfica de la distancia entre los números $-\frac{3}{4}$ y 0.

Luego, es claro que: $\left|-\frac{3}{4}\right| = d\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$.

b) $\left|\frac{3}{4}\right| \underbrace{=}_{pues\ \frac{3}{4}>0} \frac{3}{4}$ (aplicando la definición del V.A desde el modelo aritmético)

$d\left(\frac{3}{4}, 0\right) = \frac{3}{4}$ (aplicando la definición del V.A desde el modelo topológico) como se observa en la Figura 10.

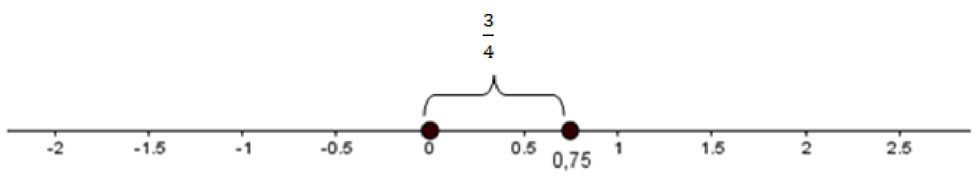


Figura 10. Representación gráfica de la distancia entre los números $\frac{3}{4}$ y 0.

Luego, es claro que: $\left|\frac{3}{4}\right| = d\left(\frac{3}{4}, 0\right)$.

c) $\left|\sqrt{2} - 2\right| \underbrace{=}_{pues\ \sqrt{2}-2<0} -\left(\sqrt{2} - 2\right) = -\sqrt{2} + 2 = 2 - \sqrt{2}$

(aplicando la definición del V.A desde el modelo aritmético)

$d(\sqrt{2}-2,\ 0) = 2-\sqrt{2}$ (aplicando la definición del V.A desde el modelo topológico) como se muestra en la Figura 11.

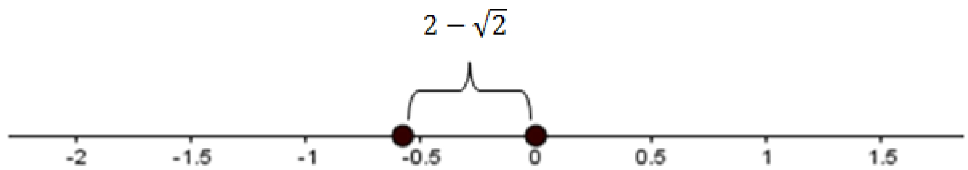


Figura 11. Representación gráfica de la distancia entre los números $(\sqrt{2}-2)$ *y* 0*.*

De esta manera: $|\sqrt{2}-2| = d(\sqrt{2}-2,\ 0)$.

d) $|2-\sqrt{2}| \underbrace{=}_{pues\ 2-\sqrt{2}>0} 2-\sqrt{2}$ (aplicando la definición del V.A desde el modelo aritmético)

$d(2-\sqrt{2},\ 0) = 2-\sqrt{2}$ (aplicando la definición del V.A desde el modelo topológico) como se muestra en la Figura 12.

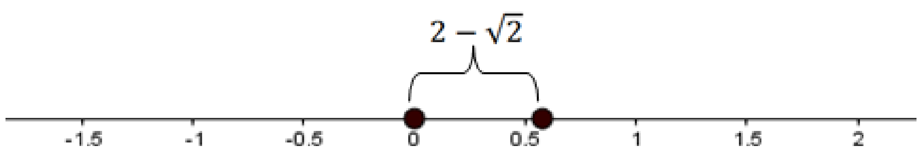


Figura 12. Representación gráfica de la distancia entre los números $(2-\sqrt{2})$ *y* 0*.*

Luego; $|2-\sqrt{2}| = d(2-\sqrt{2},\ 0)$.

En estos ejemplos se presentan los registros simbólico y gráfico.

¿Qué relaciones podemos observar a partir de estos ejemplos?

Advertimos que:

1.- La distancia de un número real x al cero, o bien $|x|$, es siempre no negativa. Esto es:

$$\boxed{\forall\, x\ \in \mathbb{R}, \qquad d(x,0) = |x| \geq 0}$$

2.- La distancia de un número real x al cero es la misma distancia que del opuesto de x al cero. Esto es:

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ \ d(x,0) = d(-x,0) \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ \ |x| = |-x|}$$

Por lo tanto, a partir de la noción del valor absoluto de un número real es posible definir la distancia entre dos números como el valor absoluto de la diferencia entre esos dos números. Esto es:

$$\boxed{\forall\, a, b \in \mathbb{R}, \qquad d(a,b) = |b - a|}$$

Se sugiere realizar en clase los siguientes ejercicios. (Se otorga a los alumnos 10 minutos para ello, luego se corregirán los ejercicios en pizarrón).

<u>Ejercicio 3</u>: Calcula:

a) $|\pi - 4| =$

b) $d\left(0, -\sqrt{3}\right) =$

c) $|4 - \pi| =$

d) $\left|-\sqrt{3}\right| - |-3| =$

<u>Ejercicio 4</u>: Analiza geométricamente la relación $d(a,b) = d(b,a)$ en los siguientes casos:

a) $0 < a < b$ b) $a < b < 0$ c) $a < 0 < b$

<u>Ejercicio 5</u>: ¿Es verdad que: $|b - a| = |a - b|$, siendo a y b números reales? Justificar la respuesta.

Vemos que en los dos últimos ejercicios propuestos se aprecia que no interesa en qué orden se resten a y b. Es decir, que la distancia entre dos puntos de la recta numérica es independiente del orden en que se tomen los puntos. Hasta ahora se ha calculado la distancia de un número real dado al cero, pero cómo podemos hacer para calcular el valor de aquellos números conociendo su distancia al cero. Es decir, nos introducimos a la resolución de ecuaciones con valor absoluto. Recordamos que resolver una ecuación significa hallar todos los posibles valores de la incógnita que cumplan la igualdad planteada.

Veamos algunos ejemplos:

<u>Ejemplo 1</u>: ¿Cuáles son los valores de x cuya distancia al cero es dos? Es decir, queremos saber cuáles son los valores de x tal que $d(x,0) = 2$ (registro verbal/ simbólico).

En la Figura 13, mediante la representación gráfica (registro gráfico) observamos que:

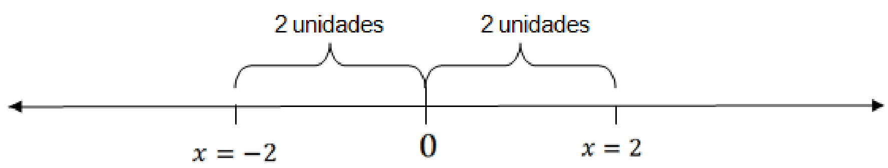


Figura 13. Representación gráfica de un número real x cuya distancia al cero es dos.

Luego, $d(x,0) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2 \quad o \quad x = 2$.

Sin embargo, calcular $d(x,0) = 2$ equivale a calcular: $|x| = 2$ (registro algebraico).

$$|x| = 2 \Leftrightarrow \begin{array}{cc} x = 2 & si\ x \geq 0 \\ o & \\ x = -2 & si\ x < 0 \end{array} \Leftrightarrow x = -2 \quad o \quad x = 2$$

Luego, $|x| = 2 \quad \Leftrightarrow x = -2 \quad o \quad x = 2$.

Por lo tanto, las soluciones a nuestra pregunta son: $x = -2 \quad o \quad x = 2$

<u>Ejemplo 2</u>: ¿Cuáles son los valores de x cuya distancia a dos resulta tres? Es decir, queremos saber los valores de x que cumplen que: $d(x,2) = 3$ (registro verbal/ simbólico).

En la Figura *14*, mediante la representación gráfica (registro gráfico) se tiene que:

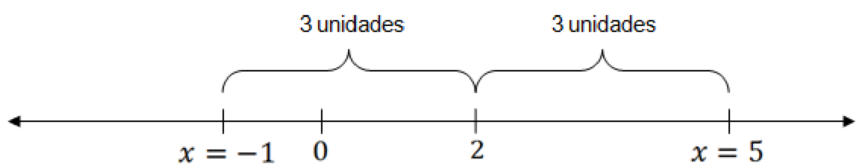


Figura 14. Representación gráfica de un número real x cuya distancia a dos resulta tres.

Sin embargo, calcular $d(x,2) = 3$ equivale a calcular: $|x-2| = 3$ (registro algebraico).

$$|x-2| = 3 \iff \begin{array}{ll} x-2=3 & si\ \ x-2 \geq 0 \\ o & \\ -(x-2)=3 & si\ \ x-2<0 \end{array} \iff \begin{array}{ll} x-2=3 & si\ \ x \geq 2 \\ o & \\ -x+2=3 & si\ \ x<2 \end{array}$$

Con lo cual,

$$|x-2| = 3 \iff \begin{array}{ll} x=5 & si\ \ x\ \geq 2 \\ \text{o} & \\ x=-1 & si\ \ x<2 \end{array}$$

Se deduce que,

$$|x-2| = 3 \iff x=-1 \quad o \quad x=5$$

Por lo tanto, las soluciones a esta pregunta son: $x=-1 \quad o \quad x=5$.

Generalizando:

Si $a > 0$**,** entonces

- ✓ Desde el modelo topológico, se tiene que:
  $d(x,0) = a \iff x = -a \quad o \quad x = a$, como se muestra en la Figura 15 mediante la representación en la recta numérica (registro gráfico):

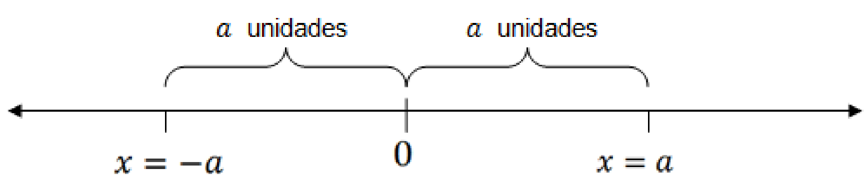


*Figura 15. Representación gráfica de la distancia entre un número real x y el origen resulta a***.**

- ✓ Desde el modelo aritmético, se tiene que:
  $|x| = a \iff x = -a \ \ o \ \ x = a$ (registro algebraico)

Ahora bien, qué sucede si $a < 0$. Analicemos:

- ✓ Desde el modelo topológico: $d(x, 0) = a$

  Sabemos que la distancia de un número real x al cero es siempre no negativa, es decir, no existe un número real x tal que su distancia al cero sea negativa. Por consiguiente, la presente ecuación no tiene solución.
- ✓ Desde el modelo aritmético: $|x| = a$

  Sabemos que el valor absoluto de un número real x es siempre mayor o igual a cero, esto es $|x| \geq 0$ con lo cual si $a < 0$, se deduce que la ecuación $|x| = a$ no tiene solución.

Se sugiere a los alumnos realizar los siguientes ejercicios (se otorgan 25 minutos para ello, luego se corrigen en pizarrón).

<u>Ejercicio 6</u>: *Resuelve las siguientes ecuaciones aplicando la definición del VA desde el modelo topológico y aritmético.*

$a)\ |x - 3| = 5$ $\qquad b)|2x - 1| = 0$ $\qquad c)\ \left|\frac{x}{2} + 1\right| = -3$

$d)|3 - x| = \sqrt[3]{125}$ $\qquad e)\ 3|x| - 1 = |-x|$

Antes de finalizar la clase se realiza juntamente con los alumnos una síntesis de los conceptos vistos:

El valor absoluto de un número real x se define:

$$|x| \quad = \quad \begin{cases} x & si\ \ x \geq 0 \\ -x & si\ \ x < 0 \end{cases}$$

<u>Propiedades</u>:

- $\forall\ a, b\ \in \mathbb{R},\quad d(a, b) = |b - a|$
- $\forall\ x\ \in \mathbb{R},\quad d(x, 0) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x| \geq 0$
- $\forall\ x\ \in \mathbb{R},\quad d(x, 0) = d\ (-x, 0) \quad \Leftrightarrow \quad |x| = |-x|$
- *Si* $a > 0$ *se tiene que:*

  $$|x| = a \ \Leftrightarrow \ x = -a \ \ o \ \ x = a$$

  O bien, $$d(x, 0) = a \Leftrightarrow \ x = -a \ \ o \ \ x = a$$

Se asigna a los alumnos los siguientes ejercicios para continuar trabajando en forma domiciliaria.

<u>Ejercicio 7:</u> *Calcula:*

$a)\ |-1{,}3| =$ $b)\ |3^{-1}| =$ $c) |7| - |-1| =$

$d)\ |2-\sqrt{5}| =$ $e) |1-\pi| =$ $f)\ |-\sqrt{2}| - |-\sqrt{8}| =$

<u>Ejercicio 8</u>: *Indica verdadero o falso, justifica tu respuesta.*

$a)\ |\sqrt{5}| = |-\sqrt{5}|$ $b)\ |\pi - \sqrt{15}| = \sqrt{15} - \pi$ $c)\ a \neq 0 \implies |a^{-1}| = \frac{1}{a}$

$d)\ d(-5,3) = |-5-3|$ $e)\ |\sqrt{2}-1| = |1-\sqrt{2}|$

<u>Ejercicio 9</u>: *Completar los puntos suspensivos:*

Sea $a \in \mathbb{R}$, la ecuación $|x| = a$,

- *tiene la única solución $x = 0$, si a…………..*
- *no tiene solución si a…………..*
- *tiene exactamente dos soluciones $x_1 =$………, $x_2 =$………; si a…………..*

<u>Ejercicio 10</u>: *I) Halla los números reales que distan:*

a) $\sqrt{3}$ *unidades del número cero.*

b) 5 *unidades del número* -3.

c) 3 *unidades del número*5.

II) Representa gráficamente las situaciones.

<u>Ejercicio 11</u>: *Resuelve las siguientes ecuaciones aplicando la definición del VA desde el modelo topológico y aritmético. Señala si entre ellas existen ecuaciones equivalentes.*

$a)\ |x| = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$ $b)\ |6+x| = 1$ $c) |x+2| = 3$

$d)\ |x+1| = 0$ $e)\ |2-x| = -3$ $f) |-x-2| = 3$

$g)\ |5x+5| = 0$ $h)\ \frac{|-x|}{2} + 2{,}5 = |x|$ $i) |2-\pi| - x = |\pi - 3|$

j)$|2x-1| = 5$ $k) |3-2x| = 4$ $l)\ |1{,}5 - x| = 2$

Ejercicio 12: "La distancia entre x y -3 es igual al módulo de la diferencia entre 6 y 2".

a) Escribir dicha proposición en lenguaje simbólico.

b) Resolver utilizando la representación gráfica en la recta numérica.

c) Resolver la ecuación planteada en a) desde su enfoque aritmético.

Ejercicio 13: Resuelve las siguientes ecuaciones.

$a)\ d(2x,1)=0$ $\qquad$ $b)\ |-3a-2|=|-9|-|-4|$

$c)\ |x-2|-3.|2-x|=-4$ $\qquad$ $d)\ 4-2.|1-x|=8$

$e)\ -|x|=-|-9|-|1{,}5|$ $\qquad$ $f)\ |x|+|-x|=1$

$g)\ |3x|=12-|-3x|$

Ejercicio 14: Una compañía empaqueta granos de maíz en bolsas herméticas. Cada bolsa debe pesar 50 gramos, pero no siempre se logra llenar cada bolsa con el peso exacto. De hecho, un reporte estadístico del área de control de calidad revela que poseen un margen de error $\pm\ 0{,}05$ gramos, en caso contrario se vacía la bolsa para ser reembolsada. ¿Entre qué pesos las bolsas son aceptables?

5.2 El valor absoluto desde su modelo topológico y aritmético. Inecuaciones con VA. (Clase N° 2)

Descripción de la clase: Se procura afianzar la noción del valor absoluto desde sus modelos topológico y aritmético vistos en la clase anterior. El aprendizaje de esta clase se centra en la resolución de las inecuaciones con VA mediante los dos modelos mencionados haciendo hincapié en el uso de los registros de representación gráfico y algebraico.

Conocimientos previos: Se consideran los mismos que para la clase anterior (Sección 5.1).

Objetivos: Que el alumno sea capaz de:

- reconocer y representar intervalos reales.

- resolver inecuaciones mediante los dos enfoques: topológico y aritmético, relacionando ambos significados del VA por medio de los registros de representación: gráfico y algebraico.
- Aplicar propiedades de módulo.

Contenidos: Intervalos reales. Inecuaciones con valor absoluto (o módulo). Problemas de aplicación.

Modalidad de la clase y tiempo: la clase es de carácter teórico – práctico y su duración se estipula en 3 horas.

Desarrollo de clase: *Se comienza la clase con una pequeña síntesis de lo visto en la clase anterior, resolviendo en el pizarrón algunos de los ejercicios propuestos para su resolución domiciliaria que les resultaron de mayor dificultad. Luego, se repasa el concepto de intervalos reales para luego abordar el tema principal de esta clase: resolución de inecuaciones con valor absoluto.*

Comenzaremos con un repaso de la definición de intervalos reales.

Intervalos reales

Un intervalo real es un subconjunto de la recta numérica que contiene a todos los números reales que están comprendidos entre dos elementos cualesquiera de la misma. Es decir que, dados dos números reales a y b tales que $a < b$, llamaremos intervalo de extremos a y b a la totalidad de los números reales comprendidos entre a y b.

Geométricamente, un intervalo puede visualizarse como un segmento de recta, o como una semirrecta de la recta real o como la misma recta real. De esta manera, es posible clasificarlos en intervalos finitos (segmento de recta) o infinitos (semirrecta o misma recta numérica).

Los intervalos finitos pueden clasificarse en:

- Cerrados: incluyen los extremos del intervalo. En símbolos,

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}/a \leq x \leq b\}$$

- Abiertos: no incluyen los extremos del intervalo. En símbolos,

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}/a < x < b\}$$

- Semiabiertos o semicerrados: incluyen a un sólo extremo del intervalo; es decir, abierto a izquierda y cerrado a derecha o viceversa. En símbolos,

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}/a < x \leq b\} \quad o \quad [a, b) = \{x \in \mathbb{R}/a \leq x < b\}$$

Habiendo realizado una pequeña revisión de la noción de intervalos reales y recordando el concepto de VA desde sus dos modelos visto en la clase anterior, nos sumergimos entonces en la resolución de inecuaciones con VA.

Veamos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1: ¿Cuáles son los valores de x cuya distancia al cero es menor o igual a 6? Es decir; queremos averiguar cuáles son los valores de x tales: $d(x, 0) \leq 6$ (registro verbal/simbólico).

En la Figura 16, mediante la representación gráfica (registro gráfico) observamos que:

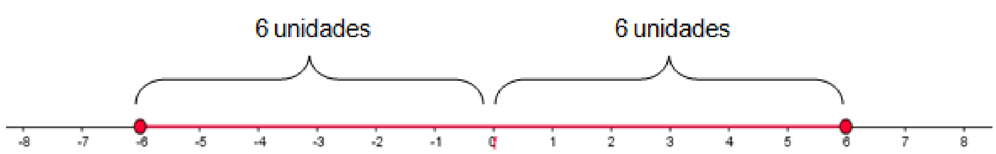


Figura 16. Representación gráfica de un número real x cuya distancia al cero es menor o igual que seis.

Luego; $d(x, 0) \leq 6 \iff -6 \leq x \leq 6$.

Sin embargo, calcular $d(x,0) \leq 6$ equivale a calcular: $|x| \leq 6$ (registro algebraico).

$$|x| \leq 6 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{cc} x \leq 6 & x \geq 0 \\ y & \\ -x \leq -6 & x < 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{cc} x \leq 6 & x \geq 0 \\ y & \\ x \geq -6 & x < 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad -6 \leq x \leq 6$$

Luego, $|x| \leq 6 \Leftrightarrow -6 \leq x \leq 6$.

Por lo tanto, la solución a nuestra pregunta resulta: $x \in [-6, 6]$.

Ejemplo 2: ¿Cuáles son los valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que su distancia a -1 es menor o igual a tres? Es decir; queremos averiguar cuáles son los valores de x tal que: $d(x,-1) \leq 3$ (registro verbal/simbólico).

En la Figura 17, mediante la representación gráfica (registro gráfico) observamos que:

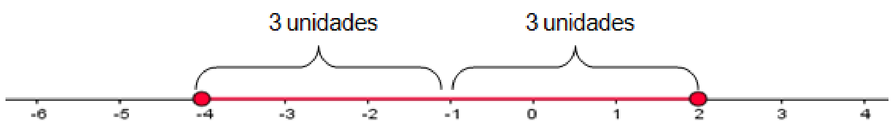


Figura 17. Representación gráfica de un número real x cuya distancia a -1 es menor o igual que tres.

Luego, $d(x,-1) \leq 3 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 2$.

No obstante, calcular $d(x,-1) \leq 3$ equivale a calcular: $|x+1| \leq 3$ (registro algebraico).

$$|x+1| \leq 3 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{cc} x+1 \leq 3 & si \;\; x+1 \geq 0 \\ y & \\ -(x+1) \leq 3 & si \;\; x+1 < 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{cc} x+1 \leq 3 & si \;\; x \geq -1 \\ y & \\ x+1 \geq -3 & si \;\; x < -1 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{cc} x \leq 2 & si \;\; x \geq -1 \\ y & \\ x \geq -4 & si \;\; x < -1 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad -4 \leq x \leq 2$$

Luego, $|x+1| \leq 3 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 2$.

Ejemplo 3: ¿Cuáles son los valores de x cuya distancia al cero es mayor o igual a 2? Es decir; queremos averiguar cuáles son los valores de x tales: $d(x,0) \geq 2$ (registro verbal/simbólico).

En la Figura 18, mediante la representación gráfica (registro gráfico) observamos que:

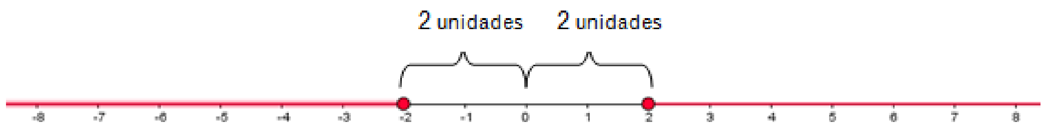


Figura 18. Representación gráfica de un número real x cuya distancia al origen es mayor o igual que dos.

Luego, $d(x,0) \geq 2 \Leftrightarrow x \leq -2 \;\; ó \;\; x \geq 2$.

Pero también es posible calcular $d(x,0) \geq 2$ mediante la definición del VA: $|x| \geq 2$ (registro algebraico).

$$|x| \geq 2 \;\; \Leftrightarrow \;\; \begin{array}{cc} x \geq 2 & si \;\; x \geq 0 \\ ó & \\ -x \geq 2 & si \;\; x < 0 \end{array} \;\; \Leftrightarrow \;\; \begin{array}{cc} x \geq 2 & si \;\; x \geq 0 \\ ó & \\ x \leq -2 & si \;\; x < 0 \end{array} \;\; \Leftrightarrow \;\; x \leq -2 \;\; ó \;\; x \geq 2$$

Luego, se tiene que $|x| \geq 2 \Leftrightarrow x \leq -2 \;\; ó \;\; x \geq 2$, es decir, $x \in (-\propto, -2) \cup (2, \infty)$ con lo que se concluye el ejercicio.

En definitiva, podemos determinar que:

Si $a > 0$, entonces

- $d(x,0) \leq a \;\; \Leftrightarrow \;\; |x| \leq a \;\; \Leftrightarrow \;\; -a \leq x \leq a$

  En la Figura 19, se muestra su representación gráfica:

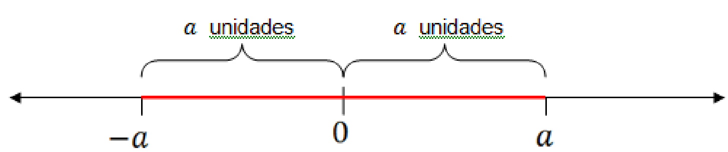


Figura 19. Representación gráfica de un número real x cuya distancia al origen es menor o igual a a.

- $d(x,0) \geq a \iff |x| \geq a \iff x \leq -a$ ó $x \geq a$

  En la Figura 20, se muestra su representación gráfica:

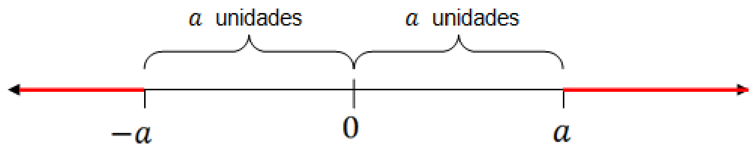


Figura 20. Representación gráfica de un número real x cuya distancia al origen es mayor o igual a a.

Se ofrece a los alumnos la siguiente ejercitación para trabajar en clase. (Se conceden 25 minutos para ello, luego se corrigen en pizarrón).

<u>Ejercicio 1</u>: Dados los siguientes conjuntos

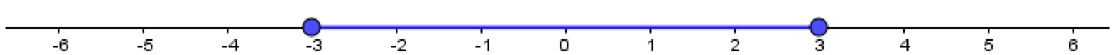
$A = \{x \in \mathbb{R}: |x| \leq 6\}$ $\qquad$ $B = \left\{x \in \mathbb{R}: |x| > \frac{5}{2}\right\}$

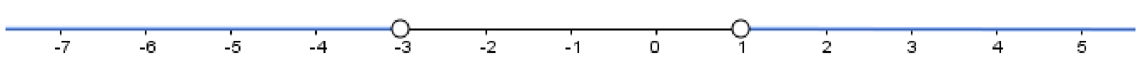
$C = \{x \in \mathbb{R}: |x-1| \leq 3\}$ $\qquad$ $D = \{x \in \mathbb{R}: |1-x| \geq 5\}$

Se pide:

a) *Resolver utilizando la representación gráfica en la recta numérica (modelo topológico).*
b) *Resolver la inecuación aplicando la definición del modelo aritmético.*

<u>Ejercicio 2</u>: Sean los conjuntos de números reales cuya representación en la recta numérica es:





Se pide para cada conjunto de puntos*:*

a) *Expresarlo mediante una única desigualdad con valor absoluto.*

b) *Resolver mediante la aplicación del modelo aritmético la inecuación planteada en a). Escribir la solución como intervalo o unión de intervalos.*

Hasta al momento hemos visto todos casos para cuando $a > 0$. Nos preguntamos ahora qué sucederá cuando a es no positivo, esto es, cuando $a \leq 0$.

Veamos algunos ejemplos:

a) ¿Para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se cumple que $|x| < -2$?
Sabemos que: $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| \geq 0$, con lo cual no es posible que $|x| < -2$.
Por lo tanto, no existe ningún valor de $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| < -2$.

Luego, las inecuaciones de la forma: $|x| \leq a$, con $a < 0$, no tienen solución.

b) ¿Para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se cumple que $|x| > -2$?

Sabemos que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| \geq 0$ y, a su vez, que $0 > -2$; por medio de la propiedad transitiva se tiene que $|x| > -2$ para cualquier valor real de x.

Luego, las inecuaciones de la forma $|x| \geq a$, con $a < 0$, se verifican para cualquier valor real x.

Se ofrecen a los alumnos los siguientes ejercicios para trabajar en el aula. (Se estipulan 15 minutos para su resolución, luego se corrigen en pizarrón).

Ejercicio 3: Resolver, aplicando el modelo topológico y aritmético, las siguientes inecuaciones:

$a)\ |x-1| > 5$ $\qquad$ $b) |x-2| \leq 3$

$c)\ |x-16| \leq -2$ $\qquad$ $d)\ |x-5| \geq -4$

Ejercicio 4: "La distancia entre un número real y el número -1 es menor o igual al módulo de la diferencia entre -6 y 3".

a) Escribir dicha proposición en lenguaje simbólico.
b) Resolver utilizando la representación gráfica en la recta numérica.
c) Resolver la ecuación planteada en a).

<u>Ejercicio 5</u>*: La hora de ingreso de un trabajador a cierta empresa es a las 8.30 hs. Para marcar su ingreso lo hace por medio de un sensor digital permitiéndole una tolerancia de 15 minutos.*

a) Escribir esta situación en términos del valor absoluto.

b) ¿Entre qué horas podrá marcar su ingreso el trabajador?

Ya hemos trabajado con algunas propiedades del valor absoluto de los números reales, entre ellas:

Sea $x \in \mathbb{R}$*,*

$$\boxed{|x| \geq 0 \ \ (\text{En particular: } |x| = 0 \iff x = 0)}$$

$$\boxed{|x| = |-x|}$$

Sin embargo, existen otras propiedades de VA que resultan interesantes estudiar, entre ellas:

Sean $x , y \in \mathbb{R}$ *:*

- ✓ El valor absoluto de un producto es igual al producto de los valores absolutos:

$$\boxed{|x \,.\, y| = |x| \,.\, |y|}$$

Realicemos conjuntamente su demostración:

<u>*Demostración*</u>*:*

- Si $x = 0$ o $y = 0$ resulta $0 = 0$.
  Pues, si $y = 0$ entonces $|x.0| = |0| = 0$ por un lado y $|x|.|0| = |x|.0 = 0$ por el otro y, por lo tanto, se verifica la igualdad. O bien, si $x = 0$, se tiene que $|0.y| = |0| = 0$ por un lado y $|0|.|y| = 0.|y| = 0$ por el otro y, por lo tanto, también se verifica la igualdad.
- Si ambos factores son positivos, esto es $x > 0$ e $y > 0$ también resulta evidente la propiedad por la definición de VA desde el modelo aritmético: $|x \,.\, y| = x \,.\, y$ pues $x \,.\, y > 0$; a su vez $|x|.|y| = x \,.\, y$ pues $x > 0$ e $y > 0$.

- Si ambos factores son negativos, esto es $x < 0$ e $y < 0$, se tiene que $-x > 0$ e $-y > 0$, entonces se recae en el caso anterior de factores positivos, porque:
  $|x\,.\,y| = |(-x).(-y)| = |-x|.|-y| = |x|.|y|$ (la última igualdad se deduce de la propiedad $|a| = |-a| \quad \forall a \in \mathbb{R}$)
- Si uno de los factores es positivo y el otro negativo, esto es $x > 0$ e $y < 0$, se tiene que $x > 0$ e $-y > 0$, entonces se recae otra vez en el caso de los factores positivos porque, suponiendo $y < 0$ y $x > 0$, $|x\,.\,y| = |-(x.y)| = |x.(-y)| = |x|.|-y| = |x|.|y|$. Análogamente se prueba el caso en que $x < 0$ e $y > 0$.

✓ El valor absoluto de un cociente es igual al cociente de los valores absolutos:

$$\boxed{\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \qquad ; \qquad y \neq 0}$$

(Se deja la demostración a cargo de los alumnos como actividad domiciliaria)

✓ El valor absoluto de la suma es menor o igual que la suma de los valores absolutos:

$$\boxed{|x + y| \leq |x| + |y|}$$

Realicemos conjuntamente la demostración:

Demostración:

Se sabe que; si $x \geq 0$ entonces $|x| = x$ y si $x < 0$ entonces $|x| = -x \iff -|x| = x$. Como, además, $|x| \geq 0$, entonces $-|x| \leq x \leq |x|$. Análogamente, para y se tiene que $-|y| \leq y \leq |y|$; luego al sumar ambas inecuaciones se obtiene: $-|x| - |y| \underbrace{\leq}_{(*)} x + y \underbrace{\leq}_{(**)} |x| + |y|$.

Se quiere probar que $|x + y| \leq |x| + |y|$, para ello se analizan dos casos:

- Si $x + y \geq 0$ entonces $|x + y| = x + y$. Por $(*)$, como $x + y \leq |x| + |y|$; luego $|x + y| \leq |x| + |y|$.

- Si $x+y<0$ entonces $-|x+y|=x+y$ como por $(**)$, $x+y\geq-(|x|+|y|)$; entonces $-|x+y|\geq-(|x|+|y|)$; multiplicando por (-1) a ambos lados de la desigualdad se obtiene que $|x+y|\leq|x|+|y|$.

Luego, $|x+y|\leq|x|+|y|$.

✓ El valor absoluto de la diferencia es mayor o igual que la diferencia de los valores absolutos:

$$\boxed{|x-y|\geq|x|-|y|}$$

(Se deja la demostración a cargo de los alumnos como actividad domiciliaria)

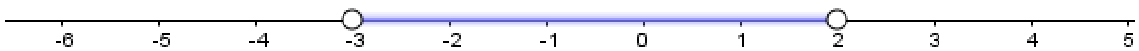
Se finaliza la clase realizando juntamente con los alumnos una síntesis de los conceptos vistos. En definitiva:

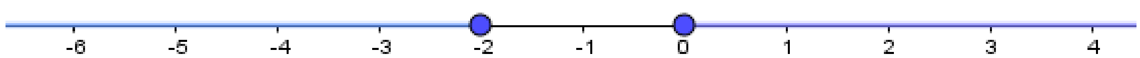
Sea $x, y \in \mathbb{R}$;

- $|x|\leq a \quad , \quad a>0 \quad \Leftrightarrow \quad -a\leq x \leq a$
- $|x|\geq a \quad , \quad a>0 \quad \Leftrightarrow \quad x\leq -a \quad$ ó $\quad x\geq a$
- $|x|\geq a$ *, con* $a<0$ *se verifica para cualquier valor real* x.
- $|x\,.\,y|=|x|\,.\,|y|$
- $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|} \quad ; \quad y\neq 0$
- $|x+y|\leq|x|+|y|$
- $|x-y|\geq|x|-|y|$

Se establece la siguiente ejercitación en forma domiciliaria para la próxima clase.

<u>Ejercicio 1</u>*: Sean los conjuntos de números reales cuya representación en la recta numérica es:*





Se pide para cada conjunto de puntos:

a) Expresarlo mediante una única desigualdad con valor absoluto.

b) Resolver aplicando el modelo aritmético la inecuación planteada en a). Escribir la solución como intervalo.

<u>Ejercicio 2</u>*: Resolver, desde el modelo topológico y aritmético, las siguientes inecuaciones:*

$a)\ \lvert x\rvert > 4$	$b)\lvert x-2\rvert \leq 3$
$c)\lvert x-2\rvert \geq 3$	$d)\lvert x-1\rvert \leq 0$
$e)\ \lvert x\rvert \leq e$	$f)\ \lvert x+1\rvert > 0$
$g)\ \lvert x-1\rvert \leq -1$	$h)\ \lvert x-1\rvert \geq -1$
$i)\left\lvert x-\frac{1}{2}\right\rvert < 1$	$j)\ \lvert 5-x\rvert > 4$

<u>Ejercicio 3</u>*: "La distancia entre un número real y el número* $1{,}5$ *es menor o igual al módulo de la diferencia entre* $-2{,}5$ *y* 2*".*

a) Escribir dicha proposición en lenguaje simbólico.

b) Resolver utilizando la representación gráfica en la recta numérica.

c) Resolver la ecuación planteada en a).

<u>*Ejercicio 4*</u>*: Un fabricante produce palillos con una longitud media (o promedio) igual a* 32 *cm. Sin embargo, un reporte estadístico del área de control de calidad revela que poseen un margen de error* $\pm 1{,}5$ *cm.*

a) Indica esta situación en términos de valor absoluto.

b) ¿Cuál es la longitud mínima y la longitud máxima que podría tener un palillo?

<u>*Ejercicio 5*</u>*: Espesor de una lámina: Una compañía fabrica laminados industriales de 2 pulgadas de espesor con una tolerancia de 0,003 pulgadas.*

a) Escribir el intervalo de espesores posibles para el material laminado.

b) Escribir una desigualdad con valor absoluto que describa el intervalo de espesores posibles para el material laminado.

<u>*Ejercicio 6*</u>*: Completa con >; < 0 = según corresponda en cada caso.*

Sea $a \geq 0$,

$a)\ |-a|$ ____ $|a|$

$b)\ |5+a|$ ____ $|5|+|a|$

$c)\ |a\,.\,0{,}5|$ ____ $|a|\,.\,|0{,}5|$

$d)\ |-1-a|$ ____ $|-11|-|a|$

$e)\ |a-(-10)|$ ____ $|a|+|-10|$

$f)\ \left|\frac{a}{2}\right|$ ____ $\frac{a}{2}$

<u>*Ejercicio 7*</u>*: Completa con >, < o = según corresponda:*

Siendo $a > 0$; $b < 0$ y n número entero par

$i)\ \left|\frac{3}{a}\right|$ ____ $\frac{3}{a}$

$ii)\ |a\,.\,b|$ ____ $-\,a\,.\,b$

$iii)\ |a+b|$ ____ $a-b$

$iv)\ |a-b|$ ____ $a+b$

$v)\ |b|$ ____ $-\,b$

5.3 El valor absoluto desde su modelo analítico: composición (Clase N° 3)

Descripción de clase: *El aprendizaje de esta clase se fundamenta en la definición del valor absoluto desde el modelo analítico: composición. Aquí, se trabaja la resolución de ecuaciones e inecuaciones donde se asocian los dos modelos anteriormente estudiados con este último.*

Conocimientos previos: Se consideran los mismos saberes previos que para las clases anteriores (Sección 5.1 y 5.2).

Objetivos: Que el alumno sea capaz de:

- operar con potencias y raíces en los números reales aplicando sus propiedades.
- resolver ecuaciones e inecuaciones mediante el modelo analítico: composición del VA que se manifiesta de la fusión de dos operaciones matemáticas: la potenciación y radicación.

Contenidos: Potenciación en $\mathbb{R}$: definición y propiedades. Radicación en $\mathbb{R}$: definición y propiedades. Definición del VA de un número real desde su perspectiva analítica: composición. Ecuaciones e inecuaciones con VA.

Modalidad de la clase y tiempo: la clase es de carácter teórico – práctico y su duración se estipula en 3 horas.

Desarrollo de clase: Se comienza la clase realizando una síntesis de los dos modelos asociados al concepto del VA vistos en las dos clases anteriores. Luego, se consulta a los alumnos sobre las dificultades que tuvieron en la resolución de los ejercicios que le fueron asignados la clase anterior posibilitando la clarificación de conceptos, la eliminación de fallos en el aprendizaje y el desarrollo de diferentes estrategias a la hora de resolver una situación.

A partir de una revisión de potenciación y radicación de números reales, se introduce la definición del valor absoluto desde el modelo analítico: composición que surge de la fusión de estas dos operaciones matemáticas.

Iniciamos repasando la definición de potencia en el conjunto de los números reales.

Potenciación en $\mathbb{R}$. Definiciones.

a) Potencia de exponente natural

Sea $a \in \mathbb{R}$ *y* $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} a^1 = a \\ a^n = \underbrace{a.a.a\ldots\ldots a}_{n\ factores} \quad n \geq 2 \end{cases}$$

b) Potencia de exponente entero no natural

Sea $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

$$\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^{-n} = (a^{-1})^n = \left(\dfrac{1}{a}\right)^n \quad , \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Recordamos algunas propiedades importantes de la potenciación en$\mathbb{R}$.

<u>Propiedades de la potencia de los números reales</u>

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $m, n \in \mathbb{Z}$

- $a^n . a^m = a^{n+m}$ (Producto de potencias de igual base)
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ (Cociente de potencias de igual base)
- $(a^n)^m = a^{n.m}$ (Potencia de potencia)
- $(a . b)^n = a^n . b^n$ (Propiedad distributiva con respecto al producto)
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ (Propiedad distributiva con respecto al cociente)

Veamos ahora la radicación en el conjunto de los números reales. Primeramente, definiremos:

Radicación en $\mathbb{R}$. Definiciones.

a) <u>Raíz n – ésima de un número real</u>

- *Si* n *es un número natural par, y* a , b *números reales no negativos:*

$\sqrt[n]{a} = b$ *significa* $a = b^n$

- *Si n es un número natural impar, y a , b números reales:*

  $\sqrt[n]{a} = b$ *significa* $a = b^n$

b) <u>Potencia con exponente racional</u>

   Sea $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$; se define: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Examinemos algunas propiedades esenciales de la radicación en$\mathbb{R}$.

<u>Propiedades de las raíces de los números reales</u>

Sean $a, b \geq 0$ y $m, n, h \in \mathbb{N}$

- $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$ (Propiedad distributiva con respecto al producto)
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; $b \neq 0$ (Propiedad distributiva con respecto a la división)
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$ (Raíz de raíz)

<u>Aclaración</u>: En el caso de que alguna de las bases sea negativa, las propiedades valen siempre que el índice de la raíz sea impar.

Se ofrecen los siguientes ejercicios a los alumnos para aplicar algunas de las propiedades enunciadas. Se estipulan 15 minutos para ello.

<u>Ejercicio 1</u>: Indica verdadero o falso, justifica tu respuesta:

$a)\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^3 : 2^{-1} = \frac{1}{2}$

$b)\sqrt{a^3}.(a^2)^2 : \frac{1}{\sqrt{a}} = a^6 \quad , a \neq 0$

$c)\sqrt[3]{9.\sqrt{3}}.\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \sqrt{\frac{1}{27}}$

$d)\sqrt[3]{2^6}.\sqrt[3]{\left(\frac{1}{256}\right)^{-1}} : \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 2$

<u>Ejercicio 2</u>: Decidir el valor de verdad de la siguiente proposición y justificar la decisión tomada: $a^2 = b^2 \implies a = b$ para $a, b \in \mathbb{R}$. ¿Vale su recíproca?

Seguimos; Teorema 1:

Siendo $a \geq 0$, $b \geq 0$ y $n \in \mathbb{R}$:
$a^n = b^n \iff a = b$

Ejercicio 3: Indica verdadero o falso, justifica tu respuesta:

$a)\sqrt[3]{(-3)^3} = -27$ $\qquad$ $c)\sqrt[5]{\frac{1}{10^5}} = \frac{1}{10}$

$b)\ \sqrt{(-3)^2} = -3$ $\qquad$ $d)\sqrt[4]{(-2)^4} = 2$

Teorema 2:

> $\forall a \in \mathbb{R}$,
>
> *Si n es par, entonces* $\sqrt[n]{a^n} = |a|$
>
> ***(Modelo analítico: composición)***
>
> *Si n es impar, entonces* $\sqrt[n]{a^n} = a$

A partir de esta información veamos cómo abordamos la siguiente situación:

Ejemplo 1: ¿Qué valores reales x hacen verdadera la expresión: $x^2 = 4$?

Se observa que:

- ✓ Si $x = 2$, entonces $2^2 = 4$
- ✓ Si $x = -2$, entonces $(-2)^2 = 4$

Con lo cual; si x toma el valor -2, o bien, si x toma el valor 2, se cumple la ecuación $x^2 = 4$. Pero; ¿cómo estamos seguros de que son las únicas soluciones? Una alternativa resulta resolver la ecuación (registro algebraico):

$$x^2 = 4 \quad \underbrace{\Leftrightarrow}_{por\ Teorema\ 1} \quad \sqrt{x^2} = \sqrt{4} \quad \underbrace{\Leftrightarrow}_{por\ Teorema\ 2} \quad |x| = 2 \quad \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{Prop.de\ V.A \\ (*)}} \quad x = -2 \ \text{ ó } \ x = 2$$

O bien, en $(*)$ se puede proceder mediante la representación gráfica en la recta numérica (modelo topológico).

Aquí, se advierte el siguiente Teorema 3:

> Si a es un número real cualquiera y n un número impar: $x^n = a \iff x = \sqrt[n]{a}$
>
> Si a es un número real no negativo y n un número par: $x^n = a \iff |x| = \sqrt[n]{a}$

Se ofrecen los siguientes ejercicios para que los alumnos resuelvan en clase. Se destinan 30 minutos.

<u>Ejercicio 4</u>: Resuelva las siguientes ecuaciones en $\mathbb{R}$.

$a)\ x^2 - 16 = 0$ $\qquad$ $b)\ 3x^2 - 25 = 2$

$c)\ x^3 + 6 = -21$ $\qquad$ $d)\ x^4 - 1 = 0$

<u>Ejercicio 5</u>: Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones. En caso de que sean falsas dar un contraejemplo.

$a)\sqrt{x^4 + 2x^2 + 1} = x^2 + 1 \qquad , \forall\, x \in \mathbb{R}$

$b)\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1} \qquad , si\ x > 1$

Se corrigen los ejercicios dados en el pizarrón.

<u>Ejemplo 2</u>: ¿Qué valores reales x hacen verdadera la expresión: $x^2 \leq 4$? (registro algebraico).

$$x^2 \leq 4 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{elevando\ ambos \\ miembros\ a\ la\ \frac{1}{2}}} \sqrt{x^2} \leq \sqrt{4} \underbrace{\Leftrightarrow}_{por\ Teorema\ 2} |x| \leq 2 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{Prop.de\ V.A \\ (*)}} -2 \leq x \leq 2$$

O bien, en $(*)$ se puede proceder mediante su representación gráfica en la recta numérica (modelo topológico con apoyo en registro gráfico).

Aquí, se deduce el siguiente <u>Teorema 4</u>:

Si a es un número real cualquiera y n un número impar: $x^n \leq a \iff x \leq \sqrt[n]{a}$

$x^n \geq a \iff x \geq \sqrt[n]{a}$

Si a es un número real no negativo y n un número par: $x^n \leq a \iff |x| \leq \sqrt[n]{a}$

$x^n \geq a \iff |x| \geq \sqrt[n]{a}$

Se propone el siguiente ejercicio para que los alumnos resuelvan en clase, para eso se les da 15 minutos.

Ejercicio 6: Resuelva las siguientes inecuaciones en $\mathbb{R}$.

$a)\ x^2 < 1$ $\quad$ $b)\ 0 < x^2 < 1$ $\quad$ $c) - 1 \leq x^2 \leq 1$

Se culmina la clase con una pequeña síntesis de los conceptos vistos:

Si a es un número real no negativo y n un número par:

- ✓ $x^n = a \iff |x| = \sqrt[n]{a}$
- ✓ $x^n \leq a \iff |x| \leq \sqrt[n]{a}$
- ✓ $x^n \geq a \iff |x| \geq \sqrt[n]{a}$

Si a es un número real cualquiera y n un número impar:

- ✓ $x^n = a \iff x = \sqrt[n]{a}$
- ✓ $x^n \leq a \iff x \leq \sqrt[n]{a}$
- ✓ $x^n \geq a \iff x \geq \sqrt[n]{a}$

Se ofrece a los alumnos una serie de ejercicios para resolver en forma domiciliaria.

Ejercicio 1: Realice las siguientes operaciones aplicando propiedades:

$a)\ \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^2 =$ $\quad$ $d)\ \left(\frac{3}{7}\right)^3 . \left(\frac{2}{7}\right)^{-3} =$

$b)\ \left(\frac{3}{5}\right)^3 . \left(\frac{5}{3}\right)^{-1} =$ $\quad$ $e)\ \left(\frac{2}{3}\right)^2 : \left(\frac{2}{3}\right)^3 =$

$c)\ \left(\frac{2}{3}\right)^7 : \left(\frac{2}{3}\right)^3 =$ $\quad$ $f)\ \left(\frac{3}{5}\right)^3 : \left(\frac{2}{7}\right)^{-3} =$

Ejercicio 2: Siendo a y b números reales distintos de cero y n un número entero, demuestre que:

$a)\ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n}$ $\quad$ $b) a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Ejercicio 3: Resuelva aplicando las propiedades de la radicación y simplifique las expresiones que obtenga.

$a) \sqrt[3]{8.\sqrt{2}}$ $\quad$ $d)\ \sqrt[4]{16}$

$b)\ \sqrt{\frac{\sqrt[5]{5}}{16}}$ $\quad$ $e)\ \sqrt[5]{\left(\frac{1}{1024}\right)^{-1}}$

$c)\ \sqrt[5]{\sqrt{7}.(-32)}$ $\qquad$ $f)\ \sqrt[6]{27}$

Ejercicio 4: Resuelva las siguientes operaciones aplicando propiedades.

$a)\ \frac{2^5}{2^3}+3^{-1}-\sqrt{2}\sqrt{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ $\qquad$ $c)\ \frac{4}{2^2}-\frac{1}{3^{-1}}+\frac{2^3.4}{32}-\sqrt{\frac{3^7}{3^3}}$

$b)\ 3^{-2}.\frac{1}{3^3}.3^6+\sqrt{\sqrt{\frac{625}{81}}}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$ $\qquad$ $d)\ \frac{\sqrt{10}.\sqrt{6}}{\sqrt{15}}-\left(\frac{1}{2}\right)^4:2^{-2}+\sqrt[3]{\frac{\sqrt{8}.\sqrt{8}}{27}}$

Ejercicio 5: Resuelva las siguientes ecuaciones en $\mathbb{R}$:

$a)\ x^2=1$ $\qquad$ $b)\ x^2=-1$ $\qquad$ $c)\ x^3=5$ $\qquad$ $d)\ x^5=7$

$e)\ x^2=8$ $\qquad$ $f)\ \sqrt{x}=0$ $\qquad$ $g)\ \sqrt{x}=1$ $\qquad$ $h)\ \sqrt[3]{x}=1$

$i)\ x^2+5=8$ $\qquad$ $j)\ x^2+12=7$ $\qquad$ $k)\ x^2+5=-\sqrt{2}$ $\qquad$ $l)\ x^4-5=-\sqrt{2}$

Ejercicio 6: Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justifique las respuestas.

a) *La ecuación $x^2-3=0$ tiene dos soluciones en $\mathbb{R}$.*
b) *Los números $\sqrt{5}$ y $-\sqrt{5}$ son reales y se encuentran a la misma distancia del cero.*
c) $\sqrt[4]{(-7)^4}$ *es un número natural.*
d) $\sqrt{x^2}=x\ ,\forall\ x\in\mathbb{R}$
e) $x+2y+\sqrt{(x-2y)^2}=2x\ ,\quad \forall x,y\in\mathbb{R}$

Ejercicio 7: Resuelva las siguientes inecuaciones en $\mathbb{R}$:

$a)\ x^6\geq-2$ $\qquad$ $b)-6<x^2-4<2$ $\qquad$ $c)-6\leq x^2<\sqrt{2}$

$d)\ 0<x^2<2$ $\qquad$ $f)-1<x^3<1$

Ejercicio 8: Resuelva las siguientes ecuaciones en $\mathbb{R}$:

$a)\ |x^2-3|=1$ $\qquad$ $b)\ 2x^2-4x-(x-2)^2=5$

$c)\ 3-2|x^2-1|=-5$ $\qquad$ $d)\ \left|x^2-\sqrt{2}\right|=1$

<u>Ejercicio 9</u>: Dados los siguientes subconjuntos de números reales, exprese (cuando sea posible) la solución como intervalo y represéntelo en la recta numérica:

a) $A=\{x \in R\ ;\ d(x^2,\ 5)<11\ \}$

b) $B=\{x \in R\ ;\ (1-x)^2<(-3)^2\}$

c) $C=\{x \in R;\ \ 1-(x+2)^2<-4\ \}$

d) $D=\left\{x \in R;\ d(-3,\ x^2)>\sqrt{81}\right\}$

5.4 El valor absoluto desde su modelo analítico: función a trozos (Clase N° 4)

Descripción de la clase: Se establece la definición del valor absoluto asociado a una función a trozos: función valor absoluto. A partir de ésta, se estudian los movimientos de traslación y reflexión desde su expresión y gráfica, asociando aquí los modelos aritmético y analítico: función a trozos.

Conocimientos previos: Funciones (Trabajo Práctico Nº 5). Función lineal: gráficas y características (Trabajo práctico Nº 6).

Objetivo: Que alumno sea capaz de:

- reconocer y representar una función lineal.
- identificar, definir y representar la función valor absoluto.
- reconocer, definir y representar los movimientos que se aplican a una función de la forma $f(x)=\ |x|$.

Contenido: El valor absoluto asociado a una función a trozos: Función valor absoluto. Movimientos de la función VA: traslación (horizontal y vertical) y reflexión.

Modalidad de la clase y tiempo: la clase es de carácter teórico – práctico y su duración se estipula en 3 horas.

Desarrollo de clase*: Se comienza la clase realizando una pequeña revisión de la función lineal focalizando en sus características y gráfica. Luego, se introduce la noción de función valor absoluto a partir de la definición de VA. Por último, se trabajan los movimientos de traslación y reflexión de esta función.*

Luego de realizar una pequeña revisión de función lineal, se introduce el concepto de la función VA como una función definida por tramos o a trozos.

<u>Función Valor Absoluto</u>

Es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, que a cada número real le asocia su valor absoluto. Es decir que; la función VA f se define de la siguiente manera:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = |x|$$

Conociendo la definición, desde el modelo aritmético del VA, se tiene que:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/ \qquad f(x) = \begin{cases} x & si \;\; x \geq 0 \\ -x & si \;\; x < 0 \end{cases}$$

Para observar su gráfica realizaremos primeramente una tabla de valores (registro tabular):

En la Figura $\mathbf{21}$, se advierte su gráfica:

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x) = y = \lvert x \rvert}$
$\mathbf{-3}$	$\lvert\mathbf{-3}\rvert =$ ___
$\mathbf{-2}$	$\lvert\mathbf{-2}\rvert =$ ___
$\mathbf{-1}$	$\lvert\mathbf{-1}\rvert =$ ____
$\mathbf{0}$	$\lvert\mathbf{0}\rvert =$ ____
$\mathbf{1}$	$\lvert\mathbf{1}\rvert =$ ____
$\mathbf{2}$	$\lvert\mathbf{2}\rvert =$ ____
$\mathbf{3}$	$\lvert\mathbf{3}\rvert =$ ____

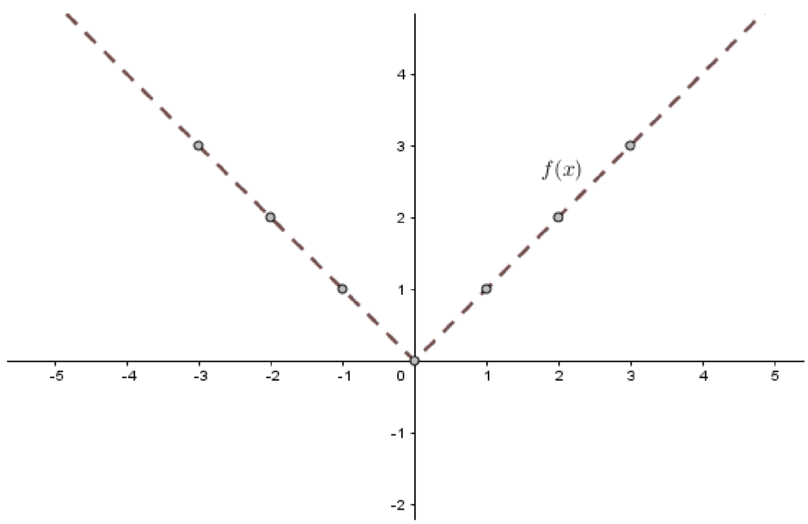


Figura 21. Representación gráfica de la función $y = |x|$.

Se advierte aquí la función VA definida como una función a trozos (registro gráfico), donde para los valores $x \in [0,\ \infty)$ se tiene la función $y = x$ y para los valores $x \in (-\infty, 0)$ se tiene representada la función $y = -x$.

Asimismo, se tiene que esta función VA resulta siempre no negativa.

Veamos algunos ejemplos:

<u>Ejemplo 1</u>: Grafica la función g siendo ésta: $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\; g(x) = |x| + 2$

Primero observamos cómo queda la función definida por tramos (registro algebraico):

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\; g(x) = \begin{cases} x+2 & si \;\; x \geq 0 \\ -x+2 & si \;\; x < 0 \end{cases}$$

Para realizar su gráfica podemos recurrir a una tabla de valores (registro tabular), o bien, podemos representar las funciones que quedan definidas de acuerdo a cada tramo (registro gráfico). Es decir, graficar la recta $y = x + 2$ para aquellos valores de $x \in [0, \infty)$ y luego, graficar la recta $y = -x + 2$ para aquellos valores de $x \in (-\infty, 0)$, como se contempla en la Figura 22.

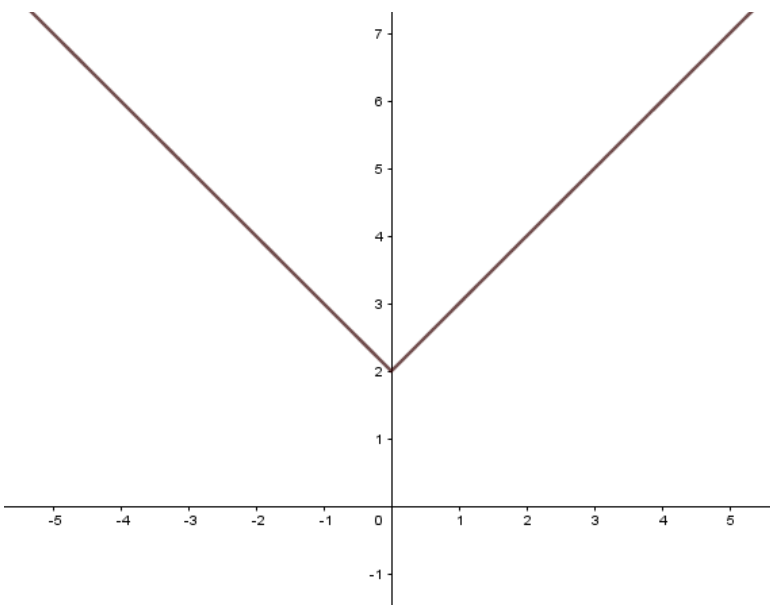


Figura 22. Representación gráfica de la función $g(x) = |x| + 2$.

Ahora bien, grafiquemos sobre los mismos ejes cartesianos la función

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \;/\; f(x) = |x|$. *¿Qué relación se observa entre f y g?*

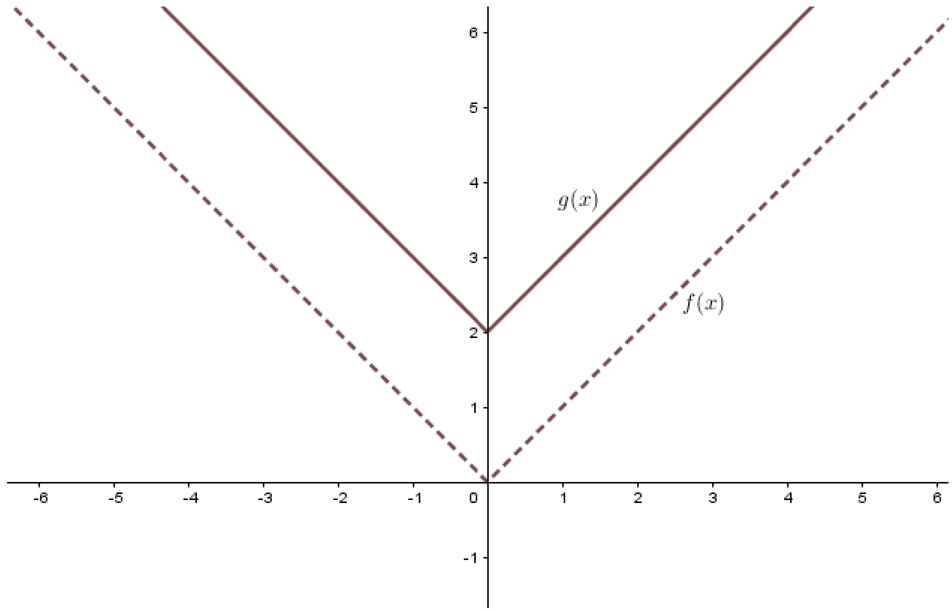


Figura 23. Representación gráfica de las funciones $f(x) = |x|$ *y* $g(x) = |x| + 2$.

En la Figura 23, se contempla que la función g, tiene el mismo comportamiento que la función f pero desplazada dos unidades hacia arriba.

<u>Ejemplo 2</u>: Realiza el esbozo de la función h definida como:

$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\; h(x) = |x| - 3$

Se deduce de aquí que: $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\; h(x) = \begin{cases} x - 3 & si\;\; x \geq 0 \\ -x - 3 & si\;\; x < 0 \end{cases}$ (registro algebraico).

Con lo cual, es posible realizar su gráfica a partir de una tabla de valores (registro gráfico), o bien, representando las rectas que quedan definidas en cada tramo o considerando que la función h surge de desplazar a la función $f(x) = |x|$ tres unidades hacia abajo (registro gráfico). En la Figura 24 se advierte ésta última situación:

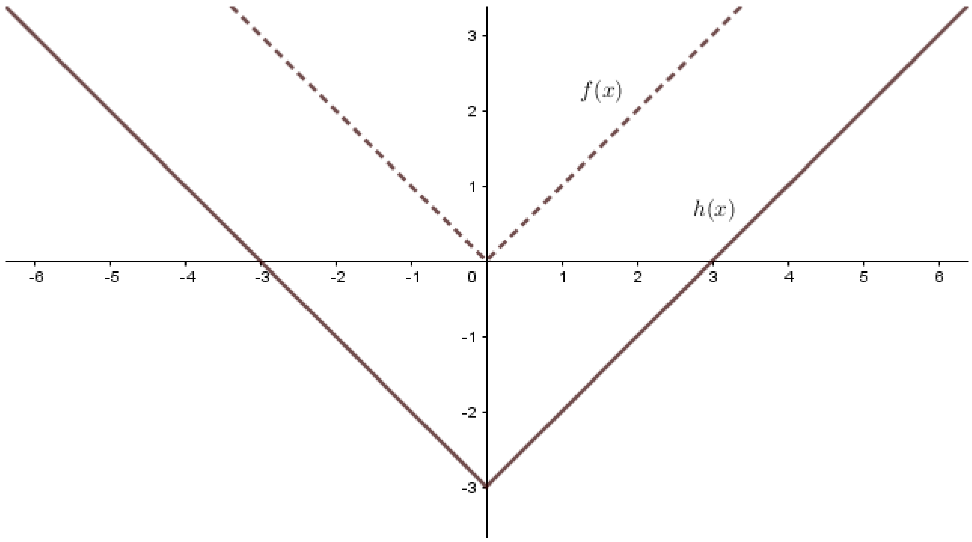
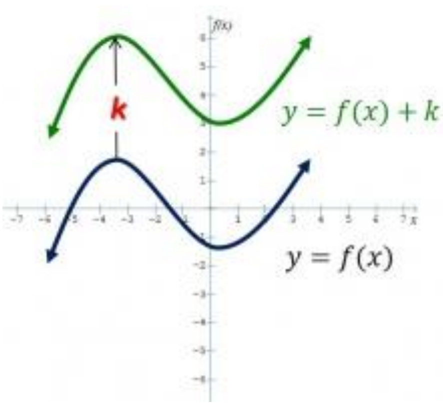


Figura 24. Representación gráfica de las funciones $f(x) = |x|$ *y* $h(x) = |x| - 3$.

De este modo, como se muestra en la Figura 25, para representar el desplazamiento vertical de una función se considera dada k> 0,

- para graficar $y = f(x) + k$; desplazar k unidades hacia arriba la gráfica $y = f(x)$.
- para graficar $y = f(x) - k$; desplazar k unidades hacia abajo la gráfica $y = f(x)$.



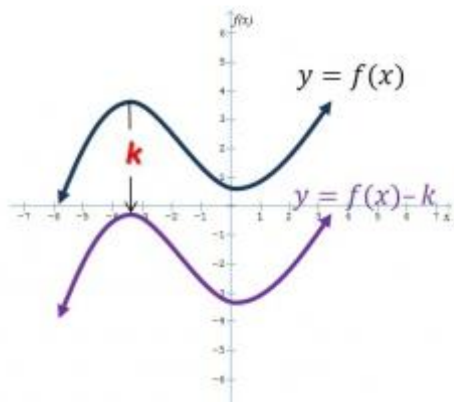


Figura 25. Desplazamientos verticales de gráficas. En Precálculo Matemáticas para el cálculo (5ta edición), por J. Stewart, L. Redlin y S. Watson, 2007, en México D.F: Cengage Learning.

Ejemplo 4: Realiza la gráfica de la función j definida como $j: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$j(x) = |x - 1|$$

En primer lugar, escribimos la función j teniendo en cuenta la definición desde el modelo aritmético del VA (registro algebraico), esto es:

$$j(x) = |x - 1| = \begin{cases} x - 1 & si\ x - 1 \geq 0 \\ -(x - 1) & si\ x - 1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x - 1 & si\ \ x \geq 1 \\ -x + 1 & si\ x < 1 \end{cases}$$

Con lo cual, para realizar su gráfica podemos recurrir a una tabla de valores (registro tabular), o bien, podemos representar las funciones que quedan determinadas según cada trozo (registro gráfico). Es decir, graficar la recta $y = x - 1$ para aquellos valores de $x \in [1, \infty)$ y, luego, graficar la recta $y = -x + 1$ para aquellos valores de $x \in (-\infty, 1)$, como se contempla en la Figura 26.

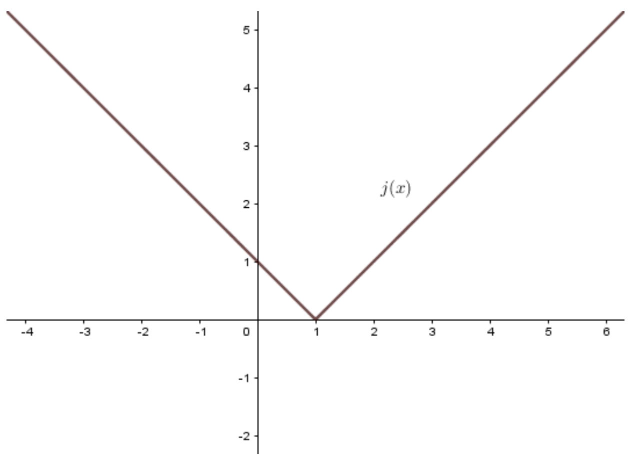


Figura 26. Representación gráfica de la función $j(x) = |x - 1|$.

Pues bien, si graficamos en los mismos ejes cartesianos la función

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ /\ \ f(x) = |x|$. *¿Qué relación se observa entre* f *y* j*?*

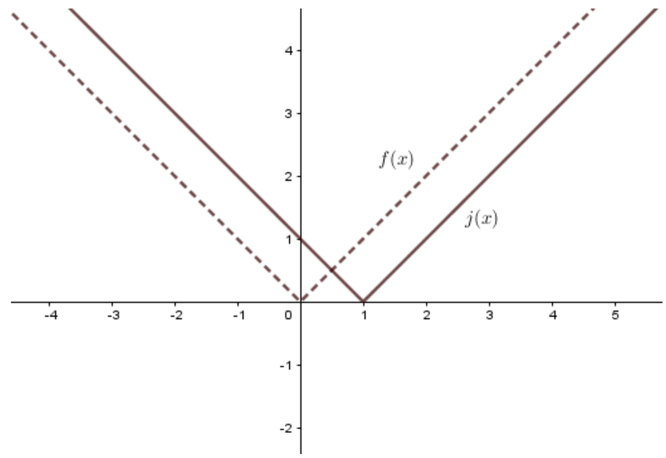


Figura 27. Representación gráfica de las funciones $f(x) = |x|$ *y* $j(x) = |x - 1|$.

En la Figura 27, se advierte que la función j, tiene el mismo comportamiento que la función f pero desplazada una unidad hacia la derecha.

Análogamente al desplazamiento vertical, como se muestra en la Figura 28, para representar gráficamente el desplazamiento horizontal de una función se considerada $h > 0$,

- para graficar $y = f(x - h)$; se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ a derecha h unidades.
- para graficar$y = f(x + h)$; se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ a izquierda h unidades.

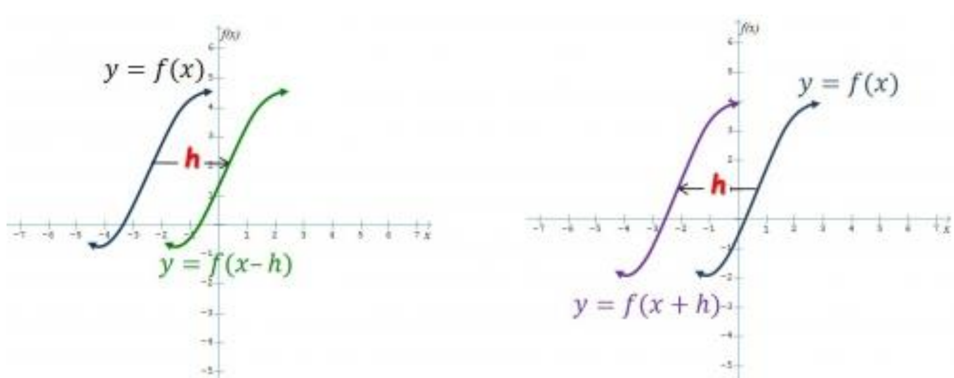


Figura 28. Desplazamientos horizontales de gráficas. En Precálculo Matemáticas para el cálculo (5ta edición), por J. Stewart, L. Redlin y S. Watson, 2007, en México D.F: Cengage Learning.

Se ofrecen los siguientes ejercicios para afianzar lo aprendido. (Se estipulan 20 minutos)

Ejercicio 1: Dada la función f definida: $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $f(x) = |x|$ se pide, para cada uno de los siguientes ítems, representar la función f , y a partir de ella realizar un esbozo de la función g:

a) $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad / \ g(x) = |x| - 2$

b) $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad / \quad g(x) = |x + 3|$

Ejercicio 2: A partir de la gráfica de $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $f(x) = |x|$; realiza un esbozo de la función g definida como $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $g(x) = |x + 1| - 2$.

Hasta el momento hemos visto la definición de la función VA y sus traslaciones.

Continuemos viendo otro movimiento:

Ejemplo 5: Esboza en un mismo sistema de ejes cartesianos la función l definida como $l:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $l(x) = -|x|$.

Rescribimos la función l teniendo en cuenta la definición desde el modelo aritmético del VA (registro gráfico), esto es:

$$l(x) = \begin{cases} -x & si \ \ x \geq 0 \\ x & si \ \ x < 0 \end{cases}$$

Con lo cual, para realizar su gráfica podemos recurrir a una tabla de valores (registro tabular), o bien, podemos representar las rectas definidas para cada tramo (registro gráfico). Esto es, graficar la recta $y = -x$ para aquellos valores de $x \in [0, \infty)$ y luego, graficar la recta $y = x$ para aquellos valores de $x \in (-\infty, 0)$, como se contempla en la Figura 29.

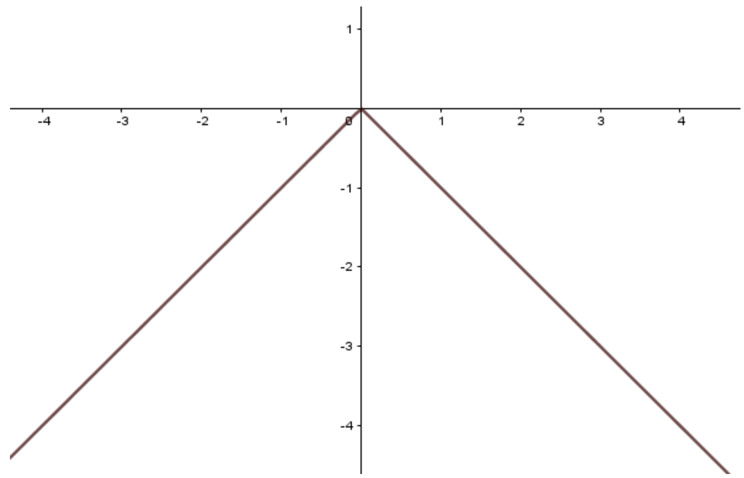


Figura 29. Representación gráfica de la función $l(x) = -|x|$.

Si observamos la expresión de la función l , se tiene que a cada número real x le asocia el opuesto de la imagen de f , siendo $f(x) = |x|$. Se deduce que la función l es simétrica con respecto al eje de abscisas de la función f. En la Figura 30, se visualizan las gráficas de ambas funciones:

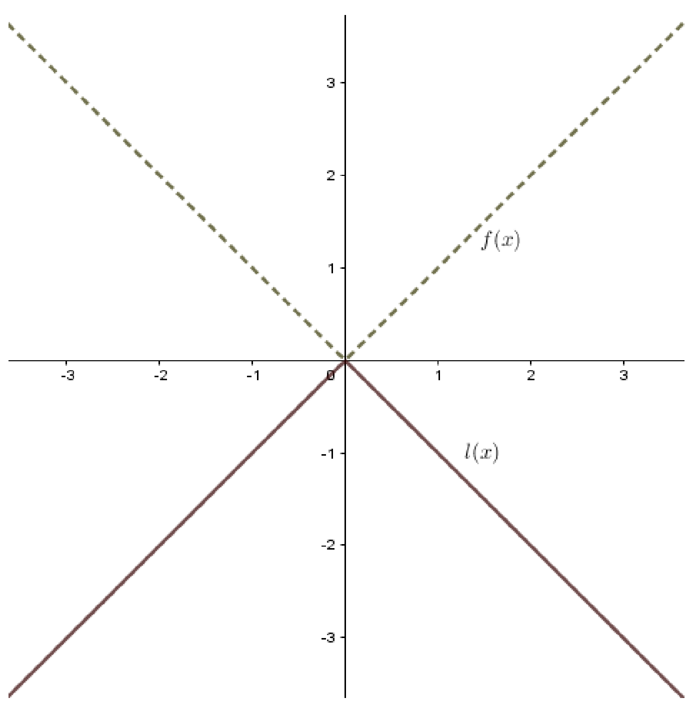


Figura 30. Representación gráfica de las funciones $f(x) = |x|$ y $l(x) = -|x|$.

Ejemplo 6: Esboza la función $m: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $m(x) = |-x|$.

Escribimos la función m como función a trozos de la siguiente forma:

$$m(x) = \begin{cases} -x & si\ -x \geq 0 \\ x & si - x < 0 \end{cases} = \begin{cases} -x & si\ \ x \leq 0 \\ x & si\ \ x > 0 \end{cases}$$ (registro algebraico)

En la Figura 31, se representan las rectas que quedan determinadas para cada tramo (registro gráfico).

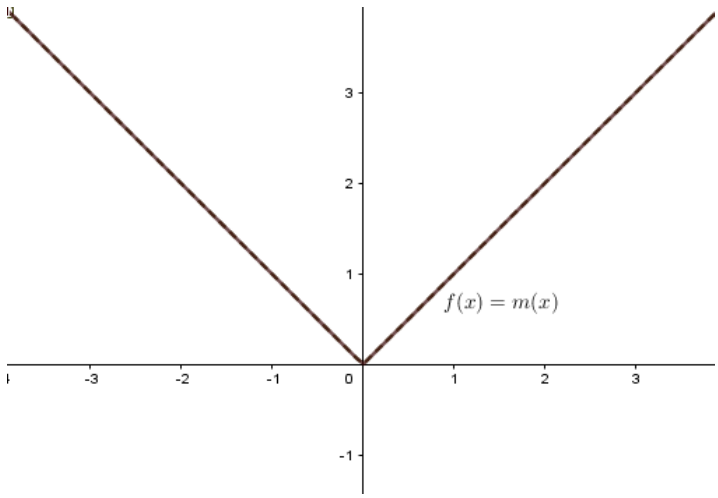


Figura 31. Representación gráfica de la función $m(x) = |-x|$.

Usando las propiedades de módulo, queda claro que ambas funciones son exactamente la misma, es decir, $f = m$. La función VA definida por f es simétrica son respecto al eje de ordenadas.

Simetría respecto a los ejes coordenados (o reflexión) de una función

Para graficar:

- $y = -f(x)$; se refleja la gráfica de $y = f(x)$ en el eje de abscisas (o eje x).
- $y = f(-x)$; se refleja la gráfica de $y = f(x)$ en el eje de ordenadas (o eje y).

Se brinda el siguiente ejercicio para que los alumnos realicen. (Se otorgan 15 minutos)

Ejercicio 3: A partir de la gráfica de $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $f(x) = |x|$; realiza para cada ítem un esbozo de la función g definida como:

a) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $g(x) = |-x| + 1$

b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, \; g(x) = -|x-2| + 1$

Se culmina la clase haciendo un punteo de los conceptos vistos:

<u>Función valor absoluto</u>:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;/\; f(x) = |x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$$

<u>Movimientos</u>: Sea $y = f(x)$

- <u>Desplazamiento vertical</u>: $y = f(x) + k$;
  Si $k > 0$ la función f se desplaza k unidades hacia arriba.
  Si $k < 0$ la función f se desplaza k unidades hacia abajo.

- <u>Desplazamiento horizontal</u>: $y = f(x-k)$;
  Si $k > 0$ la función f se desplaza k unidades hacia derecha.
  Si $k < 0$ la función f se desplaza k unidades hacia izquierda.

- <u>Reflexión:</u>
  Si $y = f(-x)$ la función f es simétrica con respecto al eje y.
  Si $y = -f(x)$ la función f es simétrica con respecto al eje x.

Se ofrece a los alumnos una serie de ejercicios para resolver en forma domiciliaria.

<u>Ejercicio 4</u>: Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = |x|$ *. Para cada uno de los siguientes casos, representa en un mismo sistema de ejes cartesianos la gráfica de la función* f *, y a partir de ella realiza un esbozo de la función* g*:*

a) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, \; g(x) = |x| + 1$

b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, \; g(x) = |x-3|$

c) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, \; g(x) = |x-2| + 2$

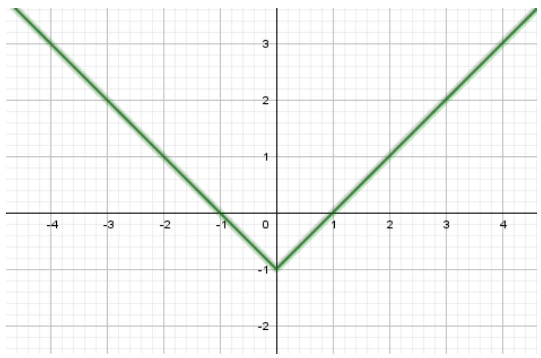
d) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, g(x) = -|x| + 1$

e) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, g(x) = |-x| + 1$

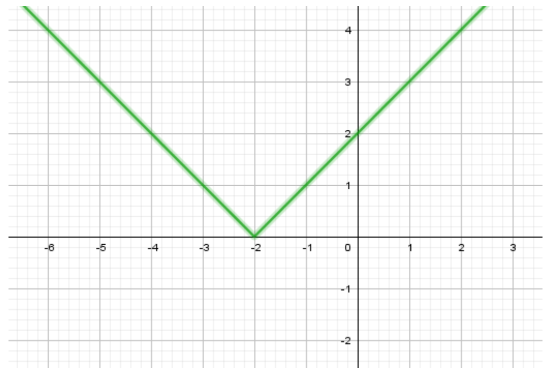
f) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, g(x) = -|x-3| - 1$

Ejercicio 5: Dadas las siguientes gráficas, determina para cada una de ellas la ecuación que la representa:

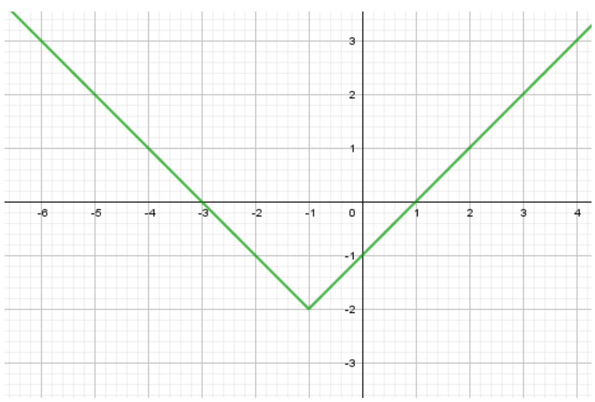
a)



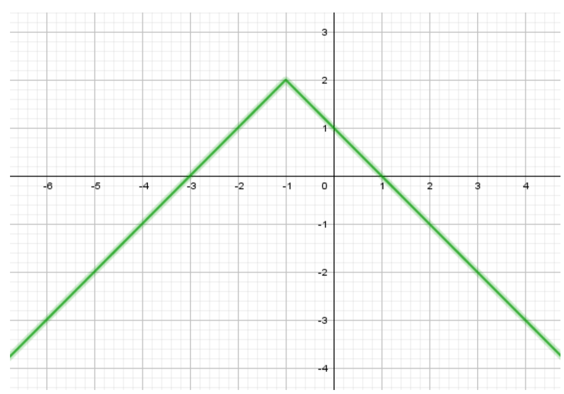
b)



c)



d)

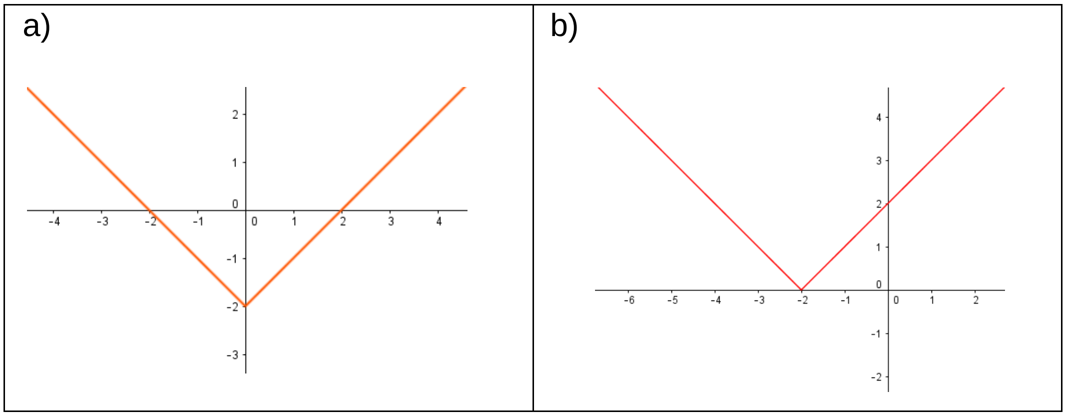


Ejercicio 6: Elige la alternativa correcta, justifica tu elección:

a) La expresión $\sqrt{(x-1)^2}$ es igual a:

i) $x-1$ *ii)* $|x-1|$ *iii)* $|x|-1$*iv)* $(x-1).(x+1)$

b) La gráfica de la función f, definida por $f(x)=|x|-2$ es:



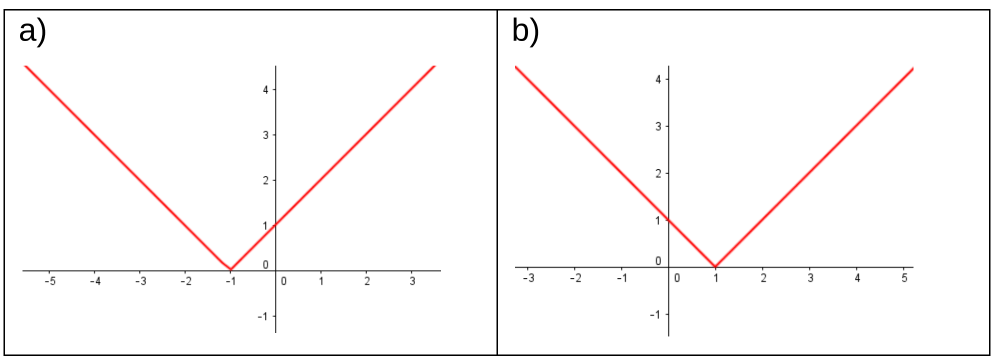
c) El conjunto de números que responde a la siguiente afirmación: “la distancia de un número real a 3 es mayor que $5-\sqrt{2}$ “ es:

i) $x \in (-2+\sqrt{2},\ \ 8-\sqrt{2})$

ii) $x \in \mathbb{R}$

iii) $x \in \left(-\infty, -2+\sqrt{2}\right) \cup (8-\sqrt{2})$

d) La gráfica de la función f, definida por $f(x) = |x-1|$, es:



e) La expresión $\sqrt{x}^2 + 1$ es igual a:

i) $x+1$ *ii)* $|x|+1$ *iii)* $1-x$

f) La expresión $|2x-3|$es menor que:

i) $|2x|-3$ *ii)* $2x+3$ *iii)* $|2x|+3$ *iv) Ninguna de las anteriores*

g) La ecuación $|2x^2-1| = 1$ tiene como solución a:

i) $x=-1$ ó$x=1$ *ii)* $x=0$ ó$x=1$ *iii) Ninguna de las anteriores* *h) El conjunto de positividad de la función* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} f(x) = |x-2|+1$ *es:*

i) $x \in (1,3)$ *ii)* $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ *iii)* $x \in \mathbb{R}$

i) El punto $(-2,1)$ pertenece a la función:

i) $f(x) = |x-1| - 0{,}5$ *ii)* $f(x) = -|x| + 1$

iii) $f(x) = |x-2| + 1$ *iv) Ninguna de las anteriores*

5.5 Una misma ecuación o inecuación abordada desde los diferentes modelos (Clase N° 5)

Descripción: Esta clase se centra en la vinculación de los diferentes modelos estudiados del valor absoluto. Se analiza una misma ecuación o inecuación desde sus diferentes perspectivas apoyándose en la coordinación de los diferentes registros de representación.

Objetivo: Que alumno sea capaz de:

- identificar y operar con los diferentes modelos del valor absoluto: topológico, aritmético, analítico: composición y analítico: función a trozos.
- asociar los diferentes modelos del VA mediante los diferentes registros de representación (verbal, algebraico y gráfico).

Contenido: Diversos usos y significados asociados al valor absoluto.
Conocimientos previos: intersecciones de funciones lineales.
Duración: 3 horas
Modalidad de la clase: teórico – práctica

Desarrollo de clase: *Se comienza la clase realizando una pequeña síntesis de los diferentes modelos del valor absoluto, para luego realizar la fusión de ellos haciendo hincapié en los diferentes registros de representación trabajados. Es decir, se trabaja una misma ecuación (o inecuación) con valor absoluto con los diferentes modelos estudiados.*

Hemos visto que el valor absoluto de un número real presenta diversos usos y significados.

Su definición puede establecerse mediante los modelos:

- **<u>topológico</u>:** El valor absoluto de un número real es su distancia al cero. Esto es: si $x \geq 0$ se tiene que $d(x,0) = x$ ó si $x < 0$ se tiene $d(x,0) = -x$
- **<u>aritmético</u>:** El valor absoluto de un número real, se define como
$$|x| = \begin{cases} x & six \geq 0 \\ -x & six < 0 \end{cases}$$
- **<u>analítico: composición</u>:** El valor absoluto de un número real x es igual a la raíz n-ésima de la potencia de x , siendo n un número entero par. En símbolos: $|x| = \sqrt[n]{x^n}$ si n es par

También hemos visto que el valor absoluto de un número real está asociado a una función, el cual lo llamamos modelo:

- **<u>analítico: función a trozos</u>:**
Se define la función valor absoluto de la siguiente manera:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad / \; f(x) = |x| = \begin{cases} x & si\; x \geq 0 \\ -x & si\; x < 0 \end{cases}$$

Vemos en el siguiente ejemplo, cómo intervienen y se entrelazan estos modelos en una misma ecuación:

<u>Ejemplo 1</u>: Dada la siguiente proposición:

“La distancia entre un número y el opuesto de dos es igual a tres”

a) Escribir la proposición dada en términos del valor absoluto.
b) Resolver gráficamente (aplicando la definición del modelo topológico) la ecuación enunciada en a).
c) Resolver analíticamente (aplicando la definición del modelo analítico) la ecuación planteada en a).

<u>Solución</u>:

a) Al traducir al lenguaje simbólico la proposición dada se tiene: $d\,(x, -2) = \;2$

y al escribirlo en términos del VA se tiene: $|x+2|=3$ (registro verbal/simbólico).

b) En la Figura 32, se aprecia su resolución gráfica (registro gráfico):

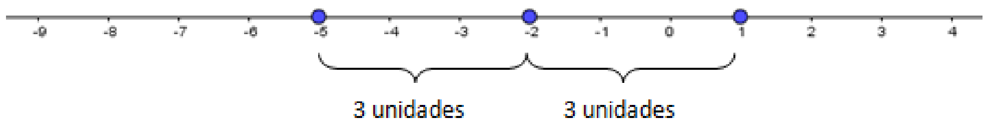


Figura 32. Representación gráfica de la distancia entre un número real x y -2 *resulta tres.*

Luego, $x = \ -5 \quad$ ó $\quad x = 1.$

c) Su resolución analítica (registro algebraico) resulta:

$$|x+2|=3 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{Def.\ aritmetica \\ del VA}} \begin{matrix} x+2=3 & \text{si } x+2 \ \geq 0 \\ \text{ó} & \\ x+2=-3 & \text{si } x+2<0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x=1 & \text{si } x \geq -2 \\ \text{ó} & \\ x=-5 & \text{si } x<-2 \end{matrix}$$

Teniendo en cuenta el Ejemplo 1, es posible asociar a cada miembro de la igualdad planteada en a) una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, es decir, considerar las funciones:

$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ /\ f(x) = |x+2|$ y

$g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ /\ g(x) = 3$

Esbocemos cada una de las funciones en un mismo sistema de ejes coordenados. (registro gráfico – algebraico). Para ello, primeramente, escribimos la función f como una función a trozos:

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ /\ f(x) = |x+2| \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{Def, función \\ VA}} f(x) = \begin{cases} x+2 & si\ x \geq -2 \\ -x-2 & si\ x < -2 \end{cases}$$

A su vez, se tiene la función $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ /\ g(x) = 3$ (registros algebraicos)

En la Figura 33, se observa la representación gráfica de ambas funciones (registro gráfico).

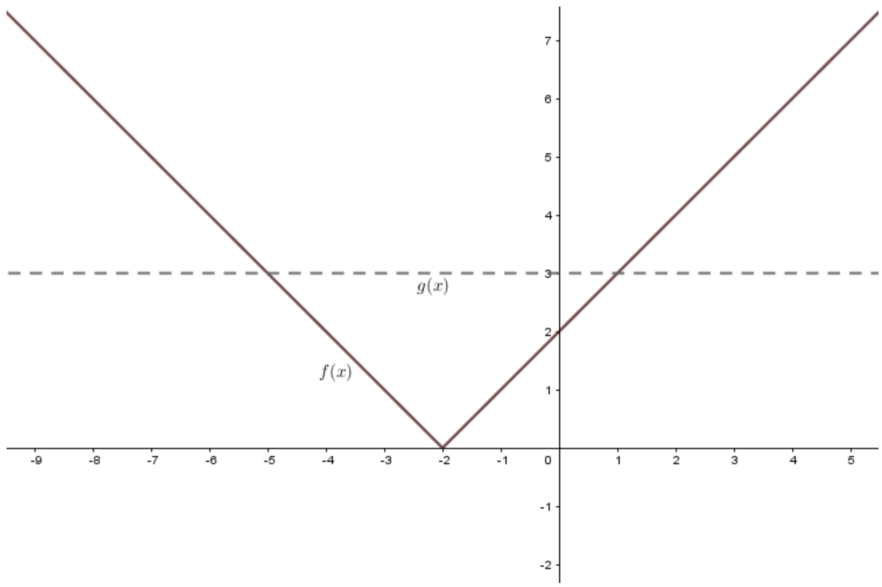


Figura 33. Representación gráfica de las funciones $f(x) = |x + 2|$ y $g(x) = 3$.

A partir de la gráfica se puede advertir, si existen valores de x, tal que $f(x) = g(x)$. Esto es, reflexionar desde la gráfica los valores de x , tal que $|x + 2| = 3$.

Se observa que para $x = -5$ ó $x = 1$ las funciones f y g coinciden, dado que:

$f(-5) = |-5 + 2| = |-3| = -(-3) = 3$ y $g(-5) = 3$

$f(1) = |1 + 2| = |3| = 3$ y $g(1) = 3$

Ejemplo 2: Dadas las funciones:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f(x) = |x - 2| - 1 \ \ y \quad g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ g(x) = 2$$

a) Esbozar cada una de las funciones en un mismo sistema de ejes coordenados.
b) Indicar, si existen, todos los valores de x tales que resulte $f(x) = g(x)$. Justificar la respuesta; es decir, resolver la ecuación.
c) Determinar el conjunto de números reales x donde resulta $f(x) \leq g(x)$. Justificar tu respuesta; es decir, resolver la inecuación.

Solución:

a) Primeramente, escribimos la función f como una función a trozos (registro algebraico).

$$f(x) = |x-2| - 1 \quad \Leftrightarrow \; f(x) = \begin{cases} (x-2)-1 & si \;\; x \geq 2 \\ -(x-2)-1 & si \;\; x < 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \begin{cases} x-2-1 & si \;\; x \geq 2 \\ -x+2-1 & si \;\; x < 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \; f(x) = \begin{cases} x-3 & si \;\; x \geq 2 \\ -x+1 & si \;\; x < 2 \end{cases}$$

$$g(x) = 2$$

En la Figura 34, se grafican ambas funciones (registro gráfico):

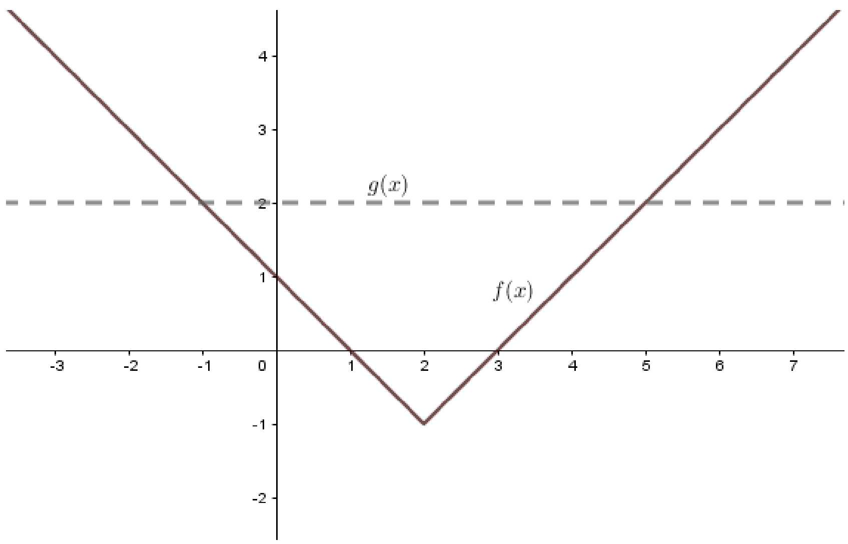


Figura 34. Representación gráfica de las funciones $f(x) = |x-2| - 1$ y $g(x) = 2$.

b) Debemos hallar aquellos valores de x , si existen, tales $f(x) = g(x)$; esto es, tales $|x-2| - 1 = 2$.
Desde el gráfico (registro gráfico) se advierte que f coincide con g para $x = -1$ ó $x = 5$. Sin embargo, para tener certeza de ello es primordial resolver la ecuación (registro algebraico):

$$|x-2| - 1 = 2 \;\; \Leftrightarrow \;\; |x-2| = 3 \; \Leftrightarrow \begin{array}{cc} x-2=3 & si \;\; x-2 \geq 0 \\ \text{ó} & \\ -x+2=3 & si \;\; x-2 < 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{cc} x=5 & si \; x \;\; \geq 2 \\ \text{ó} & \\ -x=1 & si \;\; x < 2 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{cc} x=5 & si \;\; x \geq 2 \\ \text{ó} & \\ x=-1 & si \;\; x < 2 \end{array}$$

Luego, $x = -1$ o $x = 5$.

Se observa que resolver una ecuación algebraica de la forma $f(x) = g(x)$ equivale a encontrar los valores de x en donde las dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ (definidas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$) coinciden.

Hallar los valores de x donde $f(x) \leq g(x)$ consiste en buscar el conjunto de valores de x tales que la función $f(x)$ es menor o igual a $g(x)$. Desde un punto de vista gráfico, esto se corresponde con buscar los valores de x tales que la gráfica de la función $f(x)$ se encuentre por debajo (o coincida) de la gráfica de la función $g(x)$. Luego, visualmente podríamos decir que f es menor o igual a g para $x \in [-1, 5]$, como se contempla en la Figura 35. Sin embargo, la "vista" podría fallarnos por lo que la inecuación debe resolverse analíticamente:

$$|x-2|-1 \leq 2 \iff |x-2| \leq 3 \iff \begin{array}{cc} x-2 \leq 3 & si\ x-2 \geq 0 \\ y & \\ x-2 \geq -3 & si\ x-2 < 0 \end{array} \iff$$

$$\begin{array}{cc} x \leq 5 & si\ x \geq 2 \\ y & \\ x \geq -1 & si\ x < 2 \end{array} \iff -1 \leq x \leq 5$$

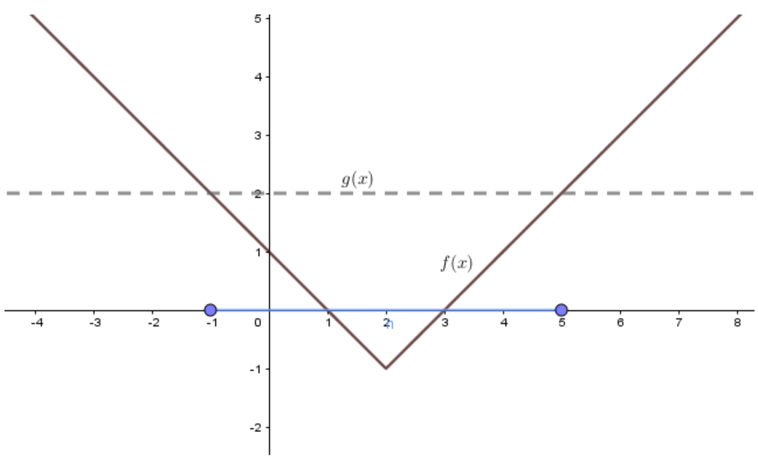


Figura 35. Representación gráfica del conjunto de números reales x donde resulta $f(x) \leq g(x)$.

Se observa que resolver una inecuación algebraica de la forma $f(x) \leq g(x)$ equivale a encontrar los valores de x tales que la función $f(x)$ sea menor o igual a la función $g(x)$, es decir la función $f(x)$ se encuentre por debajo de o coincida con la función $g(x)$.

<u>Ejemplo 3</u>: Dada la siguiente afirmación:

"La distancia entre el cuadrado de un número real y uno es una unidad"

a) Plantear como ecuación, en términos del valor absoluto, y resolver.
b) Mediante el programa GeoGebra, verificar la solución hallada en a) a partir de la intersección de las gráficas asociadas a cada miembro de la igualdad.

<u>Solución</u>:

a) Al traducir el enunciado dado (registro verbal) en términos del VA queda de la siguiente manera: $|x^2 - 1| = 1$

Resolvamos entonces la ecuación (registro algebraico):

$$\begin{cases} x^2 - 1 = -1 \\ x^2 - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = 0 \\ \text{ó} \\ |x| = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ó} \\ x = -\sqrt{2} \text{ ó } x = \sqrt{2} \end{cases}$$

Luego, el conjunto solución a la inecuación dada resulta:

$$x = -\sqrt{2} \quad \text{ó} \quad x = 0 \quad \text{ó} \quad x = \sqrt{2}$$

b) Asociamos a cada miembro de la ecuación planteada en a) una función de la siguiente manera:

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f(x) = |x^2 - 1|$ y $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ g(x) = 1$

En la Figura 36, por medio del programa GeoGebra se grafican ambas funciones:

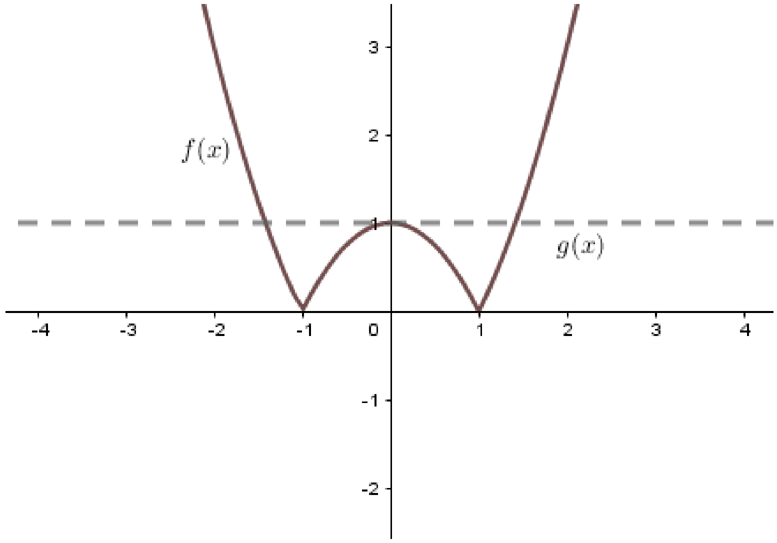


Figura 36. Representación gráfica de las funciones $f(x) = |x^2 - 1|$ y $g(x) = 1$.

A partir del grafico se perciben los valores de x donde $f(x) = g(x)$ (registro gráfico); es decir que las soluciones a la ecuación coinciden con los valores de x donde las gráficas se intersecan. Luego, f coincide con g para:

$$x = -\sqrt{2} \quad \text{ó} \quad x = 0 \quad \text{ó} \quad x = \sqrt{2}$$

Se otorgan los siguientes ejercicios para que los alumnos resuelvan en clase. (Se designan 30 minutos para ello, y luego se corrigen los mismos en pizarrón).

Ejercicio 1: Dada la siguiente proposición:

"La distancia entre el doble de un número y tres es igual a la raíz cuadrada de 16"

a) *Escribir dicha proposición en el lenguaje simbólico.*
b) *Resolver utilizando la representación gráfica en la recta numérica (es decir, resolver aplicando la definición del modelo topológico).*
c) *Resolver la ecuación aritméticamente.*
d) *Hallar dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ que representen las soluciones a la ecuación planteada en a). Representar dichas funciones en un mismo sistema de ejes coordenados.*

Ejercicio 2: Dadas las funciones: $f(x) = |x^2 - 3|$ *y* $g(x) = 2$

a) Esbozar ambas funciones en un mismo sistema de ejes coordenados.

b) Indicar, si existen, todos los valores de x tales que resulte: $f(x) = g(x)$. Justificar la respuesta resolviendo la ecuación.

c) Determinar el conjunto de números reales x donde resulta $f(x) > g(x)$. Justificar tu respuesta resolviendo la inecuación.

Se suministran los ejercicios que se presentan a continuación como tarea domiciliaria.

<u>Ejercicio 3</u>: Dadas las funciones: $f(x) = |x + 3|$ *y* $g(x) = -1$

a) Esbozar ambas funciones en un mismo sistema de ejes coordenados.

b) Indicar, si existen, todos los valores de x *tales que resulte:* $f(x) = g(x)$*. Justificar la respuesta resolviendo la ecuación.*

<u>Ejercicio 4</u>: Dada la siguiente proposición: "La distancia entre la mitad de un número real y el opuesto de 1 es igual a 1,5 unidades"

a) Resolver utilizando la representación gráfica en la recta numérica (es decir, resolver aplicando la definición del modelo topológico).

b) Resolver la ecuación aritméticamente.

c) Hallar dos funciones $f(x)$ *y* $g(x)$ *que representen las soluciones a la ecuación planteada en a). Representar dichas funciones en un mismo sistema de ejes coordenados.*

<u>Ejercicio 5</u>: Dada la siguiente proposición: "La distancia entre el triple de un número real y 2,5 unidades es mayor a 1"

a) Resolver utilizando la representación gráfica en la recta numérica (es decir, resolver aplicando la definición del modelo topológico).

b) Resolver la ecuación aritméticamente.

c) Hallar dos funciones $f(x)$ *y* $g(x)$ *que representen las soluciones a la ecuación planteada en a). Representar dichas funciones en un mismo sistema de ejes coordenados.*

<u>Ejercicio 6</u>: Dadas las funciones: $f(x) = |x^2 - 2|$ *y* $g(x) = 1$

a) Esbozar ambas funciones en un mismo sistema de ejes coordenados.

b) Indicar, si existen, todos los valores de x tales que resulte: $f(x) = g(x)$. Justificar la respuesta resolviendo la ecuación.
c) Determinar el conjunto de números reales x donde resulta $f(x) < g(x)$. Justificar tu respuesta resolviendo la inecuación.

CAPÍTULO VI

Análisis y resultados de la propuesta didáctica

Con el propósito de analizar la propuesta didáctica implementada se consideran dos fases. La primera consiste en estudiar de manera cualitativa las fortalezas y debilidades que presentan los alumnos en la resolución de dos ejercicios prácticos de desarrollo. La segunda fase radica en examinar cuantitativamente los resultados de la propuesta, mediante la realización de una prueba diagnóstica final, la cual figura en el Anexo 3, y en la comparación de los resultados obtenidos de esta última evaluación con la primera prueba diagnóstica inicial.

6.1 Análisis cualitativos de los resultados de la implementación de la propuesta didáctica

Mediante la realización de un trabajo práctico que favorece el manejo y la articulación entre diferentes registros de representación, se procura identificar y caracterizar los errores cometidos por los alumnos al transitar los diferentes modelos del VA.

A continuación, se exponen los enunciados de los dos ejercicios que se consideran en el trabajo práctico junto a su objetivo.

1.- Dada la siguiente proposición:

> *"La distancia entre la tercera parte de un número real y el opuesto*
>
> *de 1 es igual a 2 unidades"*

a) Plantear y resolver la ecuación aritméticamente.
b) Hallar dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ que representen las soluciones a la ecuación planteada en a).
c) Representar dichas funciones en un mismo sistema de ejes coordenados.

Objetivo: que el alumno logre
• *Plantear una ecuación como módulo y resolverla correctamente.*

- *Concebir y enunciar dos funciones que representen la solución hallada en la ecuación anterior.*
- *Realizar un gráfico aproximado de las dos funciones definidas.*

2.- Halla todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ *tal que:* $|x^2 + 2| = 3$

Objetivo: que el alumno logre

- *Resolver la ecuación de manera correcta.*
- *Reconocer que* $\sqrt{x^2} = |x|$ *o bien considerar que una ecuación con* x^2 *admite a lo sumo dos soluciones diferentes.*

Con los alumnos que asistieron a clases el día 5 de junio de 2019, siendo éstos un total de 27 alumnos, se realiza la resolución del trabajo practico expuesto con el fin realizar un relevamiento de las facilidades y las dificultades detectadas. Cabe mencionar que estos alumnos colaboraron hasta aquí con el plan de investigación que se lleva a cabo. El tiempo que se otorga para la resolución del trabajo práctico es de aproximadamente 25 minutos.

A partir de las producciones de los alumnos se procura indagar sobre:

- Los diferentes modelos que manejan en relación con el concepto del VA.
- Los registros de representación que aplican.
- Los logros y dificultades que manifiestan.

Se corrigen los trabajos considerando: bien (B) si es correcto, mal (M) en caso de ser incorrecto, la expresión (Inc.) al incompleto y la expresión (S/R) si el ejercicio estaba sin resolver. Se realizaron acotaciones y observaciones escritas en los casos que se consideró necesario.

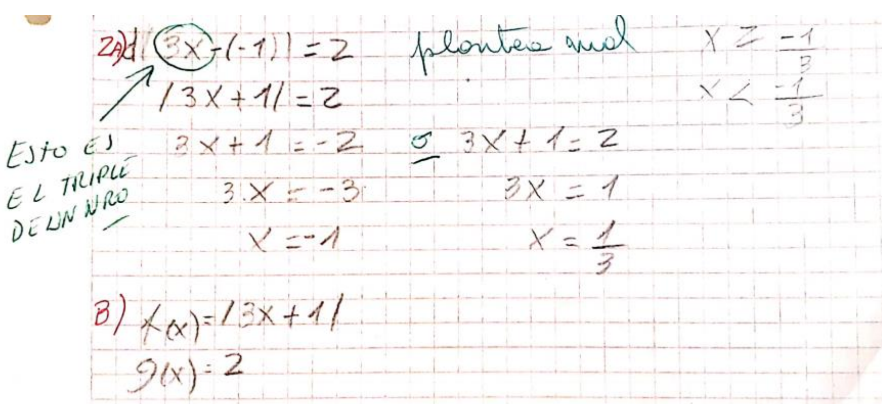
En la Tabla 12, se presenta para el ejercicio 1 la cantidad de alumnos que alcanzaron el nivel de logro descripto y su porcentaje.

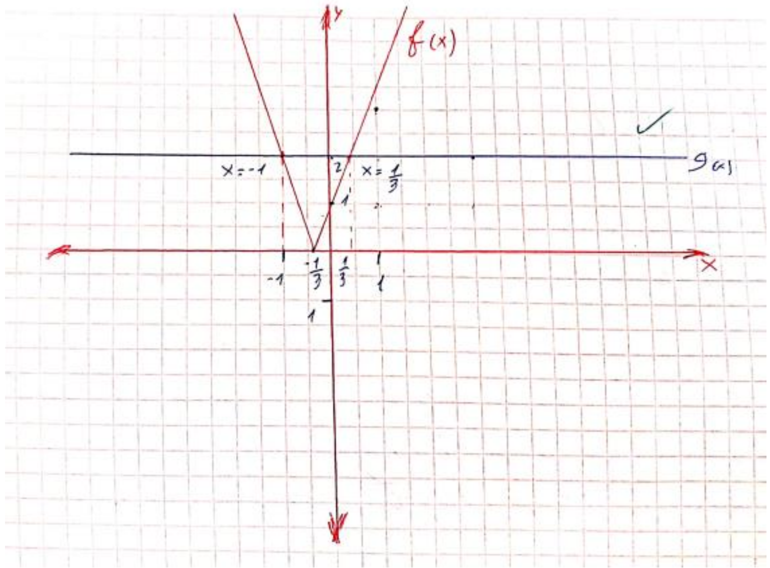
Nivel de logro	Cantidad de alumnos que alcanzaron el nivel de logro	Porcentaje aproximado de alumnos que alcanzaron el nivel de logro
Plantea una ecuación que se corresponde con el enunciado propuesto.	23	85%
Resuelve correctamente la ecuación de forma aritmética.	23	85 %
Escribe dos funciones que representan la solución de la ecuación planteada en a).	9	33%
Representa gráficamente las funciones definidas en el ejercicio b)	8	30%

Tabla 12. Cantidad y porcentaje de alumnos que alcanzaron el nivel de logro en el ejercicio 1 del Trabajo Práctico.

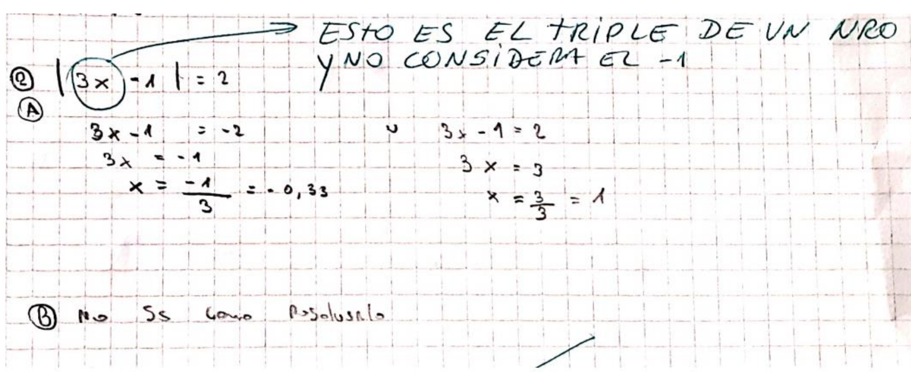
A continuación, se muestran algunas situaciones respecto al ejercicio 1 que evidencian ciertas dificultades en las elaboraciones de los alumnos:

Alumno 1: confunde la tercera parte de un número con el triple de éste. Sin embargo, este alumno pese a su error alcanzó a determinar dos funciones que representen la solución halla en a) y representar las funciones encontradas de forma correcta.

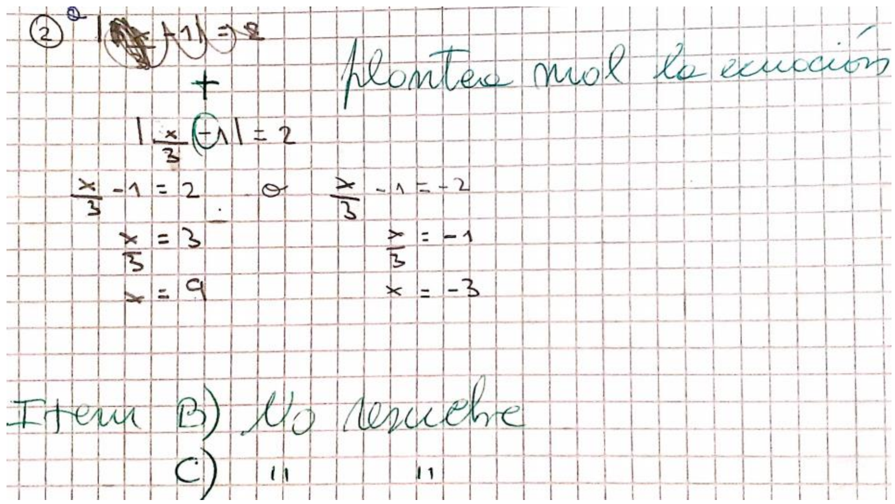




Alumno 2: no se considera el opuesto de 1. Esto es, plantea mal el enunciado, pero resuelve correctamente la ecuación planteada. Este alumno no realiza los apartados b) y c), manifestando que no comprende cómo hacerlo.



Alumno 3: Interpreta la tercera parte de un número, pero no considera el opuesto de 1. Plantea mal el enunciado, pero resuelve correctamente la ecuación planteada. Este alumno tampoco realiza los apartados b) y c).



② a. $|\frac{x}{3}-1| = 2$

Plantea mal la ecuación

$|\frac{x}{3}-1| = 2$

$\frac{x}{3}-1 = 2$ o $\frac{x}{3}-1 = -2$

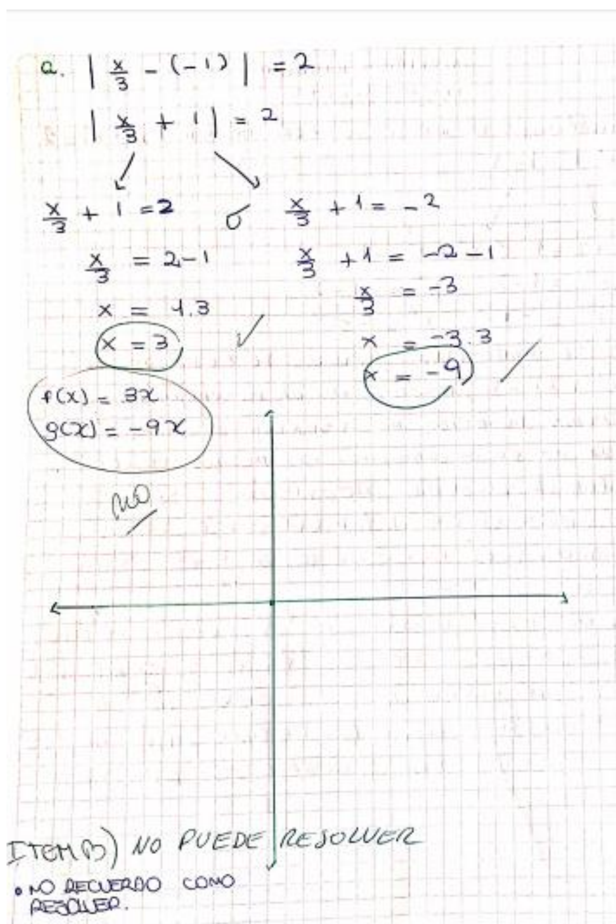
$\frac{x}{3} = 3$ $\frac{x}{3} = -1$

$x = 9$ $x = -3$

Item B) No resuelve

C) " "

Alumno 4: Plantea y resuelve correctamente el enunciado propuesto en el ítem a y define de manera incorrecta las dos funciones que representen la solución hallada. En esta situación se encuentran nueve estudiantes más.



a. $|\frac{x}{3} - (-1)| = 2$

$|\frac{x}{3} + 1| = 2$

$\frac{x}{3} + 1 = 2$ o $\frac{x}{3} + 1 = -2$

$\frac{x}{3} = 2-1$ $\frac{x}{3} + 1 = -2-1$

$x = 1.3$ $\frac{x}{3} = -3$

$x = 3$ $x = -3.3$

$x = -9$

$f(x) = 3x$

$g(x) = -9x$

NO

ITEM B) NO PUEDE RESOLVER

• NO RECUERDO COMO RESOLVER.

a) $\left|\frac{1}{3}x-(-1)\right|=2$

$\left|\frac{1}{3}x+1\right|=2 \rightarrow \frac{1}{3}x+1=-2$

$x=-9$

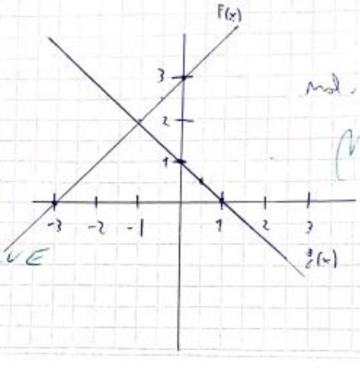
$\frac{1}{3}x+1=2$

σ

$x=3$

B) $F(x)=x+3$

$g(x)=-x+1$



Mal.

mal

ITEM 2B) RESUELVE MAL.

a- $|1/3\,x+1|=2$

① $\frac{1}{3}x+1=2 \Rightarrow \frac{1}{3}x=1 \Rightarrow x=1:1/3 \Rightarrow \underline{x=3}$

σ

② $\frac{1}{3}x+1=-2 \Rightarrow \frac{1}{3}x=-3 \Rightarrow x=-3:1/3 \Rightarrow \boxed{x=-9}$

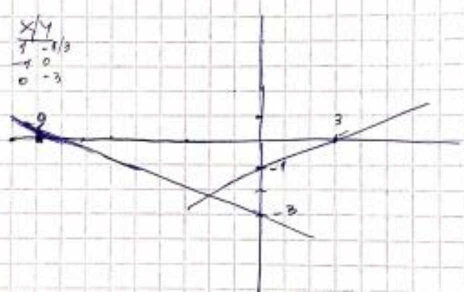
b- • $y=\frac{1}{3}x-1$

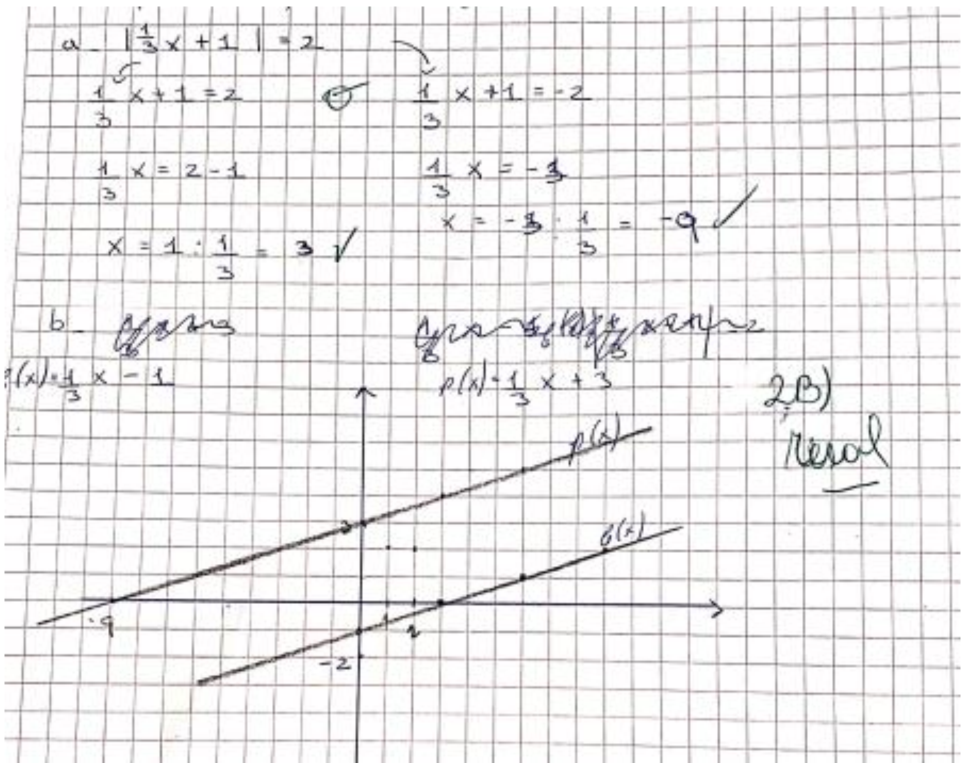
x	y
1	-2/3
-1	2
0	-1

mal

• $y=\frac{1}{3}x-\frac{3}{1}$

x	y
1	-8/3
-1	0
0	-3





Alumno 5: Plantea y resuelve correctamente el enunciado propuesto, pero no resuelve los ítems b) y c). En esta situación se hallan cuatro alumnos más.

Alumno 6: no resolvió ninguno de los ítems del ejercicio, manifestando que no recuerda cómo hacerlo.

En la Tabla 13, se presenta para el ejercicio 2 la cantidad de alumnos que alcanzaron el nivel de logro descripto y su porcentaje.

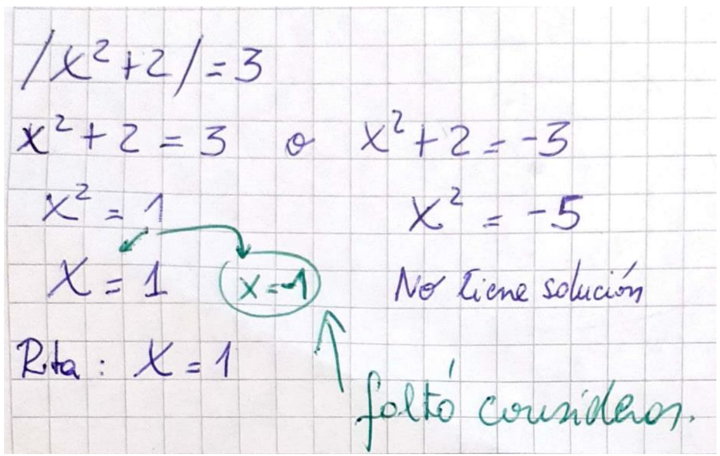
Nivel de logro	**Cantidad de alumnos que alcanzaron el nivel de logro**	**Porcentaje aproximado de alumnos que alcanzaron el nivel de logro**
Resuelve correctamente la ecuación dada.	23	85%

Reconoce que $\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert$ *o considera que* $x^2 = a \;\; (a \neq 0)$, *admite dos soluciones diferentes.*	21	78%

Tabla 13. Cantidad y porcentaje de alumnos que alcanzaron el nivel de logro en el ejercicio 2 del Trabajo Práctico.

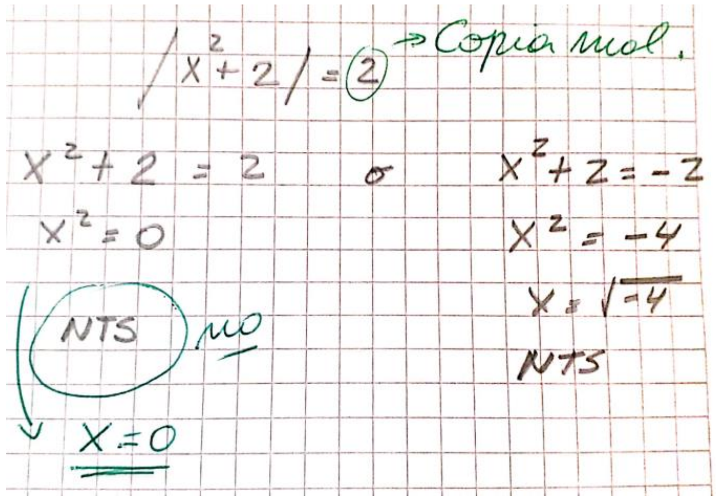
Las producciones realizadas por los alumnos con respecto al ejercicio 2 revelan algunas dificultades:

Alumno 1: No considera que $\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert$ o bien que al tener $x^2 = a\,;\;\; a \geq 0$ el valor de x puede ser: $\sqrt{a}$ o $-\sqrt{a}$, es decir, dos valores diferentes.



Alumno 2: A resolver la ecuación no estudia el caso para cuando x es negativo. Si bien la respuesta final es correcta, el procedimiento que realiza no es el apropiado.

Alumno 3: Copia mal la ecuación, pero al mismo tiempo resuelve mal.



En conclusión:

- ✓ El 85% de los alumnos presenta manejo de los registros verbal, simbólico y algebraico dado que lograron interpretar el lenguaje coloquial, que se presentó en el ejercicio 1, traducirlo a un lenguaje simbólico planteando una ecuación en términos del VA y resolver analíticamente de manera correcta la misma.
- ✓ Aproximadamente el 80 % de los estudiantes manifiestan dominio sobre la noción del VA desde sus enfoques aritmético, topológico y analítico: composición. Es decir, resolvieron correctamente el ítem a) del ejercicio 1 y la totalidad del ejercicio 2.
- ✓ El 30% de los alumnos manifiesta registro gráfico resolviendo correctamente el ejercicio 1 ítem c), mientras que el resto muestra no discernir el concepto del VA abordado desde el modelo analítico: función a trozos, dejando a un lado la representación gráfica la cual ayuda a corroborar las respuestas.

6.2 Análisis cuantitativos de los resultados de la implementación de la propuesta didáctica

6.2.1 Descripción de prueba diagnóstica final

Para iniciar esta fase se realiza una prueba diagnóstica final, la cual consiste en una evaluación de elección múltiple de 16 ejercicios con las mismas características que la prueba diagnóstica inicial, recordamos:

- cada ejercicio consta de dos opciones siendo sólo una de ellas la respuesta correcta.
- los ejercicios se enmarcan en la estructuración de los modelos y significados del concepto VA propuesto por Wilhelmi et al. (2007); ubicándose al azar en el diseño de la prueba.

Se describen de acuerdo con cada modelo el número de ejercicio de la prueba diagnóstica final con su enunciado y objetivo propuesto. En la Tabla 14 se muestran los ejercicios enmarcados en el modelo topológico, en la Tabla 15 de acuerdo con el modelo aritmético, en la Tabla 16 en relación al modelo analítico: composición y por último en la Tabla 17 lo referentes al modelo analítico: función a trozos.

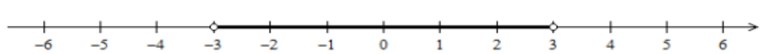
Modelo topológico
2.- La expresión $\|x-2\|>0$ es lo mismo que la distancia entre x y 2 es mayor que cero. *<u>Objetivo</u>: Asociar la noción del VA de un número real al concepto de distancia entre dos números.*
6.- Si $-x>0$ entonces la distancia entre $-x$ y cero es igual a x. *<u>Objetivo</u>: Reconocer que $-x$ es positivo entonces x es negativo asociándolo a la noción de distancia.*
12.- La distancia entre x y cero es mayor a tres tiene la siguiente representación gráfica:  *<u>Objetivo</u>: Vincular el registro gráfico a la noción de distancia.*
15.- La expresión $\|x+3\|=3$ es lo mismo que la distancia entre x y -3 es igual a 3. *<u>Objetivo</u>: Vincular la definición del VA a la noción de distancia entre dos números reales.*

Tabla 14. Enunciado y objetivo correspondiente a cada ejercicio de la prueba diagnóstica final, según modelo topológico.

Modelo aritmético
1.- $\left\|1-\sqrt{5}\right\| = 1-\sqrt{5}$ *Objetivo: Aplicar la definición del VA, o bien recordar propiedades del VA.*
4.- La inecuación $\|x\| \geq -4$ **no tiene soluciones reales.** *Objetivo: Reflexionar que el valor de un número real siempre es positivo o cero.*
9.- $2—\left\|-\frac{3}{2}-(-1)\right\| = \frac{5}{2}$ *Objetivo: Operar con valores absolutos utilizando la definición del VA*
16.- La ecuación $\|x\| = 5$ **tiene como soluciones a** $x = -5$ **ó** $x = 5$ *Objetivo: Aplicar la definición del VA, o bien recordar las propiedades del VA asociadas a la definición.*

Tabla 15. Enunciado y objetivo correspondiente a cada ejercicio de la prueba diagnóstica final, según modelo aritmético.

Modelo analítico: composición
3.- **Para todo número real, se tiene que:** $\sqrt{x^2} = x$ *Objetivo: Identificar que la base de potencia par puede tomar tanto valores positivos como negativos (o cero), quedando implícito el VA en la base.*
7.- **La ecuación** $\sqrt{x^{2}} + 3 = 5$ **tiene como única solución a** $x = \sqrt{2}$ *Objetivo: Utilizar la interpretación del modelo analítico, composición:* $\sqrt{x^2} = \|x\|$.
11.- **Para todo número real, se tiene que:** $\sqrt{(x+1)^2} = \|x+1\|$ *Objetivo: Aplicar el modelo analítico: composición (considerar que al tratarse de una raíz de índice par el resultado deberá ser siempre positivo, quedando implícito el módulo en el radicando).*

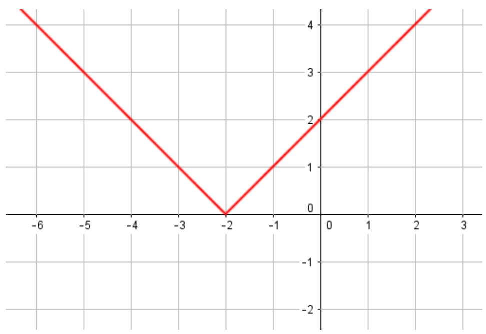
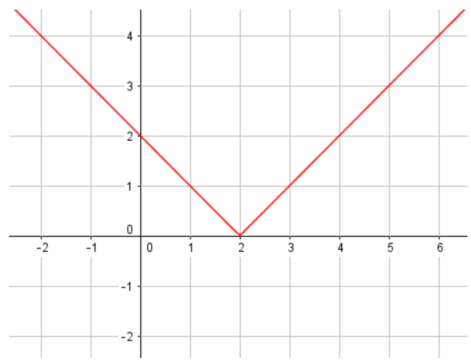
***14.-* La ecuación $\sqrt{(x-3)^2} = 5$; tiene como única solución $x = 8$**

Objetivo: Identificar que simplificar el cuadrado con la raíz queda implícito en la base de la potencia el VA. Asociar esto a la propiedad: $\sqrt{x^2} = |x|$.

Tabla 16. Enunciado y objetivo correspondiente a cada ejercicio de la prueba diagnóstica final, según modelo analítico: composición.

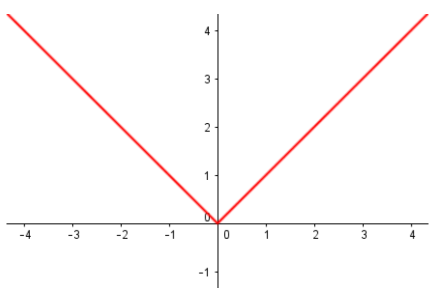
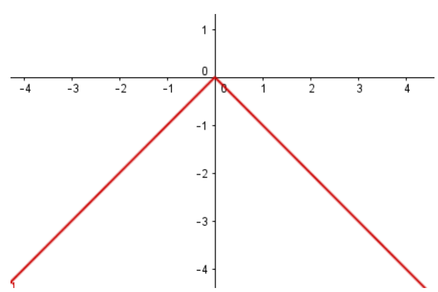
Modelo analítico: función a trozos

5.- La gráfica de la función f, definida por $f(x) = |x+2|$ es:

a)	b)
	

Objetivo: Identificar la traslación horizontal de la función valor absoluto

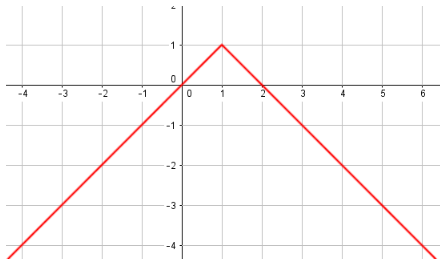
8.- La gráfica de la función f, definida por: $f(x) = -|x|$ es:

a)	b)
	

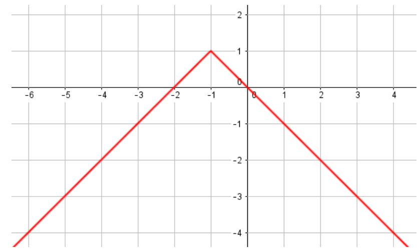
Objetivo: Identificar la reflexión de la función valor absoluto $y = |x|$.

10.- La gráfica de la función f, definida por $f(x) = -|x-1| + 1$ es:

a)



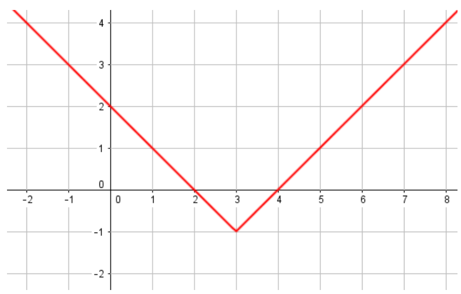
b)



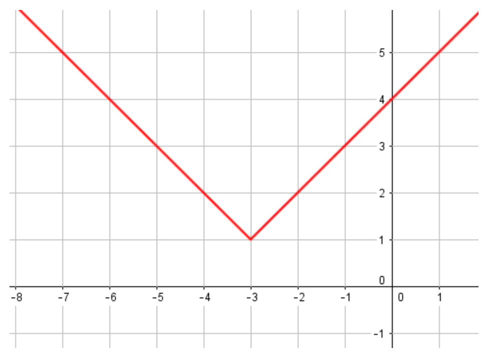
Objetivo: *Identificar la reflexión y los corrimientos que se aplican a la función valor absoluto* $y = |x|$.

13.- La gráfica de la función f, definida por $f(x) = |x - 3| - 1$ es:

a)



b)



Objetivo: Identificar los corrimientos que se aplican a la función valor absoluto $y = |x|$.

Tabla 17. Enunciado y objetivo correspondiente a cada ejercicio de la prueba diagnóstica final, según modelo analítico: función a trozos.

El día 22 de junio de 2019, se convocó a los cuarenta (40) estudiantes que no sólo participaron en la prueba diagnóstica inicial, sino que además asistieron a la implementación de la propuesta didáctica, para que realizaran la prueba diagnóstica final. Se les explico nuevamente a los estudiantes que su cooperación no influiría en la nota de la asignatura. El tiempo estimado que se otorga para responder a la prueba diagnóstica final es igual al tiempo otorgado para la prueba diagnóstica inicial, de 20 minutos.

6.2.2 Análisis y Resultados de la prueba diagnóstica final

- Organización de la información

Luego de corregir las pruebas, como se estableció para la prueba anterior (inicial), cada ejercicio se codifica en 1: respuesta correcta y en 0: respuesta incorrecta. Dicha información se ingresa en una tabla Excel con extensión csv como se muestra en la Figura 37.

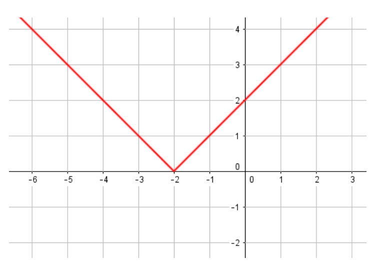
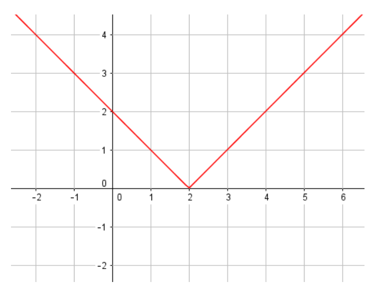
	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1	VioElTema	Ej1	Ej2	Ej3	Ej4	Ej5	Ej6	Ej7	Ej8	Ej9	Ej10	Ej11	Ej12	Ej13	Ej14	Ej15	Ej16
2	SI	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
3	SI	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1
4	SI	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	SI	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1
6	SI	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
7	SI	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1
8	SI	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1
9	SI	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
10	SI	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
11	SI	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1
12	SI	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
13	SI	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
14	SI	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1
15	SI	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
16	SI	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0
17	SI	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1
18	SI	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
19	SI	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
20	SI	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
21	SI	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
22	SI	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1
23	SI	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
24	SI	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
25	SI	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1

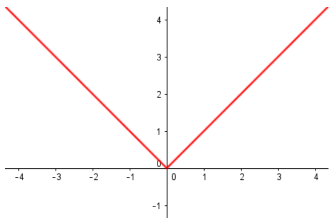
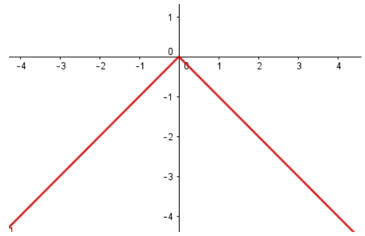
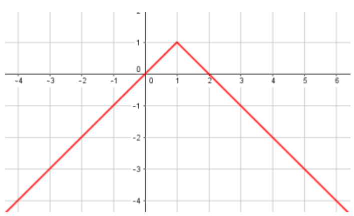
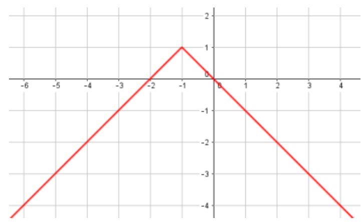
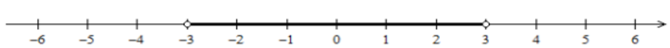
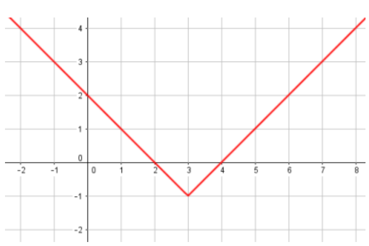
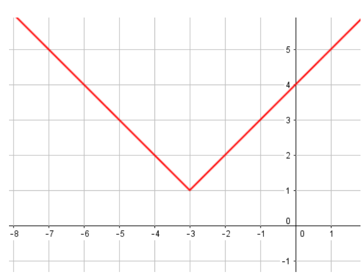
RESULTADOS SEGUNDAPRUEBADIAGNOS

Figura 37. Resultados de prueba diagnóstica final.

- Procesamiento de datos

Mediante la utilización de herramientas estadísticas que facilita el programa R se analiza la información. En la Tabla 18, se elabora un análisis descriptivo considerando la cantidad y el porcentaje de respuestas correctas de los alumnos en cada ejercicio.

Ejercicio	**Cantidad de respuestas correctas**	**Porcentaje de respuestas correctas**
1.- $\lvert 1-\sqrt{5}\rvert = 1-\sqrt{5}$	**31**	**77,5 %**
2.- La expresión $\lvert x-2\rvert > 0$ es lo mismo que la distancia entre x y 2 es mayor que cero.	**36**	**90 %**
3.- Para todo número real, se tiene que: $\sqrt{x^2} = x$	**29**	**72,5 %**
4.- La inecuación $\lvert x\rvert \geq -4$ no tiene soluciones reales.	**24**	**60 %**
5.- La gráfica de la función f, definida por $f(x) = \lvert x+2\rvert$ es: a)  b) 	**34**	**85 %**
6.- Si $-x > 0$ entonces la distancia entre $-x$ y cero es igual a x.	**10**	**25 %**
7.- La ecuación $\sqrt{x^{\,2}} + 3 = 5$ tiene como única solución a $x = \sqrt{2}$	**33**	**82,5 %**
8.- La gráfica de la función f, definida por: $f(x) = -\lvert x\rvert$ es:	**38**	**95 %**

a)  b) 		
9.- $2 - \left\|-\frac{3}{2} - (-1)\right\| = \frac{5}{2}$	**32**	**80 %**
10.- La gráfica de la función f, definida por $f(x) = -\|x - 1\| + 1$ es: a)  b) 	**31**	**77,5 %**
11.- Para todo número real, se tiene que: $\sqrt{(x+1)^2} = \|x + 1\|$	**36**	**90 %**
12.- La distancia entre x y cero es mayor a tres tiene la siguiente representación gráfica: 	**27**	**67,5 %**
13.- La gráfica de la función f, definida por $f(x) = \|x - 3\| - 1$ es: a)  b) 	**38**	**95 %**

14.- La ecuación $\sqrt{(x-3)^2}=5$; tiene como única solución $x=8$	**30**	**75 %**
15.- La expresión $\lvert x+3\rvert=3$ es lo mismo que la distancia entre x y -3 es igual a 3.	**33**	**82,5 %**
16.- La ecuación $\lvert x\rvert=5$ tiene como soluciones a $x=-5$ ó $x=5$	**37**	**92,5 %**

Tabla 18. Cantidad y porcentaje de respuestas correctas de cada ejercicio de los 40 estudiantes.

Resulta que, 15 de 16 ejercicios fueron respondidos correctamente por más del $60\ \%$ de los alumnos.

En la Tabla 19, se muestra la distribución de las notas de los alumnos en la prueba diagnóstica final.

Nota	9	10	11	12	13	14	15	16
Frecuencia	1	4	8	8	7	7	3	2

Tabla 19. Distribución de las notas de los alumnos en la prueba diagnóstica final.

En la Figura 38 se observa el histograma de la distribución de las notas de los alumnos en la prueba diagnóstica final.

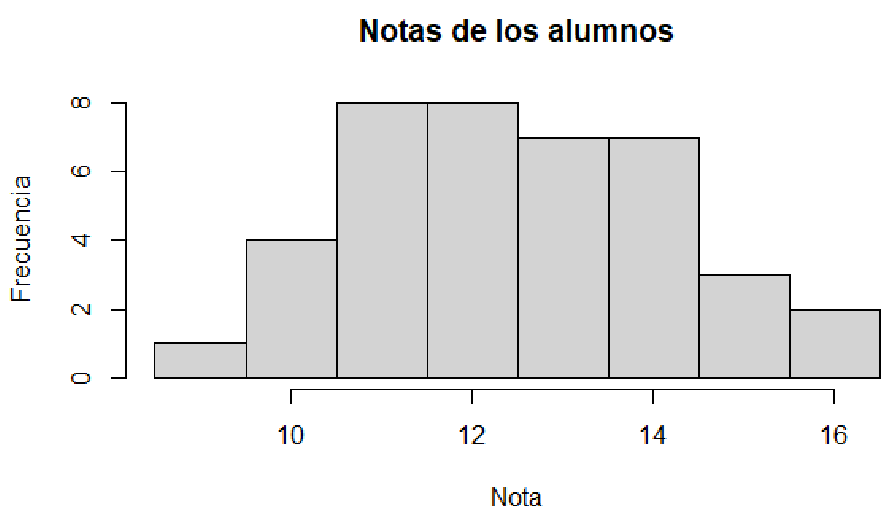


Figura 38: Histograma de las notas de los alumnos de prueba diagnóstica final.

Se observa que la distribución de las notas resulta ser bastante simétrica alrededor de 12.

La Figura 39 muestra el boxplot de la distribución de las notas. Resulta que el valor mínimo de la variable Nota es 9, lo cual muestra que la mayoría de los alumnos se encuentran muy próximos al nivel de aprobación considerado por la UNLu, que se correspondería con 10 respuestas correctas de los 16.

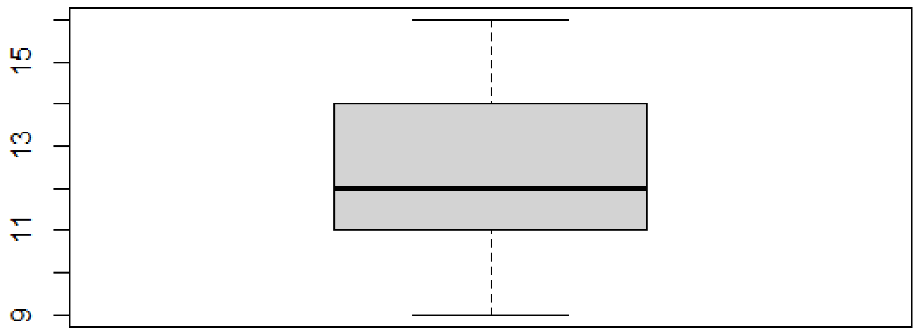


Figura 39: Boxplot de las notas de los alumnos de prueba diagnóstica final.

Las medidas resúmenes de las notas de los alumnos en la prueba diagnóstica final pueden observarse en la siguiente salida del R:

```
> summary(Notas)
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
   9.00   11.00   12.00   12.47   14.00   16.00
```

A su vez, el primer cuartil que simboliza el 25% inferior de la muestra es de 11. Con lo cual es posible anunciar que más del 75% de los alumnos estarían entonces en las condiciones de aprobación.

Se advierte mediante el programa R el porcentaje de aprobados:

- umbral <- 0.60*16
- sum(Notas>=umbral)/length(Notas)*100

[1] 97.5

Se tiene que el 97,5% de los alumnos estarían en el nivel de aprobación mencionado.

Interesa conocer si los alumnos están respondiendo esta prueba al azar o con conocimiento sobre el tema, para ello se realiza un test de nivel aproximado tal como se consideró para la prueba diagnóstica inicial, mediante el programa estadístico R.

Si llamamos nuevamente N a la nota total en la segunda instancia de evaluación, como $E(N) = 8$ en el caso de que respondan al azar, tal como fue desarrollado en la Sección 3.2, queremos testear:

$$H_0: \mu = 8 \quad vs \quad H_1: \mu \neq 8$$

es decir, si los alumnos están respondiendo los ejercicios al azar o no. El resultado del test resulta:

- t.test(Notas, alternative=”two.sided”, mu=8)

One Sample t-test

data: Notas

t = 16.273, df = 39, p-value < 2.2e-16

Se contempla que el p - valor es muy pequeño para cualquier valor de α considerable, con lo cual hay evidencia estadística suficiente para rechazar la hipótesis nula. Luego, se afirma que los alumnos no están respondiendo al azar los ejercicios de la prueba diagnóstica final. Esto resulta esperable dado que se observó, de acuerdo con las medidas de variabilidad, que más del 75% de los alumnos respondieron en forma correcta la evaluación.

Incumbe analizar el grado de dominio que los alumnos manifiestan en cada uno de los modelos estudiados, para ello se contempla el comportamiento de las notas para cada modelo en la Tabla 20.

Modelo analítico: función a trozos (N1)	**N1**	0	1	2	3	4
	Frecuencia	0	0	2	11	25
Modelo analítico: composición (N2)	**N2**	0	1	2	3	4
	Frecuencia	0	3	4	15	18
Modelo topológico (N3)	**N3**	0	1	2	3	4
	Frecuencia	0	4	13	16	7

<table>
<tr><td>Modelo aritmético (N4)</td><td>
<table>
<tr><th>N4</th><th>0</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th></tr>
<tr><td>Frecuencia</td><td>0</td><td>0</td><td>8</td><td>20</td><td>12</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

Tabla 20. Comportamiento de las notas para cada modelo.

En la Figura 40, se puede apreciar un histograma de las notas obtenidas para cada modelo.

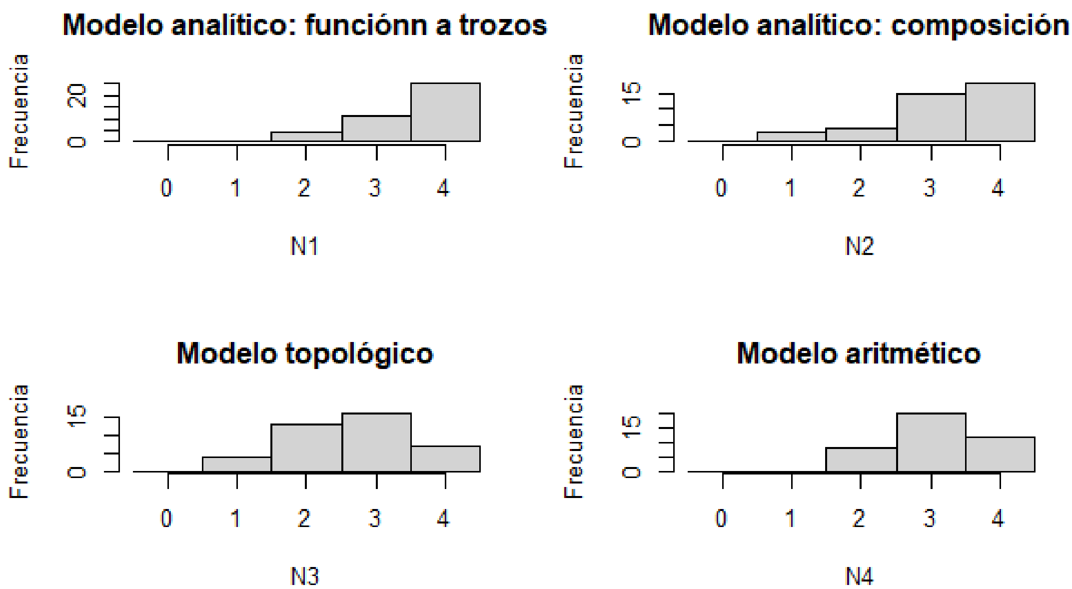


Figura 40. Histogramas de las notas obtenidas en los modelos: analítico: función a trozos, analítico: composición, topológico y aritmético de prueba diagnóstica final.

Se advierte que:

- ✓ $N^{(1)}$ = ”nota obtenida en el modelo analítico: función a trozos y $N^{(2)}$ = ”nota obtenida en el modelo analítico: composición” presenta una distribución bastante asimétrica a izquierda.
- ✓ $N^{(3)}$ = ”nota obtenida en el modelo topológico” pareciera tener una simetría alrededor de 2,5.
- ✓ $N^{(4)}$ = ”nota obtenida en el modelo aritmético” sugiere una simetría alrededor de 3.

Se examinan los promedios y las medianas de cada una de las variables $N^{(1)}$, $N^{(2)}$, $N^{(3)}$ y $N^{(4)}$:

- sort(apply(N,2,mean))

N3 N4 N2 N1

2.650 3.100 3.200 3.525

- sort(apply(N,2,median))

N2 N3 N4 N1

3 3 3 4

Se contempla que el mejor promedio y mediana lo manifiesta el modelo analítico: función a trozos. Habiendo transcurrido 17 días del trabajo práctico realizado, este dato resulta positivamente sorprendente en comparación con el análisis cualitativo en donde no mostraron mayor dominio en este modelo. Posiblemente los alumnos pudieron interpretar los errores cometidos en la devolución general que se realizó. El resto de los modelos presentan el mismo valor para la mediana, no así para sus medias. El menor promedio lo expresa el modelo topológico.

Desde el análisis descriptivo realizado en la Tabla 18, se advierte que los modelos analítico: función a trozos, analítico: composición y aritmético superan ampliamente cada uno de sus ejercicios el 60% de las respuestas correctas. No sucede lo mismo en el modelo topológico, llamando notablemente la atención el ejercicio 6, el cual manifiesta el $75\ \%$ de respuestas incorrectas. Al detener la mirada en su enunciado se advierte que para los alumnos resulta capcioso el término $-x > 0$ dado que les cuesta interpretar posiblemente que si $-x$ es positivo significa que x es negativo.

Importa conocer si en algunos de los modelos los alumnos parecieran estar respondiendo al azar o con conocimiento del tema. Para ello, se realiza un test de nivel aproximado unilateral.

Se desarrollan los test desde aquel que manifiesta menor promedio hasta el mayor:

- Con respecto al <u>modelo topológico</u>, es decir, para $N^{(3)}$, el resultado obtenido resulta:

  - t.test(N3, alternative=”greater”, mu=2)

  One Sample t-test

  data: N3

  t = 4.6036, df = 39, **p-value = 2.168e-05**

Se observa que el p-valor es muy pequeño para cualquier valor de α, con lo cual hay evidencia estadística suficiente para rechazar la hipótesis nula (H_0); luego los alumnos no están respondiendo al azar en este modelo sino con conocimiento sobre el tema.

Sin embargo, al observar los datos obtenidos por medio del análisis descriptivo, se tiene que el ejercicio 6 presenta un porcentaje de respuestas correctas del 25%, con lo cual amerita estudiar si este ejercicio lo están respondiendo al azar o tienen mal aprendido el concepto. Para ello, se realiza un test exacto para la distribución binomial como se aplicó en la prueba diagnóstica inicial:

$$H_0: p_k \leq \frac{1}{2} \quad vs \quad H_1: p_k > \frac{1}{2}$$

```
> Ejercicio6 <- Metrica[,"Ej6"]
> SumaEj6 <- sum(Ejercicio6)
> binom.test(SumaEj6,40,p=0.5, alternative="greater")

        Exact binomial test

data:  SumaEj6 and 40
number of successes = 10, number of trials = 40, p-value = 0.9997
```

Luego, se tiene que el p – valor es 0,9997 mayor a cualquier α considerado, con lo cual los alumnos no estarían respondiendo con conocimiento sobre el tema en este ejercicio, resultado que ya se observó de forma descriptiva.

- Con respecto al <u>modelo aritmético</u>, es decir, para $N^{(4)}$, el resultado obtenido es el siguiente:

  - t.test(N4, alternative=”greater”, mu=2)

  One Sample t-test

  data: N4

  t = 9.8136, df = 39, **p-value = 2.174e-12**

El p – valor es insignificante con lo cual se afirma que hay evidencia estadística suficiente para asentir que los alumnos no están respondiendo al azar y tienen dominio del tema en relación con este modelo.

- Con relación al modelo analítico: composición, es decir, para $N^{(2)}$, el resultado obtenido para estos datos:

  - t.test(N2, alternative="greater", mu=2) #two.sided

  One Sample t-test

  data: N2

  t = 8.3267, df = 39, **p-value = 1.744e-10**

  Resulta que el p - valor es suficientemente pequeño, luego se rechaza la hipótesis nula y se afirma que los alumnos están respondiendo este modelo con conocimiento sobre el tema.

- En cuanto al modelo analítico: función a trozos, es decir, para $N^{(1)}$, el resultado obtenido es el siguiente:

  - t.test(N1, alternative="greater", mu=2)

  One Sample t-test

  data: N1

  t = 14.207, df = 39, **p-value < 2.2e-16**

  Se observa que el p – valor es muy pequeño, con lo cual se manifiesta que los alumnos poseen dominio sobre el tema en este enfoque.

Resulta interesante examinar a partir del test de Friedman si existen diferencias en las respuestas de los alumnos en relación con los cuatro modelos que se consideraron para esta prueba, a fin de observar si en algunas de las categorías les estar yendo inclusive mejor. Esto es, se desea determinar entre:

H_0 : no hay diferencias entre las diferentes categorías

vs

H_1 : hay diferencias entre las categorías

> friedman.test(N)
Friedman rank sum test
data: N
Friedman chi-squared = 21.02, df = 3, **p-value = 0.0001043**

Se observa que el p – valor es notablemente menor para los niveles de significación usuales con lo cual hay evidencia estadística suficiente para rechazar H_0. Se concluye que los alumnos no manejan los diferentes usos que presenta el VA de la misma manera. Es importante investigar cuáles son los modelos que más dominan y cuáles no. Se realiza un test de comparaciones múltiples a posteriori del test de Friedman, este test es propuesto en Conover e Iman (1979).

> frdAllPairsConoverTest(N)

	N1	N2	N3
N2	**0.249**	-	-
N3	4.9e-05	0.045	-
N4	0.019	**0.719**	**0.406**

Existen diferencias entre $N^{(3)}$ con $N^{(1)}$, $N^{(3)}$ con $N^{(2)}$ y $N^{(1)}$ con $N^{(4)}$ dado que se advierte que sus p – valores son menores al nivel de significación considerable $(\alpha = 0{,}05)$; mientras que entre $N^{(1)}$ con $N^{(2)}$, $N^{(4)}$ con $N^{(2)}$ y $N^{(4)}$ con $N^{(3)}$ no se detectan diferencias entre las distribuciones de las variables. Este test confirma lo observado en los histogramas realizados para cada modelo.

A modo de cierre, mediante el análisis estadístico descripto se infiere que los alumnos han alcanzado una mayor apropiación de los cuatro modelos y significados asociados a la noción del VA expuestos en este trabajo, y han logrado una mejor utilización de diferentes registros de representación (verbal, simbólico, tabular, algebraico y gráfico) como así también la vinculación entre ellos.

Ahora bien, resulta de interés comparar los resultados de la prueba diagnóstica final con la inicial con el fin de estudiar la eficiencia de la propuesta didáctica implementada.

6.2.3 Análisis comparativo de las pruebas diagnósticas inicial y final.

Con el fin de examinar la propuesta didáctica llevada a cabo se realiza un análisis estadístico contrastando ambas pruebas diagnósticas: inicial y final.

En principio, mediante el programa R, se distingue a aquellos alumnos que han participado de forma activa en el transcurso este trabajo de investigación, siendo éstos 40 alumnos.

Luego, para cada alumno se calcula la cantidad de respuestas correctas en cada una de las pruebas diagnósticas, obteniendo así una nota que varía de 0 a 16 para cada una de dichas pruebas. Interesa estudiar luego la diferencia entre las notas obtenidas por cada alumno, resultado de prueba diagnóstica final – resultado de prueba diagnóstica inicial, esperando que en su mayoría resulte positiva. Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

-3 0 8 0 3 -2 4 2 8 3 5 -2 1 3 6 5 6 5 3 3 2 5 6 6 3 3 2 5

1 6 3 5 6 4 3 2 2 4 2

En la Figura 41 se observa la distribución de las diferencias de las notas de prueba diagnóstica inicial y final de los alumnos.

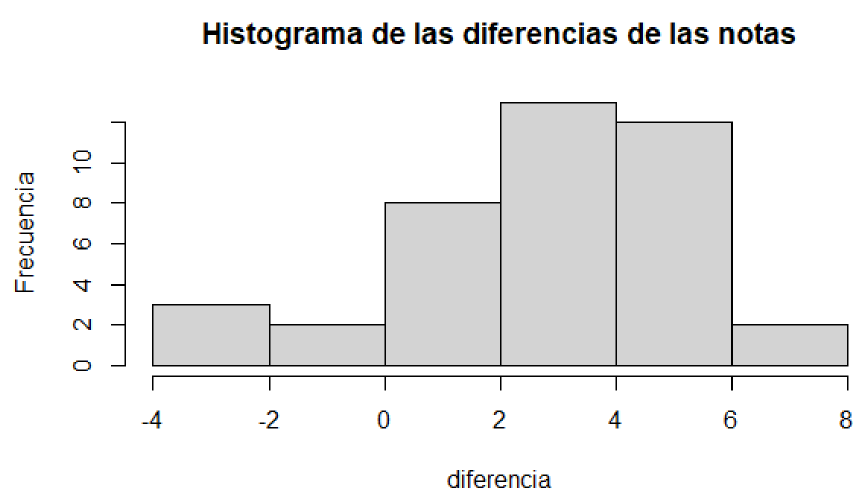


Figura 41: Histograma de las diferencias de las notas de los alumnos entre el resultado de la prueba diagnóstica final e inicial.

Se advierte que la distribución de las diferencias resulta ser simétrica aproximadamente alrededor de 3. A su vez, se destaca que en su mayoría las diferencias son mayores a 0.

Al examinar algunas medidas resúmenes de la variable “diferencia” se obtiene:

```
> summary(diferencia)
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max. 
   -3.0     2.0     3.0     3.3     5.0     8.0 
```

Resulta que el valor mínimo es -3 y que el primer cuartil es 2, lo cual indica que al menos a un 75% de los alumnos les fue mejor en la prueba diagnóstica final. La mediana que simboliza el 50% inferior a la muestra es 3 y el promedio es $3{,}3$; a su vez, se tiene que un 25% de la muestra de alumnos alcanzaron una diferencia superior a 5 puntos. En definitiva, el análisis mencionado indicaría que a los alumnos les fue sustancialmente mejor en la prueba diagnóstica final que en la inicial.
Importa estudiar mediante un test de nivel aproximado si los alumnos han logrado un mejor rendimiento en la prueba diagnóstica final luego de la implementación de la propuesta didáctica. Para ello, se quiere decidir entre las siguientes hipótesis:

$$H_0: \quad \mu \leq 0 \quad vs \quad H_1: \quad \mu > 0$$

Aquí, la hipótesis nula (H_0) significa que la nota esperada de la prueba diagnóstica final menos la inicial, esto es, la nota esperada de la variable “diferencia” sea menor o igual a 0, mientras que la hipótesis alternativa (H_1) significa que la nota de la diferencia esperada sea mayor a 0. En el caso de rechazar la H_0, esto significaría tener evidencia estadística suficiente a favor de que los alumnos alcanzan un mejor rendimiento en la prueba diagnóstica final. Se realiza el test resultando:

```
> t.test(diferencia, alternative="greater", mu=0)

        One Sample t-test

data:  diferencia
t = 8.3034, df = 39, p-value = 1.872e-10
```

Como el p-valor es muy pequeño, hay evidencia estadística suficiente para rechazar la hipótesis nula; luego se puede concluir que los alumnos alcanzaron un mejor rendimiento en la prueba diagnóstica final.

Incumbe, entonces, analizar las diferencias entre ambas pruebas diagnósticas final – inicial de acuerdo con los cuatro modelos trabajados. Para ello, se crean las siguientes variables, las cuales pueden tomar valores entre -4 y 4:

difN1, diferencia entre ambas pruebas diagnósticas final – inicial en el *modelo analítico: función a trozos.*

difN2, diferencia entre ambas pruebas diagnósticas final – inicial en el *modelo analítico: composición.*

difN3, diferencia entre ambas pruebas diagnósticas final – inicial en el *modelo topológico.*

difN4, diferencia entre ambas pruebas diagnósticas final – inicial en el *modelo aritmético.*

En la Figura 42 se analizan las diferencias entre ambas pruebas diagnósticas final – inicial para cada uno de los modelos estudiados.

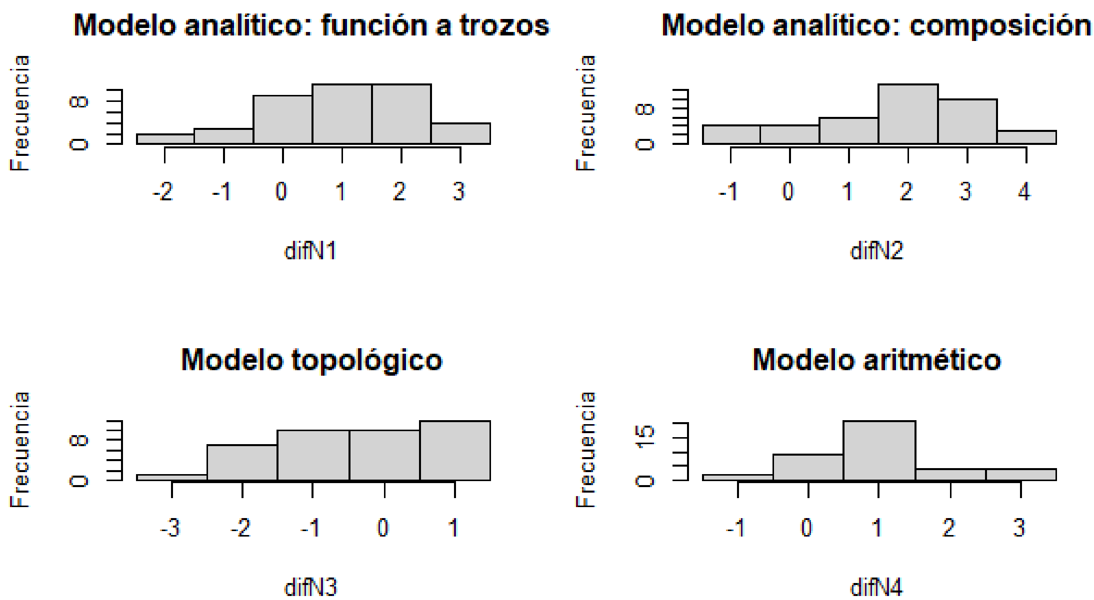


Figura 42. Histogramas de las diferencias obtenidas entre ambas pruebas final – inicial en cada uno de los modelos trabajados.

Se advierte que:

- difN1 pareciera tener una distribución simétrica alrededor del 1.
- difN2 presenta una leve simetría alrededor del 2.
- difN3 manifiesta una asimetría a izquierda.
- difN4 presenta una leve asimetría a derecha.

En la Figura 43, se analizan algunas medidas descriptivas:

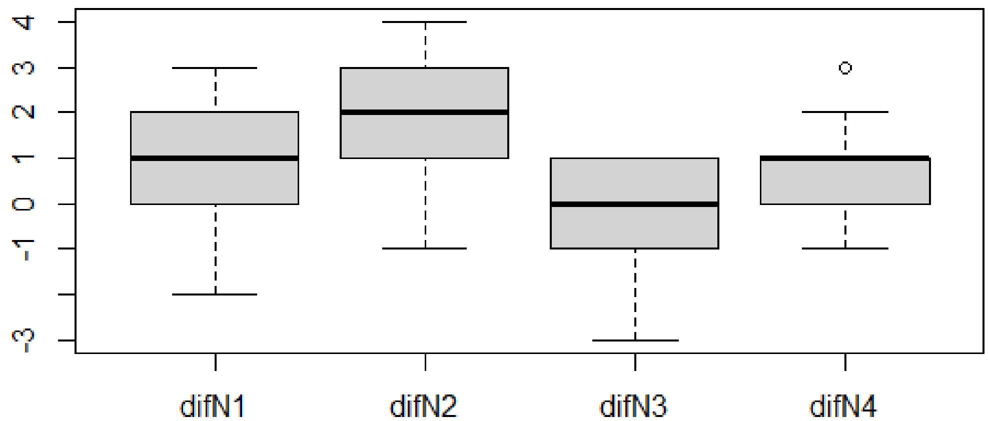


Figura 43. Boxplot de las diferencias obtenidas entre ambas pruebas final – inicial en cada uno de los modelos trabajados.

Dado que los límites de las cajas en los boxplots representan el primer y el tercer cuartil, que la raya negra más gruesa del interior de la caja es la mediana y que las vallas terminan en observaciones de la muestra y los puntos aislados representan observaciones atípicas, se puede analizar lo siguiente: que difN1, difN2 y difN4 se encuentran en su mayoría por encima de 0, lo cual indica que las diferencias resultaron positivas manifestando ello que les fue mejor en la prueba diagnóstica final. En cuanto a difN3, se observa que el 50% de las diferencias resultaron negativas, lo cual revela algunas dificultades en este modelo.

A continuación, realizamos los tests de hipótesis de nivel aproximado para

$$H_0\colon \mu_D^{(j)} = 0 \quad vs \quad H_1\colon \mu_D^{(j)} > 0$$

donde $\mu_D^{(j)} = E\left(N_f^{(j)} - N_i^{(j)}\right)$ con $N_f^{(j)}$ la nota de la prueba diagnóstica final en el modelo (j) y $N_i^{(j)}$ la nota en la prueba diagnóstica inicial en el modelo (j), con $1 \leq j \leq 4$.

Diferencia de nota de cada modelo estudiado	Resultado del p - valor
difN1 (dif. analítico: función a trozos)	p-value = 2.047e-05
difN2 (dif. analítico: composición)	p-value = 7.479e-10
difN3 (dif. topológico)	p-value = 0.9752
difN4 (dif. aritmético)	p-value = 8.93e-08

Tabla 21. Resultado del p – valor de acuerdo con la diferencia de nota correspondiente a cada modelo trabajado.

En la Tabla 21 se pueden observar los p-valores obtenidos para cada uno de los cuatro tests. Como era de esperar, para todos los tests excepto para el correspondiente al modelo topológico, los p-valores resultados significativamente pequeños por lo que se rechaza la hipótesis nula pudiendo concluirse que a los alumnos les fue mejor en la prueba diagnóstica final que en la prueba diagnóstica inicial. Por otro lado, y tal como se esperaba, el p-valor para el modelo topológico resultó grande y por lo tanto no podemos decir que les fue mejor en la prueba diagnóstica inicial. Sin embargo, hay que tener presente que en la primera prueba diagnóstica, en el modelo topológico les había iba extremadamente bien por lo que el hecho de que no les haya ido mejor no significa en absoluto que los alumnos no estén manejando el tema correctamente.

CAPÍTULO VII

Conclusiones y recomendaciones

7.1 Conclusiones

Como he mencionado, muchos investigadores han analizado la problemática que presenta la comprensión del VA para los alumnos, sin embargo, este trabajo se diferencia de aquellos dado que aborda esta situación con el diseño de una propuesta didáctica fundamentada en la teoría de las representaciones semióticas y en la esquematización propuesta por Wilhelmi et al. (2007), la cual es sometida a una evaluación mediante un estudio cuali y cuantitativo en un grupo de alumnos ingresantes de las carreras de Ingeniería Industrial y en Alimentos de la UNLu.

A continuación, se presentan algunos aspectos que considero importantes en esta exploración como: un compendio del marco teórico abordado, fases de la metodología utilizada resaltando los principales resultados de la parte experimental y nuevas sugerencias de investigación.

Los aspectos utilizados en el marco teórico, registro de representaciones semióticas sustentado por Duval (2004) y esquematización realizada por Wilhelmi et al. (2007), fueron fundamentales para los efectos de esta investigación, dado que permitieron movilizar la noción del VA en sus diversos significados apoyados cada uno de ellos en la utilización de diferentes registros de representación. Esto es, partiendo de un contexto métrico (modelo topológico) apoyado en el registro verbal y gráfico, se pudo deducir la definición aritmética del VA (modelo aritmético), trabajando éste desde los registros verbal, simbólico, y algebraico. Luego, asociando esta definición a un contexto analítico o funcional se desprenden los modelos analítico: composición o analítico: función a trozos con el respaldo de los registros algebraico, tabular y gráfico. Esta coordinación entre registros y modelos permitió que el sujeto alcance un conocimiento más integral de la noción del VA desarrollando la capacidad para enfrentarse a situaciones nuevas en el que este objeto matemático esté involucrado.

Dado que la investigación fue desarrollada en tres etapas se detallan los resultados observados en cada una de ellas.

En la primera, que responde al primer objetivo específico planteado, se logró identificar mediante el estudio estadístico descriptivo e inferencial aquellos modelos asociados a la noción del VA que los alumnos participantes dominaban al ingresar a la UNLu y, en consecuencia, reconocer los registros de representación que manipulaban. Se observó que los alumnos presentan dificultades en relación con los diferentes usos que presenta el VA dado que no manejaron los cuatro modelos estudiados de la misma manera, y de ahí que tampoco asociaron los diferentes registros de representación, lo cual confirma las dos primeras hipótesis. En definitiva, en esta fase se examinó que los alumnos participantes manejaban en su totalidad el modelo topológico y en consecuencia el registro verbal y gráfico, pero no así el resto de los modelos.

A partir de este diagnóstico se puso en marcha la segunda etapa cumpliendo con el segundo objetivo específico, es decir con el diseño de una propuesta didáctica para fortalecer los modelos aritmético, analítico: composición y analítico: función a trozos y manipular los registros de representación que están en juego en los mismos (simbólico, algebraico, tabular y gráfico). Se estableció para ello una secuencia de clases didácticas con actividades en función de la utilidad de los registros de representación en cada uno de los modelos trabajados resaltando no solo la coordinación entre dos o más registros, respondiendo así a la tercera hipótesis, sino a su vez destacando la vinculación existente entre los modelos estudiados. Específicamente, en las actividades presentadas en la Sección 5.5 se vinculó dentro de una misma actividad no solo los registros verbal, simbólico, algebraico y gráfico, sino que también se trabajó la relación entre los cuatro modelos estudiados. Esta coordinación permitió que los alumnos alcancen una visión más integral en relación al concepto del VA favoreciendo el funcionamiento del pensamiento reflejándose en los tratamientos y conversiones entre los diferentes registros y modelos mencionados que realizaron los alumnos participantes. Considero que la enseñanza debe favorecer la diversificación de los registros de representación a fin de constituir redes de conexión entre objetos para que el alumno pueda acceder al concepto del VA independizándolo de su representación. La secuencia de actividades planificadas posibilitó que los alumnos participantes de esta investigación puedan comprender los diferentes usos y significados que presenta el VA de forma gradual ya que se presentaron los distintos modelos en diferentes momentos. Se distingue la utilización del software GeoGebra para abordar precisamente el estudio del modelo analítico: función a trozos.

En la tercera etapa, obedeciendo al tercer objetivo planteado, se analizó de forma cualitativa y cuantitativa los resultados de la propuesta didáctica llevada a cabo. El análisis cualitativo, mediante la realización de un trabajo práctico compuesto por dos ejercicios, revela que al menos el 80% de los alumnos que participaron de esta investigación alcanzaron dominio en los modelos topológico, aritmético y analítico: composición, y por ende en los registros verbal, simbólico y algebraico. Quedando en evidencia el conflicto con el modelo analítico: función a trozos, ya que sólo un 30 % de los alumnos logró resolver esta situación.

El análisis cuantitativo, mediante la realización de una prueba diagnóstica final, infiere que los alumnos han alcanzado la apropiación de los usos y significados asociados a la noción del VA expuestos en este trabajo, y han logrado la utilización de diferentes registros de representación (verbal, simbólico, tabular, algebraico y gráfico) como así también la vinculación entre ellos. Se señala que la prueba diagnóstica final fue posterior a la realización del trabajo práctico, lo cual luego de la devolución que los alumnos recibieron de este, probablemente pudieron revertir sus dificultades. Finalmente, en este análisis cuantitativo se analizó la comparación entre ambas pruebas diagnósticas inicial y final en donde se observó que a los alumnos en general les fue mejor en la prueba diagnóstica final que en la inicial en relación con los modelos aritmético, analítico: composición y analítico: función a trozos. Sin bien, el modelo topológico no manifiesta esta notable diferencia en la segunda prueba, podemos decir que el hecho de que no les haya ido mejor no significa en absoluto que los alumnos no estén manejando el tema correctamente, ya que les había ido muy bien en la primera prueba diagnóstica.

7.2 Recomendaciones

Como complemento del trabajo realizado, se espera en un futuro llevar a cabo entrevistas individuales con los alumnos con el fin de observar de forma más detallada la percepción que éstos tienen sobre el objeto matemático VA. Dichas entrevistas no pudieron realizarse en el marco de esta investigación dados los ajustados tiempos con los que cuenta la asignatura “Elementos de Matemática”.

En base a los resultados obtenidos, se recomienda en el proceso de enseñanza - aprendizaje del VA, tanto a nivel secundario como universitario inicial, diseñar tareas que involucren los diferentes usos y significados asociados al VA, a fin de brindarle al alumno herramientas que le serán de gran utilidad en asignaturas posteriores, como lo son “Análisis Matemático I” y “Álgebra” para la asignatura “Elementos de Matemática”.

BIBLIOGRAFÍA

Arcidiacono, M. J. (1983). A visual approach to absolute value.TheMathematics Teacher, **76**, 197−201.

Beiro, A., Colombo, M., D´Albano, C., Sardella, O., Zapico, I. y Arroyo, D. (2001). “Matemática 1”. *Editorial Puerto de Palos*.

Blythe, P., Fensom, J., Forrest, J., Waldman de Tokman. P,. (2015) “Estudios Matemáticos. Nivel Medio. Programa del Diploma IB”. *Editorial Oxford UniversityPress.*

Cerizola, N., Pérez, N., & Martínez, R. (2000). “Una noción matemática básica y aparentemente simple: el valor absoluto de un número real”. Actas de la XIII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. *Editorial CLAME.*

Conover, W.J. e Iman, R. L. (1979). “On multiple-comparisons procedures”. Tecchnical Report LA-7677-MS, Los Alamos Scientific Laboratory.

Doria Rodríguez, S. y Ugarte Guerra, F. (2020). Obstáculos epistemológicos y didácticos del valor absoluto. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, v33, n1.

Duval, R. (1993). “Registres de representation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensé”. *Annales de Didactiques et de Sciencescognitives*, **5**, 37-65.

Duval, R. (2004). “Semiosis y Pensamiento Humano”. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales”. Universidad del Valle, Colombia.

Engler, A. Vrancken, S. Müller, D. y Hecklein, M. (2015). “Reconocimiento y uso del valor absoluto como distancia. Revalorización del error en el manejo de diferentes representaciones”. *Revista Premisa*, **66**, 4-19.

Gagatsis, A. y Panaoruma, A. (2014). A multidimensional approach to explore the understanding of the notion of absolute value. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, v45, n2, 159-173.

García Palacios, C. (2014). “Criterios de idoneidad didáctica como guía para la enseñanza y el aprendizaje del valor absoluto en el primer ciclo del nivel universitario.” Tesis de Maestría de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Disponible en http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/5496

Horak, V.M. (1994). “Investigating absolute-value equations with the graphing calculator”.*The Mathematics Teacher*, **87**, 9−11.

Kaczor, P., Schaposchnik, R., Franco, E., Cicala, R. y Díaz, B. (1999). “Matemática I”. *Editorial Santillana*.

Poggio M. I., Bontti G., Aloisio M. A. y Piedrabuena A. (2014). “Los obstáculos de una definición sencilla: el valor absoluto”. *Actas del XVII Encuentro Nacional y X Internacional, Jornadas de Educación Matemática en carreras de Ingeniería, EMCI.*

Prieto, F y Vicente, S. (2006). “Análisis de registros semióticos en actividades de ingresantes a la facultad de ingeniería”. En I REPEM (Reunión Pampeana de Educación Matemática) – Memorias. Trabajo 203 - C252-17.

Stewart J., Redlin L., Watson S. (2007). Precálculo Matemáticas para el cálculo (5ta edición). En México D.F: Cengage Learning.

Wilhelmi, M., Godino, J. y Lacasta, E. (2007). “Didactic effectiveness of equivalent definitions of a mathematical notion: the case of the absolute value”. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, **2**, 72-90.

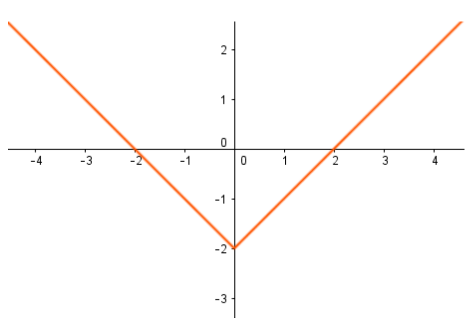
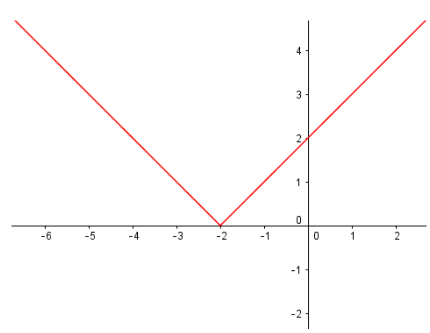
Anexo 1: Prueba diagnóstica inicial

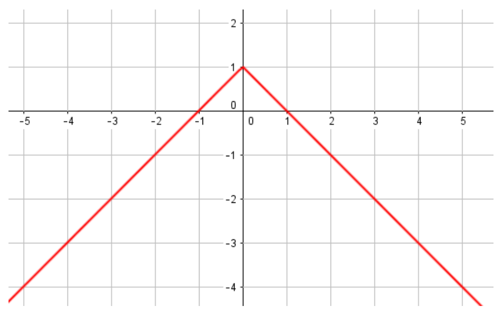
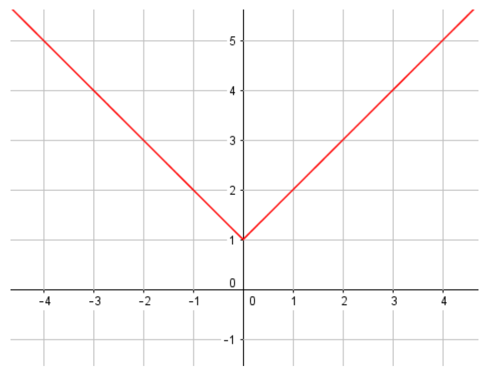
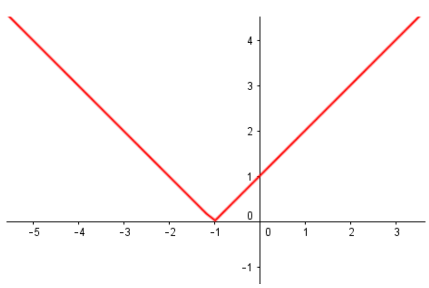
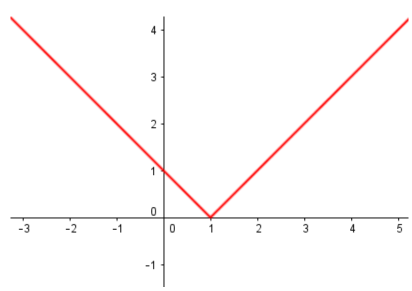
Responde las siguientes preguntas con total honestidad:

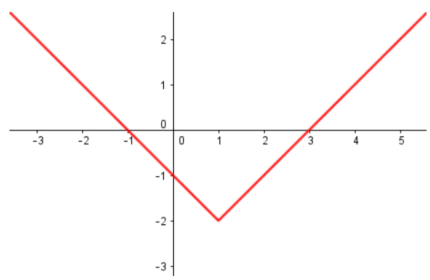
A.- ¿Has visto el concepto de valor absoluto o módulo de un número real en tu escuela secundaria? **(Circule lo que corresponda)**

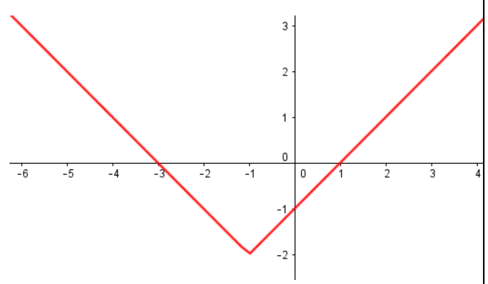
Si - No

B.-Dadas las siguientes afirmaciones, circule lo que considere correcto.

1.- La distancia entre los números x e y es igual a $\|y - x\|$	**V**	**F**
2.- La ecuación $\|x - 3\| = 2$ tiene como única solución a $x = 5$	**V**	**F**
3.- $\|-10\| = \|10\|$	**V**	**F**
4.- Para todo número real x, se tiene que:$\sqrt{x^2} = \|x\|$	**V**	**F**
5.- La gráfica de la función f , definida por $f(x) = \|x\| - 2$ es: a)  b) 	**a)**	**b)**
6.- Para todo número real$x$, se tiene que: $\|x\| > 0$	**V**	**F**

7.- Para todo número real a , se cumple que: $\sqrt{(1-a)^2} = 1 - a$	**V**	**F**
8.- Si x es un número negativo, entonces la distancia de x al cero es igual al opuesto de x.	**V**	**F**
9.- La gráfica de la función f, definida por: $f(x) = -\|x\| + 1$ es: a)  b) 	**a)**	**b)**
10.- $\|2\| - \|-3\| = 5$	**V**	**F**
11.- La ecuación $\sqrt{(x+1)^2} = 4$ tiene como única solución a $x = 3$	**V**	**F**
12.- La expresión $\|3 - 10\|$ es lo mismo que la distancia entre -10 y 3.	**V**	**F**
13.- La gráfica de la función f, definida por $f(x) = \|x - 1\|$ es: a)  b) 	**a)**	**b)**

<table>
<tr><td>14.- Si $|x| < 3$, entonces la distancia entre x y el cero es menor que 3.</td><td>V</td><td>F</td></tr>
<tr><td>15.- La ecuación $\sqrt{x^2} + 4 = 8$ tiene como única solución $x = 4$</td><td>V</td><td>F</td></tr>
<tr><td>16.- La gráfica de la función f, definida por $f(x) = |x - 1| - 2$ es:
<table>
<tr><td>a)


</td><td>b)


</td></tr>
</table>
</td><td>a)</td><td>b)</td></tr>
</table>

Anexo 2: Programa de contenidos de “Elementos de Matemática”

CONTENIDOS MÍNIMOS O DESCRIPTORES

Nociones de Lógica. Números Enteros. Números Racionales. Números Reales. Cálculo con números aproximados. Polinomios y ecuaciones algebraicas. Potencias y logaritmos. Gráfica de funciones.

CONTENIDOS

Conjuntos Numéricos

Números Naturales, Enteros, Racionales, Reales: características básicas y diferenciales de cada uno. Operaciones básicas. Densidad de los números racionales. Divisibilidad en los números enteros. Relación de Orden. Porcentaje. Distancia entre números reales. Módulo de un número real. Intervalos en la recta real. Potencias y logaritmos de un número real.

Nociones de lógica

Proposiciones. Operaciones aplicables a proposiciones: negación, conjunción, implicación. Implicación directa, recíproca, contraria y contrarecíproca. Teoremas simples. Demostraciones sencillas (directas, por el absurdo). Cuantificadores y negación de proposiciones cuantificadas.

Funciones de una variable real

Concepto de función. Elementos constitutivos de su definición. Análisis de una función desde un gráfico: extremos (máximos, mínimos), intervalos de positividad y negatividad, intervalos de crecimiento y decrecimiento, tendencias en más y menos infinito). Raíces de una función. Características generales de las funciones elementales: lineales, cuadráticas, polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas. Función inversa.

Ecuaciones con una incógnita real

Concepto de ecuación. Resolución de ecuaciones que involucren funciones elementales. Conjunto solución. Aplicaciones a la resolución de inecuaciones. Representación gráfica del conjunto solución.

TRABAJOS PRÁCTICOS

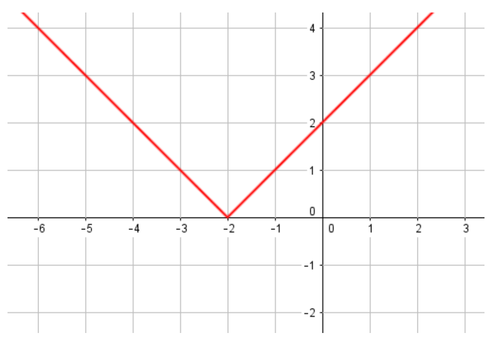
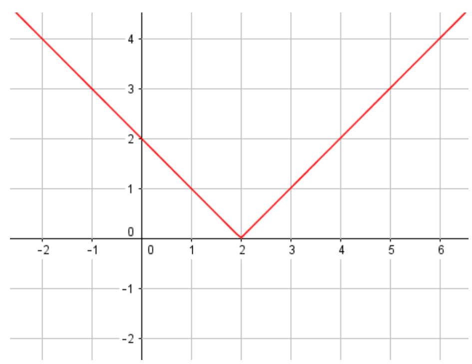
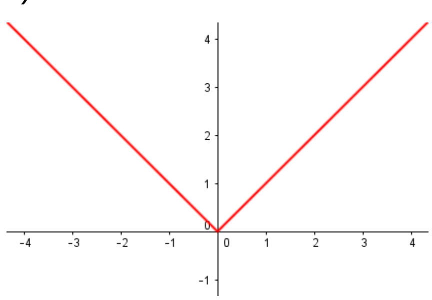
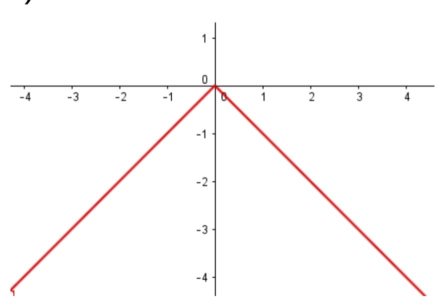
A continuación, se detallan los contenidos abordados en cada TP.

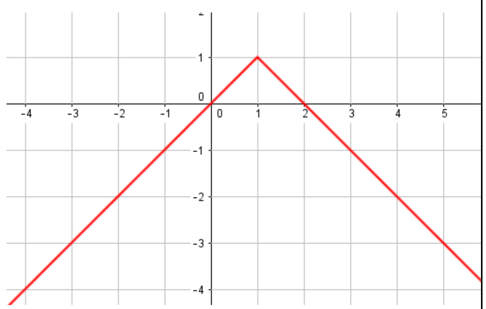
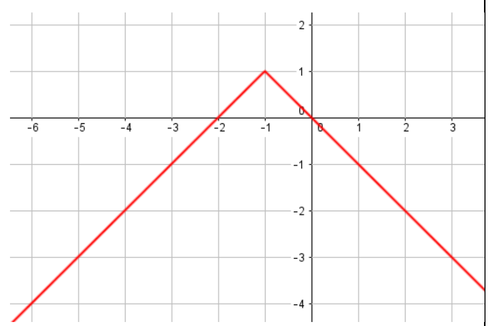
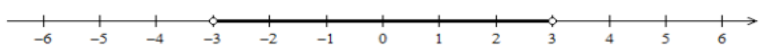
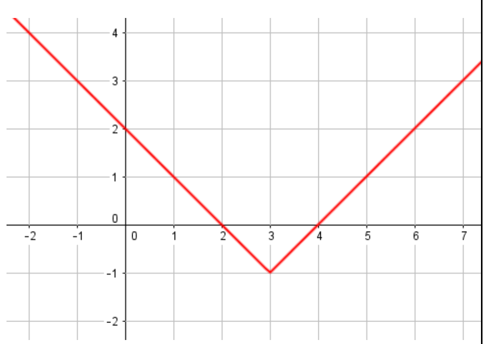
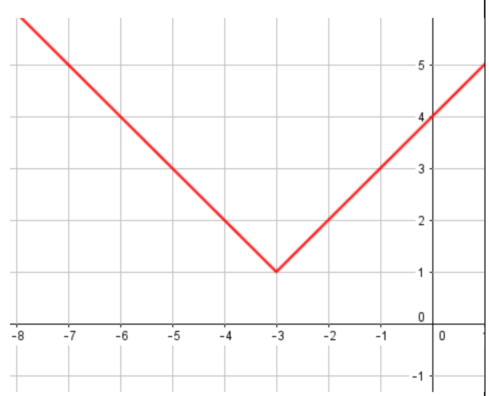
- Trabajo práctico N°1: Proposición. Negación. Cuantificadores. Implicación. Doble implicación. Condición necesaria y suficiente. Contraria, recíproca y contrarrecíproca. Axiomas, teoremas y demostraciones. Demostraciones por el absurdo.
- Trabajo práctico N°2: Números naturales, enteros, racionales y reales. Propiedades algebraicas y de orden de los números reales.
- Trabajo práctico N°3: Recta real. Distancias. Intervalos reales. Valor absoluto. Módulo: definición, propiedades. Ecuaciones e inecuaciones con módulo. Raíces y potencias. Logaritmos de los números reales.
- Trabajo práctico N°4: Principio de inducción completa. El símbolo de sumatoria. Factorial.
- Trabajo práctico N°5: Concepto de función. Dominio e imagen. Raíces. Concepto de función biyectiva y de función inversa.
- Trabajo práctico N°6: Rectas en el plano. Recta: gráfica y características.
- Trabajo práctico N°7: Función cuadrática: su gráfica, características y aplicaciones.
- Trabajo práctico N°8: Función potencia, exponencial y logarítmica: sus gráficas, características y aplicaciones.
- Trabajo práctico N°9: Polinomios den una variable. División entera y exacta. Factorización y raíces. Funciones polinómicas y racionales.

- Trabajo práctico N°10: Ecuaciones sobre R. Ecuaciones racionales e irracionales. Inecuaciones algebraicas, racionales e irracionales. Ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto. Ecuaciones e inecuaciones exponenciales y logarítmicas.

Anexo 3: Prueba diagnóstica final

Para cada una de las siguientes afirmaciones circule el valor de verdad que considere correcto.

1.- $\lvert 1-\sqrt{5}\rvert = 1-\sqrt{5}$	**V**	**F**
2.- La expresión $\lvert x-2\rvert > 0$ es lo mismo que la distancia entre x y 2 es mayor que cero.	**V**	**F**
3.- Para todo número real, se tiene que: $\sqrt{x^2} = x$	**V**	**F**
4.- La inecuación $\lvert x\rvert \geq -4$ no tiene soluciones reales.	**V**	**F**
5.- La gráfica de la función f, definida por $f(x) = \lvert x+2\rvert$ es: a)  b) 	**a)**	**b)**
6.- Si $-x > 0$ entonces la distancia entre $-x$ y cero es igual a x.	**V**	**F**
7.- La ecuación $\sqrt{x^2}+3=5$ tiene como única solución a $x = \sqrt{2}$	**V**	**F**
8.- La gráfica de la función f, definida por: $f(x) = -\lvert x\rvert$ es: a)  b) 	**a)**	**b)**

9.- $2 - \left\| -\frac{3}{2} - (-1) \right\| = \frac{5}{2}$	**V**	**F**
10.- La gráfica de la función f, definida por $f(x) = -\|x-1\| + 1$ es: a)  b) 	**a)**	**b)**
11.- Para todo número real, se tiene que: $\sqrt{(x+1)^2} = \|x+1\|$	**V**	**F**
12.- La distancia entre x y cero es mayor a tres tiene la siguiente representación gráfica: 	**V**	**F**
13.- La gráfica de la función f, definida por $f(x) = \|x-3\| - 1$ es: a)  b) 	**a)**	**b)**
14.- La ecuación $\sqrt{(x-3)^2} = 5$; tiene como única solución $x = 8$	**V**	**F**
15.- La expresión $\|x+3\| = 3$ es lo mismo que la distancia entre x y -3 es igual a 3.	**V**	**F**
16.- La ecuación $\|x\| = 5$ tiene como soluciones a $x = -5$ ó $x = 5$	**V**	**F**