Tesis de Doctorado

Doctorado en Enseñanza

de las Ciencias Exactas y Naturales

Orientación Matemática

Pautas de razonamientos utilizadas por estudiantes universitarios de ingeniería en demostraciones matemáticas

Mg. Prof. Rodolfo Eliseo D´Andrea

Autor

Dr. Agustín Adúriz – Bravo

Director de tesis

Dr. Ricardo Chrobak

Codirector de tesis

Facultad de Ingeniería

Universidad Nacional del Comahue

2019

Resumen

La actividad docente ha llevado a observar cada año las dificultades que presentan los estudiantes universitarios de ingeniería al utilizar los razonamientos que les permiten el desarrollo de demostraciones en Álgebra y Cálculo. Esta investigación se propone identificar y encontrar pautas de razonamientos utilizados por estudiantes universitarios de ingeniería en clases de Álgebra y Cálculo, al realizar demostraciones. Además, es propósito de este trabajo determinar los factores y fenómenos didácticos que propician el desarrollo del razonamiento de forma que este permita argumentar, explicar y justificar en procesos de prueba. Asimismo, se pretende analizar si existe relación entre el razonamiento desarrollado por el estudiante y el paradigma de enseñanza utilizado por el docente. Para el logro de estos objetivos se utilizará la metodología propia de una investigación mixta. El trabajo de campo se llevará a cabo con cinco cohortes consecutivas de estudiantes ingresantes a una facultad de ingeniería. En cada cohorte, se realizará un recorte de la totalidad que generará dos grupos de estudio: un grupo de control y un grupo experimental. El grupo considerado de control desarrolla sus clases bajo un paradigma normativo de enseñanza, es decir, que el proceso de enseñanza es conducido por un docente que se centra en el contenido. En cambio, el grupo experimental se distingue del anterior por ser guiado por un docente cuyo paradigma de enseñanza es aproximativo, es decir, centrado en la construcción del saber por el estudiante.

Palabras clave:

Pautas de razonamiento, estudiantes de ingeniería, demostración matemática

Abstract

The teaching activity has led to observe every year the difficulties that university engineering students present when using the reasoning that allows them to develop demonstrations in Algebra and Calculus. This research aims to identify and find patterns of reasoning used by university engineering students in Algebra and Calculus classes, when conducting demonstrations. In addition, it is the purpose of this work to determine the didactic factors and phenomena that propitiate the development of reasoning so that it can be argued, explained and justified in proof processes. Likewise, it is intended to analyze whether there is a relationship between the reasoning developed by the student and the teaching paradigm used by the teacher. To achieve these objectives, the methodology of a mixed research will be used. The field work will be carried out with five consecutive cohorts of students entering an engineering faculty. In each cohort, a cut will be made of the totality that will generate two study groups: a control group and an experimental group. The considered control group develops its classes under a normative teaching paradigm, that is, the teaching process is driven by a teacher who focuses on content. On the other hand, the experimental group is distinguished from the previous one by being guided by a teacher whose teaching paradigm is approximate, that is, centered on the construction of knowledge by the student.

Keywords: Reasoning guidelines, engineering students, mathematical demonstration

PALABRAS PREVIAS

Creo firmemente que uno de los grandes desafíos de mi vida, simbólicamente, comenzó con la prueba matemática. Es decir, mi vida comenzó a vivir grandes aventuras primero desde lo intelectual, y luego desde la vida cotidiana y física, en sentido inverso del común denominador del ser humano.

Desde muy pequeño, tuve una profunda inquietud por las cuestiones esotéricas. Investigaba a escondidas y mi gran sueño era ser profesor; escritor y por sobre todas las cosas: mago, pero no un simple prestidigitador (que no es poco). Yo quería ser como Merlín…

No es casualidad que me apasione tanto el llegar a establecer la verdad de una proposición en Matemática. Sin duda alguna, es la parte que más me apasiona de la disciplina: su lado epistemológico. Vinculado esto con el comentario del párrafo anterior, debe tenerse en cuenta que el desarrollo de una prueba matemática, requiere en ciertas oportunidades, de artilugios propios de un mago, aunque sabemos que, en esta maravillosa disciplina, la magia no existe, todo tiene una razón de ser. La clave está en saber descubrirlo y desentrañar la maravillosa 'maraña' de argumentaciones y operaciones 'escondidas' que hay detrás de ciertos resultados y de los constructos que pueden generar esos resultados.

Hasta los seis años, recuerdo haber estado sumido en un maravilloso realismo mágico, pero en el verano previo a mi ingreso al segundo grado, me enteré con pesar de que mi maestra de actividades prácticas había 'muerto'. Fue entonces que apareció por primera vez el vocablo 'muerte' en mi existencia. Durante mucho tiempo, el desconocimiento y los prejuicios sobre esta palabra me asustaban ostensiblemente y me sobrecogía ese erróneo manto tenebroso que la humanidad le asignó a la misma. Pero a los diez años, esos fantasmas comenzaron a despejarse. De hecho, la llegada a la primera decena de mi vida fue clave, ya que muchos pensamientos y sentimientos que desarrollé en esa etapa de la vida aún siguen incólumes. Esto no significa que no haya madurado, lo que sí es significativo es que mantengo al niño interior muy vivo y ciertos aspectos desarrollados en esa etapa acerca del respeto al otro, sentimientos de piedad y comprensión, se mantienen invariantes y muy vívidos, aunque a veces, erróneamente la sociedad me quiere impulsar a quebrantarlos, me mantuve firme. La vida me regaló una maravillosa abuela postiza: María Esther Magriñá (Tatalla) que ya no se encuentra en este plano y la posibilidad de escuchar interesantes reflexiones de su íntima amiga, que tampoco se encuentra en este plano físico: María Josefa Cabrera (Santita), una anciana encantadora y de una dulzura y bonomía que no eran propias de este mundo. De 'Santita', nunca supe si profesaba alguna religión, pero a lo largo del tiempo, y a través de mis reflexiones, llegué a tener la firme hipótesis de que era teósofa. En diferentes oportunidades, me dijo tres frases que me acompañaron y siguen haciéndolo, en cada accionar de mi vida:

'La muerte no existe, es pasar de una habitación a otra…'

'Uno atrae los malos y los buenos pensamientos…'

'Uno debe ser el cochero (mente) que lleva los caballos (pensamientos), uno debe dominarlos…'

Quizás esta última frase, e incursionando en diferentes lecturas, buscando la verdad, a lo largo de los años, pude llegar a la firme hipótesis de que 'Santita' era teósofa. Esa intensa búsqueda de la verdad, que primero busqué, sin saberlo, a través de la prueba matemática y luego, a través de la vida, lo hice a través de mucha lectura sobre religiones comparadas y en un tiempo en que me revelé contra mi religión de origen. Finalmente, y luego de muchas búsquedas y andares, me di cuenta que, la verdad y la divinidad no estaban en un lugar, sino dentro de uno mismo. La prueba matemática pasó a ser una verdad terrenal en mi vida, que según rezaban los griegos, es la verdad más elevada que puede presentársele al hombre en este plano. La verdad divina, la había reencontrado dentro de mí, y digo reencontrado porque nunca se va, solo hay que saber buscarla dentro de uno mismo…

Tiempo después de su estreno, tuve la oportunidad de poder ver una película que me impactó profundamente e hizo una conexión perfecta y divina con aquellas palabras de 'Santita', siendo la película en cuestión: *Defending your life* (1991). El lema dominante de la película, por decirlo de algún modo, y de forma aproximada puede resumirse así: 'A la vida se viene a perder miedos…'

Esta frase me viene acompañando hasta la actualidad, convirtiendo mi vida en una vorágine de desafíos personales constantes y que si bien, desde mi encarnación en este plano, es como si hubiera tenido tres nacimientos diferentes en esta vida: El de mi nacimiento literal (cuando encarné en este planeta); la etapa en que me defino como docente al introducirme en mi profesión y cuando comencé a metabolizar, por diferentes razones, aquellas frases de ‘Santita’.

La película antes mencionada fue un disparador para lanzarme en una espiral interminable de experiencias cada vez más complejas y apasionantes y frente a cada una, volvía una y otra vez, aquella frase que acuñé en base al film antes citado. Una y otra vez, frente a nuevos desafíos, me decía también, una y otra vez: ‘No temas, a la vida se viene a perder miedos. Es preferible aprender a través de esta experiencia, y no por la vía de una enfermedad…’

A partir de esta frase y todo lo que contiene implícitamente, me formulé dos implicaciones que expongo a continuación y que resumen simbólicamente lo que yo creo como consecuencia de todas las experiencias vividas hasta el momento y aquellas por vivir…

‘Si la sumatoria de miedos perdidos en una vida es estrictamente mayor que cero entonces el alma ha experimentado evolución’.

Simbólicamente: $\sum \textit{miedos perdidos} > 0 \Rightarrow \textit{Evolución}$

No puedo probar esta implicación como si fuera un teorema, pero percibo que es lo real, y estoy convencido de su verdad como la de un postulado, ya que mi certeza se apoya estrictamente en lo sensorial y experiencial. Considerando a esta proposición entonces como verdadera, y desde una perspectiva lógico – formal resulta que, si una proposición es verdadera, lo es también su contrarrecíproca y la reproduzco a continuación:

Si el alma ha experimentado involución implica que la sumatoria de miedos perdidos es estrictamente menor o igual que cero. Es decir, o se ganaron miedos o simplemente se permaneció en un estado neutral: no se ganaron ni se perdieron…

Simbólicamente: $\textit{Involución} \Rightarrow \sum \textit{miedos perdidos} \leq 0$

Rodolfo Eliseo D´Andrea

XXI – X – MMIX

Dedicatorias personales

Me tendrán que disculpar algunas personas muy queridas de mi entorno afectivo pero esta tesis doctoral, a diferencia de cómo lo hice en la tesis de maestría, se la dedico estrictamente a tres personas muy especialmente, independientemente de dedicatorias estrictamente académicas.

Mis padres, guías terrenos y ultraterrenos, que me siguen alumbrando el camino desde otro plano y a quienes les agradezco infinitamente todo lo que me dieron y lo que hicieron por mí. De hecho, como diría Scott Fitzgerald en la primera página de su novela: "The Great Gatsby", el vecino de Gatsby comienza diciendo que su padre siempre le decía: "*Nunca juzgues a los demás sin haber tenido en cuenta tus ventajas…*". Esta frase me acompaña de forma visceral desde que leí esta novela, siendo muy muchachito, y vaya que he tenido ventajas, he sido muy afortunado, por tener una madre y un padre que me amaron hasta el paroxismo… Gracias Betty y Fito….

Y a mi inolvidable y adorada 'bichita canasta' que estaba obsesionada con que terminara esta tesis y que me ayudó en dos cuestiones fundamentales que se dieron durante el transcurso de la misma: una involuntaria y otra voluntaria y que tienen que ver con una metamorfosis personal. Esta 'bichita canasta', apelativo que mucho no le gustaba, pero a mí, me producía una infinita ternura decírselo, fue una profesora de Matemática impresionante pero mejor persona y con una cultura y un conocimiento de la vida que hasta podía operar de terapeuta personal con absoluta maestría para con los demás, pero no lo pudo lograr consigo misma y lamentablemente no pude hacer nada para ayudarla, salvo brindarle mi amistad y cariño incondicional.

Muchas gracias, querida e inolvidable Mónica Adriana Real, que, desde otro plano, me estás acompañando…

Dedicatorias académicas

Un enorme agradecimiento al Dr. Agustín Adúriz – Bravo, que aceptó dirigir esta tesis y que a través de sus encuentros periódicos en el grupo GHEyD de UBA me encuadró y clarificó los lineamientos del presente trabajo de investigación, además de su enorme paciencia y confianza, a pesar de mis demoras y discontinuidades. Asimismo, quiero agradecer a una de sus integrantes: Mg. Ana Couló, que me aportó comentarios que fueron de suma utilidad para este trabajo.

Un enorme agradecimiento al Dr. Ricardo Chrobak, fundador de la Maestría y Doctorado en enseñanza de las ciencias exactas y naturales de la Universidad Nacional del Comahue y también codirector de esta tesis. Su apoyo psicológico y emocional, independientemente del académico, fueron determinantes para que pudiera terminar esta tesis, ya que en cierto momento pensé que no podría arribar a la meta.

Otro enorme agradecimiento a la Dra. Patricia Sastre Vázquez que me invitó a participar como investigador en un proyecto de investigación en UNICEN sede Azul. El destino quiso que me quedara en planta permanente luego de concursar un cargo. Quiero destacar que Patricia me introdujo y me guió con afecto y generosidad en el mundo de la investigación en la universidad, poco tiempo después de obtener mi tesis de maestría.

Otro enorme agradecimiento a quiénes me dirigieron la tesis de maestría: Dr. Lisandro Curia y Dra. Andrea Lavalle, dos profesionales dedicados y conscientes de su trabajo. Allí comenzó todo, bajo su guía medulosa y paciente, guía que aún resuena en mi espíritu.

Otro agradecimiento a Mg. Lic. María Inés González, una profesora de matemática de lujo que tuve el privilegio de disfrutar. Su inesperada intervención en este trabajo fue a través de una cuestión muy puntual que me hizo ver por medio de una perspicaz pregunta que me realizó a los efectos de conocer la problemática de esta investigación.

Mi agradecimiento a los estudiantes que participaron específicamente en este trabajo, los estudiantes de Ingeniería Industrial e Ingeniería Ambiental de PUCA Campus Rosario, correspondientes a las cohortes de ingresantes 2013 a 2017 inclusive, pero no puedo dejar de destacar que en este trabajo está el aprendizaje docente obtenido de todos y cada uno de los estudiantes que me acompañaron a lo largo de mi carrera desde el comienzo, allá por los 80’ cuando era apenas un principiante hasta la actualidad…

PRÓLOGO
Mis encuentros con la prueba matemática

"Yo creo que la verdad es perfecta para las matemáticas, la química, la filosofía, pero no para la vida. En la vida, la ilusión, la imaginación, el deseo, la esperanza cuentan más".

Ernesto Sábato (1911 – 2011). Físico, escritor, ensayista, pintor.

Con la prueba matemática tuve diez grandes encuentros en mi vida. Cuando me refiero a encuentros, hago referencia a hitos decisivos en mi historia académica y previamente escolar, en los que cada uno contribuyó a fortalecerme y orientarme fuertemente en lo que abracé como área de investigación.

El primero fue en el ciclo de estudios primarios, en el último año. Mi maestra en el área de Matemática, totalmente conductista, desempeñaba su función docente, llenando los pizarrones con la primera comisión que le correspondía en las primeras horas de la mañana, de modo que la última, recibía esos pizarrones ya escritos. La clase consistía únicamente en que los inocentes párvulos, copien 'aquellos infinitos pizarrones'. Citando a Hay (1995) puedo recordar que esta popular y efectiva escritora de autoayuda proclama que "*todos somos víctimas de víctimas…",* pero yo no lo fui…

Rompí esos paradignas de enseñanza que recibí y que no me satisfacían cuando tuve la oportunidad. Recuerdo de esos 'infinitos pizarrones', recibir los primeros teoremas de la geometría euclidiana con su correspondiente demostración. 'El mejor estudiante de la clase' los estudió a ultranza, porque a los dos días, la maestra nos sometió a la clásica lección escrita. Yo ni había leído nada, como era costumbre, salvo lo que me obligaban. Convengamos que durante el ciclo primario leía mucho sobre lo que me interesaba, pero, contenidos extraescolares. El colegio me aburría y me sentía obligado. Como consecuencia de la vigilia constante de mi querida madre pude llegar hasta aquí porque si no hubiera puesto los límites correspondientes, no habría sido factible siquiera la finalización de ese ciclo que fue el embrión de todo.

Volviendo a la lección escrita acerca de algunos teoremas de la geometría euclídea que la maestra del último año del primario nos exigió, resultó que 'el mejor estudiante de la clase' y algunos otros más, 'escupieron' los teoremas, en la hoja de lección escrita, de forma textual. Por supuesto que para una educación tradicional, aquella actitud era exitosa. Hoy me gustaría hacer un viaje en el tiempo y preguntarles a mis compañeros, si realmente los entendieron o los repitieron, de forma ritual. Me quedo con esta última opción como una probable hipótesis. Ese fue entonces mi primer encuentro con la demostración matemática, que me fue totalmente indiferente. Es más, recuerdo que llevé en esa ocasión una nota pésima, y le dije a mi madre muy suelto, que no teníamos edad, ni estábamos preparado para entender eso. No sé de dónde pude obtener esta última información con exactitud, pero posiblemente puedo haberlo escuchado de algún compañero que su madre o padre lo manifestó, a modo de queja. Me tranquilicé y no le di importancia, supongo que, por mi increíble intuición, que me acompañó desde siempre…

El segundo encuentro fue en los dos primeros años de bachillerato. Aquí si fui yo quién los estudió a ultranza, pero de forma ritual. No entendía realmente lo que hacía, pero lo llevaba a cabo como una ceremonia, día a día. Era una obligación…

El encuentro número tres fue en el tercer año del bachillerato. Tuve a la profesora de matemática más dura del colegio (y se lo agradezco), pero la mejor de esa época. Eugenia Parrellada, ese era su nombre y aquí va mi humilde homenaje y recuerdo desde este plano hacia donde su alma se encuentre buscando la luz y la evolución. Ella nos daba ejercicios para demostrar, y la consigna, consistía en probar la verdad de una determinada proposición con ángulos, cuadriláteros y otros entes geométricos, propios de la Geometría de Euclides. Este encuentro fue crucial en mi vida y me marcó para siempre, pero ya la cuestión dejó de ser ritual. Las demostraciones formaban parte de la cotidianeidad y eran parte de la práctica, como así también argumentar y justificar. Veo con claridad que esas cuestiones formaron un espíritu crítico en mí, que fueron el germen de mi trabajo y mis ideas en mi rol como profesor e investigador de la universidad.

El cuarto encuentro fue en los dos últimos años del bachillerato. A pesar de ser la etapa de especialidad: bachiller físico – matemático, experimenté dos cursos de Matemática en los que las demostraciones estaban ausentes. La práctica y el entusiasmo por mí ganados en el tercer año, 'se perdieron'. Sin embargo, la ausencia de la prueba matemática fue suplida por otra disciplina asociada y se viene…

El quinto encuentro en el último año del bachillerato. El encuentro se produjo en el curso de Lógica e Introducción a la Filosofía. El segundo cuatrimestre fue dedicado a Lógica tradicional, me impactó y me gustó luego de haber tenido un importante rechazo inicial pero después de esa reticencia me detuve medulosamente y se produjo 'el flechazo'. En esta etapa pude empezar a 'saborear' las mieles de este nuevo conocimiento, y como diría Chopra (1992) parafraseando al Mago Merlín, "*el verdadero sabor está en la primer cucharada*". Ese sabor me acompañó siempre, todo lo demás fue disparado por esa primera cucharada…

El Sexto encuentro fue cuando estudiaba en el primer año de la Universidad. El primer curso de Matemática que tuve era un mix de Cálculo en una variable hasta las aplicaciones del Cálculo Diferencial y adicionalmente un curso modesto de Álgebra y Geometría Analítica. No tuve problemas con cuestiones meramente procedimentales, pero al momento del examen final, estudiar la teoría fue una tortura. Esos artificios, esas vueltas inesperadas en la argumentación para lograr soluciones mágicas. En fin… Nuevamente se repitió el ceremonial de los primeros años del bachillerato. Pero allí me di cuenta de lo que realmente me gustaba. No era la Química precisamente. De hecho, comencé estudiando Química, pero la Matemática se interpuso como una 'amante que con el tiempo se cansó de serlo y quería ser la esposa'… Y así fue realmente, Matemática terminó siendo mi carrera y de hecho, la demostración se convirtió en una obsesión para mí. Una obsesión saludable que traería consecuencias…

El séptimo encuentro fue dos años después de comenzada la universidad. Durante un verano, ayudando en la biblioteca que me prestaba todos los libros para la Carrera, iba un rato todas las tardes a colaborar. Investigando, mirando libros, descubro un libro: Álgebra I de Rojo (1981). Allí me detengo en el capítulo inicial sobre nociones de Lógica Simbólica. A partir de allí, la cuestión se convirtió en una obsesión realmente, leí muchísima bibliografía sobre el tema, y ya no razonaría nunca del mismo modo de cómo lo venía haciendo. Fue un verdadero punto de inflexión en mi carrera académica…

El octavo encuentro con la demostración fue haciendo mis primeras armas de docente. Todo se produjo en mis comienzos y en la originalmente denominada Facultad de Química e Ingeniería "Fray Rogelio Bacon", hoy, Facultad de Química e Ingeniería del Rosario de la Pontificia Universidad Católica Argentina. Cuando comencé a desempeñarme como ayudante no diplomado en la práctica de la materia que había cursado en el primer año de la Carrera de grado y en una época diferente, no existía CONEAU, ni los controles contemporáneos, propios del mundo posmoderno y globalizado. De modo que el profesor a cargo de la cátedra no asistía prácticamente a dictar sus clases y nunca había suficiente teoría para desarrollar la práctica. De modo que sentí que debía hacerlo yo, pero era una empresa audaz y difícil. Allí el encuentro con la prueba fue definitivo e intenso. Yo quería que los estudiantes entendiesen, pero primero debía hacerlo yo. Entonces me zambullí en esa empresa, y así comenzó la gran aventura de mi inmersión en la prueba matemática y me dediqué de lleno a la docencia, relegando mi propia carrera, pero esto último es harina de otro costal…

El noveno encuentro fue decisivo… Durante finales de 1989 y el verano de 1990, preparé el material didáctico para el año académico de 1990, y llegado el momento de ser expuesto en clase, apareció la primera dificultad, que durante la elaboración no tuve en cuenta. El abordaje del Cálculo integral previo al Cálculo Diferencial es un desafío interesante, pero en aquel momento todavía primaba fuertemente la escuela bourbakiana, ya que la visualización y la intuición geométrica en aquellos momentos no eran suficientes. La prueba formal era un paso necesario e insustituible en todos los casos y si bien los contenidos conceptuales fueron rápidamente comprendidos, las pruebas de los teoremas correspondientes a estos contenidos conceptuales eran muy largas y como consecuencia, complejas de ser comprendidas, lo que se agudizó a la hora de la evaluación. A la hora de planearla, pensé en la posibilidad de presentar una guía secuenciada de cada demostración requerida en el examen parcial. En aquel momento no sabía que esta guía sería la tecnología didáctica que años después generé dentro del diseño de la ingeniería didáctica que surgió como consecuencia de la investigación realizada para mi tesis de maestría. Esta metodología se constituyó en un embrión de lo que posteriormente se utilizó con mayor frecuencia en los años subsiguientes. Año tras año, se intensificó la utilización de esta tecnología didáctica que fue la coronación de la ingeniería didáctica surgida de esa investigación y que utilizo en el presente, sin realizar ninguna estadística ni un recabamiento de datos sobre los éxitos y fracasos que se iban experimentando con los diferentes grupos que ingresaban año tras año, excepto la observación intuitiva. En 1997, presenté un trabajo sobre esta experiencia en el VII EMCI en Mar del Plata, que se realizó en noviembre de ese año, realizándose la correspondiente ponencia. Fue mi primer congreso. En 1999, presenté la segunda parte del trabajo expuesto en 1997, en el VIII EMCI en Olavarría efectuándose la correspondiente ponencia en el mes de mayo.

El encuentro final y determinante… Los cambios curriculares operados en la década del 90 en Argentina, la aparición de la CONEAU y cuestiones relacionadas, obligaron a los integrantes del sistema educativo a realizar posgrados específicos de su área y consecuentemente incursionar en la investigación formal. Yo no escapé a esto, y recalé felizmente en mi querida y gloriosa Universidad Nacional del Comahue con la Maestría en Educación en Ciencias Exactas y Naturales creada por el Dr. Ricardo Chrobak. Durante el desarrollo de los cursos que integraban el currículum de la maestría, en muchas materias se nos pedían ciertas consignas relacionadas con nuestro futuro tema de tesis. Esto era un incordio para la mayoría, porque nadie tenía claridad sobre esta cuestión, para mí era natural. Si bien, no tenía delineado título y especificación, sabía que abordaría la dificultad frente a la prueba matemática del estudiante universitario de Ciencias Naturales e Ingeniería que utiliza Matemática como herramienta. La confección de la tesis me dio vueltas un giro de ciento ochenta grados, inclusive el desarrollo de las diferentes materias que integran el currículum de la maestría. Mi desempeño académico fue cambiando de una manera muy vertiginosa ya que de la mano iba ganando en madurez intelectual y emocional. Las observaciones de mi director de tesis, Dr. Lisandro Curia fueron determinantes. Jamás olvidaré una de las primeras observaciones. Recuerdo que luego del primer trabajo de campo, al surgir las categorías emergentes, en la descripción detallada de cada una, juzgaba de manera categórica al estudiante, no de forma deliberada sino de manera natural y sin animosidad, pero con un tinte que abunda en el profesorado y es lo que suelo denominar 'el síndrome del maestro ciruela' o si lo queremos 'internacionalizar' podríamos nombrarlo como 'el síndrome del profesor Jirafales'.

La corrección de Lisandro me mostró el rol del investigador, que observa, y describe lo observado, pero no juzga. Esto fue un antes y después ya que esto cambió lenta, pero de forma segura mi trabajo áulico y consecuentemente mi trabajo académico. A la hora de evaluar, no hay otra alternativa que, bajo un criterio y una normativa, debe emitirse un veredicto final. Pero en la clase, el juzgar puede cambiar radicalmente el proceso de aprendizaje del estudiante y equivalentemente el de enseñanza. Si uno observa las reacciones, debe responder de forma natural y afable, pero no juzgar, comprendiendo que los resultados pueden cambiar notablemente. Esto determinó un giro increíble en mi carrera académica que redundó en un trabajo cada vez más fructífero y efectivo. Los resultados de las demostraciones con los estudiantes no variaron, al contrario, de acuerdo al segundo principio de la termodinámica, el proceso es entrópico, y las cuestiones se van degradando cada día más. Pero, la armonía, producto de la racionalidad, y los resultados, producto de un gran esfuerzo por parte del estudiante estimulado en su autoestima y no sojuzgado, ganaron cada día más a cualquier proceso entrópico. A partir de aquí, comenzó una nueva etapa en mi carrera académica, que la definiría como un renacimiento académico donde mi mirada ya nunca fue igual y se sigue enriqueciendo día a día, proceso que jamás hubiera imaginado en los comienzos de mi historia académica…

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

CAPÍTULO I

FILOSOFÍA, MATEMÁTICA Y DIDÁCTICA

La ciencia es un juicio verdadero acompañado de razón.

Platón. Teeteto, 202, b-c

Resumen

El objetivo que se propone este capítulo es extrapolar la relación entre filosofía y epistemología de las Ciencias hacia la Didáctica de la Matemática. Existe una relación entre la imagen de la Ciencia proporcionada a través de su enseñanza, y la concepción filosófica que se ha ido sustentando en distintas épocas sobre cómo se genera el conocimiento científico, aunque ambos aspectos: educativo y epistemológico, no siempre coincidan en el tiempo. Considerando a la Filosofía como una tendencia siempre inacabada hacia el saber, un producto del asombro y la admiración, una necesidad de preguntar y preguntarse, una búsqueda y una oferta de comprender racionalmente, es fácilmente entendible su relación con la Matemática. Desde su etimología, Matemática, es aproximadamente aquello que se piensa y se aprende, y el matemático es aquel que piensa y que aprende, pero con el espíritu. El matemático griego Pitágoras, fue el primer gran pensador que intentó conciliar la Matemática con la Filosofía, lo que sin duda alguna ha constituido una de las mayores aportaciones realizadas a la civilización a lo largo de toda la historia. Desde entonces, la Matemática ha mantenido una estrechísima relación con la Filosofía y la Ciencia hasta el punto de que algunos de los más grandes filósofos han sido también grandes matemáticos como es el caso, por ejemplo, de Descartes. La historia da cuenta de muchos siglos y de diversas posiciones y discusiones sobre el origen y naturaleza de la Matemática, lo que lleva al debate sobre si la Matemática existe fuera de la mente humana o si es una creación propia; si es exacta e infalible o si es falible, corregible, evolutiva y provista de significado como las demás Ciencias.

Introducción


1

Figura 1: Fragmento sobreviviente de *Elementos* de Euclides

El origen de la Filosofía, se remonta al siglo VI a.C. en Grecia, como un intento de racionalizar los fenómenos naturales a los efectos de promover la capacidad de razonar, que es inherente al género humano, de modo de alejarse de las explicaciones predominantes en la cultura griega basadas en mitos y leyendas populares. Esta génesis aparece ligada a la civilización griega, siendo Tales de Mileto (siglos VII – VI a.C.) un matemático, uno de sus precursores, quién frente a explicaciones de la realidad, de tono mítico y religioso, ofrece por vez primera, explicaciones basadas en la razón. Etimológicamente, filosofía procede de los vocablos griegos, phileo: amor y sophia: sabiduría, lo que consecuentemente muestra que significa: amor a la sabiduría. La introducción del término se debe a Pitágoras (496 – 580 a.C.), matemático también, quien ya que en cierta oportunidad cuando alguien le preguntó su profesión, este le respondió que no era sabio (sofos) sino simplemente un amante de la sabiduría o aspirante a ella.

Desde un enfoque lógico – formal, Matemática, se define como "*la Ciencia que estudia por medio de sistemas hipotético–deductivos, las propiedades de entes abstractos, tales como figuras geométricas, conjuntos, estructuras, entre otros, como así también las relaciones que se establecen entre ellos.*"
SALVAT (Ed.) (1978, Vol.8, p.2158).

[1]Uno de los fragmentos sobrevivientes más antiguos de *Elementos* de Euclides, un libro de texto utilizado durante miles de años para enseñar técnicas de demostración de escritura. El diagrama acompaña el Libro II, Proposición 5.1

Crédito de imágenes:
https://www.google.com.ar/search?q=uno+de+los+fragmentos+de+los+elementos+de+euclides&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwiF6vj_sO7hAhX6F7kGHewiDSQQ_AUIDigB&biw=1094&bih=472#imgrc=i1JQD7rBdFYUyM:

Pero si se analiza su significado desde una perspectiva etimológica, procede del verbo griego: ***μανθάνω*** que se lee: *mánthano* y que significa aprender a pensar; aplicar el espíritu. A partir de ahí, se forma el sustantivo: ***μάθημα*** que se lee: *máthēma* y que significa conocimiento o campo de estudio o instrucción, y de éste, el adjetivo: ***μαθηματικά*** que se lee: *mathematikós* y que significa aproximadamente: cosa aprendida. Este último adjetivo adopta en el latín, la forma *mathematicus* que en la cultura moderna devino en Matemático, como el profesional que ejerce la Ciencia Matemática. Entonces el significado de la palabra Matemática es aproximadamente aquello que se piensa y se aprende, y el matemático es aquel que piensa y que aprende, pero con el espíritu. Este término se utiliza indistintamente en plural o singular. Cuando se lo utiliza en plural, siendo este, un hecho frecuente, es porque en latín *mathematica* es un sustantivo plural. También se ha dicho que se prefiere el término en plural porque alude al carácter abarcativo de esta Ciencia y sus diferentes ramas o subdisciplinas, tales como: Cálculo; Geometría; Álgebra; Teoría de Grupos; Teoría de Grafos; Teoría de Conjuntos; Análisis; Topología; Investigación Operativa; Teoría de juegos, entre otras. Asimismo, hay corrientes que consideran a esta palabra en singular para expresar que todas las ramas, son, en definitiva, una misma Ciencia, adoptándose en este trabajo, esta última posición.

En la Edad Media, se denominó Quadrivium, al núcleo de estudio que agrupaba las siguientes disciplinas que eran las que, Platón y Pitágoras enseñaron y se trataba de: Aritmética, Astronomía, Geometría y Música. Los griegos denominaban a estas disciplinas en conjunto: Mathemâtika. Por ende, Matemática es sobre todo investigación y proceso de aprendizaje, deseo de saber, de comprender, de inquirir.

Pérez Gómez (2001) considera que, en sus orígenes, la Ciencia Matemática lo que realmente pretendía, era suministrar herramientas para entender al mundo que rodeaba a aquellos sabios griegos de entonces. Si se tiene en cuenta que en la antigua Grecia, entraban a los templos solamente sacerdotes, filósofos y matemáticos, estos últimos lo hacían porque tenían la llave del pensamiento ya que del mismo modo que los filósofos, su búsqueda del conocimiento era lograda a través de la constante acción del razonamiento. Tal vez, el más famoso de todos los denominados filósofos presocráticos, sea Pitágoras. Pitágoras nació en Samos, una pequeña isla próxima a la costa de Asia Menor, vivió aproximadamente entre los años 570 y 497 a.C. Considerado genial en muchas disciplinas, una de sus aficiones fue la Matemática. Aparte de su más que conocido teorema, fue él quien introdujo las ideas de ‘cuadrado’ y de ‘cubo’ de un número basándose en una serie de conceptos geométricos y aritméticos. Su mayor aporte, es que fue el primer gran pensador que intentó conciliar la Matemática con la Filosofía, lo que sin duda alguna, ha constituido una de las mayores aportaciones realizadas a la civilización a lo largo de toda la historia. Desde entonces, Matemática ha mantenido una estrechísima relación con la Filosofía y las demás Ciencias hasta el punto de que algunos de los más grandes filósofos han sido también grandes matemáticos como es el caso, por ejemplo, de Descartes (1596–1650).

Platón fue un filósofo griego que vivió entre los años 427 a 347 a.C. Sus obras están escritas en forma de diálogo, de ahí, la habitual denominación de *Diálogos Platónicos*, siendo su principal protagonista: Sócrates (470–399 a.C.), de quién fue un seguidor incondicional. Es decir que, en los Diálogos y en una primera etapa, Platón actuó como si pusiera en boca de Sócrates lo que en realidad era su posición. Fue una característica distintiva también, la utilización de mitos en sus diálogos, que fueron utilizados como metáforas para explicar conceptos. Los mitos son, un recurso literario para explicar su pensamiento.Suelen clasificarse según el período de su vida en que fueron escritos. Cabe destacar que en la segunda etapa, se observa un profundo cambio, ya que su interés se centra en cuestiones filosóficas aplicadas al mundo de lo concreto y sensible, para después extrapolarlas a la conducta humana. Afirma acerca de la existencia de dos mundos diferentes, los denominados ‘dos mundos de Platón’. Por un lado, está el Mundo Sensible formado por los objetos materiales, y que es exactamente igual en el mundo de Heráclito (535–475 a.C.), haciendo que su dinamismo sea completamente incognoscible. Por otro lado, está el Mundo Inteligible, formado por universales (ideas), y es un mundo perfecto, inmutable, y, por tanto, cognoscible, y también integrado por las almas. Ningún aspecto de la realidad circundante es ajeno a su interés, y es en este sentido que Matemática y Física aparecen como medios insustituibles a la hora de una mejor aproximación al entendimiento del mundo de las cosas. De ese modo, no es llamativo que en el frontispicio de su academia hiciera grabar las siguientes palabras: *“Que nadie entre aquí sin saber matemática”*. (Magee, 1999, p.19)

Aristóteles, nació en Estagira, Macedonia, en el año 384 a.C. y murió en 322 a.C. Fue discípulo de Platón y maestro de Alejandro Magno (356–323 a.C.). Es el precursor del empirismo, al considerar que todas las filosofías y las ciencias tienen que partir de la experiencia, es decir, de todas las sensaciones que nos ofrece el mundo de la percepción y del conocimiento sensible. La fuerza de sus ideas trascendió los siglos, proyectándose en los siglos XVII y XVIII, época en que su tesis es sostenida por los empiristas británicos John Locke (1632–1704), George Berkeley (1685–1753) y David Hume (1711–1776), y en cierto modo, también Emmanuel Kant (1724–1804), filósofo alemán creador de la filosofía crítica. Aristóteles al referirse a Tales de Mileto (625/624–547/546 a.C.), planteaba su pregunta fundamental acerca del problema del conocimiento, y no se refería a que es lo que realmente conocemos sino como lo conocemos. Y ahí radica el gran problema de la educación en cada disciplina. Particularmente en Matemática, el principal requerimiento es que el aprendiente de esta disciplina pueda razonar y no repetir ritualmente. Aramayona Alonso (1998) considera que en general, el objetivo primordial de la educación debería ser, lograr que cada individuo sea capaz de marchar por sí mismo hacia donde decida hacerlo. Cobra entonces pleno sentido el principio de que, más que enseñar filosofía (matemática), hay que enseñar a filosofar (matematizar).

Corrientes filosóficas y Matemática

[2]

Figura 2: Imagen que representa una recreación de los pitagóricos

[2]Pitagóricos. Filosofía para la vida. Crédito de imágenes: https://www.google.com.ar/search?biw=1094&bih=472&tbm=isch&sa=1&ei=dUzDXM7gCq2w5OUP5uWEWA&q=PITAG%C3%93RICOS&oq=PITAG%C3%93RICOS&gs_l=img.3..0l3j0i5i30l6j0i24.29011.32024..32288...0.0..0.150.1114.7j4......1....1..gws-wiz-img.......0i67.zklccWBD-9U#imgrc=6ewdS8X0KNUYhM:

Existe una relación entre la imagen de la Ciencia proporcionada a través de su enseñanza, y la concepción filosófica que se ha ido sustentando en distintas épocas sobre qué es y cómo se genera el conocimiento científico, aunque ambos aspectos: educativo y epistemológico, no siempre coincidan en el tiempo. La historia da cuenta de muchos siglos y de diversas posiciones y discusiones sobre el origen y naturaleza de la Matemática. Se debate sobre si la Matemática existe fuera de la mente humana o si es una creación propia; si es exacta e infalible o si es falible, corregible, evolutiva y provista de significado como las demás Ciencias. Existen corrientes filosóficas que generan diferentes concepciones en la construcción del saber matemático, a saber: platonismo, logicismo, formalismo, intuicionismo y constructivismo.

Fatone (1979) caracteriza a estas cinco corrientes del modo como se las describe a continuación:

El Platonismo se caracteriza por enmarcar a la ciencia Matemática como un conjunto sistematizado de verdades indiscutibles, autonómas e independientes de la existencia humana. Considera que el objetivo de un matemático es el descubrimiento de estas verdades, ya que se encuentra sujeto a ellas y debe rendirles culto. Considera que los entes matemáticos existen de manera misteriosa y sus propiedades pueden ser descubiertas luego de un activo trabajo de investigación. Asimismo, da cuenta de la existencia de otras propiedades, que no se podrán descubrir, más allá de cualquier esfuerzo. El platonismo considera que Matemática traspasa los límites mentales del hombre existiendo las verdades matemáticas externamente al plano mental como una abstracción de la realidad.

El Logicismo encuadra a la ciencia Matemática como una rama de la lógica, con entidad propia, pero con idéntico origen y método, y que forma parte de una serie de pautas universales que estructuran las diferentes formas de argumentación. Plantea que las diferentes estructuras matemáticas se deben definir a través de términos lógicos y sostener todos los teoremas que constituyen a la Matemática y a la Lógica, mediante la utilización de formas lógicas. Gödel (1906–1978), cultor determinante de esta corriente, sostiene que la lógica matemática es una ciencia que antecede a todas y que tiene dentro de si, todas las ideas y las nociones en que se sostienen el resto de la ciencias. El pensamiento logicista coincide mayoritariamente con el pensamiento aristotélico y con el de escolástica medieval.

El Formalismo caracteriza la Matemática como una absoluta creación de la mente humana que se sostiene en axiomas, definiciones y teoremas como estructuras netamente formales que se acoplan a partir de la conexión de símbolos combinados con una serie de reglas acordadas. Según el formalista, la Matemática se inicia con la acción de escribir simbólicamente en el papel y la verdad radica en la mente del hombre y no en la construcción que esta realiza en su estructura interna sino en la conexidad con las reglas propias de los esquemas simbólicos. El principal exponente del formalismo es Hilbert (1862 – 1943) que hace su aparición alrededor de 1910 con los fundamentos de la Matemática.

El Intuicionismo considera la Matemática como el producto de la preparación que la mente realiza a partir de lo percibido a través de los sentidos. Como resultado de estas percepciones se realizan construcciones eminentemente mentales, y su génesis se identifica claramente con la edificación de los números naturales. En definitiva, se puede considerar que la Matemática griega, y particularmente la Aritmética, es naturalmente intuicionista. El principio esencial del intuicionismo consiste en que la Matemática se puede cimentar desde ideas únicamente intuitivas que parten de lo finito, existiendo siempre que hayan sido el producto de una construcción meramente intuitiva. El creador del intuicionismo moderno es Brouwer (1881–1968) quien considera que en Matemática, la imagen de existencia es equivalente a la idea de construcción, es decir, que un ente matemático existe si es construido; mientras que *la idea de verdad* es equivalente a la idea de *demostrabilidad*.

El Constructivismo está íntimamente ligado con el intuicionismo ya que también considera la Matemática como una creación mental en la que de manera única, tienen existencia real, solo aquellos entes matemáticos que se pueden construir por procedimientos finitos a partir de entes primitivos. El constructivismo matemático se alinea con la Pedagogía Activa que se sostiene en la Psicología Genética de Piaget (1896–1980). Esta corriente se centra en el estudio de las condiciones en las cuales la mente realiza la construcción de los objetos matemáticos y la disposición en que los organiza y los aplica.

Filosofía y Matemática: Una relación compleja

Klimosky y Boido (2005) se plantean en *Las desventuras del conocimiento matemático*, cuatro preguntas medulares y trascendentes, pero solo dos interesan para los objetivos de esta investigación.

La primera pregunta es de carácter ontológico: ¿De qué hablan las proposiciones de la Matemática?

Las bases de la Matemática pura están construidas sobre el desarrollo de sistemas axiomáticos, donde sus términos no tienen una asignación prefijada y las afirmaciones que en ellos se hallan. Son en realidad, formas puramente sintácticas, que sólo respetan reglas morfológicas previamente establecidas para construir sucesiones de signos. Según Rojo (1983), los axiomas que constituyen los sistemas axiomáticos son funciones proposicionales cuantificadas. Estas formas proposicionales, son las cuasiproposiciones de las que hablan Klimosky y Boido (2005), que no hablan de nada, contrariamente a la visión tradicional de la Ciencia donde los científicos estudian propiedades y características de ciertas entidades y objetos. Debe destacarse que la estructuración de la Matemática en sistemas axiomáticos tiene una importante similitud con el sistema de la lógica desarrollado por Aristóteles, donde en realidad este se ocupó de encontrar 'hormas' o 'moldes' de diferentes esquemas de razonamientos que pueden presentarse y ofrecer la posibilidad de ejemplos o casos particulares adecuados donde no es posible la posibilidad de premisas verdaderas y conclusión falsa. Cuando se dice entonces que las cuasiproposiciones no hablan de nada, en realidad se indica que están ofreciendo un conocimiento acerca de ciertos objetos matemáticos, cuya interpretación puede ser de muy diferente naturaleza según los entes que se estén considerando. Siempre que no se extrapole esto hacia Matemática aplicada, los sistemas axiomáticos de alguna manera mostrarían las condiciones que deberían ser satisfechas en un entorno ontológico si se parte del supuesto que en este sistema se satisfacen las condiciones establecidas por las funciones proposicionales cuantificadas y que fueron escogidas como axiomas.

A principios del siglo XIX, la Matemática había experimentado un desarrollo considerable y notable en lo que hace a sus fundamentos.Asimismo, muy pocos se preocupaban por los cimientos del considerable edificio de conocimientos construidos hasta ese momento. Esto ocurría ya que a muchos investigadores les interesaba desarrollar su ciencia, pero desde sus aplicaciones. Sin embargo, aún antes de la aparición de las geometrías no euclidianas y la consecuente necesidad de establecer un nuevo criterio aritmético de existencia para los entes matemáticos, importantes investigadores habían iniciado un movimiento de retorno a los fundamentos para clarificar ciertos puntos dudosos y fundamentar las diversas ramas de la Matemática sobre bases sólidas. Dadas las dificultades asociadas con vagas y engañosas intuiciones geométricas, el movimiento en cuestión culminó con la llamada aritmetización del análisis matemático, denominado en general esta corriente como "*aritmetización de la Matemática*". Fueron eliminadas nociones confusas y ambiguas, por ejemplo la de infinitesimal concebida bajo cánones antiguos, que se encontraban en la base del análisis matemático, y se puso en evidencia que este cuerpo de conocimiento se fundamentaba únicamente sobre el concepto de número real. Poco después se llegaron a definir rigurosamente los conceptos de número real, número complejo, etc. utilizándose en esas definiciones tan sólo las propiedades del conjunto de números naturales como punto de partida. En estas investigaciones son célebres las definiciones puramente aritméticas de número real formuladas por Cantor (1845–1918), Dedekind (1831–1916) y Weierstrass (1815–1897). Este proceso de *"aritmetización de la Matemática"* tuvo en su momento grandes implicancias en el pensamiento de muchos intelectuales, tales como Russell (1872–1970) y otros pensadores del denominado empirismo lógico. El empirismo lógico o también denominado racional, también recibe el nombre de neopositivismo o positivismo lógico, y es una corriente que limita al clásico método científico a lo empírico y verificable y surgió en el primer tercio del siglo anterior en la filosofía de la ciencia, y fue generado por un grupo de científicos y filósofos que formaron el célebre Círculo de Viena.

"*La aritmetización de la Matemática*", en sus repercusiones con los intelectuales del empirismo lógico, llevó a éstos a pensar que procedimientos lógico–constructivos, similares a los llevados a cabo en Matemática, podrían realizarse de forma análoga con la filosofía en general y con la metafísica en particular. Este tipo de procesos propios permiten reducir estructuras aritméticas complejas a otras de carácter más simple. De este modo puede reducirse la aritmética de los reales a la de los irracionales y así hasta los naturales. El proceso también podría realizarse en forma inversa partiendo desde la aritmética de los naturales, abriendo la brecha hacia los enteros y así sucesivamente hasta llegar a los reales. Estos resultados fueron entendidos como significativos y trascendentes acerca de la utilización de un pensamiento riguroso en Ciencia que permite evitar la presencia de cuestiones metafísicas. Este tipo de construcción fue llevada a cabo por Russell y tiempo después se observó que traía numerosas dificultades. Lo que es relevante destacar es que en su momento tuvo notable influencia en el intento de extrapolar la potencia del constructivismo lógico empleado en la fundamentación de la matemática a un entorno estrictamente filosófico. Lo expuesto trae como consecuencia, que la primera de las cuatro preguntas planteadas por Klimosky y Boido (2005) en *Las desventuras del conocimiento matemático*, no se pueda responder a través de una respuesta simple. Se la puede responder a través del análisis del método axiomático formal y de la naturaleza semiótica de estos y sus interpretaciones. Cantor y Gödel (1906–1978) podrían alegar razones para justificar que el sistema axiomático de la teoría de conjuntos, e inclusive algunos más simples de estos, como el de Zermelo (1871–1953), son consistentes. Y lo son, ya que admiten como modelo los conjuntos formales que habitan en el segundo mundo de Platón, poblado en particular por las entidades formales de la Matemática. Este segundo mundo, además está constituido por los denominados universales que son las cualidades, propiedades, relaciones y otras entidades consideradas por la lógica.

Meinong (1853–1920) conocido fundamentalmente por su Teoría de los objetos formulada en 1940 y sus estudios de lógica deóntica, fundamenta su trabajo en su creencia de los objetos totalmente abstractos. La teoría está fundamentada en el hecho de que es posible pensar en un objeto determinado en la imaginación, aunque no exista un objeto así en el mundo externo. Considera que los objetos inexistentes son apriorísticos y sin embargo, promotores de intencionalidad y, por esto, como los objetos existentes, constituyentes de la consciencia. Este filósofo sostiene entonces que en el segundo mundo de Platón debe existir, inexorablemente para toda combinación conceptual que se pueda construir a través del lenguaje o del pensamiento, una entidad formal que se corresponde con tal construcción. Meinong habla de la existencia de entidades que se refieren al mundo concreto, mientras que introduce el término subsistencia cuando se refiere a entidades al mundo formal. (Velarde–Mayol, 2007)

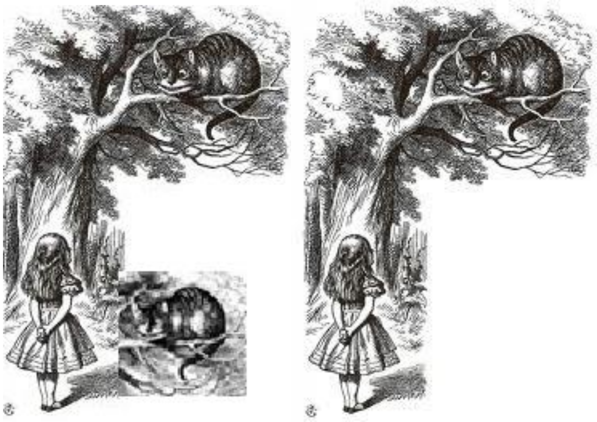

[3]

Figura 3 (arriba): ***Alicia y el gato de Cheshire***

Figura 4 (abajo): ***El gato de Cheshire***

Esta concepción daría lugar a contradicciones, por ejemplo: considérese la siguiente combinación de palabras que darían subsistencia a una entidad perteneciente al segundo mundo de Platón: *El único gato de Cheshire*[3] *está en la última rama del árbol por el que cae Alicia*. Esta entidad subsiste, independientemente de que exista o no; mientras que con una combinación de palabras similar se podría postular: *El único gato de Cheshire está al pie del árbol por el que cae Alicia.*

Debe destacarse que las dos entidades subsistentes que se han introducido son contradictorias entre si. Pero, para Meinong, ambas entidades existen en el

[3]Imágenes extraídas de: http://queridos-gatos.blogspot.com/2007/06/o-gato-de-cheshire.html

La última figura de la derecha es el gato de Cheshire tal como lo imaginó John Tenniel en la edición de 1866 de *Alicia en el país de las maravillas.*

segundo mundo de Platón, por lo que sería un mundo de contradicciones. Este tipo de especulaciones metafísicas son estériles a la luz de la búsqueda de la consistencia y modelos de los sistemas axiomáticos. El mundo descripto no tiene utilidad alguna para probar, en sentido absoluto, la consistencia de sistemas axiomáticos formales. Por lo que se desprende que una posición más prudente concibe a los problemas de consistencia como una cuestión relativa y no filosóficamente absoluta.

La segunda de las preguntas que Klimosky y Boido (2005) se plantean en *Las desventuras del conocimiento matemático*, es una interrogación de carácter epistemológico: ¿Por qué creer en las proposiciones de la Matemática?, pregunta que puede considerarse equivalente a: ¿Cuáles serían las razones que nos permitirían considerar verdaderas las proposiciones de la Matemática?

Considerando que la Matemática pura está constituida por sistemas axiomáticos formales, aquí la respuesta no se puede direccionar claramente hacia el sentido de verdad dado por Aristóteles porque se trata de una noción de tipo semántica, mientras que un sistema axiomático formal es una entidad lógico-lingüística de carácter sintáctico. Entonces, pueden obedecer tales razones a una elección personal arbitraria o la elección puede estar estrictamente motivada por el hecho de fijar la atención en un determinado sistema axiomático que se vincule específicamente a su desempeño en determinado contenido de una Ciencia fáctica.

La Ciencia como juicio verdadero acompañado de razón

La cita que encabeza la portada de este capítulo es elocuente en sí misma. El término juicio que aparece en la misma, significa creencia. Platón, en el Teeteto, separa el hecho del conocimiento objetivo, de la creencia como contenido subjetivo. La objetividad de la Ciencia se produce de hecho sobre hechos, que en la medida de lo posible, tratan de sustentarse por el logos de la razón y no la simple creencia de su enunciación lingüística como proposiciones lógicas.

La creencia en proposiciones matemáticas es sostenida por las razones dadas por la argumentación de la clásica prueba matemática; la creencia en proposiciones de las Ciencias fácticas está sostenida por hechos. Un hecho es la manera en que las cosas o entidades se configuran en la realidad, en instantes y lugares determinados. Cuando una afirmación que se refiere a la realidad resulta verdadera, es porque describe un posible estado de cosas que es en efecto, un hecho. No se utilizará la palabra hecho para la Matemática y las ciencias formales en general. Una ciencia fáctica estudia hechos. En el ámbito de las ciencias fácticas, el concepto aristotélico de verdad parece indispensable. Por las reglas gramaticales, semánticas y lógicas del lenguaje, quien realiza el acto de afirmar un enunciado pretende describir un posible estado de cosas y al mismo tiempo persuadirnos de que ello es lo que acontece en la realidad. Si dicho estado de cosas realmente acaece, si la descripción coincide con lo que sucede en la realidad, se dirá que el enunciado es verdadero. La noción aristotélica de verdad no tiene ingrediente alguno vinculado con el conocimiento. Una afirmación puede ser verdadera sin que se tenga evidencia de que hay correspondencia entre lo que describe la afirmación y lo que realmente ocurre. También podría ser falsa y no saberse. Desde el punto de vista del avance del conocimiento, puede ser tan importante establecer una verdad como una falsedad. En su análisis de la ciencia, ciertos filósofos ponen el énfasis en el pensamiento científico. Pero el pensamiento es privativo de quien lo crea, y solo se transforma en propiedad social si se comunica a través del lenguaje. Socialmente la Ciencia como cuerpo de conocimiento se ofrece bajo la forma de un sistema de afirmaciones. Cuando se trate acerca de conjeturas o teorías científicas deben ser entendidas como propuestas, creencias u opiniones previamente expresadas por medio del lenguaje. (Klimosky, 1997)

La comunicación de la Ciencia

La comunicación de la Ciencia a través del lenguaje puede ser por medio de artículos científicos circunscritos estrictamente al ámbito científico en que se ajuste la disciplina del mismo; artículos de divulgación o en el ámbito áulico, ya sea a nivel del ciclo de enseñanza elemental, media y universitaria de grado y posgrado. En cualquier tipo de difusión, se requiere de una "*transposición didáctica"* (Chevallard, 1998) que permita una clara extrapolación del saber sabio a un saber público y accesible, lo que conduce hacia la didáctica de las Ciencias en general y la didáctica de la Matemática en particular. Hasta después de pasada la mitad del siglo pasado, la tradición y la no–existencia de una didáctica de las ciencias, además de profesorados direccionados hacia disciplinas específicas, hizo que las diferentes disciplinas fueran impartidas por profesionales: a) Matemática y Física por Ingenieros; b) Biología por médicos; c) Química por Bioquímicos o Ingenieros químicos, etc. El surgimiento, en las últimas tres décadas del siglo pasado, de profesorados**,** licenciaturas y postgrados en disciplinas específicas generó una verdadera revolución en cuanto a la potencia de la didáctica, epistemología y filosofía de las Ciencias. Décadas atrás, estas tres últimas disciplinas mencionadas no aparecían o simplemente tenían muy poco peso en los programas de formación de los profesorados.

Esta potencia, ganada en las dos últimas décadas, no atenuó el paralelismo con la tradición ya iniciada de profesionales carentes de formación específica, ya que los profesores, con antigüedad y permanencia, que poseen experiencia tienen creencias y conocimientos prácticos personales muy estables y consolidados a lo largo de su actividad profesional y muy resistentes al cambio (Appleton y Asoko, 1996)

Además, estos profesionales tienen poco tiempo disponible y la formación les supone un esfuerzo añadido y una sobrecarga de trabajo para algo que, en muchas ocasiones, consideran teórico e irrelevante para lo que tienen que hacer diariamente en el aula. (Munby y Russell, 1998)

En estos profesores, la formación no hay que plantearla como un ‘cambio’, sino más bien como un proceso interno de ‘crecimiento’ y de ‘desarrollo’ gradual a partir de lo que ya piensan y hacen (Day, 1999), de los problemas reales de enseñanza y aprendizaje de las ciencias, de las preocupaciones cotidianas del profesor, potenciando y apoyando la motivación, la disponibilidad, la colaboración y el compromiso de los profesores en su propio desarrollo profesional. (Mellado, 2003)

Más aún, estos profesores no son conscientes ni poseen el conocimiento de la epistemología propia de la disciplina dictada, por ignorancia o en caso de conocer algo de la cuestión, consideran que esto es innecesario de ser profundizado para el docente profesional.

Ocurre que saben de la Ciencia y no sobre la Ciencia, que es lo esencialmente esperado para una profesionalización específica de la profesión docente encuadrada en la naturaleza de la Ciencia. (Adúriz-Bravo, 2002)

Desde esta perspectiva, el proceso de enseñanza de las ciencias y consecuentemente, el de su aprendizaje, viene sufriendo un proceso de decadencia desde hace algo más de tres décadas. Esto se traduce, en que los 'responsables' de transmitir conceptos científicos en diferentes niveles educativos, fueron relegando las cuestiones epistemológicas que hacen a su esencia. Hablar de la esencia epistemológica de cualquier Ciencia, implícitamente requiere que se hable de su lenguaje.

Particularmente en Matemática, desde el punto de vista de la comunicación, su característica más importante es su lenguaje riguroso, el cual está ligado al hecho de que sus conceptos son entes abstractos cuyas representaciones están determinadas tanto por la semiótica como por la noética (Duval, 1998) y por lo tanto las relaciones de los símbolos y signos dependen del dominio conceptual en el que se encuentren. Las expresiones matemáticas por sencillas que sean son registros semióticos que determinan significados (semántica), sin importar la forma en la que están representados (sintaxis). Éstos significados están mediados por conceptos fundamentales que son la base de la construcción del saber matemático.

Si se considera entonces a la Matemática como una manifestación semiótica, tal como lo hace Radford (1997), entonces sus elementos generan significados sintácticos y semánticos en un lenguaje simbólico, el cual podría considerarse equivalente al lenguaje natural de un individuo. Sin embargo los estudiantes no transponen automáticamente el lenguaje natural que utilizan habitualmente al sistema de escritura matemática. Esta característica particular hace que el lenguaje matemático genere dificultades en: la comprensión de los conceptos matemáticos, la forma como se relacionan éstos y el uso de los mismos en la resolución de problemas. La formación de muchos profesores de educación básica, media e inclusive superior se sostiene esencialmente en procedimientos heurísticos que provean herramientas que permitan el desarrollo de destrezas en el momento de plantear y resolver problemas en los diferentes niveles pero carecen de los elementos para estimular el desarrollo de habilidades metalingüísticas. En relación a la resolución de problemas que tiene que ver con las habilidades y métodos heurísticos, Bonotto (2013) expresa textualmente en referencia a estas cuestiones del modo siguiente:

> El proceso de crear problemas representa una de las formas de auténtica investigación matemática, que adecuadamente implementada en actividades de clase, tiene el potencial de

> llegar más allá de las limitaciones de los problemas verbales, por lo menos como son típicamente tratados. Impulsar la creación de problemas es una de las formas de lograr el desarrollo de diferentes potencialidades de los estudiantes y de estimular una mayor flexibilidad mental. (p. 53)

Hasta la década de los ochenta, la filosofía de las Ciencias en general, estuvo prácticamente ausente tanto en programas de enseñanza de las Ciencias como en programas direccionados a la formación específica del profesorado. De este modo, las concepciones sobre la naturaleza de la Ciencia, entendida como un conjunto de contenidos metacientíficos con valor para la educación científica eran débiles, inmaduras y de corte positivista. (Adúriz-Bravo, 2001)

Esto es revertido de forma notable y progresivamente a partir de la década del ochenta, a través de numerosos trabajos que consideraron necesaria e imperiosa la inclusión de una reflexión sobre la naturaleza de la Ciencia, tanto en programas de enseñanza de las Ciencias como en programas direccionados a la formación específica del profesorado. (Burbules y Linn, 1991; Matthews, 1992) citados en Mellado (2003)

De esta forma, los currículos actuales de las Universidades e instituciones educativas de nivel terciario deberían incluir programas de formación del profesorado, que permitieran una transformación, reorganización y reelaboración de los contenidos de forma de generar una nueva mirada de los mismos, estableciendo un saber significativo y proyectado hacia la reflexión y gestión de metasaberes, que permitan una habilidad en la acción de generar una ingeniería didáctica que posilibite una real y transformadora “*transposición didáctica*”.

Estas transformaciones pueden ser posibles mediante una previa reflexión, que implicaría una mirada medulosa y analítica de la Matemática, la que requeriría inmiscuirse en vericuetos filosóficos que trascenderían los saberes en su estado más elemental. Es de destacar, que esto sería simple de producir en aprendices pero no en profesores con experiencia profesional. Estos últimos tienen creencias intensamente arraigadas, y una fortísima resistencia al cambio.

En analogía al realismo crítico de Popper, el cambio en los profesores podría producirse generando insatisfacción en sus concepciones y prácticas docentes frente a las nuevas aportaciones de la investigación educativa, pero esto puede ser notablemente contraproducente si sale del control y el docente no encuentra alternativas viables. A los efectos de encontrar solución a este problema y siguiendo el programa de Lakatos, sería importante considerar aspectos de los viejos programas o paradigmas contemplados por el docente y los establecidos como nuevos, y observar sus fortalezas y debilidades, hasta encontrar un equilibrio que se producirá cuando el profesor encuentre alternativas contrastando las miradas entre ambos programas de forma que se encuentre finalmente satisfecho. (Mellado, 2003)

Los docentes de matemática, deben armarse de nuevas estrategias y deshacerse de otras. Lo de llenar pizarras enteras no tiene razón de ser, pertenece a un paradigma fuera de este tiempo. Realmente, no se trata de enseñar muchísima Matemática, o mejor dicho, de enseñar muchísimos contenidos, muchos de ellos enciclopedistas e innecesarios en muchos casos para ser extrapolados a situaciones específicas de la carrera de grado en que se encuentra inserto el curso de Matemática. Se trata de lograr que las personas aprendan desde la matemática, las diferentes claves que la sociedad, necesita y utiliza. La clave es comunicar ideas; seduciendo a través de ellas; introduciendo elementos de la vida cotidiana; buscando la complicidad del que aprende; procurando que el interés no decaiga; siendo la sorpresa, una autoexigencia del docente; trabajando constantemente en la visualización con la introducción de las nuevas tecnologías; sin dejar de lado la resolución de problemas y siempre estando muy atento a la actualización de nuevas corrientes didácticas. Para ello, además de elegir convenientemente las actividades, deben de adoptarse nuevos estilos para trabajar en el aula.

Pero más allá de todo, si nos abstenemos de la presencia de las tecnologías propias de la posmordenidad, puede decirse perfectamente que matemática se basa esencialmente en el razonamiento y la abstracción. Es una actividad autosuficiente ya que el matemático sólo necesita lápiz, papel y tiempo para pensar. Sin embargo para generar una simple demostración, un razonamiento, una especulación teórica, una conjetura, una estructura abstracta, estudiar un determinado concepto o relación es suficiente con lo explicitado, aunque hoy día, en muchas ramas de esta disciplina, la computadora se ha convertido en el laboratorio del matemático. Muy a diferencia del físico, del químico o del biólogo, entre otros, que necesitan imprescindiblemente del instrumental de un laboratorio para experimentar.

En el aula, el profesor de Matemática más allá de enseñar nuevos y mayor cantidad de contenidos de esta Ciencia, lo más importante que puede enseñarle y transmitirle a sus estudiantes es que razonen. El razonamiento debe ser medular en la clase de Matemática, más allá de toda otra cuestión, ya que el desarrollo de este, desde niveles elementales no plantea problemas en sí mismo, y los profesores de matemática identifican bien los errores que los estudiantes cometen al respecto. En general, el estudio de lo que es el razonamiento matemático no llama la atención de los educadores. (Pluvinage, 1996)

De esta manera, el razonamiento, que debe ser protagonista en el aula de Matemática se reduce cada vez más, otorgándole cada vez mayor espacio a la realización de problemas cuya mayor dificultad requiere la aplicación de algoritmos. La formalización, tiene un gran número de adeptos en la profesionalización docente, a través de un diseño instruccional donde predomina el rigor en el tratamiento de conceptos e ideas matemáticas, por sobre las justificaciones, explicaciones y argumentaciones coloquiales construidas por el estudiante desde su propio lenguaje natural. Los contenidos son importantes en un curso de Matemática pero no es lo central. Lo verdaderamente crucial y medular es que el estudiante, más allá de los contenidos, pueda razonar, explicando y justificando cada procedimiento utilizado; y también pueda argumentar ante la necesidad de validar la verdad de una proposición, pero esta argumentación debe ser producto del propio estudiante. Esto significa, que el estudiante debe generarla desde una explicación elaborada en un lenguaje coloquial propio, y no desde lo formal, que puede conducir a un aprendizaje ritual. En la opinión de Rodd (2000), se puede justificar una proposición reproduciendo una prueba de la misma, pero esta prueba no garantiza el conocimiento de la proposición porque la prueba no es el razonamiento propio de quién la reproduce. Pero quién reproduce la prueba, no siempre lo hace desde la comprensión y esta afirmación se hace desde la certeza de la investigación que requirió la lectura de muchas otras investigaciones sobre esta cuestión.

Los primeros descubrimientos de Álgebra se deben a pueblos primitivos donde la prueba no era un tamiz de certeza acerca de la validez del descubrimiento del algoritmo que se proponía. El ejemplo y las protoargumentaciones abundaban en esos pueblos primitivos, tal y como propugna Balacheff (2000) cuando encuadra a estas acciones extrapoladas a un estudiante como *empirismo ingenuo* y *experimento crucial* en su clasificación de sus modos de demostrar.

Los griegos fueron la primera civilización que formalizó la prueba matemática, debido a que fueron capaces de vincular a esta disciplina con la filosofía, dándole el carácter y estructura propia de una argumentación lógica a las demostraciones.

La tendencia, defendida a medias, de analizar la perspectiva histórica en la didáctica de la Matemática, tuvo un surgimiento en la década del 60' del siglo XX para aumentar de forma potencialmente creciente hacia los últimos treinta años. Siguiendo esta línea, la actitud del estudiante sigue siendo invariante frente a la prueba en los inicios de sus estudios en la universidad, a pesar de los progresos cada vez más veloces, a nivel tecnológico. Esta actitud es extrapolable a la actitud antes descripta que caracterizaba a los pueblos primitivos frente a la prueba y el ejemplo. El estudiante recorre en su camino de aprendizaje una especie de viaje acelerado en el tiempo que reproduce los obstáculos epistemológicos y cognitivos con los que el ser humano se enfrentó a lo largo de la historia.

Es entonces, que más fuerza cobra la afirmación de Adúriz – Bravo (2002), ya que el profesor de Ciencias, y en particular el profesor de Matemática debe tener una formación sólida e integral que abarque no solo aspectos cognitivos de la disciplina, sino históricos, epistemológicos y didácticos muy bien sostenidos y vinculados en un andamiaje conceptual que permita generar un entramado de contenidos listos para un ámbito áulico, capaces de transmitir un saber enseñado que contemple esos cuatro aspectos antes citados al servicio de la optimización del aprendizaje. Esto implica que el profesional de la Educación Matemática debe generar un diseño, un diseño que comprenda implícitamente el entramado antes descrito.

De esta forma, los profesionales de la Educación Matemática, de forma análoga a los que se dedican al arte, son hacedores de diseños. Particularmente se trata de diseños para clases de Matemática. Y estos diseños deben ser atractivos y estéticos, de la misma forma que para el arte, debiendo relacionarse de forma armónica como asimismo las ideas que estructuran una clase. Deben ser hermosos, y la hermosura es la prueba inicial, ya que en el mundo no hay un lugar definitivo para una clase fea de matemática. (Hardy, 2005)

CAPÍTULO II

El PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

"Las Matemáticas no son un recorrido prudente por una autopista despejada, sino un viaje a un terreno salvaje y extraño, en el cual los exploradores se pierden a menudo.".
W.S. Anglin. (1949). Matemático contemporáneo

Resumen

En este capítulo se presentan antecedentes acerca del razonamiento de estudiantes universitarios en diferentes áreas de la Matemática como disparador al problema de investigación. Se contextualiza la investigación, mostrando el escenario de acción y los actores que interactúan en tal escenario. Luego se presenta concretamente el problema de investigación a través de las clásicas preguntas. Consecuentemente surgen los objetivos generales y específicos para finalmente presentar las hipótesis de la investigación y la postura adoptada en este estudio, tanto a nivel didáctico como epistemológico.

II.1. Antecedentes

La actividad docente ha llevado a observar cada año las dificultades que presentan los estudiantes universitarios de ingeniería al utilizar los razonamientos que les permiten el desarrollo de demostraciones en Álgebra y Cálculo. Estas reiteradas observaciones permitieron una continua reflexión sobre esta problemática y el objetivo que se propone esta investigación es, en parte, producto de esa preocupación.

Antes de continuar, debe destacarse que es de importancia relevante, aclarar una cuestión fundamental que hace a esta investigación y que puede generar confusión para quien esté leyendo este trabajo. Deben distinguirse claramente los modos de demostrar de un estudiante, de los modos de razonar de estos en una prueba. Esta cuestión es muy delicada ya que ambos modos mencionados se relacionan tangencialmente de forma imperceptible, pero sin embargo apuntan a cuestiones diferentes. Recurriendo a un lenguaje cotidiano, se puede decir que ambos, son 'las dos caras de una moneda'. Godino & Recio (2001) consideran que:

> Una demostración es el objeto emergente del sistema de prácticas argumentativas (o argumentos) aceptadas en el seno de una comunidad, o por una persona, ante situaciones de validación y decisión, esto es, situaciones que requieren justificar o validar el carácter de verdadero de un enunciado, su consistencia o la eficacia de una acción. (p.406)

En general, los modos de demostrar de un estudiante tienen que ver con la forma en que este construye una prueba que le da validez de una proposición, mientras que los modos de razonar tienen que ver con la argumentación desarrollada por el estudiante en la construcción de la prueba. Esto último, es el motivo central de esta investigación.

El estado del arte nos muestra que se han escrito numerosos trabajos sobre la demostración matemática fundamentalmente descriptivos y centrados en la geometría, que caracterizan los modos de demostrar del estudiante. Respecto a los modos de razonar, hay trabajos de investigación sobre el razonamiento matemático en estudiantes secundarios, universitarios y de posgrado referidos al razonamiento geométrico y visual; razonamiento estocástico; razonamiento plausible; las prácticas de justificación y las prácticas de argumentación, entre otras. A continuación, se realiza una breve reseña de algunas de estas investigaciones.

El precedente inmediato de esta investigación es un trabajo de investigación llevado a cabo por D´Andrea, Curia & Lavalle (2010, 2012), cuyo objetivo principal fue un estudio cualitativo acerca de las dificultades que presenta el estudiante universitario de Ciencias Naturales e Ingeniería en el uso del razonamiento deductivo durante procesos de validación de proposiciones matemáticas. Como consecuencia de la investigación se gestó una ingeniería didáctica para la optimización del proceso de enseñanza y como consecuencia del aprendizaje de la demostración, posibilitando el desarrollo de la capacidad de razonamiento lógico deductivo del estudiante.

A nivel de razonamiento visual, se detallan a continuación los resúmenes de algunos trabajos de investigación que hacen referencia a este tipo de razonamiento utilizado en Matemática.

Gómez Chacón (2012) realizó un trabajo sobre el razonamiento visual en Matemática. En éste analizó no solamente como la Matemática ha sido reconocida a través de la imagen, sino también como este tipo de razonamiento es determinante para la comprensión e inspiración de descubrimientos. A través de una investigación empírica, analizó las características de la visualización en geometría y los obstáculos y aportes que brinda este razonamiento en el proceso de enseñanza con estudiantes universitarios.

Ramírez; Flores & Castro (2010) presentan una investigación en donde describen una experiencia con estudiantes con talento matemático, encaminada a observar la visualización durante la realización de actividades geométricas y al análisis de algunas de las dimensiones de la visualización que se ponen en juego.

Figueiras Ocaña & Deulofeu Piquet (2005) analizan la utilización de diagramas visuales en la resolución de problemas y su efecto sobre el significado que se atribuye a la matemática. En el trabajo se presta atención a la interacción de tres perspectivas –sociológica, cultural y cognitiva–, desde las cuales se han desarrollado investigaciones diversas sobre visualización.

Hitt (1998) a través de su trabajo de investigación considera que la visualización matemática requiere de la habilidad para convertir un problema de un sistema semiótico de representación a otro. Su trabajo se enfoca esencialmente sobre el papel que juegan los sistemas semióticos de representación en el aprendizaje de conceptos matemáticos, y su relevancia con la articulación entre diferentes representaciones de esos conceptos. En este trabajo se puede observar que los estudiantes de enseñanza media y primer año universitario no logran crear una articulación coherente entre varios sistemas de representación relacionados a conceptos propios de ese nivel.

Entre algunos de los trabajos referidos al razonamiento estocástico, se citan a continuación algunos trabajos que se detallan a continuación:

Inzunsa Cazares y Vidal Jiménez Ramírez (2013) investigaron sobre el aprendizaje de la inferencia estadística en estudiantes universitarios de matemática, en particular se enfocaron en el nivel del razonamiento estadístico acerca de los conceptos y el proceso que involucran las pruebas de hipótesis. Los resultados revelaron que el razonamiento estadístico de los estudiantes que intervinieron se caracteriza por ser aislado en relación con los diversos conceptos abarcados en las pruebas de hipótesis. Los autores consideraron que esto se debe a la falta de comprensión y a las creencias erróneas sobre diversos conceptos involucrados.

Ramírez Arce (2008) presentó un trabajo sobre las formas de razonamiento en estudiantes de posgrado en el abordaje de la distribución normal apoyada en el enfoque frecuencial, de forma tal que posibilite un desarrollo práctico de la distribución utilizando la simulación con el software Fathom. El uso que los estudiantes hacen del software, permitió suprimir o cambiar conceptualizaciones o creencias equívocas sobre la distribución normal presentes en el pensamiento de los estudiantes. El software también permitió que los estudiantes tuvieran certezas manifestadas a través de la retroalimentación y firmeza del programa, posibilitando el direccionamiento del proceso de aprendizaje de la distribución, no haciendo énfasis en los aspectos operativos, pero si haciendo foco en la caracterización de la conceptualización.

Roa; Batanero Bernabeu & Díaz Godino (2000) abordaron una investigación sobre el razonamiento combinatorio en estudiantes universitarios de Matemática Avanzada. Analizaron las destrezas de los estudiantes en la resolución de problemas combinatorios de corte elemental, como así también sus dificultades para el abordaje y los obstáculos presentados en su resolución. Como resultado de la investigación, se pudo ver, entre otras cuestiones, que el proceso de enseñanza del análisis combinatorio no pone acento en el tipo de razonamiento que se requiere para la resolución de este tipo de problemas, haciéndose demasiado hincapié en las clásicas fórmulas y su aplicación, sin que exista de por medio un proceso reflexivo.

Serrano; Batanero; Jesús Ortiz & Jesús Cañizares (1998) realizaron una investigación sobre el razonamiento probabilístico. El propósito de esta investigación fue comparar el razonamiento probabilístico en dos niveles de estudiantes de secundaria (14 y 18 años). Como resultado, se observaron pocas diferencias, a pesar de que uno de los grupos recibió educación formal en probabilidad. Asimismo, se utilizó el análisis multivariante para evaluar la dependencia entre los diferentes tipos de heurísticas y sesgos que fueron detectados.

Entre algunos de los trabajos que investigan la argumentación desde la óptica de la socioepistemología, se hace a continuación una breve reseña de algunos de los trabajos llevados a cabo por Crespo Crespo (2005, 2007).
Crespo Crespo (2007) se propuso el objetivo de entender el perfil sociocultural presente en la argumentación matemática, observando en el aula, que diferentes argumentaciones presentadas por los estudiantes, no siempre responden a los moldes de la lógica clásica y quizás sean el producto de argumentaciones

construidas en espacios extracurriculares que el estudiante extrapola al ámbito escolar. Estos resultados evidencian una construcción de este tipo de argumentaciones como el producto acabado de una práctica social.

Crespo Crespo (2005) desarrolló una investigación acerca del rol que desempeñan las argumentaciones por reducción al absurdo en el ámbito áulico, comprendiéndolas como un proceso que permite garantizar y validar la verdad de una afirmación pero que se consigue a través de una construcción socio-cultural. Los resultados obtenidos evidencian que el entendimiento de que este tipo de argumentaciones no se utilizan en problemas que van más allá del ámbito escolar y/o académico, inclusive por los propios interesados que en muchas oportunidades no son capaces de sostener los razonamientos que las edifican.

Entre algunos de los trabajos que investigan acerca de esquemas de razonamiento en situaciones problemáticas no habituales se reseñan a continuación los siguientes:

Waldegg y de Agüero (1999) caracterizaron algunos esquemas de razonamiento que permiten abordar las habilidades cognitivas del individuo con estudiantes universitarios en situaciones problemáticas no rutinarias. Según estos autores, la resolución de un problema no rutinario manifiesta aspectos esencialmente cognitivos del individuo que pueden ser caracterizados como habilidades. En base a esto, el análisis realizado de las respuestas arrojadas por los estudiantes a una serie de problemas lógico-matemáticos no rutinarios, se centró en la identificación cualitativa de la clase de estrategia utilizada y patrones operativos utilizados.

Cañadas (2002) estudió el manejo del razonamiento inductivo en tareas matemáticas no habituales que tienen los estudiantes de los cursos últimos del ciclo medio. Para la realización del estudio, se escogió una actividad dirigida a los estudiantes que para su ejecución requiriera de la utilización del razonamiento inductivo. El estudio consistió en entrevistas realizadas a los estudiantes en el momento preciso en que realizaban la actividad, de forma que estos pudieran explicar sus razonamientos.

Markiewics (2004) realizó una investigación acerca del papel que juega el razonamiento plausible en el proceso de enseñanza de matemática en el nivel medio. El foco del estudio tuvo tres facetas. Una faceta epistémica, que se centró en los significados institucionales. Otra faceta cognitiva, que se enfocó en torno a significados personales, para finalmente direccionarse hacia una faceta instruccional en interacción con las otras dos.

Rigo; Rojano & Pluvinage (2011) realizaron una investigación empírica, centrada en el análisis de un estudio de caso longitudinal y el análisis del rol que juega la certidumbre para construir conocimiento matemático en el aula, examinando las prácticas de justificación. Se describieron patrones de racionalidad observados en las clases, mostrándose que en el ámbito áulico pueden confluir en un idéntico recorrido del discurso, tanto argumentos que se sostienen por razones como también por motivos, siendo tácitas y acumulativas estas justificaciones, y carentes de una estructura lineal.

Iriarte Díaz-Granados; Espeleta Maya; Zapata Zapata; Cortina Peñaranda; Zambrano Ojeda & Fernández Candama (2013) investigaron sobre el razonamiento lógico en estudiantes universitarios que se encontraban en el primero, tercero y quinto semestre de estudio. Los resultados encontrados, en general, muestran que hay diferencias reveladoras cuando los estudiantes se agrupan según el programa académico, siendo los más favorecidos los estudiantes de Medicina e Ingeniería en Sistemas.

Corral (2011) presentó un estudio dedicado al examen de las habilidades en razonamiento informal de estudiantes universitarios próximos al egreso de la carrera elegida. La investigación se centró en la observación de como disponen del conocimiento en la evaluación de la pertinencia de argumentos condicionales con nexos causales en su campo de estudio.

D´Amore (2005) mostró a través de ejemplos, que el proceder de un estudiante en procesos de argumentación en el desarrollo de una demostración, es más próximo a la lógica hindú que a la lógica aristotélica, siendo esta última, predominante en la cultura occidental y por lo tanto a nivel escolar. Este desempeño se caracteriza en que el estudiante siente la necesidad de anclar sus argumentaciones a deducciones ya conocidas que tienen en mente haciendo analogías, desde el comienzo, considerando a la tesis que se quiere probar como algo ya aceptado.

II.2. Problema de investigación. Importancia y pertinencia del proyecto

Algunos de los trabajos reseñados en el párrafo anterior se refieren a investigaciones acerca de las dificultades del estudiante universitario en el abordaje del razonamiento deductivo en procesos de prueba; el razonamiento visual en geometría; el razonamiento estocástico enfocado en diferentes facetas: razonamiento estadístico; probabilístico y combinatorio. Otros caracterizan algunos esquemas de razonamiento en estudiantes universitarios en situaciones problemáticas no rutinarias que permiten abordar las habilidades cognitivas del individuo desde una perspectiva compleja. Sin embargo, en la revisión bibliográfica realizada no se han encontrado trabajos que investiguen acerca del razonamiento que utiliza el estudiante universitario de ingeniería en demostraciones matemáticas en los cursos correspondientes a su formación básica tales como Álgebra, Geometría Analítica o Cálculo.

El análisis de como el estudiante universitario utiliza el razonamiento cuando realiza demostraciones en las disciplinas mencionadas, permitirá encontrar pautas de razonamiento, lo que constituye el problema de investigación de este trabajo.

El abordaje de este problema de investigación y su desarrollo puede contribuir notablemente a una mejora del proceso de enseñanza y como consecuencia, del aprendizaje de la demostración matemática en estudiantes universitarios en particular, pudiendo ser extensivo para estudiantes de otros niveles.

II.3. Escenario, actores y foco de estudio de la investigación

El escenario de la investigación que se plantea es el aula universitaria, los actores que se desenvuelven en este escenario son estudiantes universitarios que ingresan a carreras de grado de Ingeniería, y el foco de estudio es el razonamiento del estudiante en demostraciones de Álgebra elemental y Cálculo.

El estudiante universitario de Ingeniería al que se hace referencia es el estudiante de Argentina, quién de acuerdo a lo establecido de forma general por la resolución

1054/2002 del Ministerio de Educación de Argentina en lo que atañe a Educación Superior, se establece en las Ciencias Básicas, específicamente en Matemática, que: "*El objetivo de los estudios en matemáticas es contribuir a la formación lógico-deductiva del estudiante, proporcionar una herramienta heurística y un lenguaje que permita modelar los fenómenos de la naturaleza. Estos estudios estarán orientados al énfasis de los conceptos y principios matemáticos más que a los aspectos operativos.*"

A este respecto, es importante tener presente a Adúriz – Bravo (2017) que considera que "*los desarrollos recientes de la filosofía e historia de la ciencia motorizan la puesta en valor de argumentos y modelos en la enseñanza de las ciencias*" (p.4492).

La argumentación y la justificación son claves en la didáctica de la Matemática, de forma de no relegar a esta ciencia, en un 'recetario' de algoritmos y 'fórmulas mágicas' que permitan la realización de un simple ejercicio 'disfrazado' de problema que consiste en la aplicación de una fórmula. Adúriz – Bravo (2017) señala que un aprendizaje significativo y crítico en ciencias requiere inexorablemente de la argumentación, rescatando su valor epistémico como partícipe en los procesos de construcción de conocimiento científico sobre el mundo.

¿Porque en demostraciones de Álgebra elemental y Cálculo?

La elección de demostraciones de Álgebra elemental y Cálculo no es arbitraria. El estudiante universitario de Carreras de grado de Ingeniería cuando ingresa a la Universidad tiene en su currículum por lo general dos asignaturas iniciales de correlación horizontal: un curso de Cálculo en una variable y otro de Álgebra. En la actualidad, estos cursos son por lo general, en casi todas las facultades de ingeniería del país, de régimen cuatrimestral, pero en este estudio, la población elegida se encuentra en una institución universitaria que los mantuvo con régimen anual hasta 2017, inclusive.

Álgebra Elemental es parte del contenido del primer cuatrimestre de un curso anual de Álgebra y Geometría Analítica denominado Matemática II en la institución elegida para este estudio. Por otro lado, Cálculo diferencial e integral en una variable real es el contenido de la asignatura denominada Matemática I, de correlación horizontal con la asignatura antes nombrada y también se consideró un momento del curso anual de Cálculo en varias variables denominado Matemática III, de correlación vertical con las dos asignaturas mencionadas.

Analizar el razonamiento utilizado por el estudiante en demostraciones que forman parte de los contenidos de estos cursos iniciales tiene facetas muy ricas y diferentes que las que podrían evidenciarse en un curso posterior. El estudiante ingresante a la universidad ha egresado recientemente del ciclo medio y necesita aprender muchas cuestiones nuevas y el proceso de aprendizaje puede variar según los criterios, condiciones y concepciones presentes en el docente que conduzca estos procesos. Realizar este estudio en cursos posteriores no mostraría claramente la génesis de los procesos iniciales, porque el estudiante podría haber recibido diferentes paradigmas de ilustración y esas distintas influencias podrían obnubilar el foco de la investigación. Además, el razonamiento de las cadenas argumentativas que hacen a las proposiciones de Álgebra elemental es diferente al utilizado en Cálculo. La argumentación en contenidos de Álgebra elemental es lineal, asimilándose a la estructura del método directo de demostración de implicaciones. Es un razonamiento en estado 'puro', entendiéndose este vocablo desde el hecho de que el Álgebra no se nutre de otra disciplina como el Cálculo que, si lo hace y entre otras, se subsidia asimismo, del Álgebra. En Cálculo se requiere en muchas oportunidades de artificios o constructos que son elementos determinantes que permiten el arribo a la tesis establecida por una proposición. La construcción de estos artificios necesita del sujeto que razona y requieren de una heurística que no es demandada con frecuencia en Álgebra elemental. Asimismo, desde una perspectiva histórica, el Álgebra es previa al Cálculo, que, como se indicó párrafos atrás, se nutre del Álgebra y de otras ramas de la Matemática en la mayor parte de las oportunidades. Las demostraciones escogidas de Cálculo, se eligieron con el objetivo de analizar ciertos tipos de razonamientos que en Álgebra no pueden ser evidenciados.

II.4. La postura adoptada en esta investigación

Independientemente del foco de estudio, los actores y el escenario, en esta investigación está implícito el proceso de enseñanza y aprendizaje, requiriéndose que se deje constancia de la corriente epistemológica a la que esta investigación adhiere en relación con el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática. Explicitar acerca de lo que se considera que debe de ser el aprendizaje de esta Ciencia, aportará a la comprensión del porqué de esta investigación y la forma de llevarla a cabo.

La postura pedagógico-didáctica de esta investigación acerca del proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática está más próxima al constructivismo ausubeliano. En esta teoría de aprendizaje, el binomio enseñanza–aprendizaje constituye una unidad, pero los dos elementos no tienen la misma importancia. De este binomio, el aprendizaje es lo más importante y su constructor es el propio sujeto. El proceso de enseñanza tiene un lugar secundario, si se lo considera como la mera acción de la transmisión de conocimiento, quedando entonces el proceso de aprendizaje como una acción por descubrirse. Esto no significa que el rol del docente quede desvalorizado, ya que, para esta teoría de aprendizaje, el papel del profesor tiene un rol preponderante como guía del estudiante, siendo su actividad fundamental, la preparación minuciosa de situaciones adecuadas que permitan la apropiación de conocimiento, cumpliendo el estudiante un rol activo y determinante en el plan de aprendizaje.

Un "*aprendizaje significativo*" es el punto clave de la posición pedagógico-didáctica de esta investigación.

Lo que define a la teoría ausubeliana, precisamente es el **"***aprendizaje significativo***",** una etiqueta contemporánea y con plena vigencia en el diálogo de docentes, diseñadores del currículum e investigadores en educación. El aprendizaje significativo es el proceso según el cual se relaciona un nuevo conocimiento o información con la estructura cognitiva del que aprende de forma no arbitraria y sustantiva o no literal. Ausubel plantea que el aprendizaje del estudiante, depende de la estructura cognitiva previa que se relaciona con la nueva información, entendiéndose por "*estructura cognitiva"* al conjunto de conceptos e ideas que un individuo posee en un determinado campo del conocimiento, así como su organización. Esa interacción con la estructura cognitiva no se produce considerándola como un todo, sino con aspectos relevantes presentes en la misma, que reciben el nombre de subsumidores o ideas de anclaje o andamiaje. La presencia de ideas, conceptos o proposiciones inclusivas, claras y disponibles en la mente del aprendiz es lo que dota de significado a ese nuevo contenido en interacción con el mismo. Pero no se trata de una simple unión, sino que en este proceso los nuevos contenidos adquieren significado para el sujeto, produciéndose una transformación de los subsumidores en el contexto de su estructura cognitiva, que resultan así progresivamente más diferenciados, elaborados y estables. (Ausubel; Novak & Hanesian, 1983)

Chrobak (2017) es muy claro al referirse a este tipo de aprendizaje en el pasaje textual de su artículo que se cita a continuación, ya que su reflexión nos hace pensar acerca de que no es posible un aprendizaje de tal o cual manera en una absoluta totalidad, sino en una búsqueda equilibrada, y en términos matemáticos, podría decirse en 'una combinación lineal' del aprendizaje 'clásico' y de un aprendizaje significativo.

> En primer lugar, diremos que el aprendizaje puede tener múltiples grados de significatividad y que rara vez resulta 100% mecánico o 100% significativo sino que, en general, se ubica entre los extremos de un continuo que varía desde el puramente mecánico hasta el puramente significativo, tomando distintos grados de significatividad de acuerdo a cómo se fue adquiriendo el aprendizaje por parte del estudiante. Ausubel sostiene que para que ocurra el aprendizaje significativo, es preciso que el alumno sea consciente de que él debe relacionar las nuevas ideas o informaciones que quiere incorporar a los aspectos relevantes de su estructura cognoscitiva. Esto no debe realizarse en forma arbitraria o "al pie de la letra" sino substancialmente. (Chrobak, 2017, p.4)

Debe destacarse asimismo que la postura epistemológica adoptada para esta investigación debe distinguirse en dos partes.

Desde la perspectiva epistemológica global, esta investigación está adherida a la denominada Naturaleza de las Ciencias, término que hace referencia a diversos temas relacionados con la sociología, la filosofía , la historia y la didáctica de la ciencia. Es un metaconocimiento sobre la ciencia que resulta del producto del análisis interdisciplinario de las áreas del conocimiento antes citadas.

Desde la perspectiva específica de la Ciencia Matemática, la postura de esta investigación es lógico – formal y en esta posición se busca fundamentar la matemática desde una perspectiva constructiva edificada sobre un andamiaje lógico y carente de contradicciones.

II.5. Objetivos y Preguntas de Investigación

II.5.1. Objetivos Generales

A los fines de simplificar la lectura, en todo el texto de este párrafo, cada vez que se mencione al estudiante se hace referencia a un estudiante universitario ingresante de ingeniería, en situación de clase y frente a la acción de demostrar o probar la validez de proposiciones verdaderas de Álgebra y Cálculo.

Se formulan a continuación los siguientes objetivos generales.

1) Identificar pautas de razonamiento que el estudiante utiliza en clase para demostrar la verdad de una proposición matemática.
2) Determinar los factores y fenómenos didácticos que propician el desarrollo del razonamiento de forma que este permita argumentar, explicar y justificar en procesos de prueba.
3) Establecer si existe relación entre el razonamiento desarrollado por el estudiante y el paradigma del proceso de enseñanza utilizado por el docente.

Para hacer operativos los objetivos generales, se los ha desglosado en elementos concretos: preguntas de investigación a las que se pretende dar respuesta luego de finalizado el proceso de la investigación.

II.5.2. Preguntas de Investigación referentes a Objetivos Generales

Se formulan las siguientes preguntas de investigación:

¿Cómo pueden generarse pautas de razonamientos a partir del trabajo realizado por el estudiante en demostraciones matemáticas?;

¿Qué actividades potencian los diferentes razonamientos que el estudiante utiliza al realizar demostraciones?;

¿De qué depende la construcción de los razonamientos que utiliza el estudiante?;

¿Cómo se vinculan los diferentes razonamientos que el estudiante construye con las acciones de argumentar, justificar y explicar en demostraciones realizadas en clase?;

¿Cómo influye el paradigma de enseñanza adoptado por el docente a cargo de una clase en la utilización que el estudiante hace del razonamiento en procesos de prueba?

II.5.3. Objetivos Específicos

Se formulan los siguientes objetivos específicos:

1) Describir como razona el estudiante para la identificación de la hipótesis y la tesis de una proposición a demostrar y como vincula y emplea a ambas en el proceso de prueba.

2) Determinar cuando el estudiante utiliza la justificación y/o la explicación como sustento de la argumentación que sostiene a una demostración.

3) Establecer la relación existente entre las justificaciones realizadas por el estudiante y las hipótesis implícitas de la proposición a demostrar.

4) Identificar los procesos que el estudiante sigue para razonar mientras está desarrollando una prueba.

5) Analizar cómo el estudiante arriba a la conclusión de una prueba.

De la misma forma que con los objetivos generales, para hacer operativos los objetivos específicos, se los ha desglosado en elementos concretos: preguntas de investigación a las que se pretende dar respuesta luego de finalizado el proceso de la investigación.

II.5.4. Preguntas de Investigación referentes a Objetivos Específicos

Se formulan las siguientes preguntas de investigación:

¿Qué considera el estudiante como hipótesis para el desarrollo de una prueba y como la utiliza?

¿Qué considera el estudiante como tesis para el desarrollo de una prueba y como la utiliza?

¿Cuándo el estudiante utiliza la justificación y/o explicación como sustento de la argumentación que sostiene a una prueba?

¿Cómo se relacionan las justificaciones que el estudiante realiza con las hipótesis implícitas?

¿Cómo llega el estudiante a la conclusión de una prueba?

¿Cómo utiliza el estudiante la justificación en apoyo de una conclusión?

II.6. Hipótesis de investigación

Se formulan las siguientes hipótesis de trabajo:

1) El desarrollo y evolución del razonamiento del estudiante en demostraciones matemáticas, depende del paradigma del proceso de enseñanza adoptado por el docente.

2) Desde un paradigma de aprendizaje de tipo aproximativo, el estudiante es capaz, en ciertos casos, de llevar a cabo de forma autónoma un razonamiento puramente deductivo, que sigue la línea trazada por el denominado método directo de demostración de implicaciones.

3) El estudiante no es capaz de llevar a cabo de forma autónoma, razonamientos en pruebas que requieren para su desarrollo construcciones y artificios para llegar a la meta.

4) Cuando el estudiante generaliza, emplea el razonamiento inductivo y es capaz de obtener la proposición generalizada, pero es reacio a su proceso de validación.

CAPÍTULO III

MARCO TEÓRICO

"¿Qué es el hombre dentro de la naturaleza? nada con respecto al infinito. todo con respecto a la nada. un intermedio entra la nada y el todo."
Blaise Pascal (1623-1662) Matemático, físico, filósofo y escritor francés.

Resumen

En este capítulo se desarrolla el marco teórico o también denominado marco de referencia de esta investigación, consistente en la recopilación de antecedentes, investigaciones previas y consideraciones teóricas por donde se sustenta todo el proyecto de investigación, su hipótesis y consecuente análisis, permitiendo la interpretación de los resultados y la formulación de sus conclusiones. La importancia de este capítulo es supina ya que posibilita de forma ordenada y coherente, justificar, demostrar, apoyar e interpretar las hipótesis y los resultados de la investigación y, a su vez, formular de una forma confiable las conclusiones del proyecto o replantear preguntas de niveles superiores de abstracción y profundidad para futuras extensiones o derivaciones de la investigación en curso.

III.1. Un ligero recorrido de la demostración en la historia de la Matemática

Crespo Crespo (2007) en su tesis doctoral hace un interesante relato sobre la argumentación en la historia con y sin escenario aristotélico, que a continuación se resume brevemente:

En Egipto y Mesopotamia, en general, los conocimientos científicos tienen un carácter eminentemente práctico, particularmente el conocimiento matemático no pudo escapar a este destino. El mismo estaba reducido a Aritmética y Geometría y se transmitió también en forma práctica, no sobreviviendo de esta cultura, demostraciones o sustentos teóricos de resultados matemáticos obtenidos. Estos resultados fueron el producto de vías empíricas y tentativas. Cabe destacar que estos pueblos sabían manejar determinadas fracciones y aplicaban propiedades geométricas y algoritmos o ciertas reglas a casos puntuales. Asimismo, la presentación de los problemas eran presentados de forma retórica aunque no simbólicamente. Los planteos acerca de cuestiones numéricas eran realizados de forma concreta sin atisbo alguno de abstracción, mientras que las resoluciones de tipo algorítmica se realizaban a través de etapas y con la presentación de un resultado concreto.

En pueblos más primitivos, el conocimiento matemático se redujo estrictamente a la Aritmética, y los resultados obtenidos también tienen que ver con resultados basados en especulaciones que son el resultado de conjeturas empíricas y tanteos aleatorios, a lo sumo, ligeras y muy primitivas protoargumentaciones. Los documentos que han sobrevivido hoy día de estos tiempos a través de papiros y tablillas, tienen puntos en común tales como: planteo de los problemas en forma coloquial; planteo de las cuestiones estrictamente numéricas con datos concretos, carente de abstracciones y finalmente la resolución de los problemas a través de etapas secuenciales que presentan un resultado concreto, no genérico. Debe destacarse que estos pueblos aplicaban propiedades y reglas, no en forma general, sino para casos particulares. De los documentos de estos pueblos, que han sobrevivido en la actualidad, se desprende, que no había interés en la generalización, abstracción o una organización sistemática de los conocimientos con los que contaban.

Debe destacarse que que "*el desarrollo matemático en estos pueblos pone en evidencia la relación entre las necesidades materiales de una sociedad y la naturaleza de la matemática que desarrollaron*" (Crespo Crespo, 2007, p.73).

Esta investigadora manifiesta, con mucho criterio y precisión, que algunos estudiosos de la historia de la matemática aseveran que "*no se puede sostener que se trata en ambos casos de reglas empíricas a las que se llega mediante un penoso esfuerzo de ensayo y error para problemas específicos, sin ninguna conciencia de una aplicación general*" (Joseph, 1991, p.181).

Lo que si es cierto es que no hubo una herencia de esos pueblos acerca de argumentaciones o pruebas rigurosas pero, la evidencia al proceso posterior a la resolución de ciertos problemas específicos se manifestó en la realización de verificaciones y comprobaciones que evidenciaban que los resultados obtenidos eran correctos. En cierta forma, tales procesos nos colocan frente a hechos significativos en el desarrollo de la Matemática ya que una verificación puede considerarse un antecedente muy primitivo de demostración y en cuanto a argumentación, podría encuadrarse en una protoargumentación.

En los papiros encontrados y luego decodificados, se encontraron características muy particulares en cuánto al tratamiento de conceptos matemáticos. Aparecen fórmulas, de las que no se conoce ni su génesis, pero a continuación de la presentación de una formula aparecen varios ejemplos desarrollados de aplicación de la misma. Es importante destacar que se suele sugerir que los griegos se han basado en fórmulas de origen egipcio para la determinación de áreas y volúmenes pero se desconoce como estos llegaron al desarrollo de las mismas. Se presupone que esta cultura puede haber considerado no necesario explicitar argumentaciones lógicas que fundamentaran el desarrollo de tales fórmulas, considerando suficiente su presentación y correspondiente ejemplificaciòn.

Gillings (1972) es muy claro en referencia a estas cuestiones cuando manifiesta que "*un argumento o demostración no simbólicos, pueden ser rigurosos cuando se dan para un valor particular de la variable; las condiciones de dicho rigor son que el valor particular de la variable debe ser típico, y que una ulterior generalización de cualquier otro valor debe ser inmediata*." (p.233)

El legado de esta cultura, manifiesto a través de sus escritos, se sintetizó a través de la explicación de diferentes procedimientos para resolución de específicos problemas a través de una explicación secuenciada y ordenada de pasos que a modo de cierre y conclusión siempre agregaban una verificación exhaustiva que mostrara que la solución al problema planteado era la correcta. Su visión de la ciencia en aquel momento era la descripta y su construcción matemática, particularmente, por lo que queda al descubierto la epistemología utilizada.

En la India, el desarrollo de la Matemática es notable, ya que aparecen en ciertos casos, un sesgo argumentativo con el fin de explicar ciertos resultados. Algunas de estas argumentaciones encontradas se pueden hallar en los denominados Sulvasutras que son textos en los que se encuentran descripciones de las formas geométricas y las orientaciones de los altares y ubicación de los fuegos sagrados, todo de acuerdo a lo establecido por los denominados libros védicos, de carácter sagrado. En períodos posteriores, se encontraron deducciones de fórmulas, para la realización de cálculos geométricos y trigonométricos. También es importante destacar que aparecen argumentos visuales como pruebas, tal es el caso del Teorema de Pitágoras, que presenta Bhaskara en que la demostración consiste en una gentil invitación al lector, a que observe las figuras, reflexione y extraiga una conclusión. La Matemática china tuvo clara preferencia por lo concreto, aunque también en geometría fueron comunes las argumentaciones de tipo visual.

Hacia el siglo III o IV a.C. los Sütras acumulan mucho material filosófico heterogéneo, proponiendo una lógica naturalista cuyas bases se sientan en lo sensorial, y no en el raciocinio. Cuando se habla de la inferencia naturalista, no se puede pensar en estructuras lógicas, como las conocidas de la lógica aristotélica, sino en la búsqueda del conocimiento en relación con la percepción de los signos y su significado. La lógica nyaya tiene una base empirica pero generó una teoría sustentada en una racionalidad sostenida en la causalidad.

En Grecia, la relación entre Matemática y Filosofía, que ya fue expuesta en el Capítulo I, es el gran aporte de la civilización griega, y desde entonces, Matemática ha mantenido una estrechísima relación con la Filosofía y las demás Ciencias hasta el punto de que algunos de los más grandes filósofos han sido también grandes matemáticos como el caso, por ejemplo, de Descartes (1596–1650). Crespo Crespo (2007) resume la cuestión en la siguiente cita textual: "*Surgen en este escenario, los primeros filósofos – científicos, que modifican la visión de la ciencia a partr de la búsqueda de explicaciones racionales y no míticas.*" (p.81).

A partir de aquí, la Matemática sufre un punto de inflexión, donde la prueba comienza a imperar como modo y método propio de su epistemología, intensificándose cada vez más, con el correr de los tiempos. Asimismo, debe destacarse que en el siglo XX hubo personas que quisieron realizar pruebas a través del ordenador, pero la validez y legitimidad de la misma, independientemente de todo cambio tecnológico, sigue siendo aún la argumentación en 'lápiz y papel', con esto último se hace alusión, al desarrollo de una prueba dotada de una argumentación en estado puro.

En la actualidad, según palabras de Gascón (1997, p.19) la transición del ciclo medio a la universidad se genera del modo siguiente: "*Se produce el paso de una actividad mostrativa*", la del ciclo medio actual, "*a una actividad matemática demostrativa*", la de la universidad; y asimismo, "*se pasa de una actividad matemática atomizada*", la del ciclo medio, es decir, una actividad matemática que muestra los contenidos en compartimentos estancos hacia "*una actividad matemática más globalizada*" que es la realidad universitaria, donde el estudiante debe integrar los contenidos e interrelacionarlos de forma unívoca.

Esta actividad mostrativa y atomizada en una búsqueda hacia la demostración y la globalización conceptual están claramente ligadas a la comprensión del lenguaje matemático y su método, obedecen a ciertos estadios de madurez, que no se aceleran, o por el contrario, podrían ralentizarse pero no cambian demasiado en el tiempo, a pesar, de los vertiginosos cambios tecnológicos.

La comprensión del lenguaje matemático y su método tienen que ver estrictamente con el lenguaje simbólico, que realizó un largo y sinuoso recorrido en la historia y evolución del hombre actual para poder alcanzarlo y que Mariño (2019) sintetiza muy bien en esta reflexión que se reproduce textualmente a continuación:

> Una vez que comprendimos el juego que puede dar el pensamiento simbólico, lo aplicamos no solo a comunicarnos entre nosotros sino también a comunicarnos con la naturaleza de las cosas, para lo cual desarrollamos el lenguaje universal de las matemáticas. Hemos vestido al mundo con ese idioma de la lógica y la racionalidad, que nos sirve tanto para calcular la trayectoria de un hacha de piedra como para domesticar la

> radiación electromagnética que ahora mismo permite comunicarnos con la Voyager 1. (p.140)

Y se vuelve a la idea original que se plantea hacia el final del capìtulo I, la clave está en la formación del profesorado y las estrategias áulicas que formulen para poder ‘sacar fuera’ de ese ser humano actual, todo ese potencial que le es propio, tal como reza la mayéutica de Sócrates. Es interesante citar, a propósito de esto, un pensamiento de Lang (1985) quién afirma que hay una considerable evidencia de que estamos naturalmente programados para que nos gusten las matemáticas ya que observó notablemente que cualquier niño de cinco años o menos siente placer al contar, sumar y restar, hasta que este se estropea por una enseñanza incompetente u otros factores sociales.

III. 2. El Razonamiento

III.2.1. Razonamiento, Argumentación y Demostración

Matemática es una disciplina que, desde su epistemología, se basa en el razonamiento y la abstracción. Los cursos de Matemática universitaria, independientemente a quién estén dirigidos, no pueden prescindir de los procesos de razonamiento y argumentación implícitos en las demostraciones o pruebas matemáticas que constituyen el núcleo central de la epistemología de esta Ciencia. Los procesos de prueba requieren del razonamiento y el razonamiento implícitamente requiere de las acciones de argumentar, justificar y explicar.

A continuación, se analizarán detenidamente estas tres acciones.

El pensamiento crítico según Paul & Elder (2003) hace referencia al particular modo de pensar y razonar acerca de cualquier contenido o problema, en el que el sujeto que piensa "*mejora la calidad de su pensamiento al apoderarse de las estructuras inherentes del acto de pensar y someterlas a estándares intelectuales.*" (p.4)

Chrobak (2017) describe con precisión de que se trata el pensamiento crítico, como se expone a continuación:

> Realmente, el uso del pensamiento crítico es una de las más importantes habilidades necesarias para el buen desempeño de las personas durante el siglo XXI. Esto se debe a que el pensamiento crítico involucra plantearse preguntas, analizar y

> evaluar –o emitir juicios de valor– basados en la información presentada. Todas estas características lo convierten en una de las habilidades primordiales a ser adquiridas por los estudiantes de todos los niveles educativos. (p.2)

Álvarez (2005) considera que "*la argumentación es el mecanismo que relaciona información concreta con abstracciones y generalizaciones; es decir, es el proceso que relaciona datos, siguiendo reglas del pensamiento crítico, para generar una nueva información."* (p.74)

Un sujeto con pensamiento crítico tiene la capacidad de formular problemas y preguntas relevantes con efectividad y precisión. Argumentar requiere de estas acciones, necesita formular y reformular problemas y preguntas, una y otra vez, relacionando diferentes pistas para poder arribar a determinada meta.

Crespo Crespo (2007) considera que el razonamiento es una actividad intelectual que no se puede someter exclusivamente a una administración de información, sino que es el gestor de "*prácticas argumentativas personales"* (p.59) o también institucionales pero que necesitan del establecimiento de su espacio a nivel comunicacional. El razonamiento se desarrolla a través de dichas prácticas argumentativas, y en consecuencia su estudio está ligado al de la argumentación, actividad que adopta muchas formas ya que abarca enfoques muy disímiles.

Codina Sánchez y Lupiañez Gómez (1999) definen el razonamiento como un esquema organizado de proposiciones que se encuentra orientado hacia una proposición que cumple el rol de objetivo del mismo, de ahí que la denominen proposición objetivo, con el propósito de modificar su valor epistémico y como consecuencia poder alterar su valor de verdad bajo el cumplimiento de ciertas condiciones. Destacan que hay dos características imprescindibles que requiere un discurso para que pueda ser considerado un razonamiento. Por un lado, debe estar orientado hacia la proposición objetivo, es decir, a la proposición que se quiere justificar. Por otro lado, debe estar centrado en el valor lógico o epistémico de la proposición objetivo y no sobre su contenido, característica que distingue al razonamiento de la explicación. La explicación de una o varias razones tiene la función de volver comprensible un dato, una hipótesis o una proposición, tiene un valor descriptivo, no epistémico.

El razonamiento, valga la redundancia, da razones que sostienen al andamiaje total de una argumentación, pero el papel que le corresponde es el de conferir potencia al argumento que permite justificar una determinada afirmación.
Si se contextualiza el término justificación en relación al procedimiento que puede realizar un estudiante en la resolución de un problema o en el sostén del valor de verdad de una proposición, se hacen referencia entonces a los recursos argumentativos que se establecen en una clase de matemática para sustentar enunciados con contenido matemático y para promover un grado de adhesión y convencimiento hacia él.

Hanna y Jahnke (1996) consideran que en general, la justificación suele tener dos propósitos: un propósito epistemológico que consiste en la aseveración, explicación o fundamentación de una verdad matemática; y por otro lado, un propósito psicológico, que consiste en que el interlocutor consiga algún aprendizaje, así como un estado epistémico — que consiste en la certeza o convicción acerca del valor de verdad —hacia la proposición que se quiere validar, tal como lo considera Rigo (2009). Esta actitud de convencimiento propugna en el estudiante el desarrollo de un criterio de certeza que será determinante en el futuro profesional. En referencia a estas acciones, Segura y Chacón (1996) sostienen que los sistemas tradicionales de enseñanza en la educación no le dan al estudiante, las herramientas para indagar, analizar y discernir la información, que lo lleve a la verdadera toma de decisiones. Los conocimientos impartidos son más bien atomizados, memorísticos y no fomentan el desarrollo de la iniciativa, la creatividad, ni la capacidad para comunicarse efectivamente por distintas vías.
Codina Sánchez y Lupiañez Gómez (1999) consideran que la elaboración de saberes que se pueden concebir en un razonamiento dependerá de la explicación. Precisamente en la explicación, el valor epistémico de la proposición no se toma en cuenta, apoyándose solo en el contenido de esta. El análisis de aceptación de los argumentos, por el contrario, depende del razonamiento, y el valor epistémico aquí si se tiene en cuenta; la cadena de razones que conforman el razonamiento trata de comunicar y otorgar potencia a la argumentación. Por lo tanto, confieren un nuevo valor a la conclusión. El razonamiento tiene por objetivo modificar el

valor epistémico de una proposición objetivo y la determinación de su valor de verdad en el momento en que se satisfacen ciertas condiciones.

Una argumentación no es una demostración, su estructura está determinada por nexos organizativos; de modo que para que un razonamiento sea considerado una demostración, este debe de ser válido (tener vínculos de validez) y tener como objetivo: la verdad, mientras que la argumentación es un razonamiento que obedece a vínculos de pertinencia y tiene como objetivo lo creíble y el convencimiento de los demás o de sí mismo, siendo, por tanto, más cercano a prácticas discursivas espontáneas. Es importante distinguir la diferencia que significa para un estudiante, la acción de apropiarse de un contenido concreto cualquiera como podría ser una estructura conceptual, que puede ser incorporada de forma mediata, ya que lo único que se requiere es la comprensión. En cambio, el razonamiento y consecuentemente la argumentación, justificación y explicación necesitan de un proceso de construcción que se adquiere a través de una práctica cotidiana, producto de la maduración intelectual y no se produce de forma inmediata. Si estas últimas acciones se intentan incorporar como contenidos concretos, tratando el estudiante de satisfacer lo requerido por el profesor, convierte a este conocimiento en "*inerte*" (Perkins, 1995), de forma que no puede ser extrapolado a situaciones nuevas. A la hora de reproducir estos procesos en un examen, y concretamente a la hora de llevar a cabo una demostración, "*esta existe para el alumno como un ritual, un discurso que debe repetir o cuyo estilo debe imitar si se le pide probar un enunciado, más que como una herramienta explicativa basada en un sistema común de validación construido y aceptado por él y su grupo*". (Azcárate Giménez, 1995, p.8)

En relación a la última cita, resulta muy atinado y adecuado mencionar la siguiente afirmación de Santaló (1962) que en relación a esta investigación y la prueba matemática y sus cuestiones implícitas, resulta sumamente descriptiva.

> Si un alumno sabe repetir una demostración, pero no sabe repetirla si se cambian las letras o la posición del polígono, significa que ha aprendido la demostración de memoria y esto sí no tiene ningún valor. Mejor dicho: tiene un valor altamente negativo, pues significa que el alumno, no solamente ignora tal demostración, sino que desconoce totalmente lo que es la

> Matemática y que ha desperdiciado el uso de la memoria con un objetivo inútil y nada educativo. (p.21)

Duval (1999, 2000) hace una diferenciación muy precisa en los términos argumentación, explicación, demostración y razonamiento utilizados en el contexto de Matemática y su proceso de enseñanza y aprendizaje. Una argumentación trata de mostrar el carácter de verdad de una proposición. Una explicación da una o más razones para volver comprensible un dato, un resultado o un fenómeno. Una demostración es una secuencia de enunciados organizados según reglas determinadas. Un razonamiento es un proceso vinculado con la explicación en el que se dan razones con la finalidad de comunicar su fuerza de argumento a las afirmaciones que se deben justificar.

Crespo Crespo (2007) considera que para Duval, la argumentación está estrechamente ligada al concepto de justificación de una proposición verdadera cuyo valor de verdad se quiere probar o bien una proposición que se quiere refutar. Pero en el proceso de justificación, deben tenerse en cuenta la diferenciación de dos cuestiones claves: la producción de argumentos o razonamientos y la aceptación de estos.

En relación a la memoria, Perkins (1995) es muy claro al referirse a estas cuestiones al denominar "*Síndrome del conocimiento frágil*" al problema en su totalidad ya que los estudiantes generalmente presentan un conocimiento frágil en diversos aspectos y que pueden encuadrarse del modo siguiente:

El conocimiento olvidado, donde ocurre en ocasiones, que buena parte del conocimiento simplemente se esfuma. **El conocimiento inerte** donde los estudiantes recuerdan los conocimientos adquiridos durante el examen pero son incapaces de recordarlos o utilizarlos en situaciones que admiten más de una respuesta y en las que verdaderamente los necesitan. **El conocimiento ingenuo** en el que aún después de haber recibido una instrucción considerable, los estudiantes suelen tener ideas ingenuas acerca de la naturaleza de las cosas. **El conocimiento ritual** en donde los conocimientos que los estudiantes adquieren tienen con frecuencia un carácter ritual que solo sirve para cumplir con las tareas académicas o escolares, según corresponda el nivel.

III.2.2. Razonamiento y Verificación

El proceso lógico de verificación es la primera instancia que el estudiante universitario aborda como una instancia anterior a la protoargumentación, pero lo hace sin ser consciente de ello. Según Balacheff (2000) a esta postura se la denomina *empirismo ingenuo*. Esta acción procede simplemente desde la intuición y al momento de realizar una verificación, el estudiante universitario de Ingeniería realmente no sabe cómo proceder. Lo hace buscando ejemplos aleatorios 'que funcionen', sin criterio. Lo precedentemente descripto denota dos cuestiones epistemológicas importantes. Por un lado, la confusión del estudiante frente a las acciones de demostrar y verificar. Por otro lado, el desempeño en la actividad de realizar verificaciones, que no es llevada a cabo adecuadamente sino a través de un 'tanteo', pero sin un sostén apropiado y un conocimiento consistente de lo que se está realizando. ¿Será conocida la palabra verificación por el estudiante?, y en tal caso, ¿Se comprenderá la palabra en el contexto epistemológico de la Ciencia Matemática, por lo menos de forma primitiva?

D´Andrea et al (2010, 2012) definen esta acción del modo siguiente: *"Verificar una proposición (no es demostrarla) sino que es exhibir un ejemplo que la haga verdadera."* (p.240)

Un test piloto realizado en un grupo de ingresantes a Ingeniería, corrobora este desconocimiento. Se le propuso al grupo mencionado que en una tabla de doble entrada vincularan la significación de una serie de términos que hacen a la epistemología de la Ciencia Matemática. Resultó notable que la palabra ejemplo, de un uso tan cotidiano y habitual, fuera solamente reconocida en un 50% aproximadamente de la muestra analizada. (Sastre Vázquez y D´Andrea, 2011)

Mariotti (1998) considera que la diferencia existente entre la verificación empírica, que es característica del comportamiento de la vida cotidiana y el razonamiento deductivo, que es característica del comportamiento teórico, resulta ser un impedimento para el proceso de aprendizaje comprensivo de la prueba. En la práctica educativa, es habitual la confusión entre estos dos puntos de vista y por ende, esto despista al estudiante. El estudiante considera que el ejemplo protagoniza un papel preponderante al momento de establecer axiomas y teoremas, pero los consideran indebidos cuando se les pide que prueben la validez de un enunciado. Consideran que uno o varios ejemplos no son aceptables como una prueba pero en realidad, la relación entre verdad empírica y validez lógica resulta que es una relación clave y trascendente en matemática que debe ser inexorablemente desarrollada a través de la educación.

La supresión de desarrollos teóricos en el ciclo medio ha limitado la cursada en este estadío, a la realización de una práctica consistente en ejercicios donde la única dificultad que poseen es la aplicación de un algoritmo concreto, sin que medie la reflexión y la justificación de los procedimientos. Esto lleva a que el proceso de maduración intelectual, se retrase, de modo que el ingresante universitario, se encuentra con un universo diferente al del ciclo medio. Los cursos universitarios de Matemática requieren del sustento de la teoría para realizar la práctica, hábito no desarrollado, donde según expresión textual del estudiante: 'Matemática es sentarse a hacer ejercicios'. Esta praxis, tan alejada del método matemático, persiste en la estructura mental del estudiante, aún al ingresar a la Universidad y luego de un tiempo de estancia en esta e inclusive luego de recibir la instrucción sobre la forma adecuada de trabajo en Matemática, predomina aún así un conocimiento ingenuo (Perkins, 1995). Esta actitud puede ser debida a que, aún cuando pueda parecer que los estudiantes conocen la prueba de una proposición matemática verdadera no axiomática, siguen sintiendo la necesidad de una verificación. (Vinner, 1983).

Healy y Hoyles (2000) sostienen que los estudiantes necesitan realizar ensayos de verificación – inclusive después de realizada la demostración – porque precisamente, la demostración no los convence y la exhibición de ejemplos les refuerza la idea conceptual propugnada por la proposición demostrada. Fishbein (1982) confirma la tesis precedente, sosteniendo que más allá del hecho de que una prueba formal confiere validez general a un enunciado matemático, para confirmar esa validez, necesitan de controles posteriores.

La elección adecuada de ejemplos es una tarea que requiere reflexión y su práctica cotidiana contribuye a la construcción del razonamiento del estudiante. Wason y Mason (2005) establecen como definición de ejemplo, a un procedimiento a partir del cual,el estudiante podría establecer una generalización y definen al proceso de ejemplificación, como la representación de una categoría genérica con la que el estudiante necesita entrar en contacto para extraer un caso particular. Lo que se postula a través de estas aproximaciones es precisamente establecer que el uso de ejemplos ayuda al estudiante a la generalización. Esta, permite la abstracción de situaciones concretas, constituyéndose en el puente para la construcción de argumentaciones. La elección adecuada de ejemplos y contraejemplos y la guía del docente en tal búsqueda en las instancias iniciales, constituiría un disparador para la producción de demostraciones.

III.3. Tipos de Razonamiento Matemático

III.3.1. Introducción

Hanna y de Villiers (2008) sostienen que lo que trasciende en la prueba matemática y es desafío para el docente, es el incentivar la utilización de la prueba como un método no sólo para certificar que algo es cierto, sino también por qué es verdad.

Una prueba también puede ser de invalidez, de modo que se necesitará asimismo, certificar la incerteza de una proposición falsa y justificar porque lo es. En esta doble función que trasciende, se encuentra la meta de la validación. Pero en la determinación de porque es verdad o porque es falsa una proposición, se encuentran implícitas las acciones de justificar, explicar y argumentar. Y es el razonamiento el que permite estas acciones, y su desarrollo en el estudiante es uno de los objetivos principales en el aula de Matemática. Una de las herramientas que permite este desarrollo, es la demostración o prueba matemática.

A continuación, se realiza una breve descripción de los principales tipos de razonamientos que pueden presentarse en Matemática.

III.3.2. Razonamiento Lógico Deductivo

El ***Razonamiento lógico*** consiste en que partiendo de uno o más juicios, que constituyen las hipótesis, se desprende como consecuencia un nuevo juicio que es la tesis o conclusión del razonamiento. Se distinguen tres tipos de razonamiento lógico: deductivo, inductivo y abductivo.

Un razonamiento es **deductivo** cuando las proposiciones que constituyen la hipótesis del mismo, son evidencia de la verdad de la conclusión. En tal caso se dice que el razonamiento deductivo es válido, en caso contrario, inválido. Es

decir, que la conclusión, se sigue necesariamente de las premisas. En tal caso, se dice que el razonamiento deductivo es válido, y si es válido, significa que, siendo las premisas verdaderas (hipótesis), entonces la conclusión también lo será.
Un razonamiento entonces se considera válido, cuando es imposible que su conclusión sea falsa, siendo sus premisas verdaderas.

Ejemplo 1 extraído de la lógica aristotélica:

Todos los gigantes son malhumorados.

Polifemo es un gigante.

Por lo tanto, Polifemo es malhumorado.

Ejemplo 2 extraído de la lógica aristotélica

Todos los hombres son mortales

Sócrates es mortal

Por lo tanto, Sócrates es hombre

Ejemplo 3 extraído de la lógica aristotélica

Platón era un gran filósofo

Todos los griegos eran grandes filósofos

Conclusión: Platón era griego

Ejemplo 4 extraído de la Matemática

$$\alpha \in \mathbb{C} \ es\ raíz\ de\ p(x) \in \mathbb{C}[x] \Leftrightarrow p\ es\ divisible\ por\ x-\alpha$$

Las diferentes argumentaciones que sostienen la validez de la prueba se justifican respectivamente en virtud de la definición de raíz de un polinomio; el teorema del resto y la condición de divisibilidad de un polinomio.

$prueba:$

$$\alpha \in \mathbb{C} \ es\ raíz\ de\ p \in \mathbb{C}[x] \Leftrightarrow p(\alpha)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow El\ resto\ de\ dividir\ p\ \ por\ x-\alpha\ es\ nulo \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow la\ división\ de\ p\ por\ x-\alpha\ es\ exacta \Leftrightarrow p\ es\ divisible\ por\ x-\alpha$$

Ejemplo 5 extraído de la Matemática:

Si un número es par, entonces su cuadrado es par

Simbólicamente: $\forall x \in \mathbb{Z} : x \ es \ par \Rightarrow x^2 \ es \ par$

$$prueba : x \ es \ par \Rightarrow x = 2k \ / \ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 = 4k^2 \ / \ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2 = 2.\underbrace{2k^2}_{k'} \ / \ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2 = 2.k' \ / \ k' \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2 \ es \ par$$
$$\therefore \forall x \in \mathbb{Z} : x \ es \ par \Rightarrow x^2 \ es \ par$$

Las diferentes argumentaciones que sostienen la validez de la prueba se justifican respectivamente en virtud de la definición de número par, reiteradamente y la propiedad uniforme de la potenciación.

Ejemplo 6 extraído de la Matemática:

El producto de dos números pares es par.

En símbolos: $x \ es \ par \wedge y \ es \ par \Rightarrow x.y \ es \ par$

Puede observarse, a continuación, de forma similar al ejemplo 5, que las distintas argumentaciones que sostienen la prueba que sostiene la validez de esta proposición, se justifican reiteradamente por la definición de número par.

A diferencia de los dos ejemplos anteriores, se 'construye' la idea que propugna la tesis, generando la multiplicación de dos números pares, para comprobar si tal producto lo es, en efecto.

$$prueba : x \ es \ par \wedge y \ es \ par \Rightarrow x = 2k \wedge y = 2k' \ / \ k, k' \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x.y = 2k.2k' \ / \ k, k' \in \mathbb{Z} \Rightarrow x.y = 4.k.k' \ / \ k, k' \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x.y = 2.\underbrace{2k.k'}_{K} \ / \ k, k' \in \mathbb{Z} \Rightarrow x.y = 2.K \ / \ K \in \mathbb{Z} \Rightarrow x.y \ es \ par$$
$$\therefore x \ es \ par \wedge y \ es \ par \Rightarrow x.y \ es \ par$$

III.3.3. La implicación como conector lógico de la prueba

Sin entrar en discusión, se acepta que las dos estructuras lógicas posibles de un teorema matemático son la implicación o condicional y la doble implicación o bicondicional. Aunque con mayor precisión se puede decir que la única estructura lógica posible es la implicación, ya que un teorema que postula una condición necesaria y suficiente, es decir, que desde una perspectiva lógica está dotado de un bicondicional, se desdobla en general en dos partes, la implicación 'de ida' y la implicación 'de vuelta', de acuerdo a la definición de bicondicional. En referencia a lo expresado, Ibañes & Ortega (2004) son muy precisos cuando manifiestan que:

> Es fácil de comprender que el tipo de demostración depende de la estructura lógica del enunciado, y que éste no siempre se muestra como una condición necesaria o suficiente o como conjunción de ambas. Sin embargo, se verifica el siguiente parateorema de enunciados: Cualquier teorema matemático puede enunciarse en términos de implicaciones mediante una de las siguientes formas: con una condición necesaria, con una condición suficiente o con una condición necesaria y suficiente. (Ibañes & Ortega, 2004, p.2)

Demostrar entonces la verdad de una implicación, es esencialmente, observar que nunca se llegue a encontrar la situación que hace falsa a la implicación, y esto ocurre cuando: $\vartheta(p)=V$ [1] y $\vartheta(q)=F$. Según como se inspeccione antecedente y consecuente, se inducen dos métodos de demostración: directo e indirecto, también denominados respectivamente: argumentación directa y argumentación indirecta, que se sintetizan en el siguiente esquema que desde III.2.4. a III.2.7. se desarrolla su explicación y se exponen los ejemplos que ilustran la misma.

III.3.4. El método directo o argumentación directa, surge de la lectura directa del esquema de implicación, de izquierda a derecha. Sí $\vartheta(p)=V$, se deberá llegar a probar que $\vartheta(q)=V$, para poder establecer la validez de la implicación, pues si se llegara a examinar que $\vartheta(q)=F$, se invalida la misma. La otra posibilidad que plantea el método directo, es examinar el valor de verdad de p , sí este es F , automáticamente la implicación es verdadera y ya no es necesario examinar el valor de verdad de q.

Esquema de ambos métodos de argumentación en base a la implicación

[1] ϑ : *se lee* : '*valor de verdad*'

Método directo

$p \Rightarrow q$

$V \; V \leftarrow V$

$F \rightarrow V$

Método indirecto

$p \Rightarrow q$

$F \rightarrow V \; F$

$V \leftarrow V$

Ejemplo 1: Si un número entero es par, entonces su cuadrado es par

Desarrollado en Ejemplo 5 de III.3.2.

Ejemplo 2: El producto de dos enteros pares es un entero par.

Desarrollado en Ejemplo 6 de III.3.2.

Obsérvese como se procede a partir de la aplicación del método directo. Se 'parte' de la hipótesis, suponiéndola verdadera, y a través de la argumentación que consiste en la aplicación de definiciones, cuestiones de álgebra elemental y ciertos 'artificios' que surgen de la especulación o conjeturación requerida para el logro de la meta, se arriba a la tesis.

III.3.5. Argumentación directa: caso particular

Este caso no es habitual, y se considera como ejemplo una de las caracterizaciones del conjunto vacío, que coloquialmente expresa: 'El conjunto vacío está incluido en cualquier otro'. En símbolos: $\forall A : \varnothing \subset A$. La prueba es simple, basta con aplicar la definición de inclusión, y teniendo en cuenta que el conjunto vacío carece de elementos, resulta entonces que el antecedente de la implicación generada por aplicación de la definición mencionada es Falso, por ende, la implicación es automáticamente verdadera,y la proposición queda demostrada.

$$\underbrace{\varnothing \subset A \Leftrightarrow}_{\text{definición de inclusión}} \forall x \in U : \underbrace{x \in \varnothing}_{F} \Rightarrow \underbrace{x \in A}_{V}$$

III.3.6. El método indirecto o argumentación indirecta, tal como indica el prefijo in: no, surge de la lectura indirecta del esquema de implicación, de derecha a izquierda. Sí $\vartheta(q) = F$, se deberá llegar a probar que el valor de verdad de p , también es F , caso contrario, de modo análogo al método directo; invalidaría la implicación. Si ocurriera que al examinar que el consecuente de la implicación es directamente V, no hay nada que probar, queda automáticamente validada la implicación y es indiferente el valor de verdad del consecuente.

Ejemplo 1: $\forall a,b \in \mathbb{R} : a \neq b \Rightarrow b \neq a$, que coloquialmente expresa: 'Si un número es distinto de otro, entonces éste es distinto del primero'.

$$prueba : \vartheta(b \neq a) = F \underset{\substack{negación\\igualdad}}{\Rightarrow} \vartheta(\sim (b = a)) = F \underset{\substack{simetría\\igualdad}}{\Rightarrow} \vartheta(\sim (a = b)) = F \underset{\substack{negación\\igualdad}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \vartheta(a \neq b) = F \qquad \therefore \vartheta\left(a \neq b \Rightarrow b \neq a\right) = V$$

Ejemplo 2: $\forall x, y \in \mathbb{R} : x^2 \neq y^2 \Rightarrow x \neq y$

$$prueba :$$

$$\vartheta(x \neq y) = F \Rightarrow \vartheta\left(\sim\left(x = y\right)\right) = F \Rightarrow \vartheta\left(\sim\left(x^2 = y^2\right)\right) = F \Rightarrow \vartheta\left(x^2 \neq y^2\right) = F$$

En la argumentación precedente se tuvo en cuenta similarmente al ejemplo 1, la negación de la igualdad y la propiedad uniforme de la potenciación.

Ejemplo 3: La función lineal es inyectiva.

$$Sea\ f\left(x\right) = mx + h \,/\, m \neq 0$$

$$f \ \ es\ inyectiva \Leftrightarrow \forall x, y \in Df : x \neq y \Rightarrow f\left(x\right) \neq f\left(y\right)$$

$$Se\ trata\ de\ probar\ que : f\left(x\right) = f\left(y\right) \Rightarrow x = y$$

$$prueba : f\left(x\right) = f\left(y\right) \Rightarrow mx \cancel{+h} = my \cancel{+h} \underset{m \neq 0}{\Rightarrow} \cancel{m}x = \cancel{m}y \Rightarrow x = y$$

Obsérvese como se procede a partir de la aplicación del método indirecto, se 'parte' de la negación de la tesis, suponiéndola falsa, y a través de la argumentación que consiste en la aplicación de definiciones y en este caso: una propiedad de álgebra elemental y ciertos 'artificios' que surgen de la especulación necesaria (cuando se requieran) para arribar a la negación de la hipótesis.

III.3.7. Argumentación indirecta: caso particular

De forma análoga a III.3.5. se presenta a continuación el caso particular de la argumentación indirecta que se detalla a continuación.

A tal efecto, se ejemplifica esta situación con la reflexividad de la inclusión. Se sugiere leer previamente la referencia 4, al pie de página 60, sobre las dos propiedades que caracterizan al conjunto vacío.

Esta propiedad coloquialmente se expresa así: ‘Todo conjunto es parte de sí mismo’. En símbolos: $\forall A : A \subset A$. En parte de esta demostración se puede observar el caso particular de la argumentación indirecta.

Para demostrar esta propiedad se consideran dos casos:

- *Sí* $A = \varnothing$, *la propiedad está demostrada ya que:* $\forall A : \varnothing \subset A$
- *Sí* $A \neq \varnothing$, $A \subset A \Leftrightarrow \forall x \in A : x \in A \Rightarrow x \in A$

$$V \leftarrow V$$

ya que como: $A \neq \varnothing$, *existe por lo menos un elemento de A.*

III.3.8. Razonamiento Lógico Inductivo

Un **razonamiento inductivo** se caracteriza por poder llegar a obtener una conclusión general, a través de una conjetura que se traduce a partir de premisas que contienen datos particulares o ejemplos específicos. Por ejemplo, estos datos pueden provenir de la observación repetida de objetos o acontecimientos de la misma índole, donde se establece una conclusión para todos los objetos o eventos de dicha naturaleza. En este razonamiento se generaliza para todos los elementos de un conjunto, la propiedad observada en un número finito de casos.

Cañadas (2010) considera al razonamiento inductivo o de generalización como un proceso cognitivo que permite obtener leyes generales, a partir de un patrón común observado en ciertos casos individuales o puntuales.

El proceso no finaliza con la obtención de la fórmula de generalización, ya que se requiere de un proceso de validación, de la fórmula obtenida, sustentado por el denominado principio de inducción matemática o inducción completa. El principio en cuestión genera el denominado método de inducción matemática que consiste en un proceso de validación para funciones proposicionales donde alguna de las variables es natural. En ciertos casos, esta función proposicional puede tener otras variables no naturales pero el énfasis de validación se hace en la variable natural. El proceso consiste en probar la validez de la función proposicional hallada para el primer natural para el cual tiene sentido la ley establecida por la función proposicional encontrada. Luego se genera la hipótesis de inducción que consiste en suponer que la proposición tiene sentido para $n=k$ (o eventualmente para $n=k-1$). Finalmente se prueba la validez de la expresión hallada para $n=k+1$ (o eventualmente para $n=k$ si se supuso verdadera la fórmula para $n=k-1$). Una descripción no ortodoxa del principio antes detallado puede ser ilustrada por el comportamiento de una secuencia de piezas de dominó cayendo una detrás de otra, como en una reacción en cadena. El proceso precedentemente descripto no es otro que el denominado "*efecto dominó*".

Considérense a continuación dos ejemplos, uno con la estructura propia de la lógica aristotélica y otro, orientado específicamente a Matemática.

Ejemplo 1 extraído de la lógica aristotélica

Rebeca y Gómez tienen cuatro hijos: Francesca; Beatrice; Jordi y Eliseo.

Francesca tiene el cabello rubio.

Beatrice tiene el cabello rubio.

Jordi tiene el cabello rubio.

Eliseo tiene el cabello rubio.

Por lo tanto, los hijos de Rebeca y Gómez tienen el cabello rubio.

Ejemplo 2 extraído de la Matemática

La potencia de un complejo expresado en forma polar

Considérese un complejo expresado en forma polar y trigonométrica:

$$z=|z|_{\alpha}=|z|\left(cos(\alpha)+i.sen(\alpha)\right)$$

Si se realiza sucesivamente su potencia natural, teniendo en cuenta el producto de complejos en forma polar, se obtienen los siguientes resultados:

$$z^2=z.z=|z|_{\alpha}\,|z|_{\alpha}=|z|^2{}_{\alpha+\alpha}=|z|^2{}_{2\alpha}$$

$$z^3=z.z.z=|z|_{\alpha}\,|z|_{\alpha}\,|z|_{\alpha}=|z|^3{}_{\alpha+\alpha+\alpha}=|z|^3{}_{3\alpha}$$

$$z^4=z.z.z.z=|z|_{\alpha}\,|z|_{\alpha}\,|z|_{\alpha}\,|z|_{\alpha}=|z|^4{}_{\alpha+\alpha+\alpha+\alpha}=|z|^4{}_{4\alpha}$$

....

$$z^n=|z|^n{}_{n\alpha}$$

Obsérvese que en el último eslabón del razonamiento precedente, luego de los puntos suspensivos, aparece la generalización de la potencia natural del complejo expresado en forma polar. En cada eslabón de la secuencia precedente, el argumento que sostiene cada resultado parcial obtenido es el producto de complejos en forma polar.

Prueba de validez:

$$
\begin{aligned}
&Sea\ z = \rho_{\alpha} \ \Rightarrow z^{n} = \rho^{n}{}_{n\alpha} \forall n \in \mathbb{N} / \rho = |z| \\
&n = 1, z^{1} = \rho^{1}_{1.\alpha} = \rho_{\alpha} \rightarrow obvio \\
&n = 2, z^{2} = \rho^{2}_{2.\alpha} \\
&prueba: z^{2} = z.z = \rho_{\alpha}.\rho_{\alpha} = \rho^{2}_{2.\alpha} \\
&Hipótesis: \ z^{n} = \rho^{n}_{n.\varphi} \Rightarrow Tesis: z^{n+1} = \rho^{n+1}_{(n+1)\alpha} \\
&prueba: \ z^{n+1} = \underbrace{z^{n}}_{H_i}.z = \underbrace{\rho^{n}_{n.\alpha}.\rho_{\alpha}}_{\times H_i} = \rho^{n+1}_{n\alpha+\alpha} = \rho^{n+1}_{(n+1)\alpha} \\
&\therefore \vartheta\left(\ \forall n \in \mathbb{N} : z^{n} = \rho^{n}{}_{n\alpha} \right) = V
\end{aligned}
$$

Referencias: H_i: Hipótesis de inducción; $\times H_i$: por Hipótesis de inducción.

En la argumentación que hace a la prueba precedente, se tuvo en consideración de la misma forma que para inducir la ley que se acaba de probar, el producto de dos complejos expresados en forma polar.

Es muy común encontrar en muchas bibliografías que para el primer natural para el cual tiene sentido la ley, se considera a la unidad, pero en realidad, para este caso particular, debe pensarse que se trata de una potencia, y para la unidad es una cuestión obvia que no puede considerarse como tal, de modo que realmente para el primer natural para el cual realmente tiene sentido la ley, es n=2.

III.3.9. Razonamiento por Reducción al Absurdo

El razonamiento por reducción al absurdo en su forma latina denominado ‘reductio ad absurdum’, expresión latina que significa exactamente el nombre de este tipo de razonamiento. Es uno de los métodos lógicos utilizados en Matemática para probar la validez o invalidez de una proposición. A este método también se lo llama prueba por contradicción y parte de la base de su fundamento teórico es el cumplimiento del denominado principio de exclusión de intermedios principio de tercero excluido[2] y que consiste en lo siguiente: Una proposición que

[2]El principio de tercero excluido junto con el principio de no contradicción; el principio de identidad y el principio de razón suficiente forman los denominados leyes del pensamiento o leyes

no puede ser falsa es necesariamente verdadera, y una proposición que no puede ser verdadera es necesariamente falsa. Consiste en demostrar que una proposición matemática es verdadera, probando que si no lo fuera conduciría a una contradicción, por lo cual sería verdadera. En caso de querer probar la falsedad de una proposición se procede de modo contrario.

El razonamiento por reducción al absurdo es un método en el que se basan los juristas para descubrir un culpable. Se considera interesante introducir este método desde esta perspectiva ya que aporta muchísimo, a fines estrictamente didácticos. Informalmente puede describirse el método desde la instrumentalidad jurídica en lo siguiente: Por lo general, 'El culpable parte de mentir' acerca de la verdad principal de un cierto hecho (niega el hecho principal) aceptando simultáneamente ciertas verdades – 'cuando alguien miente; no omite contar ciertas verdades superfluas' –, el jurista hará hablar al culpable – 'y por la boca muere el pez'[3] –, llegando en determinado momento a contradecirse con lo expresado en una primera instancia.

Una ejemplificación teatralizada de lo expuesto,se puede observar en el film *Legally Blonde* (2001) – *Legalmente Rubia*–, precisamente en la parte final de la película, durante un juicio es donde se refleja claramente la secuencia precedentemente descripta, líneas anteriores.

Extrapolando lo precedente a una proposición matemática que se quiere demostrar, se considera lo siguiente:
Supongamos que se quiere demostrar $p \Rightarrow q$, utilizando el absurdo, entonces debe aplicarse una ley del Álgebra proposicional y que tiene la siguiente estructura: $\left[(\sim q \wedge p) \Rightarrow \sim p\right] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$.

La estructura del método expresado coloquialmente se traduce en el siguiente análisis, cuyo esquema referenciado se presenta a continuación:

lógicas del pensamiento. Su enunciado estrictamente lógico enuncia: La disyunción inclusiva de una proposición y la de su negación es siempre verdadera. No debe ser confundido con el principio de bivalencia que enuncia que toda proposición es bien verdadera o bien falsa. El enunciado metafísico de este principio es: Todo tiene que ser o no ser.

[3] Refrán popular argentino que refleja de manera elemental lo requerido para esta descripción.

$$\left[\left(\underset{I}{\sim} q \underset{II}{\wedge} \underset{III}{p}\right) \underset{IV}{\Rightarrow} \underset{V}{\sim p}\right] \underset{VI}{\Rightarrow} (p \Rightarrow q).$$

Referencias del esquema: I se niega la tesis; $II\,/\,III$ aceptando simultáneamente la hipótesis; IV luego a través de la argumentación que se consigue aplicando definiciones y propiedades pertinentes a lo que se quiere probar y 'artificios' y propiedades de álgebra elemental, entre otros; V se deberá llegar a contradecir la hipótesis, o arribar a cualquier proposición contradictoria que puede ser inclusive algunas de las hipótesis implícitas; VI este proceso permitirá finalmente afirmar la verdad de la implicación que se quería establecer.

Debe destacarse que el denominado método indirecto de demostración de implicaciones es 'aproximadamente un absurdo' o 'absurdo simplificado' que no sigue una estructura tan formal como la descripta. Este método (tanto el indirecto, como el absurdo formal recientemente descripto) se utilizan (si bien no existen 'fórmulas mágicas' de cuando usarlos) cuando la negación de la tesis es simple de llevarse a cabo o en los clásicos teoremas de unicidad. La diferencia sustancial de este método es que no se sabe bien hacia que contradicción el demostrador se dirige, mientras que el método de argumentación indirecta tiene la ventaja de que se direcciona hacia una contradicción concreta.

A continuación se desarrollan dos ejemplos.

Un 'típico' teorema de unicidad, y un 'clásico' como la prueba que muestra que $\sqrt{2}$ no es un número racional.

Ejemplo 1: El conjunto vacío: [4] $\varnothing$ *es único.*

Demostración: Se Niega la tesis. Se Supone que $\varnothing$ no es único, es decir, que además de $\varnothing$, existe $\varnothing' \,/\, \varnothing \neq \varnothing'$.

Pero, $\left.\begin{array}{r} \varnothing \subset \varnothing' \\ \underset{(1)}{\wedge}\, \varnothing' \subset \varnothing \end{array}\right\} \underset{(2)}{\Rightarrow} \varnothing = \varnothing'$ contradice lo supuesto

$\therefore \varnothing$ *es único.*

[4] Tener en cuenta el concepto y propiedades del conjunto vacío: El conjunto vacío es la denominación que se le da a cualquier conjunto carente de elementos. Satisface las dos siguientes propiedades fundamentales, expresadas como "caracterización del conjunto vacío": i. El vacío es parte de cualquier otro. En símbolos: $\forall A : \varnothing \subset A$. ii.. El vacío es único.

Referencias:

(1) caracterización del conjunto vacío; (2) definición de igualdad de conjuntos.

Ejemplo 2: $\sqrt{2}$ no es un número racional, es decir que: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

$$prueba : Suponemos\ que : \sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{x}{y} / x, y \in \mathbb{Z} \wedge y \neq 0 \wedge$$

$$\wedge M.C.D.\{x, y\} = 1(*) \Rightarrow \sqrt{2}y = x \Rightarrow 2y^2 = x^2 (1) \Rightarrow x^2\ es\ par \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\ es\ par(3) \Rightarrow x = 2k / k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2 = 4k^2 (2)$$

$$Sustituyendo\ (2)\ en\ (1) : 2y^2 = 4k^2 \Rightarrow y^2 = 2k^2 \Rightarrow y^2\ es\ par \Rightarrow y\ es\ par(4)$$

$$(3)\,y\,(4)\,contradicen(*), luego\ \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Referencias: M.C.D.: máximo común divisor

La argumentación que hace a la prueba precedente tuvo en cuenta la definición de número racional, número par, una propiedad de los números pares, y operaciones propias del álgebra elemental.

III.4. Razonamientos No Deductivos

III.4.1. Razonamiento Abductivo

El **razonamiento abductivo** es un tipo de razonamiento no deductivo que a partir de la descripción de un hecho, se direcciona no hacia una estricta conclusión en el mismo sentido que el razonamiento deductivo o inductivo sino hacia la hipótesis más probable. Pierce (1988) considera que esta hipótesis es una conjetura que intenta ser la explicación más predecible. El razonamiento abductivo se manifiesta en Matemática a través de la formulación de conjeturas o especulaciones, acciones que permiten la búsqueda de la llegada a la tesis a través de diferentes estadios que no necesariamente llevan de inmediato a la meta que se propone la prueba. Este tipo de razonamientos tiene una estructura similar y ‘engañosa’ que se parece al ‘modus ponens’ pero en definitiva lleva a un razonamiento inválido.

La estructura del razonamiento modus ponens es: $\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \underline{p \quad\quad} \\ q \end{array}$.

La falacia que justifica la estructura de un razonamiento abductivo tiene cierta analogía con el modus ponens, al que denominaremos 'pseudo modus ponens', pero se trata de un razonamiento inválido:

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \underline{q \qquad} \\ p \end{array}$$

Crespo Crespo (2007) considera que la idea que los estudiantes tienen de un condicional o implicación suele ser de tipo causal y cuando se les pregunta sobre la explicación de un proceso que puedan haber utilizado en la resolución de un problema o el desarrollo de una prueba, es natural observar que recurren a razonamientos abductivos. Probablemente esto se deba a la confusión que los estudiantes tienen con las estructuras del condicional y del bicondicional, por lo que terminan considerando válidas a las argumentaciones abductivas. Crespo Crespo (2007) muestra como ejemplo de pensamiento abductivo, el presentado por estudiantes de primer año de ingeniería en sistemas. La consigna que se les planteó a los estudiantes fue la siguiente: 'Probar que, si el cuadrado de un número natural es par, dicho número es par'. La demostración presentada por varios estudiantes fue la siguiente:

a es par y se escribe: $a = 2k$. El cuadrado de a es: $a^2 = (2k)^2 = 4k^2$ que es par.

Se observa que el estudiante sobreentiende la implicación que quiere probar, 'parte' de la tesis, y arriba a la hipótesis, siguiendo la estructura del 'pseudo modus ponens'.

Crespo Crespo (2007) considera que en la praxis docente, al momento de efectuar la corrección de una prueba de este tipo presentada por el estudiante, se suele afirmar que se trata de una confusión de la hipótesis y la tesis de un teorema. Diversos autores, considerando el razonamiento abductivo de Pierce, lo han relacionado con la construcción del conocimiento matemático mediante la resolución de problemas (Burton, 1994; Cifarelli, 1997; Mason, 1995). Sin embargo, tanto Mason (1995) como Anderson (1995) señalan su dificultad para promoverlo entre los estudiantes. Dentro de una interpretación más general de la abducción, Pedemonte (2001) considera a la abducción como un proceso natural que surge en los estudiantes durante la formulación de conjeturas.

III.4.2. Razonamiento por Analogía

Se trata de un tipo de razonamiento no deductivo, consistente en la obtención de una conclusión a partir de premisas en las que se establece una comparación o analogía entre solamente elementos o conjuntos de elementos distintos. De la misma forma que ocurre en todo razonamiento no deductivo, la relación entre la verdad de las premisas y la verdad de la conclusión no es una relación necesaria.

El razonamiento por analogía parte de juicios anteriores ya conocidos, hacia otros que se pretende conocer, manteniendo la misma particularidad. En este tipo de razonamiento no hay una preservación de la verdad como ocurre con el razonamiento inductivo.

Ejemplos de analogías que siguen la estructura de un silogismo

Ejemplo 1:

La tierra está poblada por seres vivos.

Marte es análogo a la tierra.

Conclusión: Entonces Marte debe estar poblado por seres vivos.

Ejemplo 2:

Las flores del girasol cambian su posición respecto a la del sol.

Las flores del rosal son análogas a las flores del girasol.

Conclusión: Las flores del rosal deben cambiar su posición respecto al sol.

Existe un concepto utilizado en filosofía, denominado mímesis y que se vincula directamente con el de analogía. Imitación y representación son los más recurridos sinónimos que se han empleado para sustituir el sentido de este término que Platón y Aristóteles utilizaron en sus reflexiones sobre la producción artística. Sin embargo, este concepto formaba parte de una antigua tradición ritual en el mundo griego, que antecedía por siglos las propuestas de ambos filósofos, y que en sus orígenes cargaba con un significado más rico y complejo que la simple noción de reproducción o copia. Se diferencia claramente del concepto de representación, principalmente en la naturaleza de su mecánica, donde la mímesis se resiste a la comparación con el referente y a convertirse en algo equivalente al original. Si bien mímesis es un sinónimo adecuado para analogía, en general se habla de mímesis cuando existe un parecido o semejanza más exacta con su original. Siguiendo con el razonamiento aristotélico, la base del aprendizaje es la mímesis o imitación, que es connatural al hombre, incluso llega a decir en estas palabras que el hombre es un animal mimético, por tanto, toda imitación produce un aprendizaje. (Correa, 1990; Benot, 2018)

El estudiante recurre muy asiduamente a estos razonamientos, ya que en el momento de abordar una nueva prueba recurre a otras ya establecidas, buscando similitudes y semejanzas que les permitan llevar a cabo la nueva propuesta que tiene que realizar. A nivel de una prueba, el estudiante puede razonar por analogía o mímesis, intentando ‘copiar’ de forma aproximada lo que el profesor realizó en clase, con un ‘ligero’ razonamiento propio, en el mejor de los casos, de acuerdo a la dificultad que la nueva consigna propone y se diferencia de la original.

Ejemplo 3: Se le expone en clase, al estudiante, la prueba de validez de una proposición, que se detalla a continuación: $\forall x \in \mathbb{R}^+ : \forall y \in \mathbb{R}^+ : x < y \Rightarrow x^2 < y^2$

$$prueba : x < y \Rightarrow x - y < 0 \underset{\times(x+y)>0}{\Rightarrow} (x-y)(x+y) < 0.(x+y) \Rightarrow x^2 - y^2 < 0 \Rightarrow x^2 < y^2$$

Luego, se le propone, en clase, al estudiante que pruebe la validez de la siguiente proposición: **Ejemplo 4:** $\forall x \in \mathbb{R}^- : \forall y \in \mathbb{R}^- : x < y \Rightarrow x^2 > y^2$

El estudiante tratará de razonar por analogía, ‘copiando’ la estructura del razonamiento expuesto y reproducirá una argumentación aproximablemente similar a la que se expone a continuación. Es muy probable que en la mayoría de los casos, no detecte la importancia del signo de la expresión por la que multiplica en ambos miembros que aparece en el tercer eslabón de la cadena argumentativa.

$$prueba : x < y \Rightarrow x - y < 0 \underset{\times(x+y)<0}{\Rightarrow} (x-y)(x+y) > 0.(x+y) \Rightarrow x^2 - y^2 > 0 \Rightarrow x^2 > y^2$$

Ejemplo 5: Se expone en clase, el álgebra de los límites para la suma y luego se le propone al estudiante que realice el álgebra de los límites para la diferencia.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1 \wedge \lim_{x\to x_0} g(x) = L_2 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) + g(x) = L_1 + L_2$$

prueba :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{2} => 0 : \exists \delta_\varepsilon > 0 / 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2} (I)$$

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = L_2 \Leftrightarrow \forall \varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{2} => 0 : \exists \delta_\varepsilon > 0 / 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} (II)$$

$$\left|\left[f(x) + g(x)\right] - \left[L_1 + L_2\right]\right| = \left|\left[f(x) - L_1\right] + \left[g(x) - L_2\right]\right| \le$$

$$\le |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$si\ \ \delta_\varepsilon \le mín\{\delta_1, \delta_2\} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) + g(x) = L_1 + L_2$$

El estudiante tratará de reproducir una argumentación como la que se expone a continuación, similar a la expuesta por el profesor en clase sobre la suma.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1 \wedge \lim_{x\to x_0} g(x) = L_2 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) - g(x) = L_1 - L_2$$

prueba :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{2} => 0 : \exists \delta_\varepsilon > 0 / 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2} (I)$$

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = L_2 \Leftrightarrow \forall \varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{2} => 0 : \exists \delta_\varepsilon > 0 / 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} (II)$$

$$\left|\left[f(x) - g(x)\right] - \left[L_1 - L_2\right]\right| = \left|\left[f(x) - L_1\right] - \left[g(x) - L_2\right]\right| \le$$

$$\le |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad si\ \ \delta_\varepsilon \le mín\{\delta_1, \delta_2\} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) - g(x) = L_1 - L_2$$

III.4.3. Razonamiento Plausible o Conjetural

Es un razonamiento que permite llevar a cabo procesos propios de la heurística. La heurística es el conjunto de reglas prácticas o informales que permiten llevar a cabo, resolución de problemas. Estos razonamientos no se consideran definitivos y estrictos sino provisionales y plausibles, ya que, en estos, no necesariamente se transmite la verdad de las premisas a la conclusión, sino que hay un aumento en la creencia de que la conclusión es verdadera. Son los patrones plausibles los que describen exactamente la estructura de las operaciones mentales utilizadas en estos razonamientos. Polya (1954) lo define como aquel que nos permite elaborar hipótesis y conjeturas que nos parecen acertadas, examinar su validez, contrastarlas y reformularlas para obtener nuevas hipótesis susceptibles de ser puestas a prueba. Se necesita del razonamiento heurístico, cuando se elabora una demostración rigurosa del mismo modo que se necesita el andamio cuando se construye un edificio. Consideremos a continuación, un ejemplo simple pero que para el arribo a la tesis se requiere la 'creación de un constructo' y en esa construcción y el razonamiento que se halla implícito en la misma, se hace presente la heurística.

Ejemplo 1: La regla de la cadena para derivación de funciones compuestas.

Sea I un intervalo abierto y sea $f : I \to \mathbb{R}$, una función derivable en $x_0 \in I$, y sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en

$$y_0 = f(x_0) \Rightarrow F = g \circ f : I \to \mathbb{R}$$

$$x \to F(x) = \left(g \circ f\right)(x) = g\left(f(x)\right) \textit{ es derivable en } x_0 \textit{ y}$$

$$F'(x_0) = g'(y_0).f'(x_0) / y_0 = f(x_0).$$

Desglosando la última proposición, que es la tesis, se la puede escribir así:

$$F'(x_0) = g'(f(x_0)).f'(x_0) / y_0 = f(x_0)$$

En el segundo renglón de la prueba se construye la estructura necesaria para el cociente incremental del antepenúltimo eslabón de igualdades de la prueba. Esa multiplicación y división de una diferencia, que es el incremento de la variable dependiente permite, luego, de una 'asociación' adecuada, la construcción del cociente incremental requerido para la consecución de la tesis.

$$\textit{prueba}:$$

$$F'\left(x_0\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F\left(x_0 + \Delta x\right) - F\left(x_0\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g\left(f\left(x_0 + \Delta x\right)\right) - g\left(f\left(x_0\right)\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g\left(f\left(x_0 + \Delta x\right)\right) - g\left(f\left(x_0\right)\right)}{\Delta x} \frac{f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)}{f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g\left(f\left(x_0 + \Delta x\right)\right) - g\left(f\left(x_0\right)\right)}{f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)} \frac{f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g\left(f\left(x_0 + \Delta x\right)\right) - g\left(f\left(x_0\right)\right)}{f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)}{\Delta x} = g'\left(f\left(x_0\right)\right).f'\left(x_0\right)$$

Ejemplo 2: Sea la proposición: $\forall x \in R^{+} : \forall y \in R^{+} : x < y \Rightarrow x^{2} < y^{2}$

La prueba de la verdad de esta proposición puede encontrarse en la página 64 en el ejemplo 3 de III.4.2.

El razonamiento que permite probar la validez de la proposición precedente es, en esencia, deductivo. Pero el desarrollo no es lineal, requiere de la conjeturación por parte del estudiante para el arribo a la meta. Es decir, que ‘el camino no es directo’. Se diferencia del primer ejemplo ya que no tiene la heurística ni la constructividad que allí se presenta pero, puede considerarse encuadrado en este tipo. Por ende, en estos casos se dice que el razonamiento es conjetural o plausible ya que al decir de Lakatos (1978) se genera un ensayo y error de conjeturas ingenuas que van siendo refutadas una tras otra.

Ejemplo 3: Teorema del valor medio del Cálculo Diferencial o Teorema de Lagrange

Si f es una función continua en un intervalo que tiene derivada en cada punto del abierto (a,b), entonces existe por lo menos un punto c interior al (a,b) tal que:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \Leftrightarrow f(b)-f(a) = (b-a).f'(c)$$

Sea $h(x) = f(x).[b-a] - x.[f(b)-f(a)]$

La idea de la prueba es aplicarle a la función auxiliar el teorema de Rolle, previa verificación de las hipótesis. El teorema mencionado exige a la función para que pueda verificar lo que postula como tesis, que sea continua en un intervalo cerrado; derivable en un intervalo abierto (el mismo donde es continua, pero abierto en sus puntos de frontera) y su evaluación en los puntos de frontera del intervalo mencionado debe coincidir.

La función h en efecto, es continua en el intervalo cerrado de extremos a y b y derivable, asimismo, en el intervalo abierto de extremos a y b. El mismo esquema permite ver ambas cuestiones mencionadas.

$$h(x) = \underbrace{\underbrace{\underbrace{f(x)}_{1}.\left[\underbrace{b-a}_{2}\right]}_{3} - \underbrace{\underbrace{x}_{1}.\left[\underbrace{f(b)-f(a)}_{2}\right]}_{3}}_{4}$$

Referencias:
1. continua/derivable por hipótesis;
2. continua/derivable por ser función polinómica – monomio identidad – ;
3. álgebra de las funciones continuas/derivables: producto;
4. álgebra de las funciones continuas/derivables: diferencia.

Observación: Las funciones polinómicas son continuas y derivables en todo el eje real.

$$h(a) = f(a)[b-a] - a[f(b) - f(a)] = f(a).b \cancel{- f(a).a} - a.f(b) \cancel{+ a.f(a)} =$$
$$= f(a).b - a.f(b)(I)$$
$$h(b) = f(b).[b-a] - b.[f(b) - f(a)] = \cancel{f(b).b} - f(b).a \cancel{- b.f(b)} + b.f(a) =$$
$$= f(b).a - b.f(a)(II)$$

Se observa que (I)=(II), por lo que puede afirmarse que se satisfacen las hipótesis de Rolle, por ende, $\exists c \in (a,b) / h'(c) = 0$

$$h'(c) = 0 = f'(c)[g(b) - g(a)] - g'(c)[f(b) - f(a)]$$
$$\therefore f'(c)[g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)]$$

Observación: En la función auxiliar se halla ‘escondida’ la tesis que postula este teorema.

$$\textit{función auxiliar} \rightarrow h(x) = f(x).[b-a] - x.[f(b) - f(a)]$$

$$tesis \rightarrow \underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c)}_{planteo\ tesis+'\ popular'} \Leftrightarrow f(b) - f(a) = (b-a).f'(c)$$

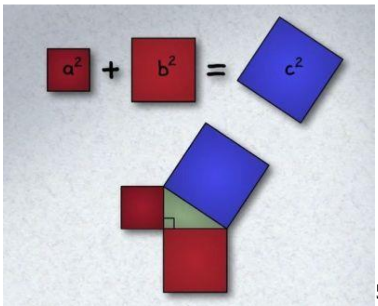
Puede observarse que la tesis contiene la misma función f del minuendo de la diferencia de la función auxiliar h pero derivada, en realidad, la función derivada del minuendo es la función derivada de una constante por una función. La constante ‘sobrevive’ y aparece la función derivada de f que ahora aparece en el primer miembro de la identidad que postula Lagrange, mientras que algo parecido ocurre en el segundo miembro que es la función derivada del sustraendo de la diferencia que plantea la función auxiliar h. Asimismo, puede plantearse de una forma más elemental, el fundamento de la construcción de la función auxiliar, a partir de la interpretación geométrica de este teorema pero de una forma más genérica.

III.4.4. Razonamiento Visual

Con el auxilio de la visualización a través de diagramas o gráficas realizadas por un software, un esquema a mano alzada, o una figura geométrica, entre otros, el estudiante en muchas oportunidades puede pensar, hacer y entender una demostración. La visualización conceptual no puede soslayarse, es vital para la generación posmoderna de estudiantes que se encuentra cursando carreras de grado y que se encuentra inserta en una "*cultura de videoclip*" (Economist.com, 2006). Hay que distinguir dos cuestiones: el razonamiento puramente visual que no es deductivo, como se expone en los ejemplos que se citan más adelante, donde el razonamiento pasa por una experiencia, totalmente visual. Por otro lado, se puede emplear un razonamiento que puede ser por analogía, deductivo, inductivo o la formulación de una conjetura, auxiliado con la complementación de la visualización como herramienta de ayuda para una comprensión optimizada del razonamiento de la prueba. de Guzmán (1996) considera que las corrientes formalistas imperantes en el siglo pasado desde los 80 hacia atrás encuadraron al profesorado en priorizar el rigor formal en la exposición de la Matemática, considerando inútil y hasta contraproducente a la intuición y la visualización conceptual para el logro del aprendizaje.

Se consideran a continuación cuatro ejemplos de demostración visual pura, el quinto ejemplo utiliza a la visualización conceptual como una herramienta trascendente ya que es la que permite el arribo a la meta y la comprensión de la prueba.

Ejemplo 1: Teorema de Pitágoras

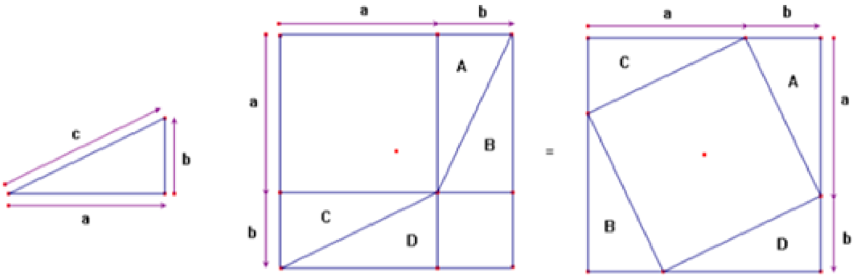


[5]

Figura 5: Demostración visual del teorema de Pitágoras I

[5]Crédito de imagen: https://matematicascercanas.com/2016/06/06/demostraciones-teorema-de-pitagoras/

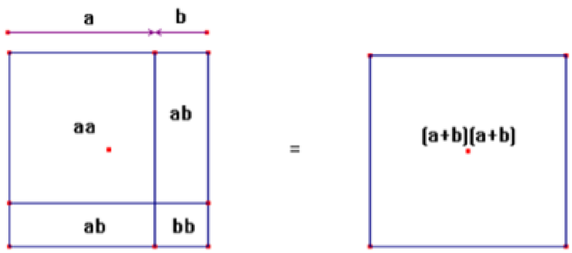
A continuación, otra versión visual del teorema de Pítágoras:



[6]

Figura 6: Demostración visual del teorema de Pitágoras II

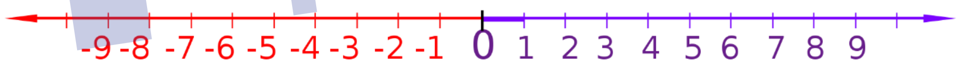
Ejemplo 2: Cuadrado de un binomio: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$



[7]

Figura 7: Demostración visual del cuadrado de un binomio

Ejemplo 3: La proposición que se busca probar es: $1 > 0$



[8]

Figura 8: Demostración visual de la proposición: $1 > 0$

La prueba formal de esta propiedad puede realizarse a través de la aplicación de los axiomas de Peano. Pero, visualmente esto puede mostrarse de una manera simple, evidenciando que la unidad está a la derecha del origen.

Ejemplo 4: probar que: $\forall x \in R : \forall y \in \mathbb{R} : |x-y| = |y-x|$

Esta propiedad es la simetría o conmutatividad de la distancia en la recta real, ya que desde la perspectiva del concepto de valor absoluto como distancia,

[6]Crédito de imagen: http://verso.mat.uam.es/~eugenio.hernandez/Estalmat-Materiales/EugenioHernandez/Demostraciones%20visuales.pdf
[7]Crédito de imagen: Idéntico a 6.
[8]Crédito de imagen: Idéntico a 6.

simbólicamente se expresaría como: $d(x,y)=d(y,x)$ La prueba formal de esta propiedad puede realizarse sustituyendo $x-y\times t$ y teniendo en cuenta que el valor absoluto de cualquier número real es igual al de su opuesto, y de esta manera, se puede arribar a la meta. Pero, visualmente se puede recurrir al hecho de la interpretación geométrica de cualquiera de los dos miembros de la igualdad, que se trata de una distancia entre dos puntos y observar que su cálculo en cualquiera de los dos sentidos arroja el mismo resultado.

Prueba visual:

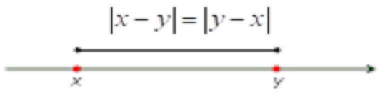


Figura 9: Demostración visual de la proposición: $|x-y|=|y-x|$

Prueba formal: $|x-y| \underset{x-y=t}{=} |t| \underset{|x|=|-x|}{=} |-t| = |-(x-y)| = |-x+y| = |y-x|$

Ejemplo 5:

A continuación, se presenta una prueba muy simple, donde la visualización es ‘clave’ para la comprensión y consecución de la tesis, pero no necesariamente la prueba está basada exclusivamente en la visualización.

Criterio de la derivada primera para la determinación de los extremos relativos de una función.

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua en el cerrado y derivable en el abierto, excepto en $x=c\in(a,b)$, entonces:

$i.\ \forall x\in(a,c): f'(x)>0 \wedge \forall x\in(c,b): f'(x)<0 \Rightarrow f \text{ tiene } M_r \text{ en } x=c$

$ii.\ \forall x\in(a,c): f'(x)<0 \wedge \forall x\in(c,b): f'(x)>0 \Rightarrow f \text{ tiene } m_r \text{ en } x=c$

Demostración ii.

$\forall x\in(a,c): f'(x)<0 \wedge \forall x\in(c,b): f'(x)>0 \Rightarrow f\downarrow en\,(a,c) \wedge f\uparrow en\,(c,b) \Rightarrow$ [9]

$\Rightarrow f(x)>f(c) \quad \forall x\in(a,b)\,/\,x\neq c \Rightarrow m_r \text{ de } f \text{ en } x=c$ [10]

---

[9] $f\uparrow$: se lee: f es estrictamente creciente. El símbolo opuesto es evidente y significa lo contrario.

[10] m_r: se lee: mínimo relativo. El símbolo análogo con la m mayúscula es evidente y significa lo contrario.

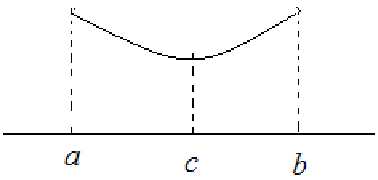


Figura 10: Complemento visual a la prueba correspondiente al Criterio de la derivada primera para la determinación de mínimo relativo.

El esquema precedente es fundamental para evitar un obstáculo epistemológico[11] en la comprensión de la argumentación que hace a la prueba.

III.5. Una clasificación sobre el razonamiento manifestado en pruebas

Balacheff (2000) generó una clasificación que resume los modos de demostrar de un estudiante y que pueden reducirse a esquemas de razonamiento. Según sea el razonamiento empleado, varía el grado de evolución alcanzado por el sujeto de aprendizaje en el abordaje de la prueba. Los diferentes esquemas de razonamiento que un estudiante puede manifestar frente a una prueba se resumen, según el grado de madurez intelectual y de abstracción alcanzado, en la siguiente clasificación que hace un distingo entre el denominado esquema de razonamiento pragmático y el esquema de razonamiento intelectual.

El esquema de razonamiento pragmático está ligado a lo experimental ya que en este predomina una presencia de saberes prácticos. Las justificaciones son realizadas a través de la representación de un objeto concreto y distinguen una clasificación en tres tipos, a saber:

El *Empirismo ingenuo* se produce cuando el estudiante razona para validar la afirmación recurriendo a la acción de la verificación. Lo hace para algunos casos particulares, sin un criterio formado al hacerlo, como 'tanteando'. La búsqueda de los ejemplos es aleatoria y no obedece a criterio alguno.

Ejemplo: El Álgebra de los límites: Cociente. El estudiante simplemente presenta un ejemplo donde verifica que la propiedad 'funciona' para ese ejemplo concreto. En algunos casos, puede presentar dos o tres por inseguridad pensando que más de uno refuerzan la validez. El estudiante no genera conclusión alguna, siendo la verificación su esquema de razonamiento que es lo que él entiende como prueba.

---

[11] El concepto de obstáculo epistemológico se desarrolla en III.7.

El *Experimento crucial*, se genera cuando el estudiante razona tomando en cuenta la problemática de la generalidad y la 'resuelve' mediante el uso de un caso particular que reconoce como 'no especial'. Es decir, que el estudiante verifica con un ejemplo que permite descartar alguna conclusión alternativa.

Ejemplo: El Álgebra de los límites: Cociente. El estudiante plantea varios ejemplos de la propiedad. Para esto, genera cocientes combinando de a pares algunas funciones y calcula los límites para un valor concreto. Las funciones propuestas por el estudiante son: Una función lineal no pasante por el origen; una función lineal pasante por el origen; una función cuadrática completa con sus tres términos; una función cuadrática sin término independiente; una función cuadrática sin término lineal y con término independiente y una función cuadrática sin término lineal ni término independiente. Finalmente, elige uno de estos límites y luego de realizado su cálculo, considera que, a partir de este ejemplo, al que considera "*crucial*", razona consecuentemente, generalizando el resultado que se quiere demostrar.

El *Ejemplo genérico*, se manifiesta cuando el estudiante razona justificando la afirmación operando sobre un objeto concreto al que considera representante de todos los pertenecientes al dominio de dicha afirmación. Este intenta plantear una argumentación basada en un ejemplo al que le da carácter de representante general de la clase. Ejemplo: El Álgebra de los límites: cociente. El estudiante considera un ejemplo concreto, pero, con cierta carga de abstracción. Considera dos funciones polinómicas: una cuadrática y una lineal, pero escritas genéricamente. Realiza el cálculo del límite del cociente para un hipotético valor al que se aproxima la variable. Observa que el límite del cociente para este ejemplo más elaborado es igual al cociente de los límites. A partir de este ejemplo genérico se permite concluir la tesis general.

El esquema de razonamiento intelectual proviene de una forma particular de razonar, donde se articulan cadenas argumentativas, con una clara producción en el lenguaje simbólico propio de la Ciencia Matemática. Se dejan de lado los objetos materiales y su relación con la experiencia material, distinguiéndose una clasificación en tres tipos diferentes, a saber:

El *experimento mental* se produce cuando el razonamiento del estudiante se independiza de la representación del objeto aunque no necesariamente se trate de una prueba con su estructura formal. Aquí los estudiantes interiorizan las acciones realizadas previamente (generalmente observación de ejemplos), las disocian de esas acciones concretas y las convierten en argumentos abstractos deductivos. Ejemplo: El Álgebra de los límites: cociente. El estudiante vuelve a considerar el límite del cociente de dos polinomios, como si fueran los únicos tipos de funciones existentes. Pero esta vez los polinomios escogidos son de grado n. Verifica que la propiedad se cumple para este ejemplo generalizado (con una construcción más elaborada que la del ejemplo genérico) y luego concluye que la propiedad en cuestión se cumple para cualquier par de funciones.

El *cálculo sobre enunciados* es una prueba que oscila entre la experiencia mental y la demostración. No tiene la característica de conformar una demostración. pero tampoco tiene la característica del denominado experimento mental. Se establecen construcciones intelectuales basadas en teorías más o menos formalizadas o explícitas, que se originan en una definición o propiedad y se basan en la transformación de expresiones simbólicas formales. Ejemplo: El Álgebra de los límites: cociente. El estudiante esta vez, se atreve a plantear el límite del cociente de dos funciones hipotéticas f y g, pensando el cociente como el producto de la primera por la recíproca de la segunda. Luego, tiene en cuenta el límite del producto ya probado y lo aplica a este. Pero en su argumentación, utiliza el hecho de que el límite de la recíproca de g, existe y es la recíproca del límite. No tiene en cuenta que está aceptando un hecho que está presente en lo que quiere probar y que aún no está validado. Es una limitación muy común del estudiante aprendiz, que no distingue que en definitiva en la prueba de este tipo, se genera una cadena propia de un sistema axiomático, donde cada propiedad probada es una verdad establecida que puede ser utilizada en las siguientes. Podría ocurrir, en el mejor de los casos, que pruebe previamente la validez del límite de la recíproca de la función g, para luego establecer el límite del producto antes mencionado.

Finalmente, **La *demostración***, se produce cuando el razonamiento que genera el estudiante tiene la función de explicitar en el contexto de un lenguaje reconocido por la comunidad matemática, y cuyas reglas de debate se sostienen sobre la lógica formal.

III.6. Patrones de racionalidad

Rigo, Rojano y Pluvinage (2011) como resultado de una investigación realizada en la escuela primaria sobre la construcción del conocimiento matemático, identifican categorías emergentes como patrones de racionalidad basados en razones y algunos otros basados en motivos.

En los patrones de racionalidad basados en razones son identificados dos tipos de racionalidad: la cartesiana y la retórica.

En la *racionalidad cartesiana*, las justificaciones se encuentran organizadas de acuerdo a este tipo de racionalidad y se sostienen en saberes matemáticos que permiten desprender verdades imprescindibles. Dentro de esta clase de patrones se ubican, según Balacheff (2000), el ejemplo genérico y el experimento mental.

En la *racionalidad retórica*, los argumentos que son concordantes a esta categoría se sostienen en saberes matemáticos que no son definitivos pudiendo generar en consecuencia, verdades probables. Las pruebas que Balacheff (2000) considera encuadradas dentro del empirismo ingenuo y el experimento crucial son ejemplos de justificaciones que se ajustan a la racionalidad retórica.

En los patrones de racionalidad basados en motivos son identificados dos tipos de racionalidad: por autoridad y por habituación.

En la denominada *racionalidad por autoridad*, la verdad de una proposición matemática se sostiene en la potestad establecida por un libro, la ciencia matemática misma o el conductor del aprendizaje en el aula.

Searle (1969) plantea que se produce una transferencia de los argumentos por autoridad a través del lenguaje coloquial manifestado a través de recursos verbales, pudiéndose adicionar el lenguaje que le es propio al cuerpo.

En la denominada *racionalidad por habituación*, las justificaciones se originan en la cotidianeidad surgida de expresiones o creencias que se escuchan o perciben día a día y perduran en el tiempo; y se asientan en la cómoda elección que el ser humano realiza hacia lo que resulta habitual, natural y acreditado.

III.7. Una ingeniería didáctica para facilitar la prueba matemática

III.7.1. Fundamentos

La investigación llevada a cabo por D´Andrea et al (2010, 2012) propone una ingeniería didáctica a los efectos de generar una metodología de enseñanza de la demostración matemática direccionada al logro de un aprendizaje significativo de la prueba en el estudiante universitario. Esta ingeniería didáctica, consiste en una

secuencia instruccional que tiene como objetivo que el estudiante pueda abordar desde un aprendizaje significativo y comprensivo a la demostración. Si bien la secuencia de tareas es conductista, su aplicación cotidiana en el desarrollo de los diferentes cursos de Matemática, puede finalmente conducir a una actitud constructivista del estudiante, ya que tal secuencia induce al fortalecimiento de una habilidad ‘dormida’ en este y es la actividad ‘demostrar’.
El estudiante universitario de Ingeniería y Ciencias Naturales, tiene dificultades para comprender, reproducir y generar demostraciones, confundiendo acciones como probar y verificar.
El estudiante procede, en general, cuando se le pide una prueba, desde el empirismo ingenuo (Balacheff, 2000), considerando que la prueba consiste en la exhibición de algunos casos particulares sin un criterio formado al hacerlo. En muchos casos, cuando le es requerida una prueba que el docente ya expuso en clase, vuelven a recurrir a la verificación ignorando lo expuesto. Por otro lado, están aquellos que repiten lo que el docente realizó pero de modo mecánico, ritual y sin comprensión. Cabe preguntarse entonces: ¿Es necesario enseñar a demostrar?; ¿Con qué objetivo?; ¿Cómo es posible guiar al estudiante para que sea capaz de respetar el proceso deductivo cuando realiza la demostración de proposiciones matemáticas?; ¿Qué estrategias pueden utilizarse para que realice este proceso desde el razonamiento y no desde la memoria repetitiva?

Leron (1983) propone un método denominado “*estructural*”, inspirado por las ideas informáticas que surgieron en los ochenta y repercutieron indiscutiblemente para posteriores avances. La idea básica que subyace es presentar las demostraciones en clase en diferentes niveles de gradualidad, procediendo desde las ideas elementales de la prueba hacia la conclusión, de manera escalonada y fragmentada. La ventaja principal de presentar así una demostración es que permite una comunicación más fluida generando en el estudiante un aprendizaje significativo. A diferencia de la prueba tradicional que se desarrolla desde la hipótesis a la tesis, la prueba estructural se desarrolla como un ‘diagrama de flujo’, focalizando determinadas partes de la prueba, de forma de facilitar la comprensión de estas, con el objetivo de generar la comprensión global de la prueba completa.

Solow (1992) propone que si se tiene que realizar una demostración del tipo:

Si A entonces B, se dice que se usa un método progresivo si tomando A como cierto llegamos a B. Y es regresivo cuando buscamos un método para demostrar que B es verdadero, generalmente se parte del supuesto de que B es verdadero para lograrlo, pero solo será progresivo cuando se parta desde A. Se relacionan entre sí cuando trabajamos B de tal forma que llegamos a A y luego tomamos A y llegamos a B es decir regresivo-progresivo.

El proceso regresivo se inicia preguntando: ¿Cómo o cuándo puedo concluir que la proposición B es verdadera? La manera en la cual se formule el estudiante esta pregunta, es crítica, puesto que quien se la formuló debe ser capaz de responderla.

Ambos métodos se relacionan entre sí cuando se trabaja con B de tal forma que se llega a A y luego se toma A y se llega a B, obteniéndose así el método conocido como regresivo-progresivo. El proceso regresivo se inicia preguntando: ¿Cómo o cuándo puedo concluir que la proposición B es verdadera?

El proceso de demostración se comienza regresivamente, planteando lo que Solow denomina: *"pregunta de abstracción"* que consiste siempre en un planteo de la forma: *"¿Cómo o Cuándo puedo concluir que la proposición B es verdadera?"*.

La pregunta debe ser formulada de un modo abstracto y sin hacer referencia alguna al problema concreto que generó. La respuesta a la pregunta de abstracción es un proceso de dos fases. Primero hay que dar una respuesta abstracta, para después aplicar esta respuesta a la situación específica. La forma en que sea formulada esta pregunta juega un papel decisivo.

Por ejemplo, si tiene que probarse que el cuadrado de todo número entero par es par, la pregunta de abstracción sería para el planteo de esta prueba:

¿Cómo puedo demostrar que un número al cuadrado es par?

Se puede responder esta pregunta en términos no tan abstractos, diciendo que esto puede ocurrir cuando se puede expresar al número, como el producto de 2 por otro entero.

En virtud de observar que en la formación de profesores de Matemáticas cubanos existían dificultades en el aprendizaje de demostraciones geométricas, Bravo y Arrieta (2003) propusieron un sistema de acciones para la enseñanza de las mismas, lo cual impulsó a la búsqueda de herramientas metodológicas que condujeran a ideas novedosas en su enseñanza. En sus trabajos se presentan estrategias y los resultados de la aplicación de estas con el objeto de generar la habilidad 'demostrar' en el estudiante de profesorado. En el marco teórico de su trabajo, estudiaron algunas aportaciones teóricas sobre estrategias didácticas junto al importante papel que juega la resolución de problemas en el proceso de enseñanza de la Matemática.

Como producto de la investigación llevada a cabo por D´Andrea et al (2010, 2012) sobre el razonamiento deductivo utilizado por estudiantes de Ciencias Naturales e Ingeniería, en el proceso de validación de proposiciones matemáticas, se generó un diagnóstico que permitió la construcción de una ingeniería didáctica para incentivar el abordaje de la demostración matemática.
El diagnóstico, postula lo siguiente:

> El estudiante ingresante a Carreras de Ciencias Naturales e Ingeniería requiere en los cursos de Matemática del currículo de la carrera elegida comprender la demostración de proposiciones y teoremas. Tiene profundas dificultades para comprenderlas, y más aún para reproducirlas, producto del retardo del desarrollo del pensamiento formal y la supresión de desarrollos teóricos en el área matemática en el ciclo medio. A esto se suma la experiencia personal de los docentes que valoran la formación recibida en la demostración de proposiciones y teoremas pero que paralelamente reniegan de aprendizajes memorísticos implícitos en estas cuestiones y como consecuencia de estas experiencias y la reticencia de los estudiantes a incorporar estos contenidos se debilitan estos procesos en el aula y por ende a la Matemática, al no exponer debidamente la epistemología que le es propia. (D´Andrea et al, 2012, p.130)

III.7.2. La ingeniería didáctica propuesta

Inspirándose en las propuestas de Leron (1983), Solow (1993) y Bravo Estévez (2003) y el diagnóstico expuesto precedentemente, D´Andrea et al (2010, 2012) proponen una ingeniería didáctica para conducir y encuadrar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la demostración matemática. Esta ingeniería se perfila a través de una serie de estrategias presentadas como una secuencia de tareas cuyo objetivo es lograr un aprendizaje comprensivo, significativo y constructivo con una perspectiva implícita que permita desarrollar un pensamiento lógico que pueda ser extrapolado a otras disciplinas. Si bien la secuencia de tareas es eminentemente conductista, su aplicación cotidiana en el desarrollo de los diferentes cursos de Matemática, puede finalmente conducir a una actitud constructivista del estudiante, ya que tal secuencia induce al fortalecimiento de una habilidad 'dormida' en este y es la actividad 'demostrar'. Para un desarrollo efectivo de la demostración de proposiciones, que permita una secuencia mediata de una apropiación 'razonada' como consecuencia de la comprensión, se sugiere seguir las siguientes etapas:

1. **Comprensión y Apropiación del Lenguaje Matemático:** Esta etapa es el prolegómeno a las siguientes y consiste en permitir al estudiante el acceso, comprensión y apropiación del Lenguaje Matemático. Para un acercamiento efectivo del estudiante a este Lenguaje, el docente deberá diseñar y seleccionar estrategias y material didáctico que apunten a un aprendizaje constructivo y comprensivo. La comprensión y apropiación del lenguaje requiere que el estudiante conozca:

La utilización de conectores proposicionales: conjunción; disyunción inclusiva y exclusiva; implicación y doble implicación; negación. Las condiciones que pueden presentarse en una implicación o condicional. Las implicaciones asociadas que se hallan implícitas en un condicional cualquiera. Las reglas fundamentales del álgebra de proposiciones: Involución; De Morgan; Negación de una implicación, entre otras. Los contenidos citados deben ser expuestos con una profusa cantidad de ejemplos, extraídos de contenidos del ciclo medio que son revisados, usualmente, en el curso propedéutico que antecede el inicio de las Carreras de grado universitarias.

Carece de sentido el planteo de las etapas siguientes, si el estudiante no tuvo la posibilidad de acceder al Lenguaje Matemático. Esta etapa debe ser el comienzo de los cursos iniciales de Matemática de la carrera de grado escogida por el estudiante.

2. **Presentación del teorema o proposición a demostrar:** En este punto se presenta al estudiante el teorema o proposición a demostrar, en su estructura formal.

Las tres etapas siguientes tienen órdenes indistintos y esto obedece a que el estudiante puede apropiarse de la comprensión de la proposición a demostrar desde la perspectiva de su propio lenguaje, la visualización o la simple acción de la verificación, pero inexorablemente deben respetarse y cumplirse las tres, sin excepción.

3. **Interpretación coloquial:** En esta etapa se propone al estudiante que intente explicar coloquialmente, lo expuesto formalmente en el ítem 2. Con esta etapa se genera la comprensión desde el lenguaje coloquial. Esta etapa constituye la parte crucial del proceso de aprendizaje.

4.**Verificación:** En esta etapa el estudiante es instado por el docente a verificar por sí mismo la proposición a demostrar debiendo generar mínimamente dos ejemplos. Estos ejemplos no deben ser elegidos aleatoriamente, sino teniendo en cuenta que deben cumplir lo planteado por las hipótesis de la proposición.

5.**Visualización:** En esta etapa, el estudiante nuevamente es instado por el docente, pero esta vez a visualizar la proposición a demostrar. La proposición podría no tener una interpretación geométrica, pero es importante en cualquier caso, el trazado de un esquema visual o mapa conceptual que muestre la secuencia de lo que esta expresa conceptualmente, acción que puede contribuir notablemente a su comprensión, una comprensión visual del concepto.

Nota: En el párrafo III.8. se profundiza la cuestión referente a mapas conceptuales.

6. **Simbolización:** Luego de la explicación coloquial, la verificación y la visualización, entonces debe retomarse la estructura formal de la proposición a demostrar. La comprensión de la expresión simbólica de la proposición a demostrar ya tiene otra accesibilidad para el estudiante, debido a los pasos 4, 5 y 6 de la secuencia, permitiendo al estudiante insertarse en el proceso de abstracción, imprescindible para llevar a cabo la prueba formal.

7**. Elementos vitales de la proposición:** En esta etapa el estudiante debe identificar la hipótesis de la proposición a demostrar; las hipótesis implícitas y la tesis.

8. **Contenidos implícitos de la proposición:** En esta etapa, el estudiante deberá identificar que estructuras conceptuales están implícitas en la proposición a demostrar. Esto de alguna manera está implícito en la etapa anterior, en las hipótesis implícitas.

9. **Abstracción:** En esta etapa, el docente guía al estudiante en la formulación de la clásica pregunta de abstracción postulada por Solow (1992) en su método regresivo–progresivo. Esta pregunta, en la exposición de la proposición a demostrar, debe ser formulada al grupo de estudiantes con el objetivo de generar discusión y planteos personales.

10. **Guía Secuenciada de la demostración:** Si la proposición a demostrar, es en extremo constructiva y compleja, de modo que el estudiante no pueda abordarla por sí mismo, es recomendable la presentación secuenciada y detallada de la misma a la manera del método estructural sugerido por Leron.

He aquí un momento decisivo de la ingeniería didáctica descripta. Esta tecnología didáctica generada como consecuencia del desarrollo de la mecánica precedente tiene un objetivo decisivo. Si la proposición a demostrar, es en extremo constructiva y compleja o inclusive no cumpliendo esta condición, el estudiante no puede abordarla por sí mismo, entonces es recomendable su presentación secuenciada y detallada. Se puede obviar lo precedente, e instar al estudiante a que pueda desarrollar la prueba por sí mismo, con una serie de instrucciones consistentes en los pasos a seguir para llevar a cabo la secuencia argumentativa que permite establecer la verdad de la proposición. Esta tecnología didáctica, etapa final de la ingeniería didáctica referenciada, recibe el nombre de ***Guía Secuenciada***. La idea que subyace en esta Guía, es que el planteo de las pruebas no sea una instancia formal, sino que se integre a la práctica cotidiana. En general, los cursos de Matemática universitaria que están dirigidos a Carreras de grado que utilizan a esta Ciencia como herramienta tienen en sus guías de trabajos prácticos, ejercicios de aplicación de las estructuras conceptuales y las proposiciones asociadas a estas o aplicación de algoritmos. Rara vez, se plantean demostraciones para el estudiante. La idea de esta guía es que la teoría se articule con la práctica de manera fluida y no aparezca el clásico binomio teoría – práctica como dos compartimentos estancos y muchas de las demostraciones que son expuestas en clase de 'teoría' sean desarrolladas como ejercicios, integrando la guía de trabajos prácticos de la asignatura. Si la proposición no requiere de grandes artificios para la construcción de su prueba, es importante invitar al estudiante a llevarla a cabo por sí mismo, a través de una *Guía Secuenciada* de instrucciones que contemplen el paso a paso de la prueba en cuestión, para propiciar la construcción de esos razonamientos de forma autónoma. Esta *Guía Secuenciada* permitirá observar la demostración una vez realizada desde una perspectiva global hacia perspectivas más focalizadas, posibilitando la construcción de la prueba, generando aprendizajes comprensivos y significativos y no un conocimiento inerte sin interacción. Se recomienda que, si la proposición reviste complejidad, el docente la exponga detalladamente, y al finalizarla invite al estudiante a que intente reproducirla de forma aproximada con la Guía antes descripta, o bien que él mismo la genere, o también, que elabore una serie de preguntas relacionadas a la argumentación que conduce a la prueba. Esta serie de preguntas también podría ser un disparador inicial para el estudiante a los efectos de la construcción del razonamiento que constituye la prueba. La idea que subyace a esta Guía, es que el planteo de las pruebas no sea una instancia formal, sino que se integre a las actividades procedimentales. Es decir, que la práctica tradicional, no esté formada por clásicos ejercicios de aplicación de las estructuras conceptuales y las proposiciones asociadas a estas o simplemente aplicación de algoritmos sino, que la teoría se articule con la práctica de forma natural.

III.7.3. Ejemplos de *Guía Secuenciada*:

Ejemplo 1: Cociente de complejos en forma polar

¿Cómo puede probarse que el cociente entre dos números complejos, expresado en forma polar, es otro número complejo cuyo módulo es el cociente de los módulos y su argumento es la diferencia de los argumentos de los complejos dados?

***Guía Secuenciada* de la prueba**: Considerar que el cociente entre dos números complejos z y z' arroja un cierto resultado (darle un nombre simbólico) y despejar luego z o z' en función de los otros dos. Expresar ambos miembros de la igualdad planteada, en forma polar y luego de tener en cuenta la propiedad del producto de números complejos en forma polar. Considerar la definición de igualdad entre números complejos, correspondiente al formato polar. Aplicada la definición, deben despejarse los valores del módulo y el argumento del número complejo resultado del cociente al cual se le otorgó un nombre al comienzo de la prueba. Tener presente que tal definición debe considerarse particularmente para $k = 0$.

Desarrollo de la prueba:

$$Sean\ z=\rho_{\varphi}\ y\ z'=\rho'_{\varphi'} \Rightarrow \frac{z}{z'}=\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)_{\varphi-\varphi'}$$

$$\frac{z}{z'}=w\,/\,w=R_{\alpha} \Leftrightarrow z=w.z' \Leftrightarrow \rho_{\varphi}=R_{\alpha}.\rho'_{\varphi'} \Leftrightarrow \rho_{\varphi}=R.\rho'_{\alpha+\varphi'}$$

$$\Leftrightarrow \rho=R.\rho' \wedge \varphi+2k\pi=\alpha+\varphi' \Leftrightarrow R=\frac{\rho}{\rho'} \wedge \alpha=\varphi-\varphi'(k=0)$$

$$\therefore \frac{z}{z'}=\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)_{\varphi-\varphi'}$$

Ejemplo 2: Criterio derivada primera para monotonía de una función

Se consideran a continuación, una de las tres proposiciones que constituyen la totalidad de este teorema. Este contempla, según sea el signo de la primera derivada, que la función sea creciente, decreciente o constante.

Si $f\colon [a,b] \to R$ es una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) entonces, cualesquiera sea $x \in (a,b)\colon f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en (a,b).

¿Cómo puede demostrarse que la función de la hipótesis es estrictamente creciente si el signo de la función derivada primera es positivo?

Guía Secuenciada* para la prueba:* Considerar la función de la hipótesis, y un subintervalo de la misma, que puede llamárselo, por ejemplo: $[x, y] \subset [a, b]$. Luego, aplicar a la función f el teorema del valor medio del Cálculo Diferencial en el subintervalo considerado, previa verificación del cumplimiento de las hipótesis del teorema citado. Posteriormente analizar el signo de la expresión obtenida y teniendo en cuenta la hipótesis sobre el signo de $f'(x)$ y la definición de función estrictamente creciente, se podrá arribar a la tesis.

Desarrollo de la prueba:

Consideremos $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo de definición cerrado y derivable en el abierto – por hipótesis – y consideremos un subintervalo $[x, y] \subset [a,b]$, trataremos de aplicarle el teorema del valor medio del cálculo diferencial a la función en cuestión en el subintervalo antes mencionado, previo chequeo de las hipótesis.

f es continua en $[a,b]$, por ende, es continua en cualquier subconjunto, en este caso particular es continua en $[x, y]$.

Por otro lado, f es derivable en (a,b), por ende, es derivable en cualquier subconjunto, en este caso particular es derivable en (a,b).

Entonces, $\exists c \in (x, y) \,/\, \underbrace{\underbrace{f'(c)}_{i}\underbrace{(y-x)}_{ii}}_{iii} = f(y) - f(x)$

Referencias de justificación del último esquema:
i. es positiva por hipótesis; ii. es positivo por definición de intervalo. Se trata de la amplitud del intervalo, y la amplitud debe ser siempre un número positivo; iii. Producto de positivos es positivo.

El primer miembro de la igualdad última es positivo, por ende, el segundo miembro lo es también, en consecuencia: $f(y) - f(x) > 0 \Rightarrow f(y) > f(x)$

¿Qué conclusión podemos obtener?

Como el subintervalo considerado $[x, y]$ es tal que $x < y$, por definición de intervalo y resultó que: $f(x) < f(y) \Rightarrow f$ es estrictamente creciente – por la definición correspondiente – aquí entra en juego para la comprensión de quien está realizando la demostración, la visualización de este último concepto.

Ejemplo 3: La Regla de Stieffel

Se considera a continuación la clásica regla de Stieffel que tiene una aplicación inmediata en el desarrollo del triángulo de Pascal.

¿Cómo puede probarse que la suma de dos combinatorios de igual numerador y denominadores consecutivos es igual a un combinatorio de numerador consecutivo a los dos sumandos y denominador igual al segundo sumando?

***Guía Secuenciada* para la demostración:** Partiendo de la suma de combinatorios, aplicar la definición de número combinatorio a cada sumando. Luego multiplicar y dividir al primer sumando por: k e idénticamente en el segundo sumando por: $n-k$. Luego teniendo en cuenta la propiedad esencial desprendida de la definición de factorial, simplificar lo evidente en cada sumando y luego efectuar la suma indicada que tiene igual denominador. Efectuar las operaciones indicadas en el numerador y volver a tener en cuenta la propiedad antes mencionada y la definición de número combinatorio para arribar a la meta.

Desarrollo de la prueba:

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}+\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}==\frac{(n-1)!k}{(k-1)!(n-k)!k}+\frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-1-k)!(n-k)}=$$

$$=\frac{(n-1)!k}{k!(n-k)!}+\frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!}=\frac{(n-1)!(\cancel{k}+n-\cancel{k})}{k!(n-k)!}=\frac{(n-1)!n}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}_{Q.E.D.}$$

III.8. Mapas Conceptuales y Aprendizaje Significativo

En III.7.2. cuando se presenta la ingeniería didáctica diseñada por D´Andrea et al (2010, 2012) y específicamente en el ítem 5. cuando se hace alusión a la visualización, también se hace referencia a los mapas conceptuales como sinónimo de lo perfilado en este estadío de la ingeniería descripta. Chrobak (2001) caracteriza y define con mucha claridad lo que es un mapa conceptual de la forma siguiente:

> El mapa conceptual es un recurso gráfico esquemático para representar un conjunto de significados conceptuales incluidos en una estructura de proposiciones. Por su forma constitutiva, con ellos se pueden distinguir los procesos de

> organización jerárquica, la diferenciación progresiva y la reconciliación integradora que, como vimos son los principios básicos del aprendizaje significativo. Este hecho de que con los mapas conceptuales es posible la “visualización gráfica” del cumplimiento y control (autorregulación) de estos principios, es el principal motivo para que se constituyan en una herramienta insustituible cuando se trata de ayudar a los estudiantes a aprender a aprender. (p.137)

Chrobak, R., Sempere, P. G., & Prieto, A. B. (2015) consideran que los mapas conceptuales permiten identificar claramente los conceptos angulares, estableciendo un orden jerárquico entre estos, y relacionándolos entre sí de forma de generar un nexo entre los mismos con la finalidad de otorgarle significación a las diferentes estructuras conceptuales. Buscando dentro de estas estructuras una transversalidad de forma de que se pueda realizar una evaluación de la estructura final del mapa, de forma que puedan realizarse los ajustes necesarios. Este hilo conductor que en todo momento es la base estructural de la idea central del mapa conceptual es la base del principio de subsumsión que es el sostén principal del aprendizaje significativo.

De esta forma, la instancia visual de la prueba puede trascender el mero hecho de una visualización conceptual para pasar a ser un mapa conceptual visual que facilita un aprendizaje autoregulado de la misma.

III.9. El enfoque histórico en la didáctica de la Matemática. Obstáculos epistemológicos.

El objetivo general en investigación en Didáctica de la Matemática es el de resolver problemas que atañen al proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática en el ámbito educativo, abordándolos de una manera científica. Específicamente, la investigación histórica en didáctica de la Matemática tiene como objetivo encontrar fundamentos teóricos que permitan sustentar hipótesis que ayuden a resolver los problemas observados en el desarrollo de la Matemática en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Los obstáculos epistemológicos reconocibles en la historia de la Matemática permiten comprender ciertas dificultades (obstáculos) que se evidencian en el aprendizaje de cualquier conocimiento matemático. Esta línea de investigación tiene su génesis en la década del 70 del siglo pasado, y se caracterizó, según manifiesta Rojano (1994) por incorporar elementos de la epistemología genética y de la historia de las ideas matemáticas con el objetivo de poder identificar los obstáculos didácticos en la construcción de las diferentes estructuras conceptuales.

Filloy (1999) consideró, hacia fines del siglo pasado, que esta línea experimentó una notable evolución en lo que se ha denominado tácitamente el análisis histórico epistemológico en la investigación didáctica. Éste es un tipo de análisis que toma elementos de la génesis histórica y de la epistemología, a través de la historia de las ideas, para el provecho de la didáctica de la Matemática. Con el estudio de la génesis histórica, se pone de manifiesto que para un mismo concepto matemático se han ido sucediendo una diversidad de perspectivas a través de diferentes puntos de vista analizados sobre el mismo que, en su momento, fueron considerados como adecuados y posteriormente fueron objeto de revisión o refutación. Por otro lado, la epistemología ayuda a establecer la configuración esencial de los elementos estructurales que constituyen el alcance y significado de determinada estructura conceptual, realizando un análisis meduloso de los diferentes sentidos y circunstancias históricas en las que esta estructura pudo aparecer y su adaptación a la resolución de diferentes problemas.

Existen diferentes corrientes en la investigación histórico – epistemológica pero, para esta investigación solamente interesa describir la corriente de los obstáculos epistemológicos.

El enfoque de los obstáculos epistemológicos consiste en un acercamiento a la investigación histórico – epistemológica, pero con un mayor impacto e influencia que otros enfoques. Se caracteriza por intentar determinar concepciones y obstáculos ligados al desarrollo de una estructura conceptual matemática, como una herramienta muy útil para el análisis didáctico de las concepciones y obstáculos que se pueden presentar en el proceso de aprendizaje y apropiación de esta estructura en los estudiantes. Existen diferencias entre el desarrollo histórico de un concepto y su aprendizaje, pero se considera que identificar obstáculos en la historia permite llevar a cabo un diseño instruccional de modelos e ingenierías didácticas de situaciones que tengan en cuenta todas las condiciones requeridas para la construcción de los saberes. Esta corriente está representada esencialmente por Brousseau (1981, 1983). Según este investigador, los obstáculos identificados en la génesis histórica de un concepto son obstáculos epistemológicos y tiene su origen en la propia constitución del conocimiento. Se les puede encontrar en la propia historia del concepto y su posterior análisis a la luz de su evolución histórica. (Brousseau, 1983).

Es importante tener presente que tipo de historia puede ayudar a la formación de la pedagogía del saber analizar. Se requiere más que enciclopedismo sobre el acontecimiento, detrás de un conocimiento. Se requiere saber quién, cuándo, en qué época y en qué contexto de la evolución de las ideas matemáticas lo hizo. Se requiere mucho más que una historia epistemológica del saber académico, se necesita un recorrido de las ideas que permitan enlazar la génesis de un determinado saber con el itinerario recorrido por el mismo hasta el saber actual y realmente existente. Una formación sobre el desarrollo de teorías, conceptos y pruebas no revela necesariamente las razones de ser de las teorías y fundamentos que interesan al profesional docente. La experiencia indica que estos tipos de historia pueden acomodarse bien en el modelo transmisionista de enseñanza y aprendizaje, pero se sitúan erróneamente en la dirección de una pedagogía del saberanalizar (problemas significativos de la práctica docente). La historia se situará mejor de acuerdo con el ideal pedagógico del saber analizar, si además de explicar la epistemología del conocimiento disciplinar, es decir, el estatuto de verdad de los enunciados en un sistema teórico, explica sus razones de ser, es decir, el cómo del acontecimiento de constitución de un objeto en tanto actividad humana de razonamiento tiene en determinados contextos históricos y culturales. De acuerdo con la teoría de Brousseau (1983) se trata de comprender el funcionamiento del método axiomático para mejor orientar la enseñanza de la perspectiva de la "*transposición didáctica*" (Chevallard, 1998). La "*historia situada*" nos explicaría que no todo es lógica en el pensamiento formal (Kitcher, 1984; Arboleda, 2007) y que muy diferente es el formalismo matemático en tanto se refiere a la solución de problemas; valor de verdad de proposiciones; consistencia y criterios de existencia basados en la prueba pero otra cosa muy diferente es el modo del razonamiento formal y sus características: sistematicidad; automaticidad y extensibilidad. Un obstáculo califica de epistemológico si se puede rastrear en la historia de la Matemática y la comunidad de matemáticos de un determinado período que ha tenido que tomar conciencia del mismo y de la necesidad de superarlo. En tal caso, el rechazo explícito del obstáculo forma parte del saber matemático actual. En relación a esto, Duroux (1982) propone una guía, con algunas modificaciones introducidas por Brousseau (1989), de condiciones necesarias para poder calificar de obstáculo a una concepción. La guía plantea las cuestiones siguientes:

> a) Un obstáculo será un conocimiento o una concepción pero no una dificultad ni una falta de conocimiento.; b) Este conocimiento produce respuestas adaptadas a un cierto contexto, frecuentemente reencontrado.; c) Este obstáculo engendra respuestas falsas fuera de este contexto. Una respuesta correcta y universal exige un punto de vista notablemente diferente.; d) Además, este conocimiento resiste a las contradicciones con las que se le confronta y al establecimiento de un conocimiento mejor. No es suficiente poseer un conocimiento mejor para que el precedente desaparezca (lo que distingue la superación de obstáculos de la acomodación de Piaget). Es pues, indispensable identificarlo e incorporar su rechazo en el nuevo saber.; e) Después de tomar conciencia de su inexactitud, el obstáculo continua manifestándose de forma intempestiva y obstinada. (Brousseau, 1989, p. 43)

Como ejemplo, se exponen a continuación, los obstáculos epistemológicos en el proceso de aprendizaje de los números negativos.

La primera referencia a obstáculos epistemológicos en los enteros negativos aparece en un artículo publicado de Glaeser en 1981. En este artículo, el autor manifiesta su intención de buscar los obstáculos que se oponen a la comprensión y consecuentemente, al aprendizaje de los enteros negativos. A tales efectos y haciéndose eco de un lento proceso histórico de construcción del concepto de número negativo, bucea en las huellas de tales obstáculos en el pasado, analizando, mediante una técnica de comentario de textos, lo que los matemáticos de diferentes épocas manifestaron sobre esos números. Si bien, Glaeser comienza su artículo refiriéndose a la noción de obstáculo en el contexto de un marco teórico encuadrado en Brousseau y Bachelard, hace una consideración sobre lo prematuro de precisar demasiado el término 'obstáculo' y manifiesta que lo utiliza en un sentido más flexible, equiparándolo a términos tales como: 'dificultad', 'umbral', 'síntoma', etc. De esta forma, el autor considera que en la evolución histórica de la noción de número negativo desde sus albores hasta el concepto actual, se pueden constatar los siguientes obstáculos:

a) Falta de capacidad para manipular cantidades negativas aisladas. Esto es observable en la obra de Diofanto, de la necesidad de efectuar cálculos algebraicos con diferencias y, en particular, la necesidad de multiplicar dos diferencias, lo que le lleva a enunciar la regla de los signos y, sin embargo, no acepta la existencia de números negativos aislados.

b) Dificultad para dar sentido a cantidades negativas aisladas. En la obra de algunos matemáticos tales como Stevin, D'Alembert, Carnot y, posiblemente, Descartes, se constata que conciben la existencia de soluciones negativas de las ecuaciones ya que las obtienen, por lo que las 'ven' y no las ignoran, pero sus 'prejuicios' quizás no pueden aceptarlas como cantidades reales y las justifican manifestando que son cantidades ficticias que expresan un defecto en el enunciado del problema.

c) Dificultad para unificar la recta real. En el intento de sobrepasar el obstáculo anterior e interpretando las cantidades negativas como cantidades reales, se observa que algunos matemáticos tales como McLaurin, D'Alembert, Carnot y Cauchy concebían los negativos y los positivos en términos antinómicos: 'lo negativo', según ellos, neutralizaba, en oposición a 'lo positivo'. Es decir, la cantidad negativa era tan real como la positiva, pero estaba tomada en un sentido opuesto. Esta heterogeneidad que se establecía entre negativos y positivos no facilitaba su unificación en una única recta numérica y, en cambio, favorecía el modelo de dos semirrectas opuestas funcionando de forma independiente.

d) La ambigüedad de los dos ceros. Glaeser se refiere con esto a las dificultades que hubo entre matemáticos como Stevin, McLaurin, D'Alembert, Carnot, Cauchy y, quizás, Euler y Laplace para pasar de un cero absoluto, un cero que significaba la ausencia de cantidad de magnitud, a un cero considerado como origen pero elegido de forma arbitraria. Uno de los razonamientos más extendidos

entre los matemáticos que se oponían a la consideración de las cantidades negativas como cantidades reales y no como meros artificios del cálculo, era que no se podría admitir la existencia de cantidades que fueran ‘menos que nada’.
e) El estancamiento en el estadio de las operaciones concretas. La superación de los obstáculos anteriores permite aceptar los números negativos como cantidades reales y justificar su estructura aditiva, pero no así la estructura multiplicativa. El problema de justificar la regla de los signos lo resolvió definitivamente Hankel en 1867, cuando propuso prolongar la multiplicación desde los reales positivos a los reales respetando un principio de permanencia que permite conservar a determinadas propiedades que se ‘heredan’ de la estructura algebraica de los reales positivos. Esto, a juicio de Glaeser, supone un cambio total de perspectiva en la resolución del problema.

Hay que tener en cuenta, como muy bien señala Glaeser (1981) que en el establecimiento de las escalas de temperatura Celsius o Reaumur, “*uno de los hechos que pudo contribuir a la aceptación de un cero origen y de cantidades por debajo de cero, fue bastante tardío.*” (p.239). Ocurre que Reaumur realizó sus primeros termómetros en 1730 y Celsius en 1742, pero tardaron casi un siglo en popularizarse.Glaeser (1981) opina que “*ya no se trata de descubrir en la Naturaleza ejemplos prácticos que ‘expliquen’ los números enteros de un modo metafórico. Estos números ya no son descubiertos, sino inventados, imaginados.*” (p. 337)

f) Deseo de un modelo unificador. La comunidad matemática busca un buen modelo concreto que justifique tanto la estructura aditiva como la multiplicativa de los números enteros y que pueda ser comprendido con relativa facilidad por las personas que están en vías de aprenderlos. Su existencia hubiera evitado la necesidad de superar el obstáculo anterior, pero hasta hoy no ha sido encontrado y los que se utilizan habitualmente en la ensañanza, como, por ejemplo, el modelo de ganancias y pérdidas, sólo explican satisfactoriamente la estructura aditiva, pero a costa de convertirse en un obstáculo para la comprensión de la estructura multiplicativa.

Glaeser concluye en su artículo, que sería necesario realizar experiencias con los estudiantes para comprobar si alguno de los obstáculos puestos en evidencia en el estudio histórico se reproduce en los procesos de enseñanza actuales. Añade también que su investigación pone de manifiesto que los modelos concretos, habitualmente utilizados en la enseñanza de los números enteros, son un obstáculo para la comprensión de su estructura multiplicativa.

III.10. Referencias acerca del proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo

Si bien esta investigación no trata específicamente sobre lo que reza el título de este párrafo, sin embargo, no puede soslayarse el esbozo de un ligero abordaje de la cuestión. En virtud de lo que se plantea en este marco teórico, luego en el metodológico y posteriormente en el análisis de datos, se va a requerir de un soporte teórico sobre esta específica cuestión a la hora de analizar los datos obtenidos, específicamente en ciertas pruebas que se proponen sobre Cálculo. A continuación, se exponen las opiniones de ciertos investigadores acerca del proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo en el nivel universitario. Para comenzar, Alonso (2014) considera que todo ingeniero, durante el desarrollo de su carrera, debe estudiar Matemática porque es la forma más adecuada de abordar el pensamiento analítico, el sentido de lo exacto, la integridad numérica y el apego al control y la medida. Más aún, enfatiza que aquellos que se involucren en especializaciones más avanzadas, serán los que más necesiten de la Matemática o lo que esta brinda implícitamente, como herramienta. Por su lado, Sánchez, González & Martínez-López (2017) aseguran que el Cálculo es una de las áreas específicas de Matemática que mayores inconvenientes presentan los estudiantes, fundamentalmente en la formación conceptual, pero teniendo en cuenta que hay gran énfasis de la comprensión a nivel instrumental pero se evidencian insuficiencias a nivel didáctico. Mientras que, Cantoral y Mirón (2000) señalan un vacío en el aprendizaje del Cálculo ya que lo que consideran que se logra en las aulas es que los estudiantes mecánicamente deriven, integren, calculen límites elementales pero no están munidos de las herramientas conceptuales que les permitan desarrollar un perspectiva amplia propia de un aprendizaje comprensivo que les posibilite detectar cuando un problema real de la profesión escogida requiere el uso del Cálculo. En relación a las opiniones precedentes, debe subrayarse y destacarse que el estudiante, específicamente de ingeniería, en el abordaje del Cálculo se limita, acorde a la opinión de estos investigadores y a la experiencia áulica cotidiana, a una mecanización algorítmica del mismo, como un producto acabado que reciben del conductor del aprendizaje pero que no trasciende en disquisiciones más profundas. La profundización conceptual, cada vez más alejada, no permite que el estudiante comprenda claramente los significados geométricos, alejándolos de conceptos troncales y angulares del Cálculo como el de diferencial y asociado al mismo, la diferenciabilidad de una función. En relación a esto y de forma muy atinada, Artigué, M., Douady, R., Moreno, L., & Gómez, P. (1995) afirman que:

> los estudiantes consideran todo lo concerniente a los procedimientos diferenciales e integrales como "aproximativo" y "cómodo", es decir, como un sector donde es mejor funcionar con base en mecanizaciones sin tratar de comprender. Los estudiantes se adaptan a su utilización y aprenden a reconocer las ocasiones cuando toca utilizarlos al mirar los términos presentes en los enunciados. (p.124)

III.11. Resultados sobre una investigación sobre Argumentaciones utilizadas por estudiantes universitarios

Crespo Crespo & Farfán (2006) como resultado de la fase experimental realizado para una de sus investigaciones pudieron formular una serie de conclusiones que ponen de relieve que la formación profesional influye en el tipo de argumentación utilizado permitiendo su comprensión desde una construcción meramente sociocultural. Esas conclusiones se exponen a continuación:

El total de los estudiantes del último año del profesorado de matemática reconocen las argumentaciones por reducción al absurdo en un contexto estrictamente matemático. Estos estudiantes pueden explicarlas adecuadamente y detallar sus características y dificultades. Un porcentaje menor al 50% de los estudiantes entrevistados argumentan por reducción al absurdo en contextos extramatemáticos. Pocos estudiantes con formación en informática pueden ser capaces de realizar argumentaciones indirectas para resolver situaciones problemáticas y llevar a cabo demostraciones. De hecho, este tipo de estudiantes tienen preferencia a la utilización de argumentaciones directas. La forma de razonar frente a un condicional, de este tipo de estudiantes, realizan la evaluación del antecedente antes del consecuente. En estudiantes de escuela media, se observó que ninguno de los entrevistados pudo argumentar adecuadamente utilizando el contrarrecíproco. Para la mayor parte de este tipo de estudiantes, la única forma de probar la validez de una implicación es verificar todos los casos, lo que evidencia que aún no han incorporado la idea de una prueba genérica que involucra un grado absoluto de abstracción que no requiere de un razonamiento que necesite de detenerse y razonar en caso por caso.

III. 12. Las definiciones y su integración en la justificación

Azcárate Giménez y Camacho Machín (2003) consideran que en la matemática elemental, los objetos se describen y en la avanzada, los objetos se definen. Esta distinción evidencia la diferencia entre ambas. En ambos casos, es utilizado el lenguaje natural que permite relacionar la actividad matemática con el contexto, ya sea matemático como del mundo externo, y también para describir o enunciar las propiedades de los objetos. Sin embargo, en el contexto de la matemática elemental, la construcción de las descripciones se realizan sobre la experiencia mientras que en el contexto de la matemática avanzada que se circunscribe al conocimiento formal, la construcción se edifica sobre las definiciones que hacen a las propiedades de los objetos. Debe destacarse que la adquisición de un concepto matemático se puede estructurar sobre la construcción de su esquema conceptual. El saber de memoria la definición de un concepto no es garantía para la comprensión de su significado; en realidad, comprender quiere decir tener un esquema conceptual de forma que se asocien ciertos significados a la palabra que designa el concepto, tales como imágenes mentales; procedimientos; propiedades; experiencias y cuestiones meramente sensoriales.

Sin embargo, la presentación y organización de la mayor parte de los libros de texto y también buena parte de las clases de matemática parecen sostenerse en la presunción de que los conceptos finalmente son adquiridos a través de su definición y que esta definición va a ser utilizada por los estudiantes a través de la realización de ejercicios específicos o resolución de problemas.

Azcárate Giménez y Camacho Machín (2003) citan a Vinner (1991) que se expresa claramente frente a la cuestión precedentemente planteada y que es artífice de un conflicto y se manifiesta diciendo textualmente: "*Las definiciones* *crean un problema muy serio en el aprendizaje de las matemáticas. Representa, quizás más que cualquier otra cosa, el conflicto entre la estructura de las matemáticas, tal como la conciben los matemáticos profesionales, y los procesos cognitivos de la adquisición de conceptos*".

Siguiendo la línea de investigación desarrollada por Azcárate Giménez y Camacho Machín (2003), estos investigadores consideran que desde un punto de vista estrictamente cognitivo, parece que los autores de libros de texto y muchos profesores dan por supuesto que se produce el aprendizaje a partir de las definiciones y que en la resolución de problemas y realización de tareas son estas las que se activan en la mente del estudiante y controlan el proceso. Sin embargo, lo que ocurre en la práctica, según las investigaciones que se ocupan de esta cuestión, es que el esquema conceptual se construye a partir de la experiencia del estudiante, es decir a partir de situaciones muy variadas. Los estudiantes tienden a realizar sus tareas de forma espontánea, de acuerdo con los hábitos adquiridos en la vida cotidiana, es decir que elaboran sus respuestas a partir de los elementos de sus esquemas conceptuales evocados por el contexto de la situación, y no específicamente desde un esquema de autoridad, evocando uno de los patrones de razonamiento postulados en este mismo capítulo por Rigo, Rojano y Pluvinage (2011).

Calvo Pesce (2001) considera que si los estudiantes son capaces de enfrentar tareas matemáticas utilizando parte del contenido de su esquema conceptual, sin recurrir específicamente a la definición, entonces surge la cuestión de si es necesario preocuparse por presentar definiciones formales en el ámbito áulico en lugar de concentrar los esfuerzos en seleccionar contenidos que permitan aproximar informalmente la construcción en los estudiantes. Una construcción de esquemas conceptuales compatibles con la definición formal que la comunidad matemática maneja. Esta investigadora considera fundamental que el estudiante debería ser invitado a expresar caracterizaciones de objetos matemáticos con los que ya está familiarizado o con otros nuevos, pudiendo ellos mismos crear sus propias definiciones.

De hecho, es muy importante la comprensión del estudiante de una estructura conceptual desde su propio lenguaje, tal como manifiesta D´Andrea et al (2010, 2012) en el diseño de su ingeniería didáctica, específicamente en el ítem 3.

correspondiente a la secuencia de tareas descripta denominada: intepretación coloquial.

CAPÍTULO IV

MARCO METODOLÓGICO

"El Espíritu Divino descubrió una sublime salida en esa maravilla del análisis, ese portento del mundo ideal, esa ambivalencia entre ser y no ser que nosotros llamamos raíz imaginaria o unidad negativa". Leibniz (1646 – 1716)

Resumen

En este capítulo se desarrolla el marco metodológico o diseño de la investigación que consiste en el plan estructural que será utilizado para dar respuestas a las preguntas de investigación que fueron planteadas en el capítulo II correspondiente al problema de investigación. El marco metodológico implica objetivamente partir de un marco de referencia obtenido a partir del marco teórico y señalar como se obtendrán los datos, mencionar cuántos y cuáles registros u observaciones se realizarán y como se realizará la información obtenida y el tipo de análisis estadístico que requiere el estudio planteado.

IV.1. Diseño de la investigación

En el diseño de la parte experimental de la investigación participó la confluencia de la naturaleza de la investigación documental y de la investigación de campo para llegar a establecer una exploración específicamente direccionada a detectar pautas de razonamiento que el estudiante universitario manifiesta en específicas actividades de demostración en el área de Matemática, concretamente en Álgebra y Cálculo. La investigación entonces se encuadró bajo un diseño descriptivo, ya que lo que se buscó es describir y analizar variables. Consecuentemente, el enfoque metodológico de la investigación fue de tipo interpretativo – simbólico o hermenéutico con un análisis cualitativo de los datos.

La investigación que permitió explorar los razonamientos utilizados por el estudiante universitario de ingeniería en demostraciones matemáticas fue un estudio longitudinal de seis años de duración.

El trabajo de campo asociado a esta investigación se realizó en la Facultad de Química e Ingeniería del Rosario de la PUCA: Pontificia Universidad Católica Argentina del Campus Rosario, provincia de Santa Fe, Argentina. Para su realización se consideraron cinco cohortes consecutivas de ingresantes a las Carreras de grado del ciclo común de las carreras de grado: Ingeniería Industrial e Ingeniería Ambiental. Cada cohorte requirió de un trabajo experimental adicional al año siguiente para analizar un tipo de razonamiento que requería un contenido que se dicta en el segundo curso de Cálculo ubicado en el segundo año del ciclo común de las ingenierías.

Durante los seis años de trabajo de campo se realizaron con cada grupo, idénticas actividades, que son las que constituyen el trabajo experimental de este estudio. Cada año se conformaron dos grupos de estudiantes, cada uno constituido por 20: 10 varones y 10 mujeres. Los estudiantes fueron seleccionados a partir de una convocatoria voluntaria. Las condiciones para la elección de los estudiantes que formaron los grupos fueron: tener 18 años; haber realizado y acreditado la aprobación del último año del ciclo medio, el año anterior al de ingreso a la Universidad y además tener acreditado el curso propedéutico de la universidad y no poseer la carga adicional de un trabajo. Todos los años, cada uno de los dos grupos de estudiantes del desarrollo de esta investigación tuvo características diferentes que se describen a continuación y que se mantuvieron en la misma forma para las cinco cohortes.

Uno de los grupos de estudiantes, denominado grupo experimental, asistió a clases conducidas por un docente con un paradigma de enseñanza aproximativo, es decir, centrado en la construcción del saber por el estudiante, y bajo los cánones establecidos por la ingeniería didáctica diseñada por D´Andrea et al (2010, 2012). El otro grupo de estudiantes, denominado: grupo de control, concurrió a clases conducidas por un docente con un paradigma de enseñanza normativo, es decir, centrado en el contenido y en la transmisión pasiva de ese contenido a los estudiantes.

Los trabajos realizados y la encuesta respondida por los estudiantes seleccionados para cada año fueron analizados para la investigación, en el contexto de un período de los cursos anuales de correlación horizontal en el currículum del ciclo común de las ingenierías, denominados: Matemática I; Matemática II y adicionalmente el curso denominado Matemática III, de correlación vertical con las otras dos asignaturas mencionadas, de la facultad elegida.

Matemática I fue un curso anual del primer año del currículum común a las carreras de grado: Ingeniería Industrial e Ingeniería Ambiental. Se trató de un curso de Cálculo diferencial e integral en una variable real. El curso constaba de cuatro etapas. La primera etapa denominada: Precálculo estaba constituida por los siguientes contenidos: las propiedades geométricas de los números reales; el axioma de continuidad y funciones reales de una variable real. Esta primera etapa estaba precedida por una Unidad 0 denominada El lenguaje de la Matemática y su método (esta unidad era únicamente dictada para el Grupo experimental).

La segunda etapa denominada: Proceso de paso al límite estaba constituida por los siguientes contenidos: Límite finito de una función en un punto y sus propiedades, la generalización a límites infinitos y la continuidad de funciones reales de una variable real y sus propiedades. La tercera etapa: Cálculo Diferencial y sus aplicaciones y la cuarta etapa: Cálculo Integral y sus aplicaciones.

Nota: El término Precálculo es un término propio y extraído de los libros contemporáneos de Cálculo escritos por matemáticos estadounidenses tales como Edwards y Penney (1996); Fraleigh (1984); Larson, Hostetler y Edwards (1989); Purcell-Varberg (1993) y Stewart (1994), entre otros. El término alude a la etapa previa al Cálculo y sus contenidos consistían en cuestiones de Álgebra elemental, Trigonometría y Funciones reales de variable real, entre otros. Estos últimos contenidos mencionados constituían los necesarios y suficientes para el abordaje del Cálculo diferencial e integral en una variable real. En general, en la educación de Estados Unidos de América, Precálculo alude a una forma avanzada de Álgebra.

Matemática II fue un curso anual del primer año del currículum común a las carreras de grado: Ingeniería Industrial e Ingeniería Ambiental. Se trató de un curso de Álgebra lineal y Geometría Analítica. El curso constaba de cuatro etapas. La primera etapa correspondía a la denominada Álgebra Elemental y estaba constituida por los siguientes contenidos: Enteros positivos: pares; impares; primos; divisibilidad y propiedades; Números Reales; Números complejos; Polinomios reales y complejos y Análisis Combinatorio. Esta primera etapa estaba precedida por una Unidad 0 denominada El lenguaje de la Matemática y su método (esta unidad era únicamente dictada para el Grupo experimental). Esta etapa se dictó de forma común para todos los años y para esta asignatura y Matemática I, pero solamente para el grupo experimental. La segunda etapa correspondía al Álgebra Vectorial. La tercera etapa correspondía a Geometría Analítica. La cuarta etapa correspondía a una Introducción al Álgebra Lineal y constaba de los siguientes contenidos: Álgebra matricial y su aplicación a la resolución de Sistemas Lineales; Espacios vectoriales y Transformaciones lineales.

Matemática III fue un curso anual del segundo año del currículum común a las carreras de grado: Ingeniería Industrial e Ingeniería Ambiental. Se trató de un curso de Cálculo diferencial e integral en varias variables. El curso constaba de cuatro etapas. La primera etapa denominada: Introducción y estaba constituida por los siguientes contenidos: una revisión ligera de geometría analítica y una introducción al Límite y Continuidad de campos escalares. La segunda etapa denominada: Cálculo Diferencial estaba constituida por los siguientes contenidos: Cálculo Diferencial; El Teorema de Dini y Cauchy-Dini; Criterio del Hessiano; Optimización de Lagrange y Nociones de Geometría Diferencial. La tercera etapa correspondía a la Integración Múltiple y finalmente la cuarta etapa correspondía al desarrollo del Cálculo Vectorial.

Para la parte experimental de la investigación, las etapas escogidas de la asignatura Matemática I fueron las tres primeras. La primera etapa se desarrollaba durante la primera mitad del primer cuatrimestre; la segunda etapa se desarrollaba durante la segunda mitad del primer cuatrimestre y la tercera etapa se desarrollaba durante la primera mitad del segundo cuatrimestre de la cursada de la asignatura.

Las etapas escogidas para la parte experimental de la investigación de la asignatura Matemática II fueron las dos primeras. La primera etapa se desarrollaba en la primera mitad del primer cuatrimestre y la segunda etapa se desarrollaba durante la segunda mitad del primer cuatrimestre de la cursada de la asignatura.

Finalmente, la etapa escogida de la asignatura Matemática III es una parte de la primera etapa que se desarrollaba durante la primera mitad del primer cuatrimestre de la cursada de la asignatura. El momento considerado para la investigación, se trata del que corresponde al abordaje del límite de campos escalares de dos variables y específicamente se centraba en el estudio de su no existencia a través de los denominados límites radiales y el proceso extensivo consistente en el estudio del comportamiento del campo escalar a través de curvas diferentes que pasen por el punto en el que se quiere calcular el límite.

IV.2. Técnicas e Instrumentos

Para la recolección de datos, los instrumentos que se aplicaron a la población elegida, consistieron en una serie de ejercicios sobre demostración de proposiciones verdaderas que involucraban la argumentación y justificación de cada paso de la cadena argumentativa.

En el grupo experimental se utilizó la tecnología didáctica generada por D´Andrea et al (2010, 2012) denominada *Guía Secuenciada* como apoyo a cada consigna sobre la demostración propuesta al grupo de estudiantes. No obstante, esto no significó que el estudiante pueda haber seguido un camino diferente al sugerido, ya que la *Guía secuenciada*, fue una sugerencia y no una obligación para trabajar en el desarrollo de la consigna propuesta de determinada manera. En el grupo de control se pidió el desarrollo de la consigna sin apoyo alguno, de forma que el estudiante siguiera el camino que considerara más conveniente.

Es importante destacar que, a los integrantes de ambos grupos, cada vez que se los citaba a los diferentes trabajos de campo, se les indicaba que debían concurrir con sus propios apuntes de clase correspondientes a las asignaturas de Matemática que se encontraban cursando. Esta estrategia fue trascendental y su objetivo fue evitar que los estudiantes se distrajeran con búsquedas innecesarias ya que lo que se buscaba es que el estudiante concentrara toda su energía mental en la realización de las diferentes pruebas que proponían las consignas de cada uno de los ejercicios del trabajo experimental de esta investigación.

El diseño de los ejercicios que operaron como instrumentos tuvo como objeto analizar las diferentes pautas de razonamiento, de ahí que se acomodaron en seis grupos distintos a saber: **Ejercicios de razonamiento deductivo por argumentación directa cuyas siglas se detallan a continuación: RDAD; Ejercicios de razonamiento deductivo por argumentación indirecta cuyas siglas se detallan a continuación: RDAI; Ejercicios de razonamiento plausible o conjetural cuyas siglas se detallan a continuación: RPoC; Ejercicios de razonamiento por reducción al absurdo cuyas siglas se detallan a continuación: RRA; RI: Ejercicios de razonamiento inductivo cuyas siglas se detallan a continuación: RI; Ejercicios de razonamiento visual cuyas siglas se detallan a continuación: RV.**

Las herramientas utilizadas para el análisis de datos fueron: la estadística descriptiva y el test de hipótesis o chi – cuadrado, este último a los efectos de comparar los dos grupos elegidos como población en cada cohorte. Es importante tener presente la siguiente cita textual de Gil Flores (2003) en referencia a la importancia de la inserción de resultados estadísticos como corolario de un trabajo de investigación.

> La presentación de las conclusiones, así como de todo el proceso de investigación, debe contar con la inclusión de resultados estadísticos. Aunque no se trata de una aplicación de técnicas estadísticas en el momento de redactar el informe, sí que la Estadística está de algún modo presente a la hora de mostrar los resultados. Las conclusiones de un estudio se verán convenientemente ilustradas mediante la presentación de tablas, cuadros, etc. recogiendo medias, porcentajes, coordenadas, correlaciones, o cualquier otro tipo de estadísticos.
> Otro tanto podemos decir acerca de los resultados estadísticos expresados gráficamente. La utilización de determinadas técnicas estadísticas y la intención posterior de comunicar los resultados obtenidos requieren incluir representaciones estrechamente vinculadas a aquéllas en los informes de investigación. (Gil Flores, 2003, p.237)

IV. 3. Los instrumentos para el trabajo de campo

Los instrumentos que se utilizaron para la recogida de datos fueron ejercicios de demostración de proposiciones, pero también hubo una encuesta de tipo abierta, consistente en una sola pregunta. Las características generales de los ejercicios de demostración de proposiciones se describen en el párrafo IV.4., mientras que el cuestionario en el párrafo IV.3.2. Cabe destacar que, los ejercicios realizados por los estudiantes voluntarios se realizaron con un código que el estudiante se autoasignó desde el primer ejercicio y que mantuvo hasta el final, e inclusive en la encuesta, y en cada cohorte. Asimismo, se le pedía que, junto al código, que solo este conocía, colocara M o F, según fuera varón o mujer. Otra cuestión importante que se les pidió al grupo de estudiantes es que mantuvieran los móviles apagados, mientras se encontraban en el aula realizando el o los ejercicios asignados. Al finalizar el último ejercicio correspondiente a cada cohorte, se le generó a cada estudiante un porfolio con el código que este se autoasignó.

Observación: De la misma forma que en los tres primeros capítulos y en lo desarrollado hasta el presente, a los sujetos de observación y estudio que realizaron los diferentes trabajos de campo a lo largo de esta investigación se les siguió denominando simplemente estudiante o estudiantes, indistintamente.

IV.3.1. Los ejercicios de razonamiento

A continuación, se describen los lineamientos tenidos en cuenta para la construcción de los ejercicios, que en el párrafo siguiente se muestran agrupados por el tipo de razonamiento que se pretende analizar, a los efectos de determinar las categorías emergentes que consecuentemente se van a perfilar como las pautas de razonamiento utilizadas por estudiantes universitarios de ingeniería en procesos de prueba en Matemática.

Es muy importante señalar algunas cuestiones acerca del desarrollo de los ejercicios y el contexto en que fueron realizados.

Los ejercicios fueron aplicados a los estudiantes seleccionados cada año en el orden siguiente que se detalla a continuación:

Ejercicios: **1RDAD; 1RDAI; 1RPoC; 1RRA; 1RI; 2RI; 2RPoC; 1RV; 2RV; 2RDAI; 2RDAD; 3RI; 4RI; 3RDAD; 3RPoC; 3RDAI; 4RPoC; 2RRA; 4RDAD; 3RV; 4RV; 3RRA; 4RRA.**

El orden tuvo que ver con diferentes momentos de las cursadas de las asignaturas elegidas para este proceso. Pero ese orden tuvo que ver también con el desarrollo de la adquisición de los conocimientos de los estudiantes, ya que de otra manera hubiera sido imposible la realización de los mismos. Asimismo, el estudiante en ese orden y en los diferentes contextos fue conociendo diferentes técnicas y vio distintas demostraciones, mientras un grupo lo hizo bajo un cánon formal teñido de un viso epistemológico; el otro grupo, lo hizo de manera informal, y sin una explicación que mostrara las causalidades de las acciones realizadas. Cada cohorte de estudiantes realizó 23 ejercicios en total. Se buscaron ejercicios sobre demostraciones simples, abundando en contenidos de Álgebra elemental, Álgebra más avanzada (pero no tan profunda) y algunos de Cálculo. Esta decisión no fue caprichosa. En todo momento se buscó obtener pautas de razonamiento de los estudiantes y obtener esta información en contenidos más complejos, corría el riesgo de empañar el objetivo principal con dificultades en la comprensión de los contenidos debido a su densidad, de ahí que la escogencia fue muy cuidadosa y con un análisis profundo acerca de las ventajas y desventajas de cada elección. El párrafo III.10 del marco teórico describe brevemente las dificultades que presentan los estudiantes de Ingeniería al abordar el Cálculo, esto sostiene conceptualmente ciertas elecciones en los ejercicios, especialmente en lo referente a esta disciplina de la Matemática.

En el párrafo siguiente donde se presentan los ejercicios, se describe brevemente el porqué de la elección de cada uno con un ligero análisis. Es importante tener nuevamente bien presente que el foco de estudio se hace sobre estudiantes universitarios de ingeniería, donde Matemática se constituye en una herramienta para desarrollar una heurística sostenida en un marco referencial y también, capacidad de razonamiento lógico. Este foco de estudio sería muy diferente si se tratase de estudiantes universitarios de grado de Física o Matemática pura o aplicada.

Una característica común a todos los ejercicios es que en cada uno se pidió siempre identificar la hipótesis y la tesis (con excepción de los ejercicios referentes al razonamiento inductivo, donde la formulación de la hipótesis y la tesis forman parte de la aplicación del principio de inducción matemática). Este pedido obedeció a que se buscó conocer como el estudiante se orientaba frente a la proposición a demostrar y su punto de partida y su punto de llegada. Cabe destacar también, que originalmente se pensó en pedir la verificación de cada proposición en cada ejercicio, de acuerdo a la ingeniería didáctica establecida por D´Andrea et al (2010, 2012), y en un análisis más profundo se pensó en requerirlo únicamente para el grupo experimental. Pero, siguiendo ese análisis, se llegó a la conclusión de no hacerlo porque de lo contrario se podría haber anulado la observación de ciertas acciones de los estudiantes que se pudieron observar en sus escritos con el solo pedido de la prueba con su correspondiente identificación de hipótesis y tesis.

El detalle de las consignas se realiza en el subpárrafo IV. 4.

IV.3.2. Encuesta abierta

Cada año a los 20 estudiantes voluntarios participantes del trabajo de campo de la investigación, se les generó un porfolio con los 23 ejercicios realizados y se los reunió al tiempo de finalizar el último de los trabajos, y se les entregó tal porfolio únicamente para que lo utilizaran en ese momento. Luego de finalizado el motivo de la reunión, debían reintegrarlo a la persona a cargo en ese momento. El motivo de la reunión era que respondieran una encuesta abierta con una sola pregunta. El motivo de que tuvieran consigo el porfolio, era generarles un recordatorio de los trabajos realizados y consecuentemente, los pensamientos vivenciales durante la realización de tales trabajos a los efectos de que puedan responder lo más adecuadamente la pregunta que se les planteó como cierre del trabajo de campo a esa cohorte de estudiantes. La consigna de la Encuesta abierta fue la siguiente:

Piensa y reflexiona largamente antes de responder.

En la medida de lo posible y de la forma en que mejor puedas expresarlo con tus palabras, comenta acerca de todos los ejercicios realizados que forman parte de tu porfolio, cuáles han sido más dificultosos y cuáles menos dificultosos, argumentando la o las razones de las dificultades/facilidades.

IV.4. Las consignas de los ejercicios de razonamiento

IV.4.1. Ejercicios de Razonamiento deductivo de argumentación directa RDAD

Ejercicio 1 RDAD

Considerar la siguiente proposición verdadera:

$$\forall x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : x \text{ es par} \wedge y \text{ es par} \Rightarrow x.y \text{ es par}$$

Se pide:

i. Identificar hipótesis y tesis.
ii. Demostrar la validez de la proposición, justificando cada paso de la prueba.

La elección de este ejercicio residió en que el recorrido de la argumentación de esta prueba es ‘lineal’, no posee ‘bifurcaciones’. La estructura de esta prueba realiza un ‘recorrido’ que arranca desde la hipótesis hasta llegar a la tesis, ‘sin dificultades ni bifurcaciones’ en el camino. Asimismo, no requiere demasiadas definiciones y estructuras conceptuales para su construcción y argumentación. Basta con que el estudiante tenga en cuenta la definición de número par y que tenga en cuenta el objetivo de la tesis a probar para que ‘arme’ el producto y se concientice en que lo que quiere probar es que ese producto sea par.

***Guía Secuenciada* para el grupo experimental:** ‘Partir’ desde el antecedente, considerando la definición de número par, generando el producto de dos números pares y teniendo en cuenta de utilizar distintas variables, para poder llegar a establecer la meta que traza la proposición.

La demostración de la proposición que plantea el ítem ii. del ejercicio se encuentra en el Capítulo III, III.3.2. Ejemplo 6, página 52.

Ejercicio 2 RDAD

Considerar la siguiente proposición verdadera: $Sean\ z=\rho_{\varphi}\ y\ z'=\rho'_{\varphi'}\neq\bar{0}\Rightarrow\frac{z}{z'}=\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)_{\varphi-\varphi'}$

Se trata del cociente de complejos en forma polar. Se pide:

i. Identificar hipótesis y tesis.
ii. Demostrar la validez de la proposición, justificando cada paso de la prueba.

La elección de este ejercicio residió en que esta actividad apela a que el estudiante pueda razonar siguiendo un hilo conductor único, similar al ejercicio 1, ya que la argumentación es muy lineal, es decir, no tiene ‘bifurcación’ alguna en su recorrido argumentativo. Asimismo, a diferencia del ejercicio 1, aquí no se ‘arranca’ de la hipótesis, literalmente, para llegar a la tesis. Aquí se debe ‘partir’ de un miembro de la igualdad que plantea la tesis para desarrollarla y llegar al ‘otro lado’ de la igualdad. La argumentación no requiere demasiadas definiciones y estructuras conceptuales para su construcción, pero necesita un trabajo adicional que supera ligeramente al ejercicio 1, que es de un corte más elemental.

***Guía Secuenciada* para el grupo experimental:** ‘Partir’ del primer miembro de la igualdad de la tesis, tal y como está planteada en la escritura simbólica. Darle un nombre a este cociente, que va a dar como resultado un complejo. Pero a este complejo, expresarlo en forma polar también, dándole nombres al módulo y argumento del resultado de este cociente. Despejar el numerador del cociente y observar que en el segundo miembro queda planteado un producto de complejos. Operar ese producto en forma polar y luego tener presente la igualdad de complejos en ese formato para k nulo, y se podrá arribar a la tesis.

La demostración que se plantea en ii. se encuentra en el Capítulo III, III.7.3. Ejemplo 1., página 83.

Ejercicio 3 RDAD

Considerar la siguiente proposición verdadera:

f es continua en el punto $x = x_0$ y g es continua en el punto $x = x_0$ entonces $f.g$ es continua en $x = x_0$. (Álgebra de las funciones continuas – producto –)

Se pide:

i. Identificar hipótesis y tesis.

ii. Demostrar la validez de la proposición, justificando cada paso de la prueba.

La elección de este ejercicio radicó en que la estructura argumentativa de la prueba requiere inexorablemente, en cierto momento del desarrollo argumentativo, de la utilización de la hipótesis. Se requiere el planteo de la definición implícita en la tesis, la definición de continuidad, para poder llegar a establecer la veracidad de esta. El proceso es similar al del ejercicio 2, ya que se debe 'arrancar' del planteo de una parte de la tesis, en este caso particular, del límite del producto para verificar la definición de continuidad para el producto de funciones, precisamente. Se requieren más definiciones y estructuras conceptuales para sostener la argumentación de forma similar al ejercicio 2, es decir, un poco más que el ejercicio 1 que es de un corte bastante más elemental.

***Guía Secuenciada* para el grupo experimental:** Se debe probar que el producto de funciones es continuo en el punto. Para el logro de este objetivo, se debe plantear el límite del producto en el punto y aplicar la definición del producto de funciones; el álgebra de los límites; la hipótesis y nuevamente la definición de producto de funciones. De esta forma se podrá arribar a la meta propuesta por la tesis.

La demostración que se plantea en ii. es la siguiente:

f es continua en $x = x_0$ y g es continua en $x = x_0 \rightarrow$ *hipótesis*

$f \bullet g$ es continua en $x = x_0 \rightarrow$ *tesis*

Para probar que $f \bullet g$ es continua en $x = x_0$, deberemos probar que:

$$\lim_{x \to x_0} (f \bullet g)(x) = (f \bullet g)(x_0).$$

$$\lim_{x \to x_0} (f \bullet g)(x) \underset{(1)}{=} \lim_{x \to x_0} f(x) \bullet g(x) \underset{(2)}{=} \lim_{x \to x_0} f(x) \bullet \lim_{x \to x_0} g(x) \underset{(3)}{=} f(x_0) \bullet g(x_0) \underset{(1)}{=} (f \bullet g)(x_0)$$

(1) definición de producto de funciones; (2) álgebra límites: producto; (3) hipótesis

Ejercicio 4 RDAD

La siguiente proposición verdadera se trata de una de las tres propiedades que hace al criterio de la derivada primera para la determinación de la monotonía de una función.

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua en el intervalo de definición cerrado y derivable en el intervalo de definición, abierto, entonces:

$\forall x\in(a,b): f'(x)<0 \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente en (a,b). Se pide:

i. Identificar hipótesis y tesis.; ii. Demostrar la validez de la proposición, justificando cada paso de la prueba.

***Guía Secuenciada* para el grupo experimental:** Considerar la función de la hipótesis, y un subintervalo de la misma, que puede llamárselo, por ejemplo: $[x,y]\subset[a,b]$. Luego, aplicar a la función f el teorema del valor medio del Cálculo Diferencial en el subintervalo considerado, previa verificación del cumplimiento de las hipótesis del teorema citado. Posteriormente analizar el signo de la expresión obtenida y teniendo en cuenta la hipótesis sobre el signo de $f'(x)$ y la definición de función estrictamente creciente, se podrá arribar a la tesis.

La elección de este ejercicio radicó en que, si bien se parte de la hipótesis, no se lo hace de forma tan directa como en los tres anteriores y se requiere únicamente la aplicación del Teorema de Lagrange o del valor medio del Cálculo Diferencial para luego de aplicar las hipótesis, y tener presente de forma clara lo que se quiere alcanzar como tesis, arribar a esta. Es decir, sigue la línea del método directo, requiere un 'giro' ligeramente diferente y no necesita de demasiadas justificaciones y recursos.

La demostración que se plantea en ii. se encuentra en Capítulo III, III.7.3., Ejemplo 2, página 83.

IV.4.2. Ejercicios de Razonamiento deductivo de argumentación indirecta RDAI

Ejercicio 1 RDAI

Considerar la siguiente proposición verdadera: $\forall a\in\mathbb{Z}: a^2 \ es\ par \Rightarrow a\ es\ par$

Se pide:

i. Identificar hipótesis y tesis.

ii. Demostrar la validez de la proposición, justificando cada paso de la prueba. Utilizar argumentación indirecta.

Nota importante: El enunciado tal y como se muestra es para el grupo experimental. Para el caso del grupo de control, en el ítem ii. se le expresa en el enunciado: Utilizar el método por 'reducción al absurdo simplificado'. Esto es debido a que, durante las clases, el grupo de control, no ha sido formado de manera explícita en el conocimiento del lenguaje y la epistemología matemática, salvo que en ciertas pruebas desarrolladas en clase se le indicó por ejemplo: 'bueno, realizamos esta demostración por el absurdo…'. Y brevemente se le explicó la estructura del método sin conocimiento de su génesis, procediéndose a la realización de la prueba, sin otra explicación adicional. En otras ocasiones, se le manifestó en alguna que otra demostración, de manera similar que para el absurdo: 'Utilizaremos para esta prueba el absurdo simplificado…'.

Esta nota se extiende para todos los ejercicios de este grupo.

La elección de este ejercicio radicó en que se trata de una propiedad simple del álgebra elemental que requiere en su argumentación el uso de otra propiedad también elemental. La idea es observar cómo el estudiante utiliza este método de prueba utilizando ejercicios donde no se requiera para la argumentación, demasiado sostén teórico que empañe el objetivo de la investigación.

***Guía Secuenciada* para el grupo experimental:** Negar el consecuente, teniendo en cuenta que se puede trabajar luego, con la estructura de ese concepto despojado de su negación. Tener en cuenta la propiedad de que goza todo número entero par que es elevado al cuadrado y luego considerar en la cadena argumentativa a la última proposición negada por completo, lo que permitirá arribar al antecedente negado o falso, es decir, como se quiera pensarlo.

La demostración que se plantea en ii. es la siguiente:

$$\vartheta(a\ es\ impar) = F \Rightarrow \vartheta\left(\sim\left(a\ es\ par\right)\right) = F \Rightarrow \vartheta\left(\sim\left(a^2\ es\ par\right)\right) = F \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vartheta\left(a^2\ no\ es\ par\right) = F$$

Observación: La presentación precedente es muy formal, y puede variar según el conocimiento que tenga el estudiante de este tipo de argumentación e inclusive tal variación puede ser simplemente porque se trata de un individuo con poca experiencia en el tema y su forma de escribirla es un tanto rudimentaria y carente del rigor que le es propio a un matemático profesional. Esto podría ocurrir mayoritariamente en el grupo de control, pero no es garantía la formación en el conocimiento del lenguaje y la epistemología matemática, para el grupo experimental que pueda escribirlo de esta forma o aproximadamente.

Ejercicio 2 RDAI

Considerar la siguiente proposición verdadera: La función lineal es inyectiva.
Se pide:

i. Identificar hipótesis y tesis.
ii. Demostrar la validez de la proposición, justificando cada paso de la prueba. Utilizar argumentación indirecta.

***Guía Secuenciada* para el grupo experimental:** Considerar la definición formal de función inyectiva. Negar el consecuente, y a partir de aquí, teniendo en cuenta, la propiedad cancelativa para la adición y la multiplicación, esta última con la correspondiente restricción que se la permite la estructura del tipo de funciones consideradas para esta prueba, se podrá arribar con total facilidad a la negación o falsedad de la hipótesis.

De forma similar al ejercicio 1, aquí la propiedad escogida para la prueba es simple y tampoco requiere en su recorrido argumentativo, justificaciones que necesiten un profuso sostén teórico.

La demostración de la proposición que plantea el ítem ii. del ejercicio se encuentra en el Capítulo III, III.3.6. Ejemplo 3, página 55.

Ejercicio 3 RDAI
Considerar la siguiente proposición verdadera:

$$\forall f:[a,b]\to\mathbb{R}: f \text{ es diferenciable en } x_0\in(a,b) \Leftrightarrow f \text{ es derivable en } x_0\in(a,b)$$

Se pide:

i. Identificar hipótesis y tesis.
ii. Demostrar la validez de la proposición, justificando cada paso de la prueba. Utilizar argumentación indirecta.

La elección de esta prueba se enfocó en dos cuestiones, por un lado, se trata de un bicondicional y por otro, a la hora de probarse la verdad, en este caso particular, por argumentación indirecta, el estudiante puede elegir dos caminos en virtud de la equivalencia. Debe destacarse que la argumentación necesita que se muestre la imposibilidad de la aproximación lineal a través de la no existencia de la derivada, y consecuentemente, la no existencia de la diferencial en el segundo término de la suma algebraica que constituye la definición de función diferenciable en un punto. Es decir, faltaría un eslabón vital en la cadena argumentativa, si se 'salta' el que corresponde a la no existencia de la derivada. Aquí, aunque la proposición, en apariencia pareciera de mayor complejidad, no requiere demasiadas estructuras conceptuales para sostener la estructura argumentativa. Lo descripto corresponde al caso en que el estudiante 'arranque' de la negación de la derivabilidad. Es bastante improbable que el estudiante comience el proceso por la negación de la diferenciabilidad, por una simple razón. Se trata de un concepto muy profundo y abstracto al que el estudiante trata de 'ignorar' en la medida en que le sea posible. El fundamento de esta cuestión se describe en el párrafo III.10 del marco teórico.

***Guía Secuenciada* para el grupo experimental:** Negar el consecuente, y a partir de aquí tener presente la significación de tal negación y su repercusión en la definición de función diferenciable y como esto permitirá arribar a la negación o falsedad de la hipótesis.

La demostración que se plantea en ii. es la siguiente:

$$\forall f:[a,b]\to\mathbb{R}: f \textit{ no es derivable en } x_0\in(a,b) \Leftrightarrow \nexists f'(x_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\underbrace{f'(x_0)}_{\nexists}.\Delta x + E(x_0,\Delta x).\Delta x}_{\nexists} =\longrightarrow \underbrace{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}_{\nexists} / \lim_{\Delta x\to 0} E(x_0,\Delta x)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f \textit{ no es diferenciable en } x_0\in(a,b)$$

IV.3.3. Ejercicios de Razonamiento inductivo RI

El principio de inducción matemática y su método, si bien se introdujo en el marco teórico, se recapitula a continuación, a través de un esquema que lo sintetiza y que se detalla a continuación:

Generalización de la fórmula ⇨ Validación inicial* ⇨ Planteo hipótesis ⇨ Planteo tesis ⇨ Validación final*

* El proceso de validación tiene dos etapas: una inicial y una final. La etapa inicial consiste primero en determinar, cuál es el primer natural para el que tiene sentido la

fórmula (función proposicional en una variable natural y eventualmente otras variables reales). Es decir, determinar el dominio de validez de esta expresión. Hecha esta determinación, se debe realizar el proceso de validación asociado a ese valor, es decir, o el estudiante debe verificar que la función proposicional (fórmula) evaluada en ese valor, 'funciona' (Ejercicios RI 1 y 2) o se debe realizar la prueba que valida a la función proposicional evaluada en ese valor (Ejercicios RI 3 y 4). Ocurre, a veces, como en los ejercicios RI 1 y 2 que el simple 'funcionamiento' ya prueba que la fórmula funciona para 'ese primer valor' y no requiere de una prueba formal como en los ejercicios RI 3 y 4.

La etapa final consiste en el proceso de validación correspondiente a la tesis de inducción.

En el transcurso del proceso, y luego de la validación inicial, se realiza un planteo de la hipótesis inductiva o de inducción, que se acepta como verdadera y luego se plantea la tesis inductiva o de inducción, que permitirá el cierre del proceso con la etapa de validación final.

En los ejercicios, no se exigió que el estudiante recordara esta secuencia de pasos, sino que la consigna misma se 'encargó' de pedir lo requerido en la secuencia necesaria requerida para el estudio posterior.

Observación previa: Aquí se realizaron 4 ejercicios, pero divididos en dos tipos de cortes diferentes, 2 en donde había que inducir la ley, y la cuestión radicaba primero en ver si el estudiante podía realizar esta acción, y luego validarla y otros 2 ejercicios en los que se buscaba directamente que el estudiante aplicara el método de inducción matemática asociado al denominado principio, para validar la proposición considerada.

Ejercicio 1 RI

Considera la siguiente secuencia numérica:

$$1+3=4=2^2$$

$$1+3+5=9=3^2$$

$$1+3+5+7=16=4^2$$

$$1+3+5+7+9=25=5^2$$

....

En base a esta secuencia, se pide:

a. A partir de los casos particulares que se exhiben y utilizando tantos nuevos casos como sean necesarios, escribir una expresión que generalice el comportamiento observado. b. Probar la validez de la expresión hallada en a. utilizando el método de inducción matemática, justificando cada paso de la prueba.

Observación: El estudiante deberá encontrar la fórmula siguiente como 'patrón' de la secuencia presentada: $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2$.

En el grupo experimental, los estudiantes habían sido advertidos de mostrar la fórmula al conductor del trabajo, y en el caso de alcanzar la fórmula adecuada, se le proveía al estudiante de la *Guía secuenciada* para la prueba. Este mismo procedimiento se repitió en el ejercicio 2.

***Guía secuenciada* para el grupo experimental:** Tener en cuenta que la suma puede desglosarse en la sumatoria de los n primeros términos y separar el término n + 1. Luego, tener en cuenta la hipótesis de inducción y el denominado tercer caso de factoreo: 'trinomio cuadrado perfecto'.

La escogencia de este ejercicio radicó en que la generalización no entraña una gran complejidad como tampoco la prueba, lo único que esta requiere es un elemento muy esencial del álgebra elemental como el denominado tercer caso de factoreo: 'trinomio cuadrado perfecto'.

La demostración que se plantea en b. es la siguiente: El primer natural para el cual tiene sentido la fórmula, en muchas bibliografías abunda n=1, pero esto no tiene sentido, ya que se trata de una suma, por ende, tiene sentido para n=2. Probar esto equivale a desarrollar la sumatoria para los dos primeros valores y ver que esa suma coincide con la fórmula general evaluada para ese valor.

Prueba: $\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2}_{H_i}\Rightarrow\underbrace{\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1)=\left(n+1\right)^2}_{T_i}$

$$\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1)=\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(2i-1)}_{H_i}+\underbrace{2\left(n+1\right)-1}_{T_{n+1}}=\underset{\times H_i}{n^2}+\underbrace{2n+2-1}_{T_{n+1}}=n^2+2n+1=\left(n+1\right)^2$$

Referencias: H_i: hipótesis de inducción; T_i: tesis de inducción; $\times H_i$: por hipótesis de inducción; T_{n+1}: término enésimo + 1 o término de orden n + 1

Ejercicio 2 RI

Considera la siguiente secuencia numérica:

$$2^1 = 2^{1+1} - 2$$
$$2^1 + 2^2 = 2^{2+1} - 2$$
$$2^1 + 2^2 + 2^3 = 2^{3+1} - 2$$
$$2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 2^{4+1} - 2$$

....

En base a esta secuencia, se pide:

a. A partir de los casos particulares que se exhiben y utilizando tantos nuevos casos como sean necesarios, escribir una expresión que generalice el comportamiento observado. b. Probar la validez de la expresión hallada en a. utilizando el método de inducción matemática, justificando cada paso de la prueba.

El estudiante deberá encontrar la fórmula siguiente como 'patrón' de la secuencia presentada: $\sum_{i=1}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 2$

***Guía secuenciada* para el grupo experimental:** Tener en cuenta que la suma puede desglosarse en la sumatoria de los n primeros términos y separar el término n + 1. Luego, tener en cuenta la hipótesis de inducción y el producto de potencias de igual base.

El comentario en referencia a la escogencia de este ejercicio es similar al ejercicio 1. salvo que en esta ocasión se considera la propiedad de la multiplicación de potencias de igual base. La demostración que se plantea en b. es la siguiente:

En lo referente al primer natural para el cual tiene sentido la ley, el comentario es idéntico al del ejercicio 1.

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 2}_{H_i} \Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{n+1} 2^i = 2^{n+2} - 2}_{T_i}$$

$$prueba: \sum_{i=1}^{n+1} 2^i = \underset{H_i}{\sum_{i=1}^{n} 2^i} + \underset{T_{n+1}}{2^{n+1}} = \underbrace{2^{n+1} - 2}_{H_i} + \underset{T_{n+1}}{2^{n+1}} = 2.2^{n+1} - 2 = 2^{n+2} - 2$$

Ejercicio 3 RI

Considera la siguiente fórmula, correspondiente a la potencia de un complejo expresado en forma polar: $\forall z \in \mathbb{C} : \forall \alpha \in \mathbb{R} : z = |z|_{\alpha} \Rightarrow z^n = |z|^n{}_{n\alpha} \,/\, n \in \mathbb{N}$

se pide: a. Probar la validez de la fórmula para el primer natural para el cual tiene sentido. b. Probar la validez de la expresión dada para todo n natural, utilizando el método de inducción matemática, justificando cada paso de la prueba.

***Guía secuenciada* para el grupo experimental:** Tener en cuenta que la suma puede desglosarse en la sumatoria de los n primeros términos y separar el término n + 1. Luego, tener en cuenta el producto de potencias de igual base y la hipótesis de inducción.

La escogencia de este ejercicio de forma similar a los dos anteriores, radica en que no requiere la aplicación de propiedades ni 'giros' complicados en la argumentación de la prueba. Y precisamente, lo que se busca, es tener una mirada clara del ejercicio argumentativo o protoargumentativo que hace el estudiante.
La demostración de la proposición que plantea el ítem b. del ejercicio se encuentra en el Capítulo III, III.3.8. Ejemplo 2, página 58.

Ejercicio 4 RI

Considera el límite de la potencia n – sima de una función:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \lim_{x \to x_0} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \left[f(x) \right]^n = \left[\lim_{x \to x_0} f(x) \right]^n = L^n \, / \, L \in \mathbb{R} \wedge$$

$$f : S \to \mathbb{R} \, / \, S \subset \mathbb{R}$$

se pide: a. Probar la validez de la fórmula para el primer natural para el cual tiene sentido. b. Probar la validez de la expresión dada para todo n natural, utilizando el método de inducción matemática, justificando cada paso de la prueba.

***Guía secuenciada* para el grupo experimental:** Tener en cuenta que la suma puede desglosarse en la sumatoria de los n primeros términos y separar el término n + 1. Luego, tener en cuenta el producto de potencias de igual base; el álgebra de los límites para el producto y la hipótesis de inducción.

Similar comentario al de los tres ejercicios anteriores con respecto a la escogencia de este ejercicio.
La demostración de la proposición que se plantea en b. es la siguiente:

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{n+1} \underset{(1)}{=} \lim_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{n}.\left[f(x)\right] \underset{(2)}{=} \lim_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{n}.\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\right] =$$

$$\underset{(3)}{=} \underbrace{\left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]^{n}}_{\times H_i}.\left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right] \underset{(4)}{=} L^{n} \bullet L \underset{(1)}{=} L^{n+1}$$

Referencias: (1) producto de potencias de igual base; (2) álgebra de los límites; (3) hipótesis de inducción; (4) hipótesis

IV.3.4. Ejercicios de Razonamiento por reducción al absurdo RRA

Observación previa: De forma similar al grupo de ejercicios descripto en el párrafo anterior, aquí también se realizaron 4 ejercicios. 2 ejercicios en los que se buscaba que el estudiante aplicara el método de prueba por reducción al absurdo ‘en forma clásica’ para la consecución de la validez de una tesis y 2 en los que se buscaba que el estudiante aplicara el razonamiento implícito estrictamente en este método, pero para extraer una conclusión, que no se hallaba en el contexto de una prueba formal.

Ejercicio 1 RRA

Probar, utilizando el método de reducción al absurdo, que el elemento absorbente de una operación cualquiera a la que denominaremos * es único.

Justificar cada paso de la prueba.

***Guía secuenciada* para el grupo experimental:** Como en todo teorema de unicidad, suponer la existencia de dos elementos absorbentes. ‘Partir’ de uno de los dos elementos absorbentes considerados, y estimar que ese elemento es el resultado de la operación de este, con el otro absorbente considerado. Luego tener en cuenta que, si se operó con el primer absorbente del que se partió, se debe considerar el otro y operar con este, en consecuencia, tomándolo ahora como absorbente. De este modo, se podrá arribar a la identidad de ambos elementos considerados y luego concluir.

La escogencia de este ejercicio, de forma similar a todos los ejercicios descriptos hasta el momento, radica en que es un claro ejercicio de la prueba de unicidad por el absurdo con mínimos y simples contenidos requeridos para su argumentación.

La demostración de la proposición que se plantea en este ejercicio es la siguiente:

Supóngase que el elemento absorbente de una operación *, no es único, y que, además de k absorbente, existe otro elemento que llamaremos k' también absorbente, tal que: $k' \neq k$. Por lo tanto; $k' = k' * k = k * k' = k$, se ha arribado a que $k' \neq k$,

La proposición última, contradice lo supuesto.

Por lo tanto, el elemento absorbente de una operación *, si existe, es único.

Ejercicio 2 RRA

Probar, utilizando el método de reducción al absurdo, la validez de la siguiente proposición, justificando cuando sea posible cada paso de la prueba:

Si un conjunto $X \neq \varnothing$ **de vectores es finito y** $V \subset X \wedge X \ es\ L.I. \Rightarrow V \ es\ L.I.$

Se pide, identificar hipótesis y tesis, previamente a la realización de la prueba.

***Guía secuenciada* para el grupo experimental:** Negar la tesis, aceptando simultáneamente la validez de la hipótesis y tener en cuenta la propiedad similar a la que se está probando, sobre un conjunto incluido en otro, siendo este otro L.D. La aplicación de esta propiedad llevará a una contradicción que permitirá concluir la verdad de la proposición.

La escogencia de este ejercicio, de forma similar a todos los ejercicios descriptos hasta el momento, radica en que es un claro ejercicio de prueba por el absurdo que requiere la aplicación de una sola propiedad, para poder llegar a la contradicción, propiedad de carácter muy similar a la que se está demostrando.

La demostración que se plantea en este ejercicio es la siguiente:

Supongamos que el conjunto $V \ es\ L.D$ y simultáneamente aceptamos que $V \subset X \Rightarrow X \ es\ L.D$ (por otra propiedad de la dependencia lineal) lo que es absurdo porque contradice la hipótesis. Por lo tanto, la implicación $V \subset X \wedge X \ es\ L.I. \Rightarrow V \ es\ L.I$ es válida.

Ejercicio 3 RRA. Probar, utilizando límites radiales, que el campo escalar: $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$**, cuya visualización se adjunta, no tiene límite en el origen.**

Justificar la argumentación que sostiene la prueba.

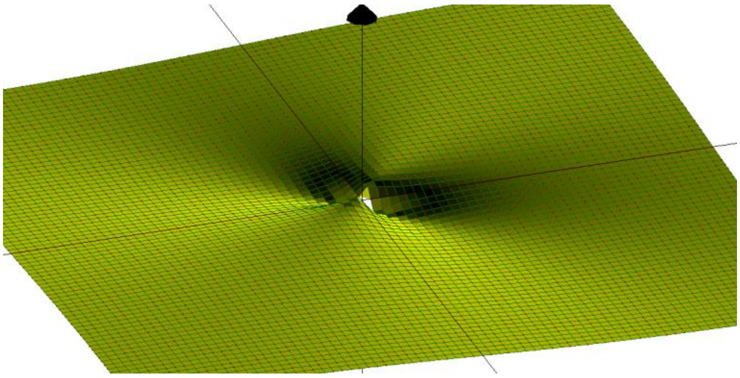


Figura 11: Campo escalar: $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

***Guía secuenciada* para el grupo experimental:** Estudiar el comportamiento del campo escalar dado a lo largo de una familia de rectas que pasan por el origen. Razonar por reducción al absurdo teniendo en cuenta la unicidad del límite.

La escogencia de este ejercicio y el siguiente estriba en que el razonamiento para poder llegar a probar la no existencia del límite en el origen es un razonamiento por reducción al absurdo de una complejidad menor al de una prueba formal, pero que, basándose, estrictamente en la unicidad del límite, se pretende ver como se manifiesta el estudiante ante la argumentación requerida para esta consigna.

El razonamiento que se plantea en este ejercicio es el siguiente:

Consideremos en $\mathbb{R}^2$, las infinitas rectas que pasan por el origen, con ecuación $y=mx\,/\,m\neq 0$. Los valores que asume el campo escalar dado sobre cada una de esas rectas están dados por: $f(x,y)=f(x,mx)=\dfrac{mx^2}{x^2+m^2x^2}=\dfrac{m\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\left(1+m^2\right)}=\dfrac{m}{1+m^2}\ si\ x\neq 0$

Es decir, que el campo escalar es constante a lo largo de cualquier recta que pasa por el origen y la constante es distinta para rectas distintas, es decir con pendientes diferentes. Esto ocurre porque el campo escalar a lo largo de la familia de rectas que pasa por el origen, arroja un valor constante que depende exclusivamente del valor de la pendiente de la familia. Concluyendo, como el límite en un punto es único, resulta entonces, que en ningún entorno reducido del origen los valores del campo escalar se acercan a un número L y resulta que f no tiene límite en el origen. Como se ve el razonamiento es por el absurdo.

Se amplía a continuación, un poco más la explicación precedente y se razona más formalmente, desde la estructura formal del denominado método por reducción al absurdo. Se quiere probar que el límite que se plantea en el origen no existe.

Supongamos que el límite en el origen si existe (y sabemos, en virtud de la unicidad del límite que, si el límite existe, entonces es único).

El comportamiento del campo escalar acercándose por el origen (ya no lo puede hacer lateralmente) a lo largo de diferentes rectas que pasan por el origen, es decir, de diferentes radios del 2 – entorno centrado en el origen – de ahí el nombre de límites radiales – se acerca a diferentes valores. No hay un único valor. En virtud de la unicidad del límite esto contradice la suposición originalmente hecha, por ende, el límite en el origen no existe. Debe observarse, que, si el límite existiera, acercándose a través de rectas que pasan por el origen, el límite debería ser el mismo en los puntos de cada una de las infinitas rectas. Por ende, es suficiente probar que los valores del límite son distintos, a través de los puntos de dos rectas diferentes que pasan por el origen. Esto prueba de hecho, lo enunciado precedentemente.

Ejercicio 4 RRA

Probar, utilizando la extensión de límites radiales, que el campo escalar: $f(x,y)=\dfrac{3xy^2}{x^2+y^4}$ **, cuya visualización se adjunta, no tiene límite en el origen.**

Justificar la argumentación que sostiene la prueba.

***Guía secuenciada* para el grupo experimental:** Estudiar el comportamiento del campo escalar dado a lo largo de par de curvas que pasen por el origen y que generen caminos diferentes en la conducta del campo escalar. Razonar por reducción al absurdo teniendo en cuenta la unicidad del límite.

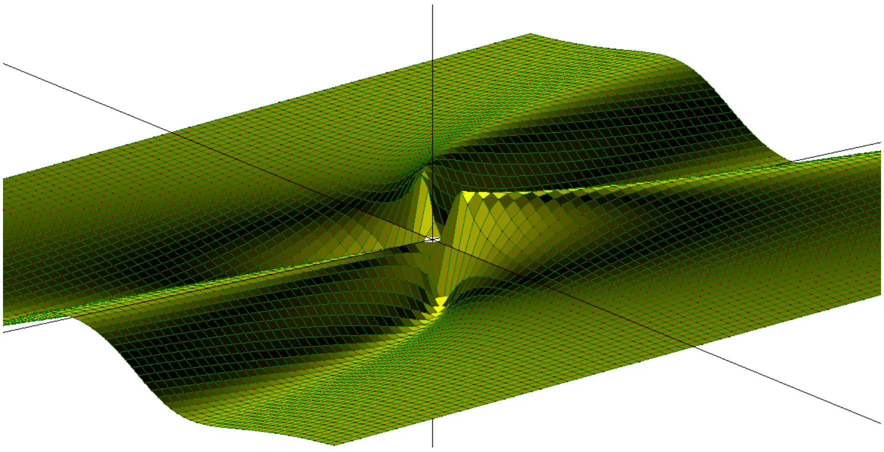


Figura 12: Campo escalar: $f\left(x,y\right)=\dfrac{3xy^{2}}{x^{2}+y^{4}}$

El razonamiento que se plantea en este ejercicio es el siguiente: Se propone realizar una nueva restricción de este campo escalar sobre este conjunto: $A=\left\{\left(x,y\right)/\ y^{2}=x\right\}$. O lo que es equivalente, se analiza el comportamiento del campo escalar dado a lo largo de la curva: $y^{2}=x:\lim\limits_{y\to 0} f\left(y^{2},y\right)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{3y^{4}}{2y^{4}}=\dfrac{3}{2}$

Asimismo, se analiza también, el comportamiento del campo escalar dado sobre el conjunto: $B=\left\{\left(x,y\right)/\ y=x\right\}:\lim\limits_{x\to 0} f\left(x,x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^{3}}{x^{2}+x^{4}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^{\cancel{3}}}{\cancel{x^{2}}\left(1+x^{2}\right)}=0$

La cuestión es simple, basándonos en un razonamiento similar al de límites radiales, la idea consiste en analizar el comportamiento del campo escalar dado, a lo largo de dos curvas planas distintas que pasan por el punto alrededor del cual se quiere estudiar el comportamiento del campo escalar. Resulta entonces que, a lo largo de las dos curvas distintas que pasan por el origen, en este caso, cuando $\left(x,y\right)$ se acerca indefinidamente al origen, el campo escalar no tiende a un único límite ya que al acercarse por dos curvas distintas que pasan por el origen se obtienen dos valores diferentes, esto es absurdo, en virtud de la unicidad del límite. Por lo tanto, el límite buscado no existe.

IV.3.5. Ejercicios de Razonamiento plausible o conjetural RPoC

Ejercicio 1 RPoC

Considerar la siguiente proposición verdadera:

$\forall x \in R^- : \forall y \in R^- : x < y \Rightarrow x^2 > y^2$

Se pide: i. Identificar hipótesis y tesis. ii. Demostrar la validez de la proposición, justificando, cada paso de la prueba.

***Guía secuenciada* para el grupo experimental:** Partir de la hipótesis, hacer el pasaje de términos correspondiente para luego multiplicar en ambos miembros por la expresión consistente en la suma: $x + y$ pero teniendo en cuenta el signo de tal expresión para que se mantenga la desigualdad. El desarrollo de la diferencia de cuadrados indicada permitirá arribar a la tesis propuesta.

La escogencia de este ejercicio radica en que la heurística que reside en la prueba es simple, pero requiere por parte del aprendiz, un razonamiento particular que, en caso de no llevarse a cabo, es imposible la consecución de la tesis.

La demostración que se plantea en este ejercicio en ii. se encuentra en el Capítulo III, página 64, párrafo III.4.2. ejemplo 4.

Ejercicio 2 RPoC: Probar la validez de la siguiente proposición verdadera, justificando, cada paso de la prueba.

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg(\alpha) + tg(\beta)}{1 - tg(\alpha).tg(\beta)}$$

***Guía secuenciada* para el grupo experimental:** Partir de $tg(\alpha + \beta)$; considerar la relación trigonométrica fundamental de la tangente y luego de desarrollar seno y coseno de la suma en numerador y denominador respectivamente; dividirlos luego por la expresión trigonométrica: $cos(\alpha).cos(\beta)$. Haciendo las simplificaciones debidas, y teniendo nuevamente en cuenta la relación trigonométrica fundamental de la tangente, se podrá arribar a la meta.

La escogencia de este ejercicio radica en que la heurística presente en la prueba es diferente al ejercicio 1 pero tiene en común que, sin su realización es imposible llegar a la meta. Asimismo, a diferencia del ejercicio anterior la aplicación del 'artificio', no requiere un análisis como en el ejercicio 1, que carece de sentido si no se explicita el signo del mismo. Por otro lado, en este ejercicio, no hay explicitada una hipótesis y una tesis, por ende, no se realiza este requerimiento en la consigna, a diferencia de los ejercicios anteriores ya que penetrar en terrenos más profundos como hablar de hipótesis implícitas, es realmente innecesario para estudiantes universitarios de ingeniería. La demostración de la proposición que se plantea es la siguiente:

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{sen(\alpha+\beta)}{cos(\alpha+\beta)}=\frac{sen(\alpha).cos(\beta)+cos(\alpha).sen(\beta)}{cos(\alpha).cos(\beta)-sen(\alpha)sen(\beta)}=$$

$$=\frac{\dfrac{sen(\alpha).cos(\beta)+cos(\alpha).sen(\beta)}{cos(\alpha).cos(\beta)}}{\dfrac{cos(\alpha).cos(\beta)-sen(\alpha)sen(\beta)}{cos(\alpha).cos(\beta)}}=\frac{\dfrac{sen(\alpha).\cancel{cos(\beta)}}{cos(\alpha).\cancel{cos(\beta)}}+\dfrac{\cancel{cos(\alpha)}.sen(\beta)}{\cancel{cos(\alpha)}.cos(\beta)}}{\dfrac{\cancel{cos(\alpha).cos(\beta)}}{\cancel{cos(\alpha).cos(\beta)}}-\dfrac{sen(\alpha)sen(\beta)}{cos(\alpha).cos(\beta)}}=\frac{tg(\alpha)+tg(\beta)}{1-tg(\alpha).tg(\beta)}$$

Asimismo, debe destacarse que la misma prueba puede abordarse del modo siguiente y, no requiere de la heurística utilizada en el planteo reciente, como se detalla a continuación. Esto es posible, en virtud de que la proposición que se quiere probar, se trata de una igualdad, y se logra, partiendo del otro lado de la igualdad.

$$\frac{tg(\alpha)+tg(\beta)}{1-tg(\alpha).tg(\beta)}=\frac{\dfrac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)}+\dfrac{sen(\beta)}{cos(\beta)}}{1-\dfrac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)}\dfrac{sen(\beta)}{cos(\beta)}}=\frac{\dfrac{sen(\alpha).cos(\beta)+cos(\alpha).sen(\beta)}{cos(\alpha).cos(\beta)}}{\dfrac{cos(\alpha).cos(\beta)-sen(\alpha)sen(\beta)}{cos(\alpha).cos(\beta)}}=\frac{sen(\alpha+\beta)}{cos(\alpha+\beta)}=tg(\alpha+\beta)$$

Ejercicio 3 RPoC

Considerar la siguiente proposición verdadera del álgebra de las derivadas, la que corresponde al producto y que se detalla a continuación:

Sí f,g son dos funciones derivables en $x=x_0$ entonces: f,g es derivable en $x=x_0$ y vale que: $(f.g)'=f'.g+f.g'$, se pide:

a. Identificar hipótesis y tesis. b. demostrarla, justificando cada paso de la prueba.

***Guía secuenciada* para el grupo experimental:** Plantear la definición de derivada en un punto, particularmente en este caso para el punto: $x=x_0$, para el producto de funciones f y g, luego desarrollar este producto de funciones del numerador, por aplicación del álgebra del producto de funciones y luego sumar y restar en el numerador, el producto de la función f en el punto dado e incrementado por la función g en el punto dado. Luego agrupar convenientemente distribuyendo el denominador y extrayendo factor común en los numeradores, de forma de generar dos sumandos, donde en cada uno debe aparecer el cociente incremental de f y de g, de forma de poder arribar a lo postulado por la tesis.

La escogencia de este ejercicio es similar al de la regla de la cadena que se expone en el marco teórico en III.4.3. Ejemplo 1. de página 66. La idea de sumar y restar una expresión posibilitará el constructo final de la suma de cocientes incrementales multiplicadas por funciones que finalmente desembocaran en la proposición que mostrará el producto final de la tesis.

La demostración de la proposición que se plantea en b. es la siguiente:

$$b.\left(f.g\right)'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{\left(f.g\right)(x_0+h)-\left(f.g\right)(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h).g(x_0+h)-f(x_0).g(x_0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h).g(x_0+h)-f(x_0).g(x_0)+f(x_0+h).g(x_0)-f(x_0+h).g(x_0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h).g(x_0+h)-f(x_0+h).g(x_0)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h).g(x_0)-f(x_0).g(x_0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}f(x_0+h).\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}+\lim_{h\to 0}g(x_0).\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}f(x_0+h).\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}++\lim_{h\to 0}g(x_0).\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=$$

$$=f(x_0).g'(x_0)+g(x_0).f'(x_0)$$

Ejercicio 4 RPoC

Considerar el **Teorema de Cauchy o Teorema del valor medio generalizado** que se enuncia a continuación:

Sean dos funciones f,g continuas en $\left[a,b\right]$ y derivables en el$\left(a,b\right)$entonces $\exists c\in\left(a,b\right)/\ f'(c)\left[g(b)-g(a)\right]=g'(c)\left[f(b)-f(a)\right]$.

Se pide: a. Identificar hipótesis y tesis; b. demostrar el teorema dado, justificando cada paso de la prueba.; c. Analizar la construcción de la función auxiliar y su relación con la tesis del teorema.

***Guía secuenciada* para el grupo experimental:**

Considerar la función auxiliar: $h(x)=f(x)\left[g(b)-g(a)\right]-g(x)\left[f(b)-f(a)\right]$ y verificar las hipótesis del teorema de Rolle, para luego aplicarlo a la función auxiliar, que será el instrumento que va a permitir llegar a la meta de la tesis.

Observación: En esta ocasión, al grupo de control, se le sumó a la consigna original, la siguiente nota que se transcribe a continuación:

Nota: Para el desarrollo de la prueba tener presente utilizar la función auxiliar h que se detalla finalizada esta nota, a la que debe aplicársele el Teorema de Rolle.

$$h(x) = f(x)\left[g(b) - g(a)\right] - g(x)\left[f(b) - f(a)\right]$$

La escogencia de esta prueba estriba en que, a diferencia de los ejercicios anteriores, la heurística no se concentra en la realización de una determinada operación o ‘artilugio’ o un análisis de signo. La cuestión se centra en la utilización de un instrumento que permite la consecución de la prueba y la utilización adecuada de ese instrumento para poder llegar a la meta. En este ejercicio hay una consigna final en la que se le pide al estudiante que analice la construcción de la función auxiliar, es decir, que el estudiante debería poder observar la relación existente entre esta función y la tesis que postula el teorema.

La demostración de la proposición que se plantea en b. es la siguiente:

Sea $h(x) = f(x)\left[g(b) - g(a)\right] - g(x)\left[f(b) - f(a)\right]$

La idea de la prueba es aplicarle a la función auxiliar. el teorema de Rolle, previa verificación de las hipótesis. El teorema mencionado exige a la función para que pueda verificar lo que postula como tesis. Es decir, debe verificarse que la función auxiliar h debe ser continua en un cerrado y derivable en un abierto y su evaluación en los puntos de frontera del intervalo considerado debe coincidir.

La función h en efecto, es continua en el cerrado de extremos a y b por lo siguiente; pero, asimismo, se puede utilizar el mismo esquema, que es lo realizado a continuación, para mostrar que, la función h, en efecto, es derivable en el abierto de extremos a y b.

$$h(x) = \underbrace{\underbrace{\underset{1}{f(x)}\bullet\underbrace{\left[g(b) - g(a)\right]}_{2}}_{3} - \underbrace{\underset{1}{g(x)}\bullet\underbrace{\left[f(b) - f(a)\right]}_{2}}_{3}}_{4}$$

Referencias:
1. continua/derivable por hipótesis; 2. continua/derivable por ser una función constante;
3. álgebra de las funciones continuas/derivables: producto;
4. álgebra de las funciones continuas/derivables: diferencia.

Observación: Las funciones constantes son continuas y derivables en todo el eje real.

$$h(a)=f(a)\left[g(b)-g(a)\right]-g(a)\left[f(b)-f(a)\right]=$$
$$=f(a).g(b)\cancel{-f(a).g(a)}-g(a).f(b)\cancel{+g(a).f(a)}=$$
$$=f(a).g(b)-g(a).f(b)\left(I\right)$$
$$h(b)=f(b)\left[g(b)-g(a)\right]-g(b)\left[f(b)-f(a)\right]=$$
$$=\cancel{f(b).g(b)}-f(b).g(a)\cancel{-g(b).f(b)}+g(b).f(a)=$$
$$=f(b).g(a)-g(b).f(a)\left(II\right)$$

Se observa que (I)=(II), por lo que puede afirmarse que se satisfacen las hipótesis de Rolle, por ende, $\exists c\in\left(a,b\right)/\,h'\left(c\right)=0$

$$h'(c)=0=f'(c)\left[g(b)-g(a)\right]-g'(c)\left[f(b)-f(a)\right]$$
$$\therefore\ f'(c)\left[g(b)-g(a)\right]=g'(c)\left[f(b)-f(a)\right]$$

Observación: De forma similar al Ejemplo 3: Teorema del valor medio del Cálculo Diferencial o Teorema de Lagrange que se desarrolla en III.4.3., página 67, en la función auxiliar se halla 'escondida' la tesis que postula este teorema.

$$\text{función auxiliar}\rightarrow h(x)=f(x)\left[g(b)-g(a)\right]-g(x)\left[f(b)-f(a)\right]$$
$$\text{tesis}\rightarrow f'(c)\left[g(b)-g(a)\right]=g'(c)\left[f(b)-f(a)\right].$$

Puede observarse que la tesis contiene la misma función f del minuendo de la diferencia de h, pero derivada, en realidad, la función derivada del minuendo es la función derivada de una constante por una función, la constante 'sobrevive' y aparece la función derivada de f que ahora aparecen en el primer miembro de la identidad que postula Cauchy, mientras que algo parecido ocurre en el segundo miembro que es la función derivada del sustraendo de la diferencia que plantea la función auxiliar h.

IV.3.6. Ejercicios de Razonamiento visual RV

Ejercicio 1 RV

Considerar la siguiente proposición verdadera:

$$\forall x\in R: x+1>x$$

Se pide, probar la validez de la proposición, justificando cuando cada paso de la prueba.

El razonamiento que permite probar la validez de la proposición precedente es deductivo pero la intención de esta actividad no apela a que el estudiante pueda razonar analógicamente ya que no se realizaron en clase, pruebas similares. Si se apela, a conocer que recursos utilizará el estudiante para llegar a la meta. La visualización es un recurso esperado del estudiante ya que la proposición claramente alude a la comparación de dos números reales y tal comparación es posible en la recta numérica.
A diferencia de los otros ejercicios aquí no se entrega *Guía Secuenciada* para el grupo experimental.
La prueba visual de la proposición considerada consiste en lo siguiente, y es comparar en el eje real a la derecha del origen y a la izquierda de este los valores reales: x y x+1 y observar que, en cualquiera de los dos casos, el segundo supera al primero.

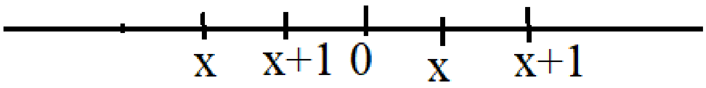


Figura 13: Prueba visual de la proposición: $\forall x \in R : x+1 > x$

La prueba formal de la proposición que plantea el ejercicio es la siguiente:
$\forall x \in R : \cancel{x} + 1 > \cancel{x} \Rightarrow \vartheta(1 > 0) = V \Rightarrow S = \mathbb{R}$
La desigualdad admite la cancelación de la variable que opera como incógnita, lo que da lugar a una proposición universalmente verdadera y esto permite concluir que la desigualdad es válida para cualquier real.

Ejercicio 2 RV: Considerar la siguiente proposición verdadera:

$\forall x \in R : \forall y \in \mathbb{R} : |x - y| = |y - x|$, **se pide, probar la validez de la proposición, justificando cada paso de la prueba.**
El comentario es similar al del ejercicio 1, asimismo el estudiante podría recurrir a las propiedades del valor absoluto o directamente proceder desde lo visual, apelando al concepto de valor absoluto como distancia y concluir que la distancia es conmutativa, quizás no postulándolo de hecho, sino tácitamente.
***Guía Secuenciada* para el grupo experimental**: Tener en cuenta una de las propiedades del valor absoluto de un número real que postula la equivalencia entre el valor absoluto de un número real y el de su opuesto o bien tener en cuenta que el valor

absoluto de la diferencia de dos números reales es equivalente a la distancia entre los mismos y razonar conforme a esto.
La prueba visual y formal de este ejercicio se encuentra en Capítulo III, III.4.4., Ejemplo 4, página 71.

Ejercicio 3 RV.

Considerar la siguiente proposición verdadera: Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua en el cerrado y derivable en el abierto, excepto en $x=c\in(a,b)$, entonces:
$\forall x\in(a,c): f'(x)<0 \wedge \forall x\in(c,b): f'(x)>0 \Rightarrow f \quad tiene\ m_r\ en\ x=c$

Este es el denominado criterio de la derivada primera para la determinación de los extremos relativos de una función. Se pide: a. Identificar hipótesis y tesis.; b. demostrarla, justificando cada paso de la prueba.

***Guía Secuenciada* para el grupo experimental**: Realizar un bosquejo del argumento que plantea la hipótesis. Para la argumentación, partir de la hipótesis, y tener en cuenta de razonar consecuentemente de acuerdo a la suposición de partida y teniendo en cuenta la definición de mínimo relativo y el bosquejo realizado previamente, se podrá arribar cómodamente a la tesis.

La escogencia de este ejercicio reside en que la visualización es una herramienta fundamental para poder llevar a cabo la prueba. Además, la argumentación es lineal, y se reitera, depende esencialmente de la visualización previa, que depende del aprendiz, en base a una adecuada lectura de la hipótesis.

La realización de la prueba que plantea este ejercicio se encuentra en el Capítulo III, III.4.4., Ejemplo 5, página 71.

Ejercicio 4 RV

Considerar la siguiente proposición verdadera: Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua en el cerrado y derivable dos veces en el abierto. Sea $x=c\in(a,b)$ un punto crítico de $f \,/\, f'(c)=0$, entonces: $f''(c)>0\Rightarrow f$ tiene un m_r en $x=c$. Este es el denominado criterio de la derivada segunda para la determinación de extremos relativos.

Se pide: a. Identificar hipótesis y tesis.; b. demostrarla, justificando cada paso de la prueba.

***Guía Secuenciada* para el grupo experimental**: Realizar un bosquejo del argumento que plantea la hipótesis. Para la argumentación, partir de la hipótesis, y tener en cuenta de razonar consecuentemente de acuerdo la suposición de partida y teniendo en cuenta el criterio de la derivada segunda para la convexidad; la definición de mínimo relativo y el bosquejo realizado previamente, se podrá arribar cómodamente a la tesis.

Con respecto a la escogencia de este ejercicio, el comentario es similar al ejercicio 3.
La prueba planteada por este ejercicio en el ítem b. es la siguiente:
$f''(c) > 0 \Rightarrow f$ es convexa en algún intervalo I que contenga a $c \Rightarrow$ la gráfica de f está por encima de sus tangentes en I. Cómo $f'(c) = 0$, la tangente es horizontal en el punto $(c, f(c)) \Rightarrow \forall x \in N(c): f(x) > f(c) \Rightarrow f$ tiene un mínimo relativo en el punto $x = c$

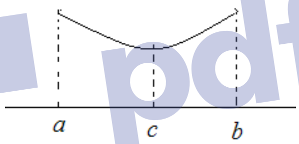


Figura 14: Complemento visual a la prueba del Criterio de la derivada segunda para la existencia de mínimo relativo

CAPÍTULO V

ANÁLISIS DE LOS DATOS

"Ninguna investigación humana puede ser considerada verdaderamente Ciencia si no puede ser demostrada matemáticamente". Leonardo Da Vinci

Resumen

En este capítulo se desarrolla el análisis de los datos cuyo método de recolección y detalles anexos se han descripto en el capítulo anterior. El diseño de presentación del presente capítulo consiste en el siguiente esquema: Para cada uno de los 23 ejercicios, primero se muestran y describenlas categorías emergentes surgidas del análisis de las producciones de los trabajos realizados por los estudiantes mediante sus siglas de identificación a través de una tabla de frecuencias. Continúan los resultados delas pruebas o test de hipótesiscon sus gráficos asociados. Al final se realiza un análisis detallado de los resultados con los comentarios pertinentes. Los resultados de la encuesta se presentan al comienzo del capítulo y antes del análisis de los datos detodos los ejercicios.

5.1. Datos correspondientes a la Encuesta única y abierta

La encuesta única y abierta realizada durante los cinco años recabó muchas opiniones que a continuación, antes de esbozar algunos comentarios, se reproducen algunos textuales que se han seleccionado en virtud de ser muy representativos.

Estos comentarios se seleccionan por grupo y se detallan a continuación.

Nota previa: Algunos de los estudiantes de ambos grupos realizaron luego de responder la encuesta, una especie de 'catarsis'expresándose en forma escrita. Los comentarios textuales se detallan a continuación.

V.1.1. Comentarios textuales del Grupo de Control GC

- ✓ **'Me parecen muy largas y complicadas (haciendo referencia a las demostraciones) para explicar algo que aplicándololuego a la práctica es simple'**
- ✓ **'Las entiendo a mí manera; pero cuando tengo que escribirlas en el examen las hago idénticas al apunte, por miedo a que me las corrijan y no tengo otra que estudiarlas de memoria para poder hacerlas, algunas las entiendo, otras no.'**
- ✓ **'Algunas veces me he animado a hacer algo por mi cuenta. A lo mejor son las demostraciones más simples, pero después en el examen repito lo que me dieron por miedo a que me corrijan o me digan que están mal.'**
- ✓ **'El primario y el secundario me acostumbraron a que matemática es sentarse a hacer ejercicios, entonces, ¿Para que las demostraciones?'**
- ✓ **'Más o menos con las demostraciones normales, vaya y pase, y si bien no era algo que me gustara, era pasable, pero el absurdo y la inducción, es una locura.'**
- ✓ **'Cuando tomo el tiempo suficiente de comprensión y las razono me siento segura y las entiendo, pero cuando me piden que intente hacer una porque es algo fácil o similar a lo que me dieron, así me dice la profesora, no puedo, me trabo me trabo y no hay forma.'**
- ✓ **'En ciertos temas me ayudan mucho a comprenderlos, el que vea la interpretación geométrica y con imágenes. Escribir y todo eso, no la voy y simbólicamente me cuesta mucho.'**

- ✓ **'Pienso que, al momento de las demostraciones, siempre la mejor forma de hacer las cosas es la explicada por el profe en clases, tampoco del libro, lo hecho por el profe en clase.'**
- ✓ **'Me gusta conocerlas (las demostraciones) porque no es de mi agrado aceptar todo lo que me dicen sin que me digan de dónde vienen. Siento que lo que me están diciendo es verdadero, pero hacerlas yo solo no, no puedo, me siento trabado, muy diferente a cuando tengo que hacer los ejercicios.'**
- ✓ **'Cuando empecé la facultad, y vi matemática, no lo podía creer, no es a lo que estaba acostumbrado en el secundario. Fue un golpe duro y difícil pero bueno, hice un esfuerzo y a las demostraciones las estudio, pero de memoria, no me siento capaz de hacer una solo.'**
- ✓ **'Decir porque hago cada paso de la demostración, no sé, a veces no me doy cuenta como expresarlo o sinceramente me parece que no hace falta y lo dejo así.'**
- ✓ **'Las demostraciones en general son rebuscadas y me cuesta entenderlas. Prefiero una explicación detallada, pero esto no.'**
- ✓ **'Las demostraciones por el absurdo, me hicieron algunas en clase en ciertos temas, según dijo la profesora que hacía falta. Busqué en internet y ví cosas interesantes como la raíz cuadrada de 2, y otros ejemplos. Está bueno, grosos los tipos que lo hicieron, pero yo, cuando voy a hacer algo así y para que…'**
- ✓ **'Sé, por lo que vi, que la profesora decía en clase que hacer ejemplos como prueba no está bien, pero yo cuando no sécómo realizar una prueba, la mayoría de las veces, le meto un ejemplo o dos, y listo.'**
- ✓ **'Los ejercicios de demostración visual me gustaron mucho, me sentí muy cómoda y por, sobre todo, pude hacerlos, sabía de lo que se trataba.'**
- ✓ **'Los ejercicios de inducción cuando había que generalizar la fórmula, todo bien, daba un poco de laburo, pero llegaba, pero eso de validar por inducción, me parece innecesario, no entiendo, no entiendo.'**
- ✓ **'Los ejercicios de prueba por el absurdo, no entiendo claramente adonde llegar, son parecidos a los indirectos, confunden, pero los de límites radiales usan un absurdo más coherente, más como que se puede ver el final…'**
- ✓ **'La prueba por inducción cuando me los muestra la profesora, se entiende todo el proceso en ciertas pruebas, no todas, me refiero a la prueba, pero el**

proceso, todas esas vueltas, pruebo para el primero, luego k después k+1, no tiene sentido o no lo entiendo y por eso por ahí es que no le encuentro sentido.'

V.1.2. Comentarios textuales del Grupo Experimental GE

- ✓ 'Vale la pena intentarlo ya que una vez entendidas es fácil ver la lógica de las mismas, pero cuesta mucho tratar de hacerlas sola.'
- ✓ 'Me dificulta cuando tengo que encarar por cuenta propia ya que siento que no tengo bien formado ese pensamiento abstracto que se necesita para temas más complejos de Matemática.'
- ✓ 'Puedo animarme frente a alguna que sea fácil y corta.'
- ✓ 'Me cuesta mucho, las estudio después de tratar de comprender la versión desarrollada por el profesor en clase.'
- ✓ 'Creo que soy capaz. Si el tema está bien comprendido, realizar la demostración mediante el estilo propio no debería ser nada muy complicado. El único problema es que generalmente uno tiene en mente la propuesta inicial, y la final, pero a veces esos pasos intermedios que te permite llegar, se hacen muy muy pero muy difíciles.'
- ✓ 'Me es más fácil entender los teoremas o proposiciones matemáticas a través de una explicación pausada.'
- ✓ 'Se debe atacar el asunto desde distintos lugares. Todos ayudan. Es un gran esfuerzo, pero vale la pena.'
- ✓ 'Las demostraciones a veces son muy largas y se pierde el sentido de la aplicación y me parece que no tienen mucho sentido.'
- ✓ 'Creo que se necesitan la mayor cantidad de elementos posibles. Pienso que cada forma es como mirar y evaluar una proposición desde distintos puntos de vista.'
- ✓ 'Justificar, se me pasa, me concentro en lo que tengo probar, y hay cosas que me parecen obvias e innecesarias'.
- ✓ 'Los ejercicios de demostración con artificios, no recuerdo su nombre, no por favor, cada vez que hay que hacer eso de sumar y restar, multiplicar y dividir, no no, eso no por favor.'
- ✓ 'A través de la demostración sabemos qué se hizo y porqué…'

- ✓ **'Lo visual es mejor pero la demostración escrita acompañada de una explicación lo más detalladamente posible de todos sus pasos es lo ideal para entenderlas.'**
- ✓ **'Me es fácil entender mediante una demostración porque esto lleva una explicación y puedo adjudicarles las razones matemáticas que la justifican…'**
- ✓ **'Me es fácil la explicación de los temas en el pizarrón por el profesor y después la demostración…'**
- ✓ **'Es útil a la hora de saber de dónde salen las cosas.'**
- ✓ **'Todo depende de la claridad y calidad de la explicación de la demostración, si es buena, suma; en caso contrario, quita…'**
- ✓ **'Las demostraciones me permiten relacionar varias definiciones de diferentes temas en una sola demostración y así vincular distintos conceptos.'**
- ✓ **'Aunque a la mayoría no nos gusta estudiar demostraciones, nos permite saber de dónde proviene una proposición o cómo fue deducida…'**
- ✓ **'El proceso inductivo me parece sin sentido. Generalizo la ley sin problemas, pero después no entiendo el sentido de ese mecanismo.'**
- ✓ **'Personalmente prefiero sentarme con una problemática a buscar una solución y en caso de no poder, buscar ayuda externa. No me parece bueno que nos den las cosas servidas en bandeja porque hace que la cabeza no trabaje…'**
- ✓ **'Las sugerencias ayudan a veces, y otras me confunden.'**
- ✓ **'Las sugerencias ayudan sin duda, nos guían el camino a seguir, pero tienen que estar muy bien redactadas porque de lo contrario pueden terminar confundiendo aún más.'**
- ✓ **'Los ejercicios donde uno sabe de dónde arranca hacia donde llega, muy bien y los visuales. Esos con artificios raros, no no, no entiendo, y cuando entiendo no creo que yo podría hacer eso solo.'**

V.1.3. Resultados acerca de la encuesta

Los ejercicios menos dificultosos para GE a lo largo de los cinco años, en orden de méritos son los siguientes:

1RDA; 1RV; 2RV; 3RV; 4RV; 4RDAD; 3RRA; 4RRA; 1RDAI; 2RDAI; 3RDAI; 3RDAD

Los ejercicios más dificultosos para GE a lo largo de los cinco años, en orden de méritos son los siguientes:

1RRA; 1RI; 2RI; 3RI; 4RI; 2RDAD; 3 RPoC; 2RPoC; 4 RPoC; 1 RPoC; 2RRA

Los ejercicios menos dificultosos para GC a lo largo de los cinco años, en orden de méritos son los siguientes:

4RDAD; 1RV; 2RV; 3RV; 4RV; 3RRA; 4RRA; 1RDAD;1RDAI; 2RDAI; 3RDAI; 3RDAD

Los ejercicios más dificultosos para GC a lo largo de los cinco años, en orden de méritos son los siguientes:

1RRA; 1RI; 2RI; 3RI; 4RI; 2RDAD; 3 RPoC; 2RPoC; 4 RPoC; 1 RPoC; 2RRA

V.1.4. Análisis de los resultados y comentarios de la Encuesta

Los resultados de la encuesta abierta y única en orden de mérito son similares en ambos grupos, pero hay algunas diferencias apreciables que pueden observarse. En el GE puede observarse que losórdenes de mérito de los ejercicios menos dificultosos arrancan de los ejercicios de razonamiento de argumentación directa, siguiendo por los de razonamiento visual mientras que para el GC los menos dificultosos arrancan por los visuales siguiendo por los de argumentación directa y 'arrancan' del Ejercicio 4 RDAD que presentó una sorpresa en sus resultados, ya que los estudiantes en un número importante mostraron una prueba visual muy contundente.

Respecto a los ejercicios más dificultosos, los dos grupos coinciden en su elección.

Los comentarios son por demás representativos, y hay coincidencias en ambos grupos: la falta de comprensión del proceso de validación por inducción, el absurdo 'puro y duro', se hace con esta expresión alusión al clásico método por el absurdo y no a lo utilizado específicamente para probar la no existencia de límites dobles por límites radiales y extensión. Los artificios son resistidos en los dos grupos. Destinaron un pequeño espacio a la hora de manifestar sobre los ejercicios más dificultosos. Allí se expresaron sobre la justificación. Algunos manifestaron que les resulta un proceso dificultoso y en otros casos manifestaron como en expresiones textuales que se muestran precedentemente, que era un proceso innecesario y demasiado evidente. Asimismo, en referencia a la justificación consideraron que si era necesario en una prueba visual para explicar lo que mostraban gráficamente. Aunque, en muchos casos, puede verse hacia el final del capítulo en el Ejercicio 4 RV, que a través de un gráfico con algunas cuestiones simbólicas expresaron el razonamiento implícito en la prueba visual.

V.2. Datos correspondientes al Ejercicio 1 RDAD

V.2.1. Categorías emergentes

Como consecuencia del análisis de las producciones realizadas por ambos grupos de estudiantes en las cinco cohortes acerca del **Ejercicio 1 RDAD** surgieron las siguientes categorías emergentes, con excepción de la categoría **EI** que corresponde a Balacheff (2000) y que se describen a continuación. Debe destacarse que en muchos otros ejercicios hay ciertas categorías que aquí se describen, que vuelven a repetirse y aparecen otras nuevas. Las nuevas que van apareciendo se describen en su momento y las que se repiten se consideran que ya han sido descriptas en este párrafo o en el correspondiente.

Empirismo ingenuo EI: Se encuadran en esta categoría, aquellos estudiantes que exhibieron uno o más ejemplos como prueba.

Prueba consumada PC: Se encuadran en esta categoría aquellos estudiantes que realizaron la prueba formal, con o sin justificación. Aquí, la justificación explícita carece de sentido, ya que al 'partir' de la hipótesis, se aplica de inmediato la definición de número par y no es un requisito relevante que el estudiante haya justificado y explicitado lo realizado en función de esa definición, ya que la acción es automática. Se debe destacar que, en las cercanías de la conclusión, la argumentación de la prueba requiere, para su solidez, la justificación de que el producto de enteros al que se le asigna el valor de una nueva variable es par, porque el producto de enteros es par. En virtud de estas cuestiones, se destinó una fila de la tabla para mostrar en cada cohorte y de cada grupo, la frecuencia de estudiantes que realizó la prueba con o sin justificación.

Se destaca que esta categoría contiene en sus frecuencias la suma correspondiente a las categorías PC y PCP, describiéndose la última, a continuación de la presente.

Es importante mencionar que, de acuerdo al análisis de las producciones realizadas por los estudiantes sobre este ejercicio, el tipo de prueba presentada por los estudiantes fue la clásica prueba, desde la perspectiva lógico–formal, o la verificación, encuadrada como EI.

Observación: La mayor parte de los estudiantes que realizaron la prueba formal, al finalizarla, no esbozaron siquiera, el mínimo detalle que mostrara que la prueba había concluido, es decir, que el resultado obtenido coincidía con la tesis, o como el clásico Q.E.D.[1], que lo obtenido, era lo que se quería probar. No es un detalle menor, porque implícitamente muestra la concientización del razonamiento seguido por el estudiante y que su cierre muestra claramente de que ha llegado a la meta. Estos casos se presentaron aproximadamente como se muestra en el esquema siguiente y cuyas referencias se indican a continuación:

$$\begin{aligned} & x \text{ es par} \wedge y \text{ es par} \Rightarrow x = 2k \wedge y = 2h \,/\, k, h \in \mathbb{Z} \Rightarrow \\ & \Rightarrow x.y = 2k.2h \,/\, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x.y = 2.2.k.h \,/\, k, h \in \mathbb{Z} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \underbrace{\underbrace{x.y = 2.2\overset{k'}{k.h} \,/\, k, h \in \mathbb{Z}}_{2} \Rightarrow x.y = 2.k' \,/\, k' \in \mathbb{Z}}_{(1)} \end{aligned}$$

1. El cierre de la prueba en el mejor de los casos, permitiría suponer que el estudiante sobreentiende que llegó a que el producto de enteros es par y no necesita explicitarlo.

2. El cierre de la prueba así presentado y en lugar de escribir debajo de la 'llave pequeña' k', haber escrito: 'par'. Esta cuestión se dejó fuera del test de hipótesis pero, se destaca en la tabla de frecuencias en una fila que se simboliza como SC/CC: sin conclusión; con conclusión, de forma de poner en evidencia una forma de trabajo del estudiante.

Prueba consumada parcialmente PCP: Se encuadran en esta categoría aquellos estudiantes que realizaron la prueba formal pero que, sin embargo, en este caso particular, por una falencia técnica, es decir, por no utilizar dos parámetros distintos para representar a dos hipotéticos enteros diferentes, creyeron consumar la prueba, pero en realidad lo hicieron para un caso particular, es decir, para dos enteros pares e iguales.

---

[1]*Quod erat demonstrandum* significa 'lo que se quería demostrar', locución latina que utilizaban muchos matemáticos griegos tales como Euclides y Arquímedes, entre otros, para expresar que habían llegado a la meta que se habían propuesto probar.

Estos casos se presentaron aproximadamente así:

$$x\ es\ par \wedge y\ es\ par \Rightarrow x = 2k \wedge y = 2k \,/\, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x.y = 2k.2k \,/\, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x.y = 4.k^2 \,/\, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x.y = 2.\underbrace{2k^2}_{h} \,/\, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x.y = 2.h \,/\, h \in \mathbb{Z} \Rightarrow x.y\ es\ par \therefore x\ es\ par \wedge y\ es\ par \Rightarrow x.y\ es\ par$$
$$o\ también\ así: x\ es\ par \wedge y\ es\ par \Rightarrow x = 2k \wedge y = 2k \,/\, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x.y = 2k.2k \,/\, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x.y = \underbrace{4.k^2}_{par} \,/\, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x.y\ es\ par \therefore x\ es\ par \wedge y\ es\ par \Rightarrow x.y\ es\ par$$

Intento de prueba fallido IPF

Se encuadran en esta categoría aquellos estudiantes que plantearon y desarrollaron la hipótesis, e inclusive hubo casos en que también plantearon la tesis como hecho consumado, pero sin probarla. Estos casos se presentaron aproximadamente así:

$$x\ es\ par \wedge y\ es\ par \Rightarrow x = 2k \wedge y = 2k \,/\, k \in \mathbb{Z}$$

Distinguiéndose los casos en que consideraron a los pares iguales y distintos, como el siguiente: $x\ es\ par \wedge y\ es\ par \Rightarrow x = 2k \wedge y = 2h \,/\, k,h \in \mathbb{Z}$

Mientras que los que creyeron llegar a la conclusión, esbozaron uno de los dos esquemas siguientes:

$$x\ es\ par \wedge y\ es\ par \Rightarrow x = 2k \wedge y = 2h \,/\, k,h \in \mathbb{Z} \Rightarrow x.y\ es\ par$$

$$x\ es\ par \wedge y\ es\ par \Rightarrow x = 2k \wedge y = 2k \,/\, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x.y\ es\ par$$

Ausencia de trabajo AT: Se encuadran en esta categoría aquellos estudiantes que no realizaron ni esbozaron absolutamente ninguna acción en la hoja de trabajo.

Identificación de hipótesis y tesis IHT: Aquí las frecuencias se indican en la tabla y corresponden al número de estudiantes que identificaron ambas estructuras. Esta categoría también se excluyó de las pruebas de hipótesis.

V.2.2. Tabla de frecuencias correspondiente al Ejercicio 1 RDAD

A continuación, se detalla la tabla de frecuencias correspondiente al **Ejercicio 1 RDAD** para los cinco años de trabajo. En la tabla se indican en amarillo los datos que se sometieron a las pruebas de hipótesis, para la comparación de ambos grupos a los efectos de ver si hay relación entre grupos y categorías emergentes. Las casillas 'sin pintar' son datos relevantes, como se destacó en la descripción de las categorías emergentes, pero a efectos estrictamente cualitativos, de forma de contribuir al informe final correspondiente al análisis de datos de cada ejercicio y posteriormente a las conclusiones. Estos datos, cabe destacar, que no se incluyen en el test, ya que lo que los datos requeridos específicamente para distinguir los grupos a través del mismo son estrictamente cuestiones relacionadas directamente con el tipo de prueba presentada. Estos datos son importantes pero accesorios y complementan la información obtenida pero su inclusión, podría haber entorpecido los resultados. Asimismo, cabe destacar que la generación de muchas categorías no sería conveniente para las pruebas de hipótesis, ya que se dispersarían demasiado los datos y no se podría arribar a un resultado que permita hacer un distingo de los dos grupos estudiados en cada cohorte.

Referencias: <u>Categorías incluidas en el test de hipótesis</u>

Tipos de pruebas presentadas por los estudiantes:

EI: Empirismo ingenuo; PC: Prueba consumada; PCP: PC parcialmente

Casos especiales: IPF: Intento de prueba fallido; AT: Ausencia de trabajo

<u>Categorías complementarias al test de hipótesis</u>

IHT: Identificación de hipótesis y tesis.

*** Prueba con o sin justificación y agrupa a las frecuencias correspondientes a PC y PCP y se corresponde así en la tabla: valor c.just./valor s.just.**

**** Pruebas que no concluyen efectivamente, acorde se explicó en PC y se corresponde así en la tabla: valor SC/ valor CC**

AÑO		2013		2014		2015		2016		2017	
CAT.	GRUPO	GE	GC	GE	GC	GE	GC	GE	GC	GE	GC
EI		2	8	2	7	1	9	2	8	1	7
PC		12	3	13	4	14	3	15	6	13	4
PCP		4	3	3	2	2	2	1	2	5	1
Prueba.c/s.just.*		3/13	1/5	2/14	1/5	3/13	1/4	2/14	2/6	4/14	1/4
SC/CC**		13/3	5/1	14/2	4/2	13/3	3/2	14/2	6/2	15/3	4/1
IPF		1	4	1	3	2	3	2	2	1	5
AT		1	2	1	4	1	3	0	2	0	3
IHT		17	10	16	9	18	8	18	10	18	9

Tabla 1 de frecuencias correspondientes al Ejercicio 1 RDAD

V.2.3. Test de hipótesis correspondiente al Ejercicio 1 RDAD

Se detallan a continuación los gráficos con los datos asociados a las pruebas de hipótesis del **Ejercicio 1 RDAD**.

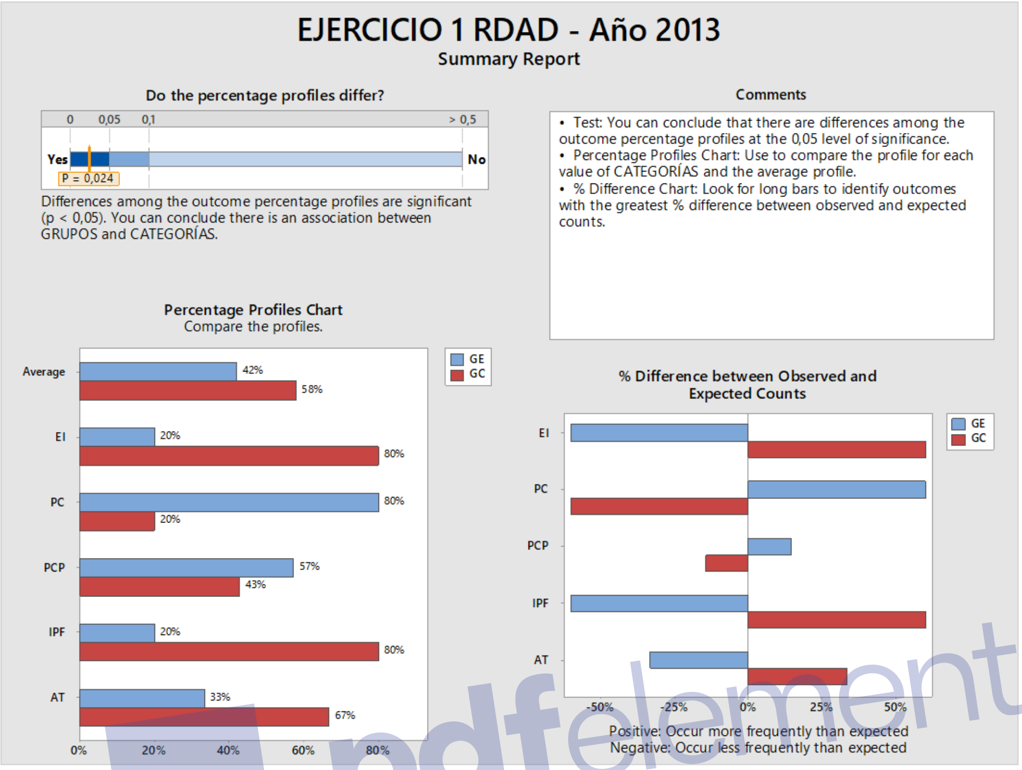


Figura 15: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 1 RDAD Año 2013

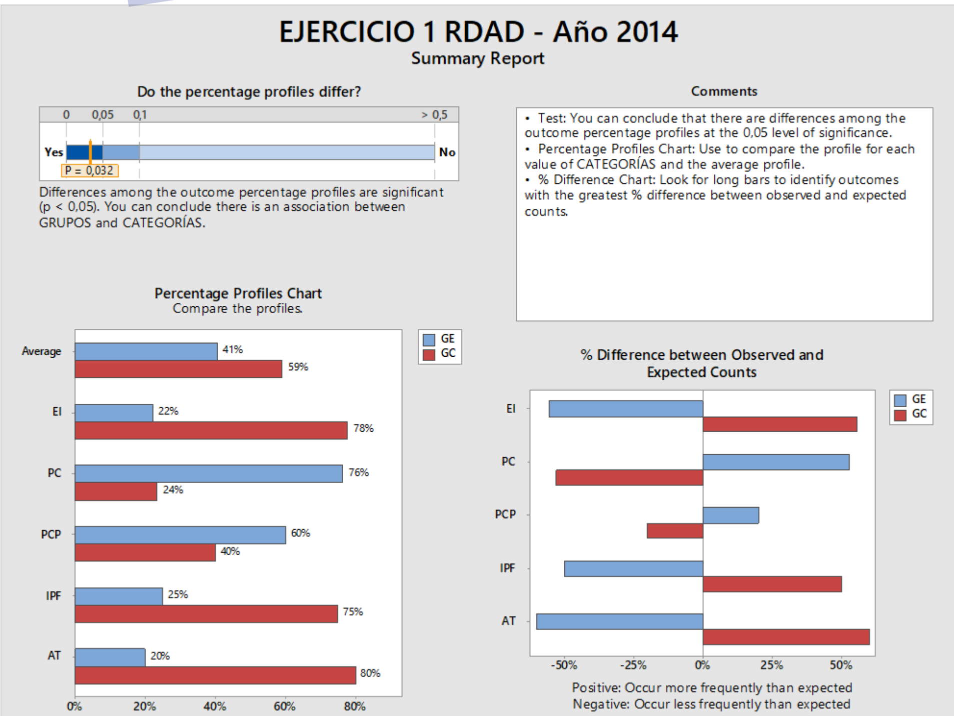


Figura 16: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 1 RDAD Año 2014

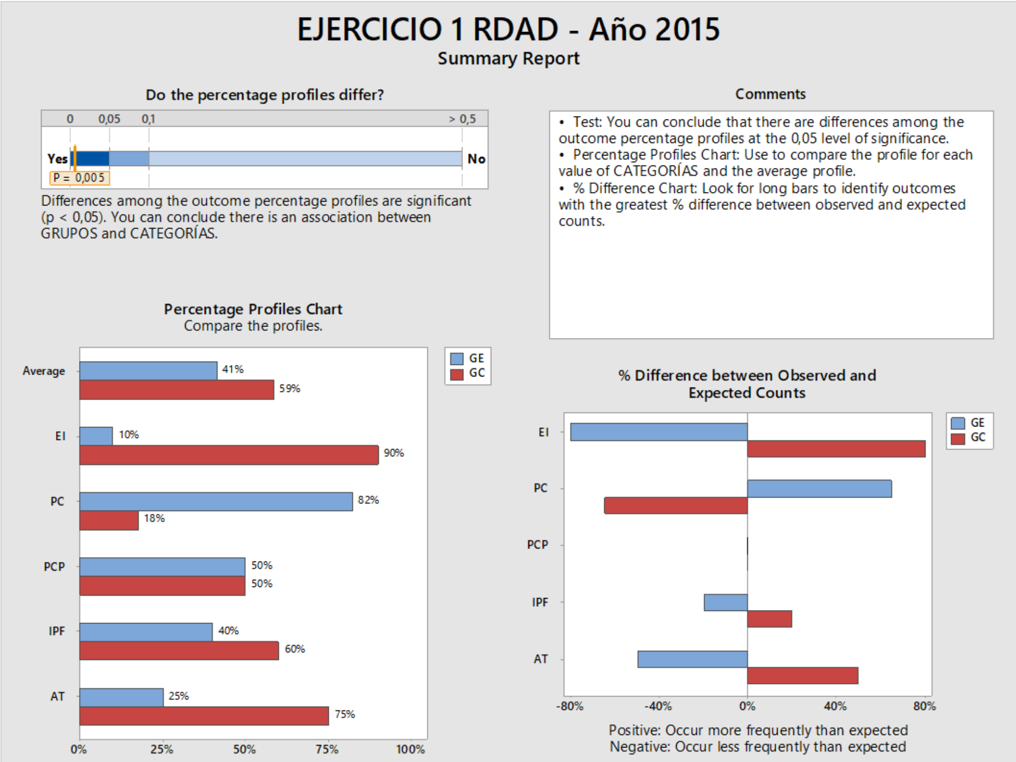


Figura 17: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 1 RDAD Año 2015

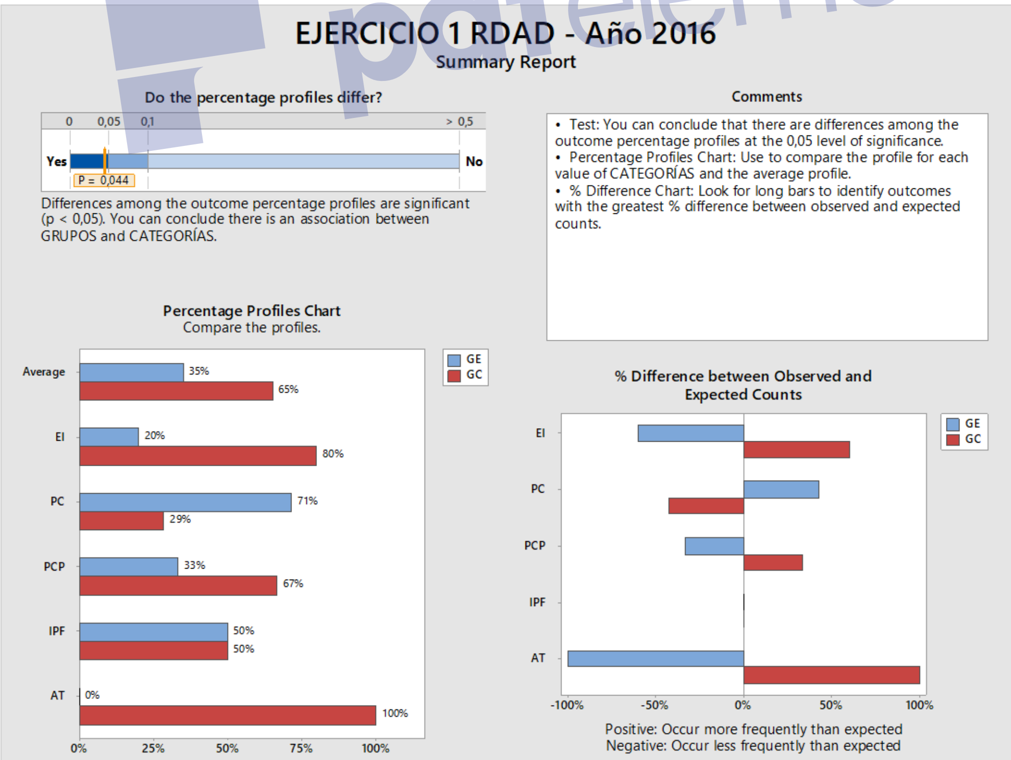


Figura 18: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 1 RDAD Año 2016

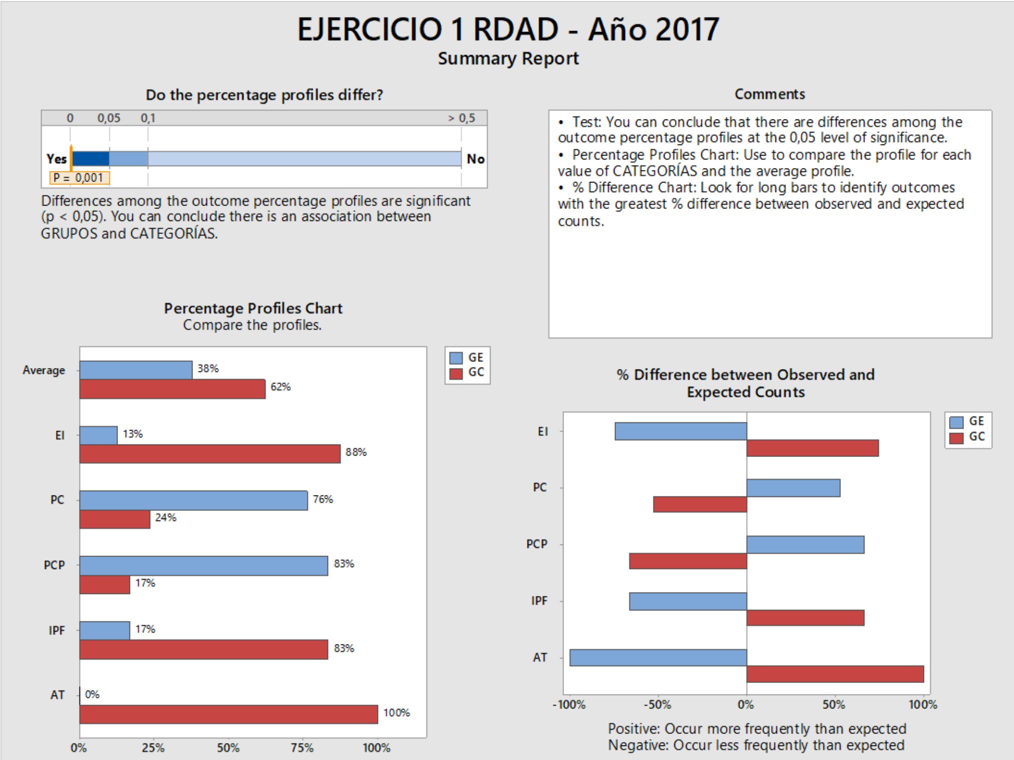


Figura 19: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 1 RDAD Año 2017

V.2.4. Análisis de los datos correspondientes al Ejercicio 1 RDAD

Se formulan a continuación las hipótesis nula y alternativa, respectivamente, a los efectos de poder extraer una conclusión de las precedentes pruebas de hipótesis.

Hipótesis nula: La formación recibida y el paradigma de enseñanza y aprendizaje experimentado por dos grupos de estudiantes diferentes reacciona de igual forma frente a la propuesta de una prueba matemática que requiere un razonamiento deductivo por argumentación directa.

Hipótesis alternativa: La formación recibida y el paradigma de enseñanza y aprendizaje experimentado por dos grupos de estudiantes diferentes reacciona de forma distinta frente a la propuesta de una prueba matemática que requiere un razonamiento deductivo por argumentación directa.

Las pruebas de hipótesis realizadas sobre este ejercicio permiten observar que, a lo largo de los cinco años, rechazan la hipótesis nula, evidenciando una clara diferencia en los grupos. Esa diferencia se manifiesta claramente en dos datos relevantes como la realización de la prueba formal planteada por la consigna del ejercicio versus la verificación como prueba, pero, ¿Cómo se entiende esto?

En el grupo experimental, en todos los años, sus integrantes no se limitaron al empirismo ingenuo, sino que abordaron la prueba formal, ya sea total o parcialmente en un número importante frente al grupo de control, que reaccionó realizando verificaciones aleatorias (leáse EI) en un número también importante. Es de destacar que, si se observa la **Tabla 1 de frecuencias correspondientes al Ejercicio 1 RDAD**, en ambos grupos, la identificación de la hipótesis y la tesis es la sumatoria de las frecuencias de los resultados obtenidos en estudiantes que consumaron la prueba parcial o totalmente más los que realizaron un intento fallido. Esta identificación fue realizada aproximadamente por la casi totalidad de estudiantes en cada grupo, de forma similar cada año. Debe observarse también que AT: ausencia de trabajo fue mínima en ambos grupos, siendo mayor la frecuencia en el grupo de control, pero asimismo en un número pequeño. Una explicación posible a estos resultados puede atribuirse a que el estudiante tomó dos posiciones extremas frente a la disyuntiva de no poder hacer frente a la prueba. Una reacción usual, tal como describe Balacheff (2000) es la de presentar una o más verificaciones aleatorias y considerar que con esas acciones se satisface lo requerido, o bien también puede considerarse que es el camino más rápido y 'seguro', y permite cumplir, en cierta manera con la tarea asignada. La otra posición fue directamente no realizar la propuesta asignada. Debe observarse que, en el grupo de control, donde la ausencia de prueba en sus dos categorías: PC y PCP, es más notoria, EI es más frecuente que AT, quizás también por el carácter elemental de la proposición y el proceso de verificación fue muy simple de ser llevado a cabo, lo que no se produjo en otras proposiciones, como podrá verse en el análisis de los datos de otros ejercicios, ejercicios que poseen un nivel ligeramente más elevado de dificultad, en cuanto a esta cuestión. Es importante destacar que en la tabla de frecuencias 1. además de la fila IHT, hay una fila que no está sombreada y es denominada: **Prueba.c/s.just.*.** En estas frecuencias están incluidos los estudiantes de cada grupo que corresponden a PC y PCP, como se describió oportunamente en V.1.1. En este párrafo, al ser detalladas las categorías emergentes, lo de la justificación quedó claramente explicitado en la descripción de la categoría **PC,** asimismo se hace necesario subrayar nuevamente que esta prueba no requiere de 'grandes justificaciones' en la argumentación, pero cierta cuestión debería ser sostenida por un argumento necesario, ya descripto, para que la prueba sea totalmente sólida. Se observa en la tabla de frecuencias 1 que los estudiantes que realizaron la prueba formal, en las diferentes subcategorías antes mencionadas y para cualquiera de los dos grupos, representan un número mínimo los que justificaron los eslabones necesarios de la argumentación para establecer la solidez de la prueba. Estos resultados resultan ser proporcionalmente similares en ambos grupos, ya que fue mínimo el número de los que justificaron cada año. Este comportamiento es similar en la fila correspondiente a SC/CC, fila que también se excluyó del test de hipótesis.

V.3. Datos correspondientes al Ejercicio 2 RDAD

Para este ejercicio se mantuvieron las mismas categorías emergentes que para el **Ejercicio 1 RDAD**, a excepción de la categoría PCP, ya que los trabajos presentados o se consumaron por completo: PC, o sin conclusión **SC/CC** o hubo intentos de prueba: IPF. Es decir, a diferencia del **Ejercicio 1 RDAD**, no se presenta la categoría PCP, ya que no se hizo manifiesto un caso particular del calibre anterior. Asimismo, en el subpárrafo siguiente se presentan algunos casos particulares que vale la pena destacar en algunas categorías como se hizo para el ejercicio 1.

V.3.1. Casos particulares en diferentes categorías emergentes

En general, como se describió en el subpárrafo anterior en la realización de esta prueba, ciertos estudiantes no tuvieron presente, en el penúltimo eslabón de la cadena argumentativa, en considerar el caso k=0 para la definición de igualdad de complejos en su forma polar, como se muestra a continuación, esta cuestión se detalla únicamente en la tabla de frecuencias, como k=0 presente en caso que el estudiante haya especificado este detalle y k=0 fallida, en el caso en que el estudiante no lo haya especificado. Se puede presuponer que el estudiante no lo escribió porque sobreentendió o consideró que la aplicación de la definición citada implícitamente vale para este caso particular, pero esto no es así siempre y debe explicitarse como se indica a continuación. Asimismo, algunos estudiantes presentaron la definición completa, sin considerar que debía particularizarse.

$$Sean\ z = \rho_\varphi \ y\ z' = \rho'_{\varphi'} \Rightarrow \frac{z}{z'} = \left(\frac{\rho}{\rho'}\right)_{\varphi-\varphi'}$$

$$\frac{z}{z'} = w \,/\, w = R_\alpha \Leftrightarrow z = w.z' \Leftrightarrow \rho_\varphi = R_\alpha.\rho'_{\varphi'} \Leftrightarrow \rho_\varphi = R.\rho'_{\alpha+\varphi'}$$

$$\Leftrightarrow \rho = R.\rho' \wedge \varphi + 2k\pi = \alpha + \varphi' \Leftrightarrow R = \frac{\rho}{\rho'} \wedge \alpha = \varphi - \varphi' \to (k=0) \therefore \frac{z}{z'} = \left(\frac{\rho}{\rho'}\right)_{\varphi-\varphi'}$$

La categoría correspondiente a SC/CC, específicamente se refleja en que el estudiante habiendo arribado al último eslabón de la cadena, no concluía la prueba. Parecería que esto fuera un detalle menor, o quizás una actitud o requerimiento 'exquisito' tangencial a una exigencia bourbakiana, pero no, se trata de una cuestión que es esencial, ya que el llegar al último eslabón, y cerrar la conclusión, vincula que a lo que se arribó es el objetivo clave de la argumentación de la prueba, y era encontrar el módulo y el argumento del complejo planteado: w, como resultado del cociente de los complejos conocidos.

V.3.2. Tabla de frecuencias correspondiente al Ejercicio 2 RDAD

A continuación, se detalla la tabla de frecuencias correspondiente al **Ejercicio 2 RDAD** para los cinco años de trabajo. En la tabla se indican en amarillo, de la misma forma que para el **Ejercicio 1 RDAD**, los datos que se sometieron al test de hipótesis, para la comparación de ambos grupos a los efectos de detectar si hay relación entre grupos y categorías emergentes. De la misma forma que en el **Ejercicio 1 RDAD**, las casillas 'sin pintar' son datos relevantes, pero a efectos estrictamente cualitativos de forma de contribuir al informe final del análisis de los datos y posteriormente a las conclusiones.

AÑO		2013		2014		2015		2016		2017	
CAT.	GRUPO	GE	GC	GE	GC	GE	GC	GE	GC	GE	GC
EI		4	7	2	10	4	10	2	8	4	9
PC		11	2	10	3	10	2	11	3	11	4
Prueba.c/s.just.*		3/8	1/1	2/8	0/3	3/7	0/2	4/7	1/2	3/8	1/3
K=0 presente		3	0	2	2	2	0	2	1	2	1
K=0 ausente		8	2	8	1	8	2	7	2	8	2
SC/CC**		8/3	0/2	7/3	1/2	7/3	0/2	3/8	1/2	3/8	1/3
IPF		4	9	6	5	5	4	6	5	5	3
AT		1	2	2	2	1	4	1	4	0	4
IHT		10	5	8	5	11	3	8	4	9	4

Tabla 2 de frecuencias correspondientes al Ejercicio 2 RDAD

Referencias: Categorías incluidas en el test de hipótesis

Tipos de pruebas presentadas por los estudiantes:

EI: Empirismo ingenuo; PC: Prueba consumada

Casos especiales: IPF: Intento de prueba fallido; AT: Ausencia de trabajo

<u>Categorías complementarias al test de hipótesis</u>

IHT: Identificación de hipótesis y tesis.

*** Prueba con o sin justificación y agrupa a las frecuencias correspondientes a PC y se corresponde así en la tabla: valor c.just./valor s.just.**

**** Pruebas que no concluyen efectivamente, acorde se explicó en PC en 5.1.1. y se corresponde así en la tabla: valor SC/ valor CC**

Fila k=0 presente: frecuencia de estudiantes que consumaron prueba y especificaron esta cuestión detallada en V.2.1. sobre igualdad de complejos en forma polar.

Fila k=0 fallida: caso contrario a fila k=0 presente

V.3.3. Test de hipótesis correspondiente al <u>Ejercicio 2 RDAD</u>

Se detallan a continuación los gráficos con los datos asociados a las pruebas de hipótesis del **Ejercicio 2 RDAD**.

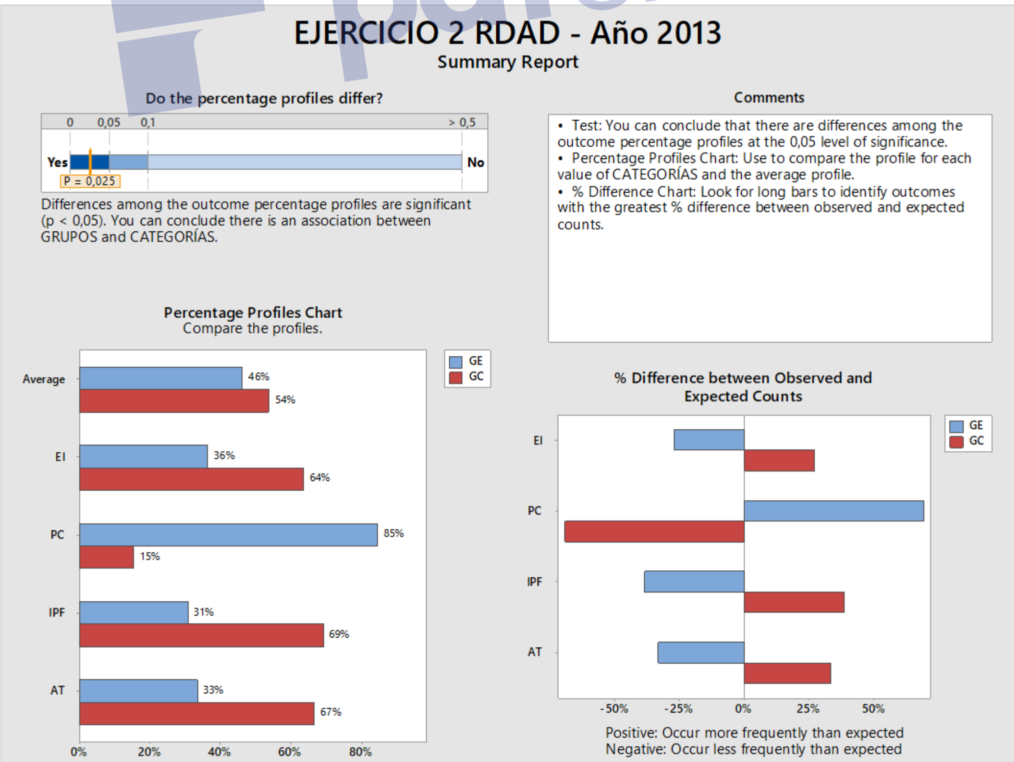


Figura 20: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 2 RDAD Año 2013

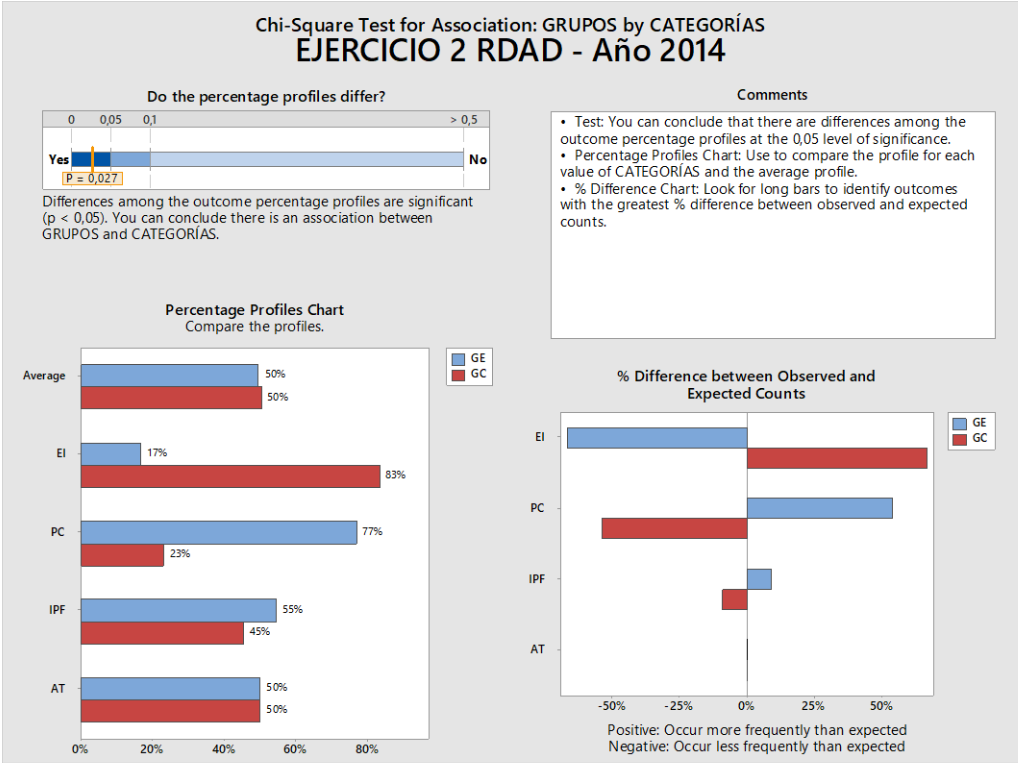


Figura 21: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 2 RDAD Año 2014

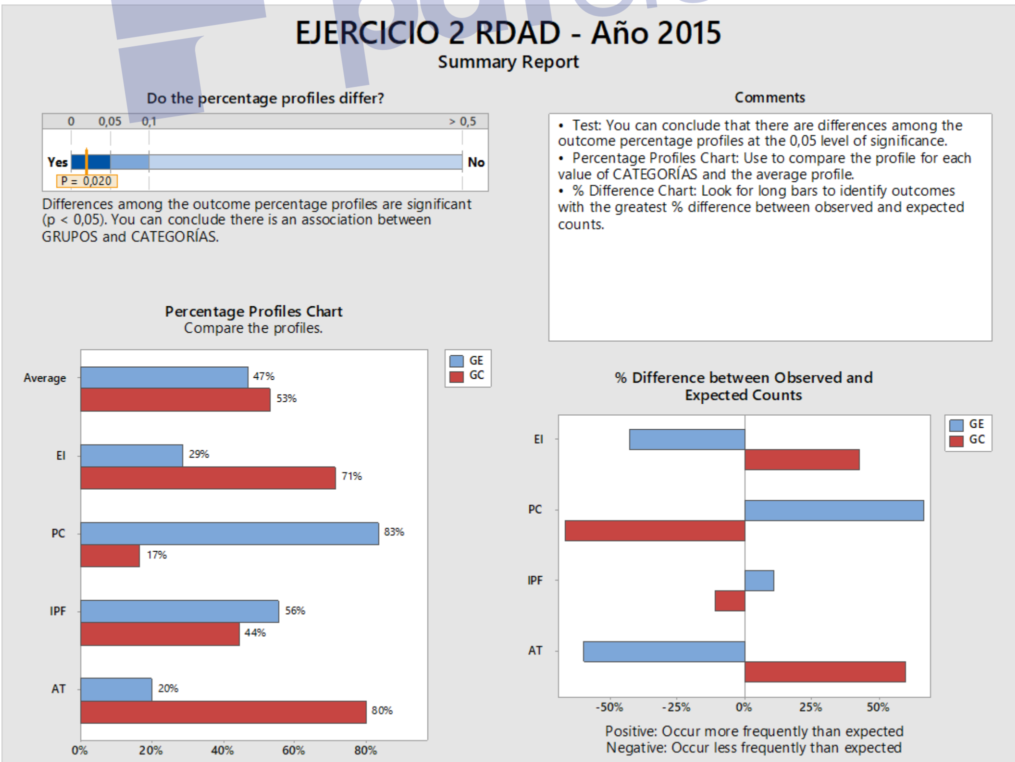


Figura 22: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 2 RDAD Año 2015

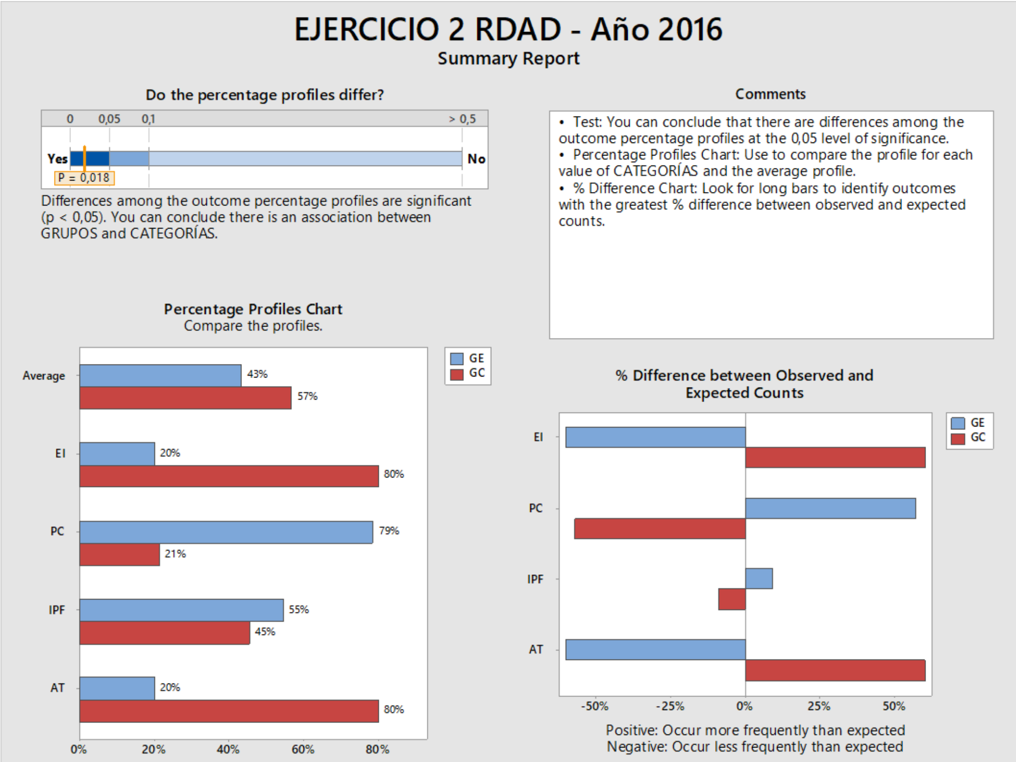


Figura 23: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 2 RDAD Año 2016

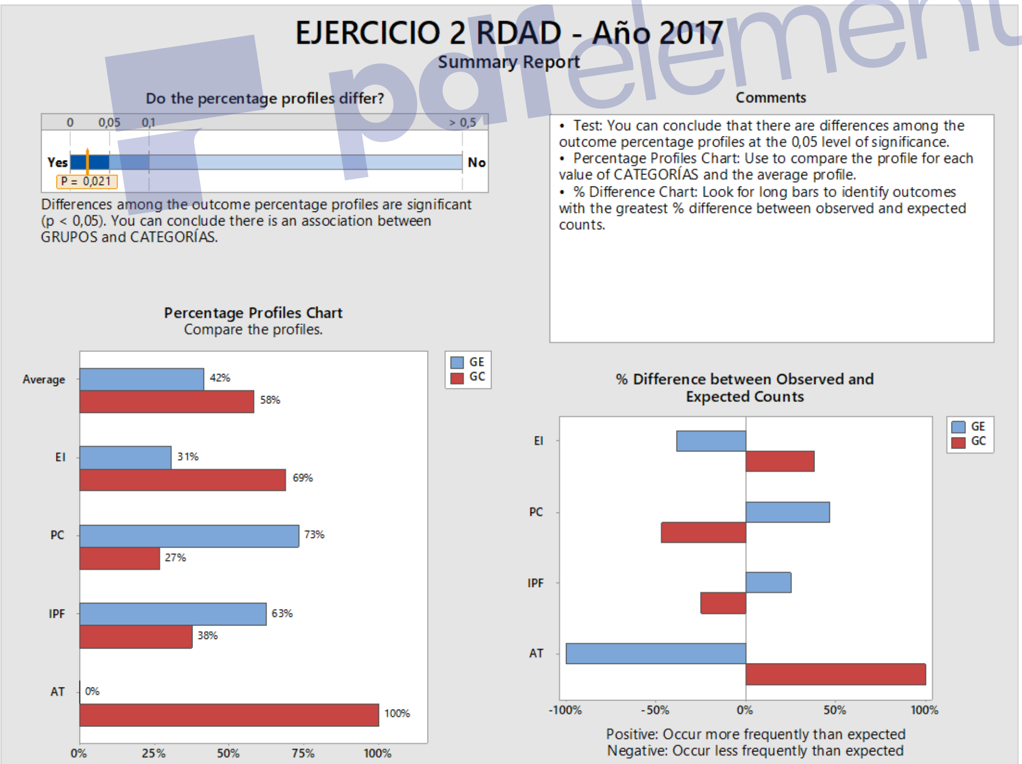


Figura 24: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 2 RDAD Año 2017

V.3.4. Análisis de los datos correspondientes al <u>Ejercicio 2 RDAD</u>

Se formulan a continuación las hipótesis nula y alternativa, respectivamente, a los efectos de poder extraer una conclusión de las precedentes pruebas de hipótesis.

Hipótesis nula: La formación recibida y el paradigma de enseñanza y aprendizaje experimentado por dos grupos de estudiantes diferentes reacciona de igual forma frente a la propuesta de una prueba matemática que requiere un razonamiento deductivo por argumentación directa.

Hipótesis alternativa: La formación recibida y el paradigma de enseñanza y aprendizaje experimentado por dos grupos de estudiantes diferentes reacciona de forma distinta frente a la propuesta de una prueba matemática que requiere un razonamiento deductivo por argumentación directa.

Las pruebas de hipótesis realizadas sobre este ejercicio permiten observar que, a lo largo de los cinco años, rechazan la hipótesis nula, evidenciando una clara diferencia en los grupos, esa diferencia se manifiesta claramente en dos datos relevantes como la realización de la prueba formal planteada por la consigna del ejercicio versus la verificación como prueba, de forma similar al **Ejercicio 1 RDAD**. El análisis de datos para este ejercicio es muy similar al **Ejercicio 1 RDAD** con excepción de que en este ejercicio no se postula la categoría de prueba consumada parcialmente, lo que fue explicado en V.2.1. Otro dato importante es que, en cierto eslabón de la cadena argumentativa que hace a la estructura de la prueba de la proposición se requería aplicar la definición de igualdad de números complejos expresados en forma polar, pero para el caso en que k=0, y es esencial tener presente esta cuestión, para que su aplicación tenga sentido. Esta cuestión fue exhaustivamente descripta en V.2.1. La mayor parte de los estudiantes que realizaron PC en ambos grupos, no tuvieron en cuenta el cierre de la conclusión, de forma parecida, aunque siempre el número fue mayor en el grupo de control. Esto se refleja en la tabla de frecuencias y específicamente en la fila correspondiente a SC/CC. La justificación siguió siendo en ambos grupos una cuestión muy ausente, que pudo variar ligeramente en algún año. La identificación de hipótesis y tesis fue muy diferente al Ejercicio 1 RDAD y en ambos grupos. Una proporción de aproximadamente 75% a 50% en GE mientras que un 50% en GC identificó hipótesis y tesis. Debe tenerse en cuenta que esto se indica en la tabla de frecuencias y para cada grupo es la suma de los que efectivizaron PC y la categoría IPF. Puede suponerse que esto puede obedecer a que en este ejercicio no hay un ‘clásico punto de partida’ sino el conocer que se tienen dos complejos expresados en forma polar. Esto puede confundir al estudiante, que está acostumbrado a 'caminos más tradicionales', es decir, un punto de partida concreto y marcado. Con respecto a la consumación de la prueba, fue menor la frecuencia inclusive en el grupo experimental, aumentando EI. Es de suponer que la dificultad de este ejercicio supera al primero y el desarrollo no es tan simple como el que plantea la consigna del Ejercicio 1 RDAD.

V.4. Datos correspondientes al Ejercicio 3 RDAD

Para este ejercicio se mantuvieron las mismas categorías emergentes que para el **Ejercicio 2 RDAD**, con excepción del dato referente a la igualdad de complejos en forma polar. En este ejercicio, las producciones de los estudiantes mostraron que las pruebas o se consumaron por completo: PC, o hubo intentos de prueba: IPF.

V.4.1. Tabla de frecuencias correspondiente al Ejercicio 3 RDAD

A continuación, se detalla la tabla de frecuencias correspondiente al **Ejercicio 3 RDAD**para los cinco años de trabajo. La presentación de la tabla es similar a los dos primeros ejercicios que corresponden a este tipo de razonamiento: **RDAD**

AÑO		2013		2014		2015		2016		2017	
CAT.	GRUPO	GE	GC	GE	GC	GE	GC	GE	GC	GE	GC
EI		1	7	2	6	2	8	2	5	2	7
PC		16	5	15	4	15	5	16	5	15	6
Prueba.c/s.just.*		4/12	1/4	4/11	2/2	4/9	2/5	2/14	1/4	2/13	2/4
SC/CC**		4/12	2/3	4/11	2/2	4/9	3/4	3/13	1/4	5/10	1/5
IPF		2	5	2	7	1	3	1	5	2	6
AT		1	3	1	3	2	4	1	5	1	1
IHT		15	8	17	10	15	11	17	10	16	10

Tabla 3 de frecuencias correspondientes al Ejercicio 3 RDAD

V.4.2. Test de hipótesis correspondiente al Ejercicio 3 RDAD

Se detallan a continuación los gráficos con los datos asociados a las pruebas de hipótesis del Ejercicio 3 RDAD.

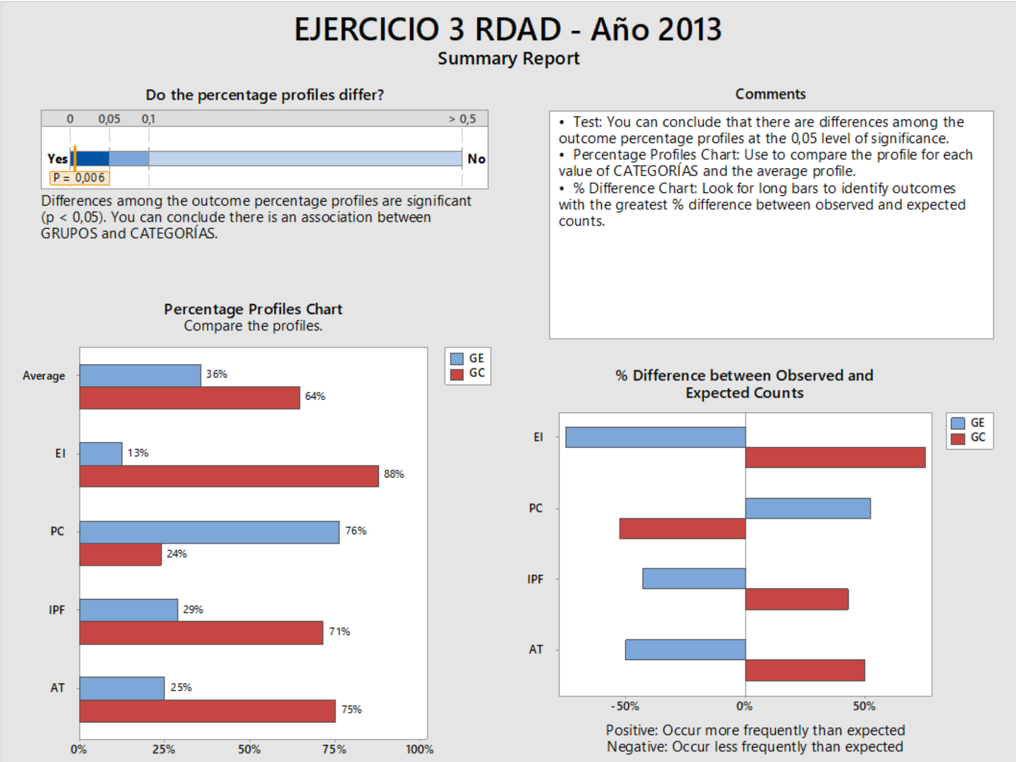


Figura 25: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 3 RDAD Año 2013

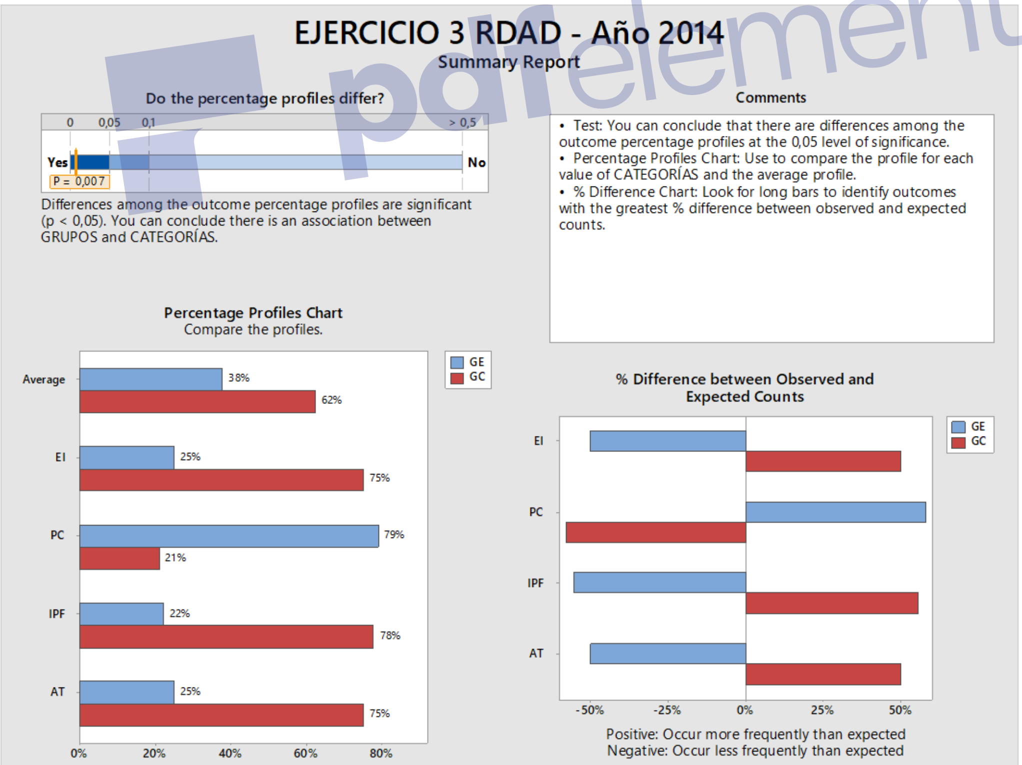


Figura 26: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 3 RDAD Año 2014

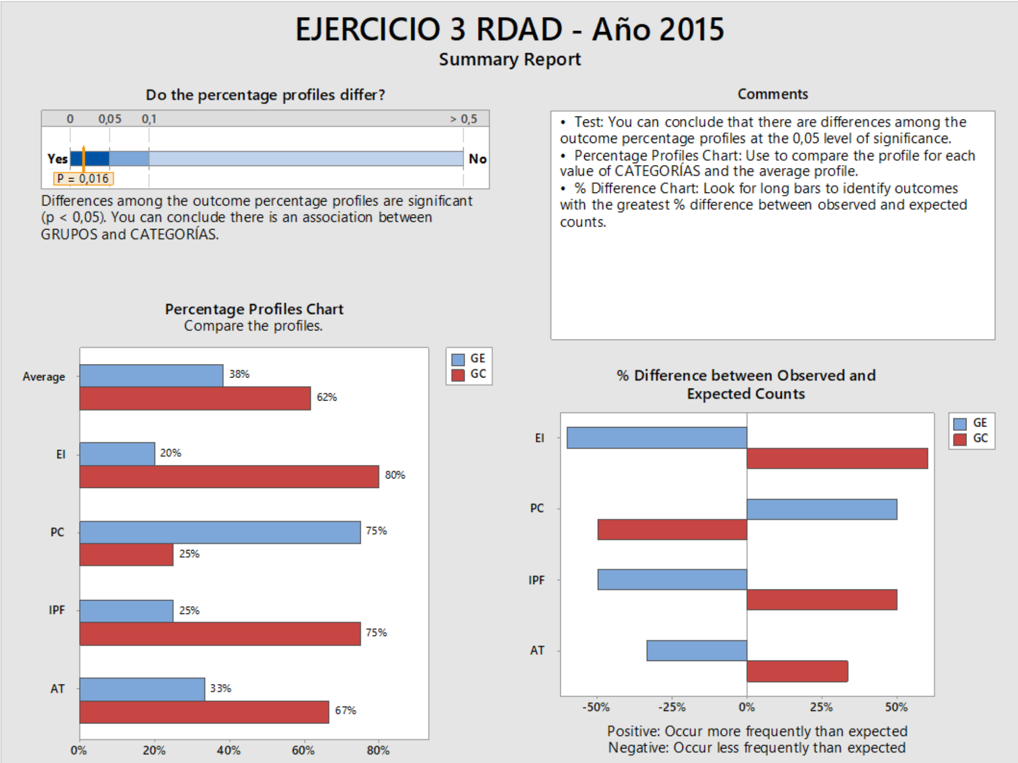


Figura 27: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 3 RDAD Año 2015

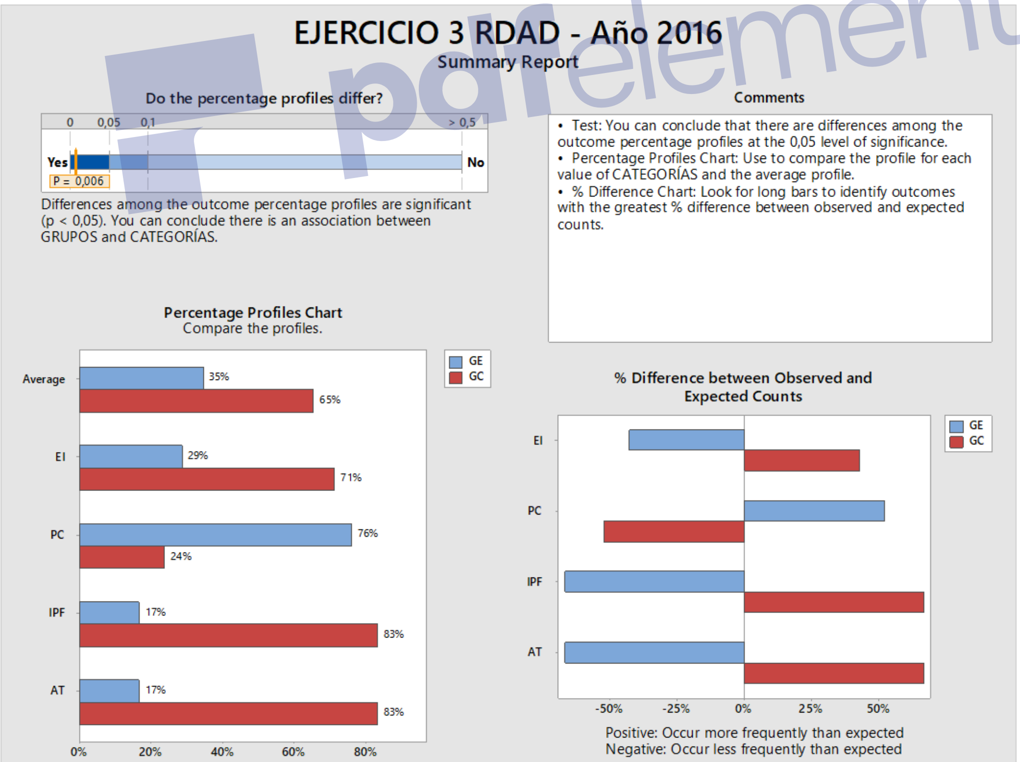


Figura 28: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 3 RDAD Año 2016

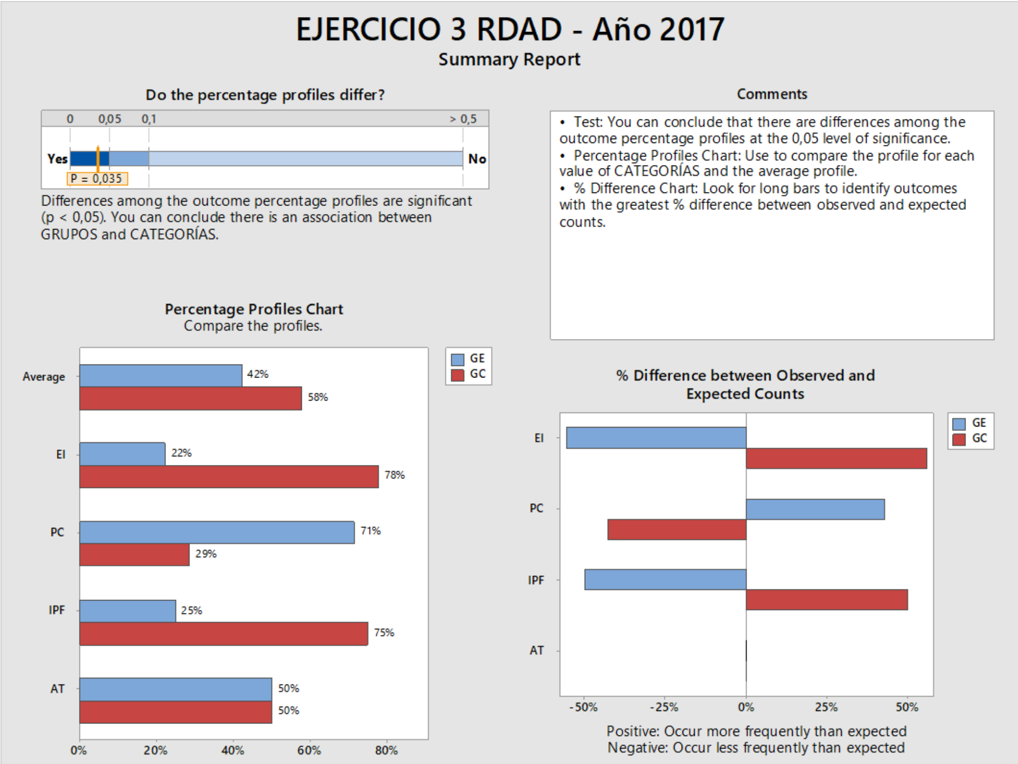


Figura 29: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 3 RDAD Año 2017

V.4.3. Análisis de Datos correspondientes al Ejercicio 3 RDAD

Se formulan a continuación las hipótesis nula y alternativa, respectivamente, a los efectos de poder extraer una conclusión de las precedentes pruebas de hipótesis.

Hipótesis nula: La formación recibida y el paradigma de enseñanza y aprendizaje experimentado por dos grupos de estudiantes diferentes reacciona de igual forma frente a la propuesta de una prueba matemática que requiere un razonamiento deductivo por argumentación directa.

Hipótesis alternativa: La formación recibida y el paradigma de enseñanza y aprendizaje experimentado por dos grupos de estudiantes diferentes reacciona de forma distinta frente a la propuesta de una prueba matemática que requiere un razonamiento deductivo por argumentación directa.

Las pruebas de hipótesis realizadas sobre este ejercicio permiten observar que, a lo largo de los cinco años, rechazan la hipótesis nula, evidenciando una clara diferencia en los grupos, esa diferencia se manifiesta claramente en dos datos relevantes como la realización de la prueba formal planteada por la consigna del ejercicio versus la verificación como prueba de forma similar a los **Ejercicios 1,2 RDAD**. En este ejercicio nuevamente como en el 1, el grupo experimental consuma la prueba en un número importante casi todos los años frente al grupo de control, que muestra mucha frecuencia en la categoría EI, poca frecuencia en PC y suma más frecuencias a IPF respecto al GE. La ausencia de justificación sigue siendo notable en ambos grupos y en todos los años, como asimismo el cierre de conclusión. La identificación de hipótesis y tesis en este ejercicio fue realizada por la casi totalidad de los que realizaron PC e IPF en ambos grupos y todos los años.

V.5. Datos correspondientes al Ejercicio 4 RDAD

V.1.1. Categorías emergentes

Para este ejercicio se mantuvieron las mismas categorías emergentes que para el **Ejercicio 3 RDAD**, ya que los trabajos presentados o se consumaron por completo: PC o hubo intentos de prueba: IPF. El análisis de las producciones de los trabajos realizados por los estudiantes sorprendió con la aparición de un resultado inesperado ya que, en el diseño de la investigación, cuando se genera este ejercicio como instrumento para la consecución de la parte experimental de esta investigación, no se piensa en función de estos resultados. Por ende, la aparición de este resultado inesperado se traduce en la categoría emergente denominada Prueba visual: PV. En virtud de esto, la categoría PC pasó a llamarse PFC: prueba formal consumada, para distinguirse de la prueba visual que no se encuadra dentro de una línea de prueba tradicional.A continuación, se detalla aproximadamente como los estudiantes procedieron a demostrar la proposición consignada en este ejercicio a través de una prueba visual.La prueba consistió en lo siguiente. En general, dibujaron una hipotética función decreciente, trazando sobre la misma, rectas tangentes que mostraban visualmente que sus pendientes son negativas. La argumentación que avala esta prueba visual es aproximadamente la siguiente: ‘Las pendientes de la curva en diferentes puntos muestran el decrecimiento de la misma y tales pendientes son negativas ‘por su forma’ y por la interpretación geométrica de la derivada, la pendiente representa la derivada de la función en el punto. Como la derivada es negativa en cualquiera de los puntos, lo que puede verse gráficamente, la función es decreciente’. Los estudiantes escribieron aproximadamente lo siguiente: ‘La función es decreciente ya que la pendiente es negativa’. En muchos casos, escribieron adicionalmente: ‘…por lo que la derivada es negativa’.

A continuación, se muestran dos pruebas visuales realizadas por los estudiantes:

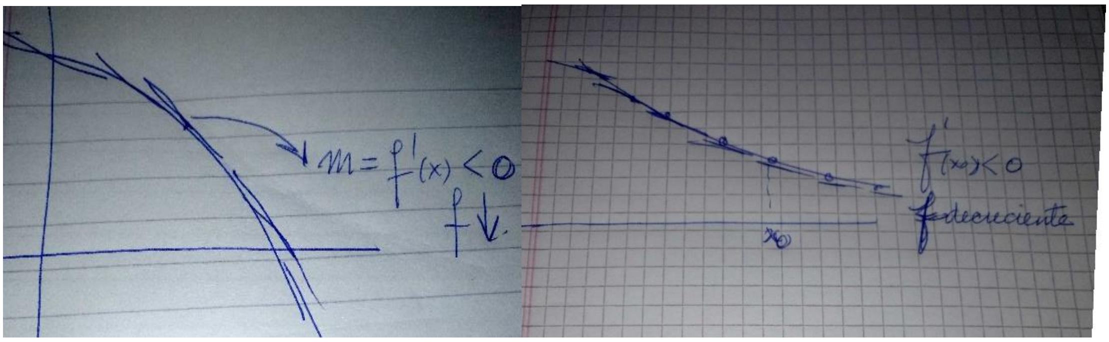


Figura 30 (izquierda) y Figura 31 (derecha): figuras realizadas por diferentes estudiantes que muestran la prueba visual del criterio de la derivada primera para monotonía

V.5.2. Tabla de frecuencias correspondiente al Ejercicio 4 RDAD

A continuación, se detalla la tabla de frecuencias correspondiente al **Ejercicio 4 RDAD** para los cinco años de trabajo. En virtud de aparecer la nueva categoría emergente de prueba visual: PV, la categoría de PC de iguales características que en los tres ejercicios anteriores, aparece ahora como PFC: prueba formal consumada. Esto se hace para distinguir a la prueba formal (analítica) de la prueba visual. De forma análoga a los Ejercicios 1,2,3 RDAD las categorías *,** quedan excluidas del test de hipótesis, pero aparecen en la siguiente tabla de frecuencias ya que son datos adicionales pero relevantes para el análisis de datos cualitativo y las conclusiones que se exponen en el capítulo siguiente.

AÑO		**2013**		**2014**		**2015**		**2016**		**2017**	
CAT.	**GRUPO**	**GE**	**GC**	**GE**	**GC**	**GE**	**GC**	**GE**	**GC**	**GE**	**GC**
EI		**2**	**1**	**2**	**2**	**1**	**3**	**4**	**2**	**1**	**1**
PFC		**6**	**4**	**5**	**4**	**7**	**5**	**6**	**3**	**7**	**4**
PFC.c/s.just.*		**2/4**	**1/3**	**2/3**	**0/4**	**2/5**	**1/4**	**2/4**	**0/3**	**2/5**	**1/3**
SC/CC**		**2/4**	**1/3**	**2/3**	**1/3**	**2/5**	**2/2**	**1/5**	**1/2**	**2/5**	**1/3**
PV		**8**	**12**	**8**	**11**	**8**	**10**	**8**	**12**	**9**	**13**
IPF		**3**	**2**	**3**	**2**	**3**	**1**	**1**	**2**	**2**	**1**
AT		**1**	**1**	**2**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
IHT		**15**	**17**	**15**	**17**	**18**	**16**	**15**	**17**	**18**	**18**

Tabla 4 de frecuencias correspondientes al Ejercicio 4 RDAD

V.5.3. Test de hipótesis correspondiente al Ejercicio 4 RDAD

Se detallan a continuación los gráficos con los datos asociados a las pruebas de hipótesis del Ejercicio 4 RDAD.

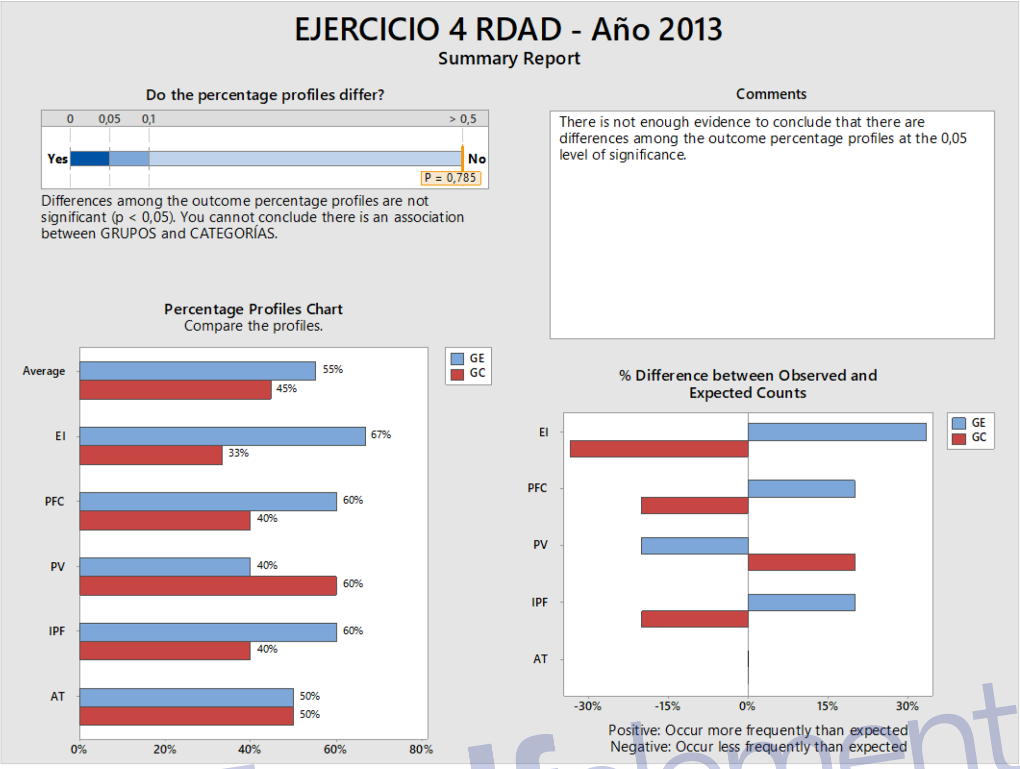


Figura 32: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 4 RDAD Año 2013

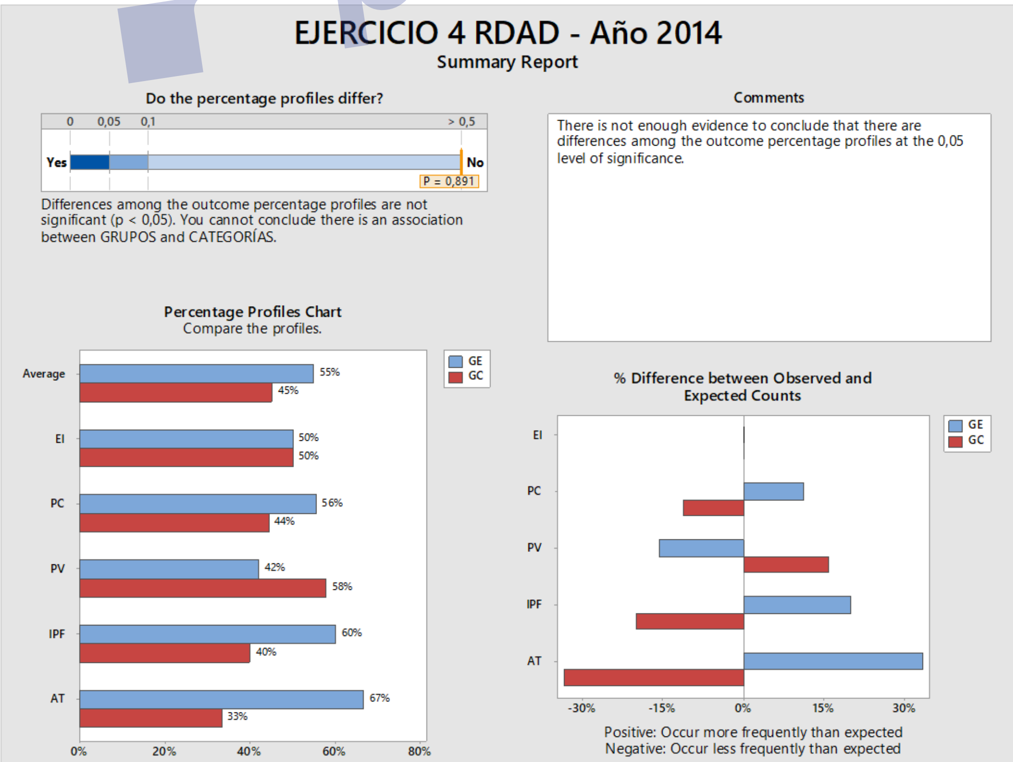


Figura 33: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 4 RDAD Año 2014

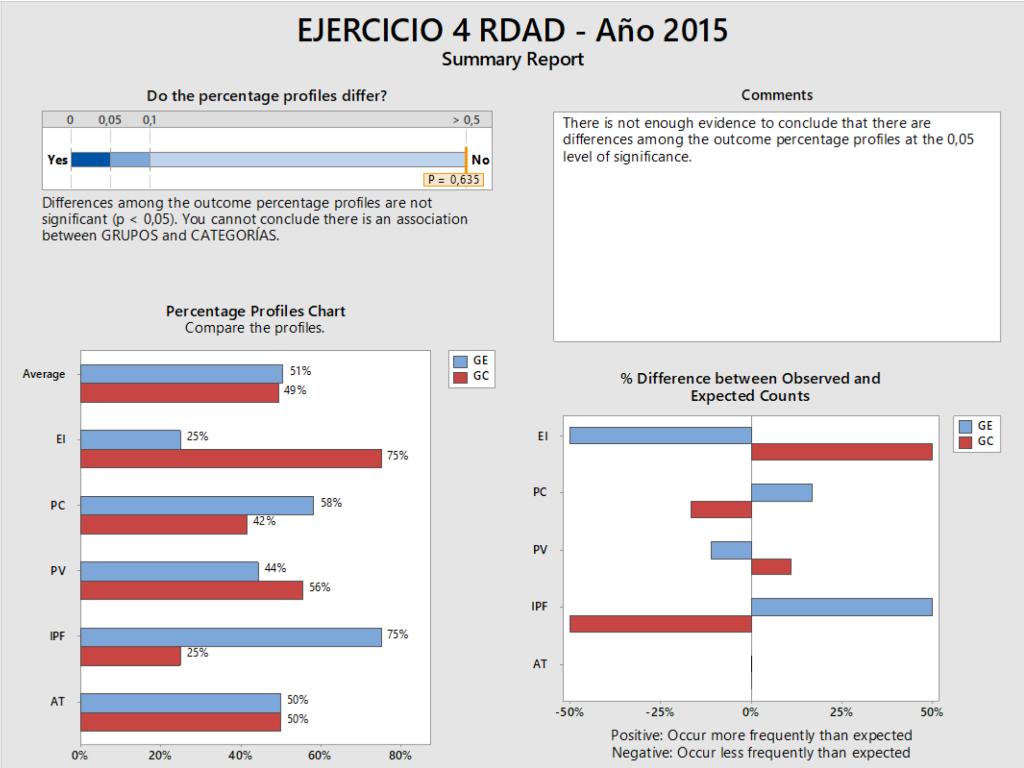


Figura 34: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 4 RDAD Año 2015

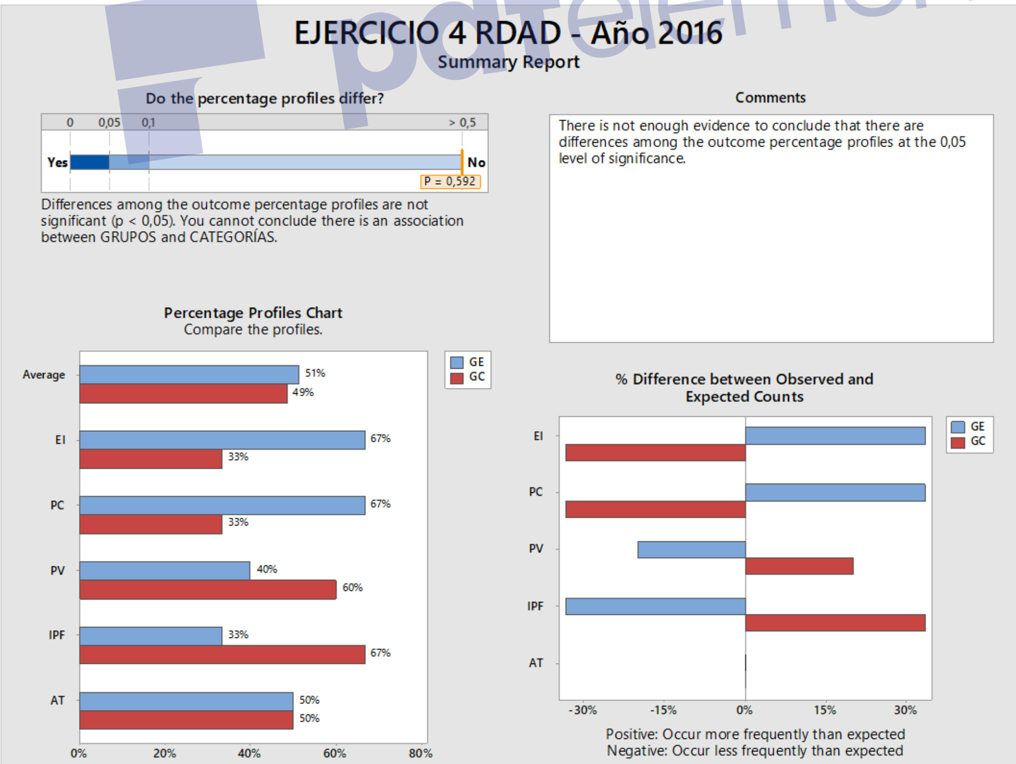


Figura 35: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 4 RDAD Año 2016

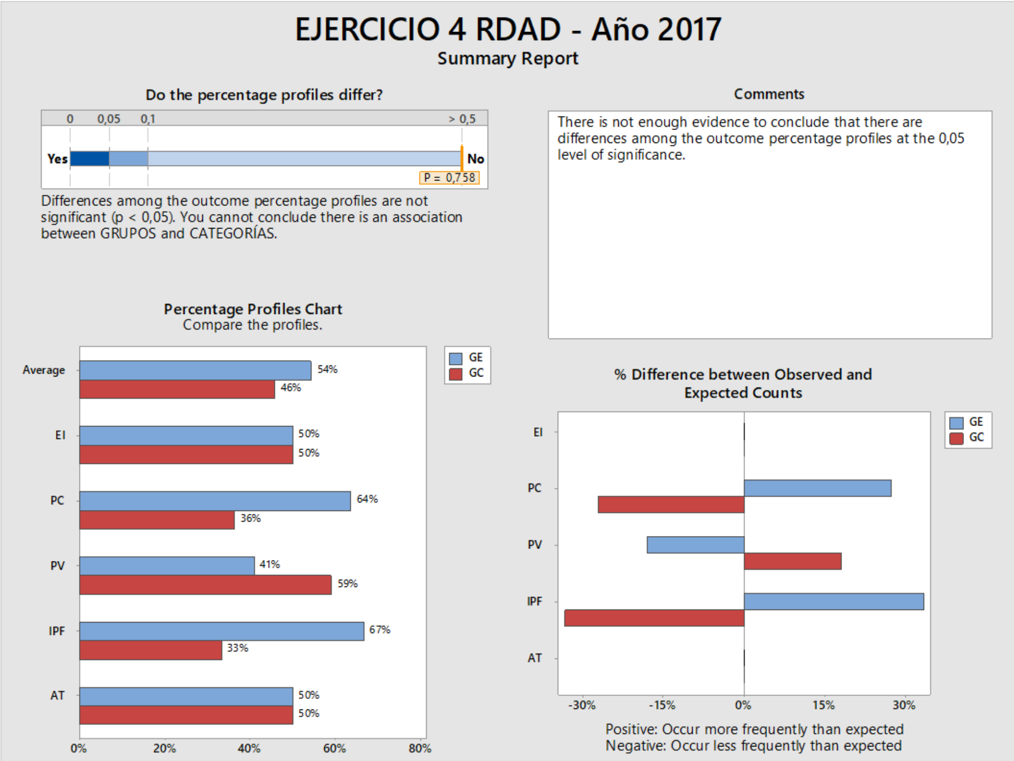


Figura 36: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 4 RDAD Año 2017

V.5.4. Análisis de Datos correspondientes al Ejercicio 4 RDAD

Se formulan a continuación las hipótesis nula y alternativa, respectivamente, a los efectos de poder extraer una conclusión de las precedentes pruebas de hipótesis.

Hipótesis nula: La formación recibida y el paradigma de enseñanza y aprendizaje experimentado por dos grupos de estudiantes diferentes reacciona de igual forma frente a la propuesta de una prueba matemática que requiere un razonamiento deductivo por argumentación directa.

Hipótesis alternativa: La formación recibida y el paradigma de enseñanza y aprendizaje experimentado por dos grupos de estudiantes diferentes reacciona de forma distinta frente a la propuesta de una prueba matemática que requiere un razonamiento deductivo por argumentación directa.

Las pruebas de hipótesis realizadas sobre este ejercicio permiten observar que, a lo largo de los cinco años, aceptan la hipótesis nula, no evidenciando en este caso, diferencia en los grupos.

Aquí, tanto el grupo experimental como el grupo de control mostraron una prueba adicional diferente a la habitual, la prueba visual. Y la característica que sorprende más aún de esta prueba visual es que la justificaron coloquialmente, proceso que usualmente no pueden hacer mayoritariamente cuando abordaron la prueba formal. Ambos grupos no presentan diferencia, ya que el experimental realizó prueba visual en menor medida que el de control, pero también hubo prueba formal, situación inversa al grupo de control. Hubo más IPF en el experimental que en el de control, se supone porque el experimental está más entrenado en estas cuestiones y trata de llevarlas a cabo, aunque no siempre logre llegar a un arribo exitoso. Cabe destacar que estos intentos son solo a nivel de prueba analítica pero no visual. La ausencia de justificación en PFC sigue siendo notable en ambos grupos y en todos los años, como asimismo el cierre de conclusión. La identificación de hipótesis y tesis en este ejercicio es de la casi totalidad de los que realizaron PFC; PV e IPF en ambos grupos y todos los años. Cabe destacar que las hipótesis y la tesis en este ejercicio están claramente evidenciadas, a diferencia del Ejercicio 2 RDAD, y de forma análoga a los Ejercicios 1 y 3 RDAD.

V.6. Datos correspondientes al Ejercicio 1 RDAI

Para este ejercicio se mantuvieron las mismas categorías emergentes que para el **Ejercicio 3 RDAD**. En este ejercicio, las producciones de los estudiantes mostraron que las pruebas o se consumaron por completo: PC, o hubo intentos de prueba: IPF.

V.6.1. Tabla de frecuencias correspondiente al Ejercicio 1 RDAI

AÑO	**2013**		**2014**		**2015**		**2016**		**2017**	
GRUPO	**GE**	**GC**	**GE**	**GC**	**GE**	**GC**	**GE**	**GC**	**GE**	**GC**
EI	**2**	**7**	**2**	**8**	**3**	**9**	**2**	**8**	**1**	**7**
PC	**16**	**5**	**14**	**3**	**14**	**4**	**16**	**3**	**15**	**3**
PC.c/s.just.*	**2/14**	**1/4**	**1/13**	**0/3**	**0/14**	**0/4**	**1/15**	**0/3**	**0/15**	**0/3**
IPF	**1**	**7**	**3**	**6**	**3**	**4**	**2**	**6**	**3**	**6**
AT	**1**	**1**	**1**	**3**	**0**	**3**	**0**	**3**	**1**	**4**
IHT	**17**	**12**	**17**	**9**	**17**	**8**	**18**	**9**	**19**	**9**

Tabla 5 de frecuencias correspondientes al Ejercicio 1 RDAI

V.6.2. Test de hipótesis correspondiente al Ejercicio 1 RDAI

Se detallan a continuación los gráficos con los datos asociados a las pruebas de hipótesis del Ejercicio 1 RDAI.

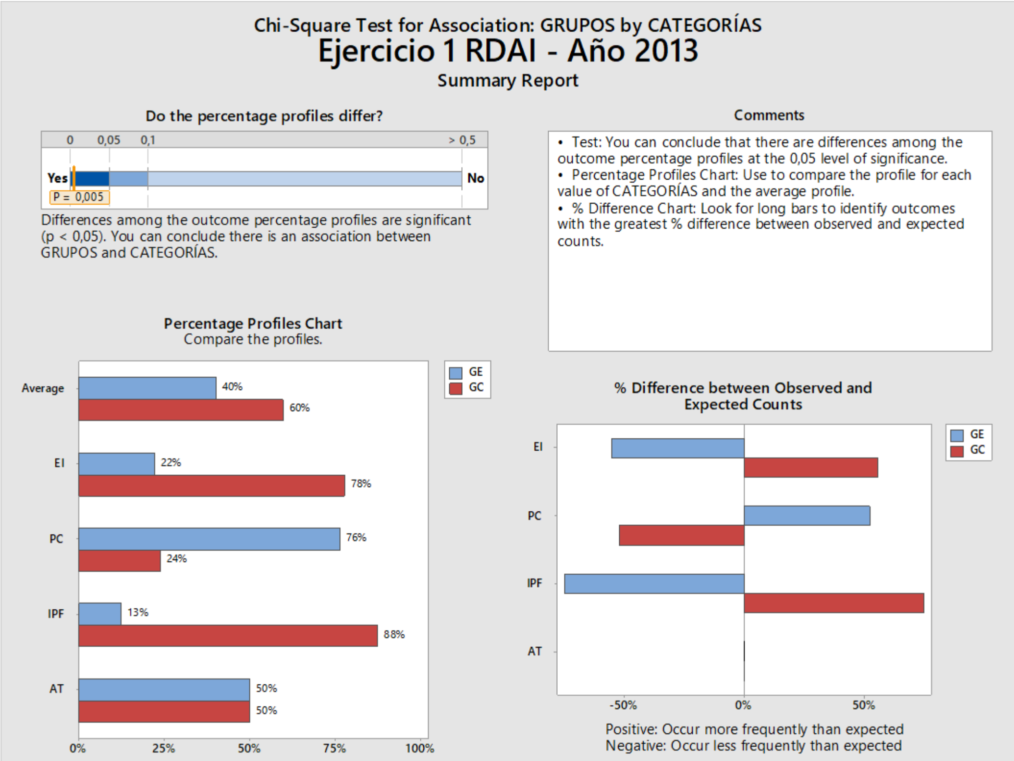


Figura 37: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 1 RDAI Año 2013

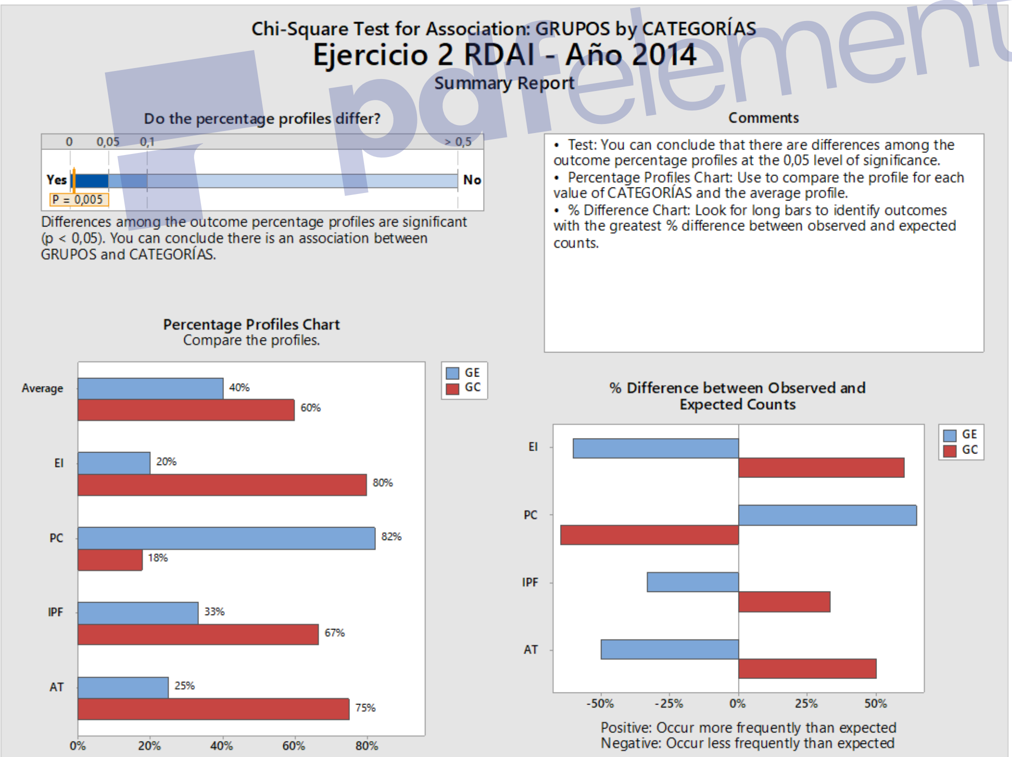


Figura 38: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 1 RDAI Año 2014

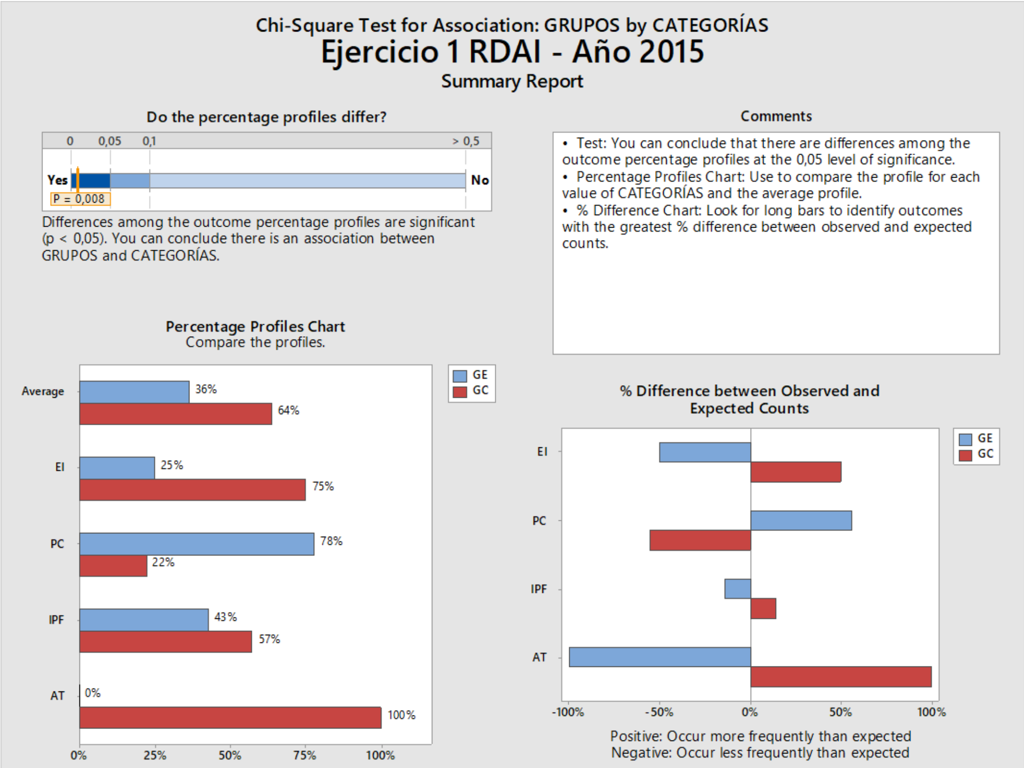


Figura 39: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 1 RDAI Año 2015

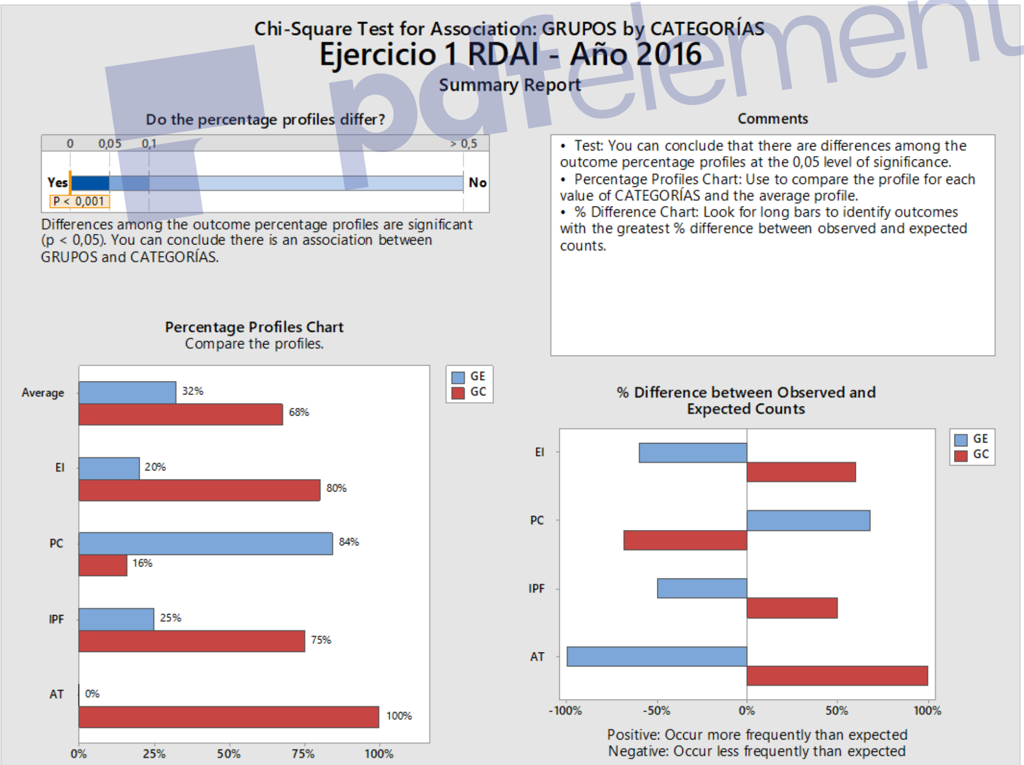


Figura 40: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 1 RDAI Año 2016

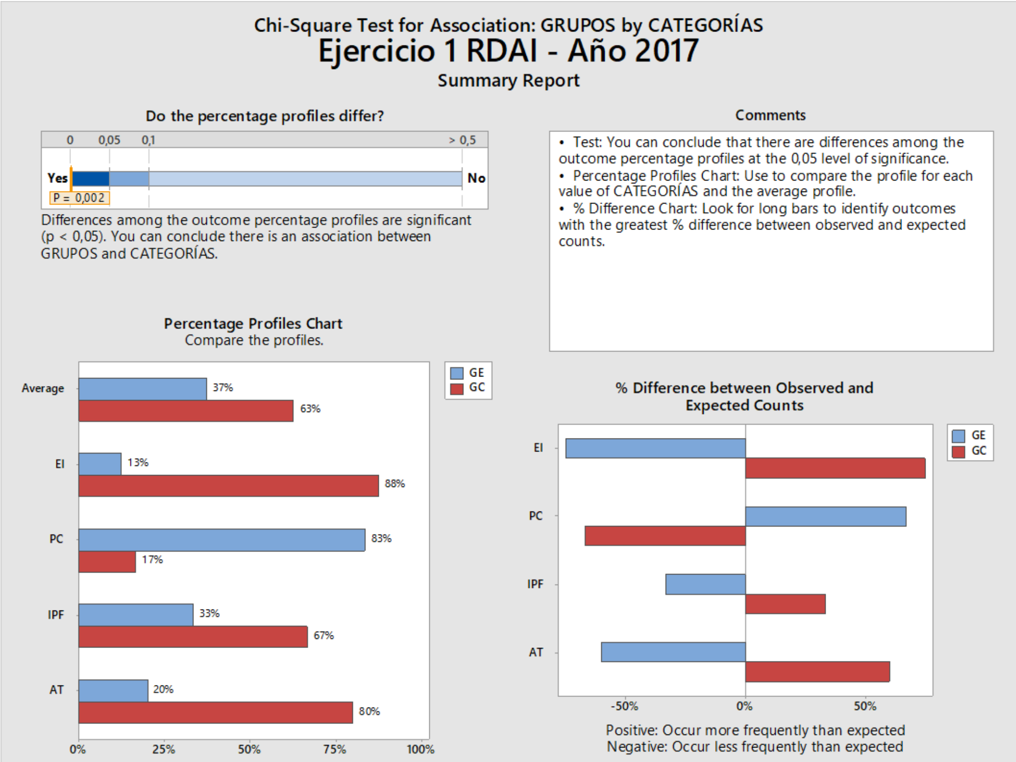


Figura 41: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 1 RDAI Año 2017

V.6.3. Análisis de Datos correspondientes al Ejercicio 1 RDAI

Se formulan a continuación las hipótesis nula y alternativa, respectivamente, a los efectos de poder extraer una conclusión de las precedentes pruebas de hipótesis. Hipótesis nula: La formación recibida y el paradigma de enseñanza y aprendizaje experimentado por dos grupos de estudiantes diferentes reacciona de igual forma frente a la propuesta de una prueba matemática que requiere un razonamiento deductivo por argumentación indirecta. Hipótesis alternativa: La formación recibida y el paradigma de enseñanza y aprendizaje experimentado por dos grupos de estudiantes diferentes reacciona de forma distinta frente a la propuesta de una prueba matemática que requiere un razonamiento deductivo por argumentación indirecta. Las pruebas de hipótesis realizadas sobre este ejercicio permiten observar que, a lo largo de los cinco años, rechazan la hipótesis nula, evidenciando una clara diferencia en los grupos, esa diferencia se manifiesta claramente en dos datos relevantes como la realización de la prueba formal planteada por la consigna del ejercicio versus la verificación como prueba.En el grupo experimental, en todos los años, sus integrantes no se limitaron al empirismo ingenuo, sino que abordaron la prueba formal, ya sea total o parcialmente en un número importante frente al grupo de control, que reaccionó realizando verificaciones aleatorias (leáse EI) en un número también importante. Es de destacar que si se observa la tabla 5 de frecuencias, en ambos grupos, la identificación de la hipótesis y la tesis es la sumatoria de las frecuencias de los resultados obtenidos en estudiantes que consumaron la prueba más los que realizaron un intento fallido. Esta identificación fue realizada aproximadamente por la casi totalidad de estudiantes en cada grupo, de forma similar cada año. Debe observarse también que AT: ausencia de trabajo fue mínima en ambos grupos, siendo mayor la frecuencia en el grupo de control, pero asimismo en un número pequeño. Hubo mucho intento de prueba fallida en el grupo de control. Ocurrió algo similar al Ejercicio 1 RDAD. El estudiante perteneciente a GC obtuvo mayores frecuencias en EI y AT. El proceso de justificación por parte de los que realizaron la prueba en ambos grupos es muy notorio en este ejercicio. La única justificación requerida era explicar en cierto momento de la argumentación era que, si un número es par, lo es también su cuadrado. La categoría SC/CC no hace su aparición ya que el estudiante que alcanzó la meta, no la reafirma, llega a la meta y punto.

V.7. Datos correspondientes al Ejercicio 2 RDAI

Para este ejercicio se mantuvieron las mismas categorías emergentes que para el **Ejercicio 1 RDAD**. En este ejercicio, las producciones de los estudiantes mostraron que las pruebas o se consumaron por completo: PC, o hubo intentos de prueba: IPF.

V.7.1. Tabla de frecuencias correspondiente al Ejercicio 2 RDAI

AÑO	**2013**		**2014**		**2015**		**2016**		**2017**	
GRUPO	**GE**	**GC**	**GE**	**GC**	**GE**	**GC**	**GE**	**GC**	**GE**	**GC**
EI	**1**	**7**	**2**	**8**	**3**	**7**	**2**	**7**	**1**	**7**
PC	**15**	**7**	**13**	**4**	**16**	**5**	**17**	**6**	**15**	**4**
PFC.c/s.just.*	**1/14**	**0/7**	**1/12**	**0/4**	**1/15**	**1/4**	**1/16**	**1/6**	**2/13**	**1/3**
IPF	**2**	**5**	**3**	**5**	**1**	**5**	**1**	**5**	**3**	**6**
AT	**2**	**1**	**2**	**3**	**0**	**3**	**1**	**2**	**1**	**3**
IHT	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**

Tabla 6 de frecuencias correspondientes al Ejercicio 2 RDAI

V.7.2. Test de hipótesis correspondientes al Ejercicio 2 RDAI

Se detallan a continuación gráficos con datos asociados a las pruebas de hipótesis.

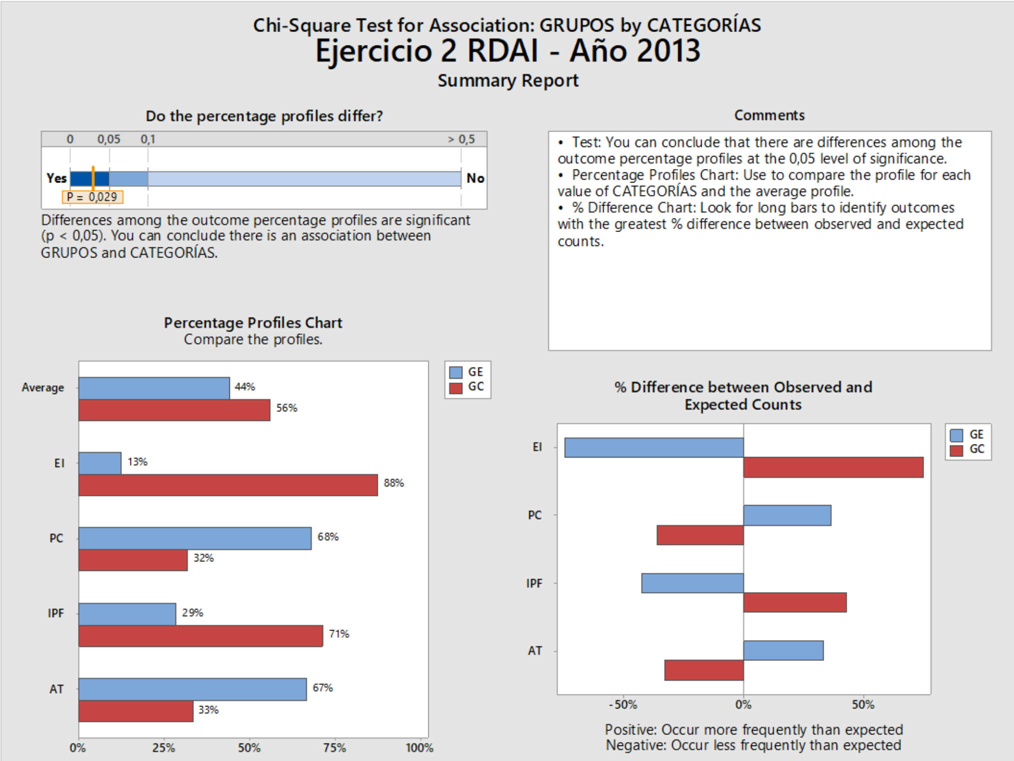


Figura 42: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 2 RDAI Año 2013

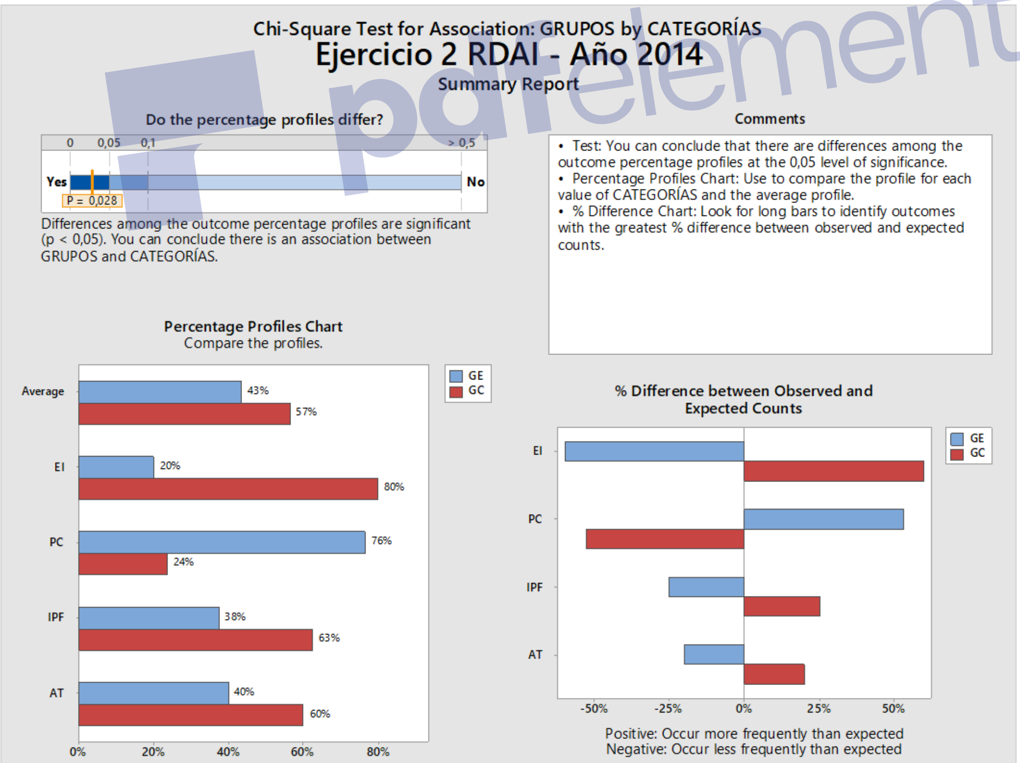


Figura 43: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 2 RDAI Año 2014

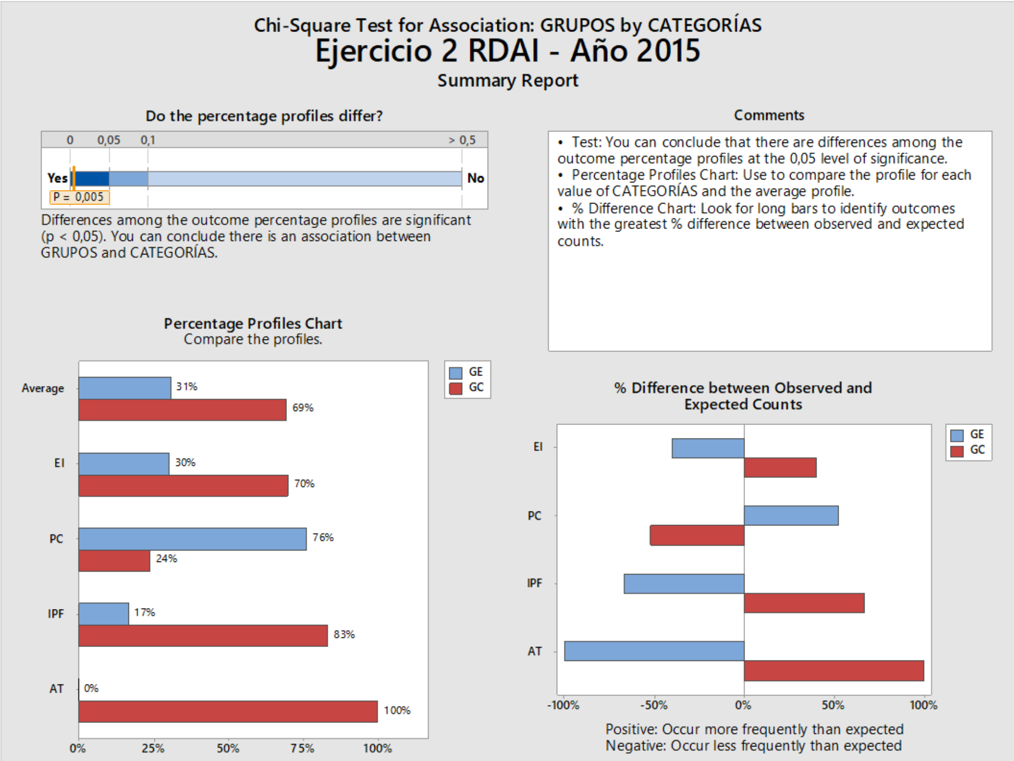


Figura 44: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 2 RDAI Año 2015

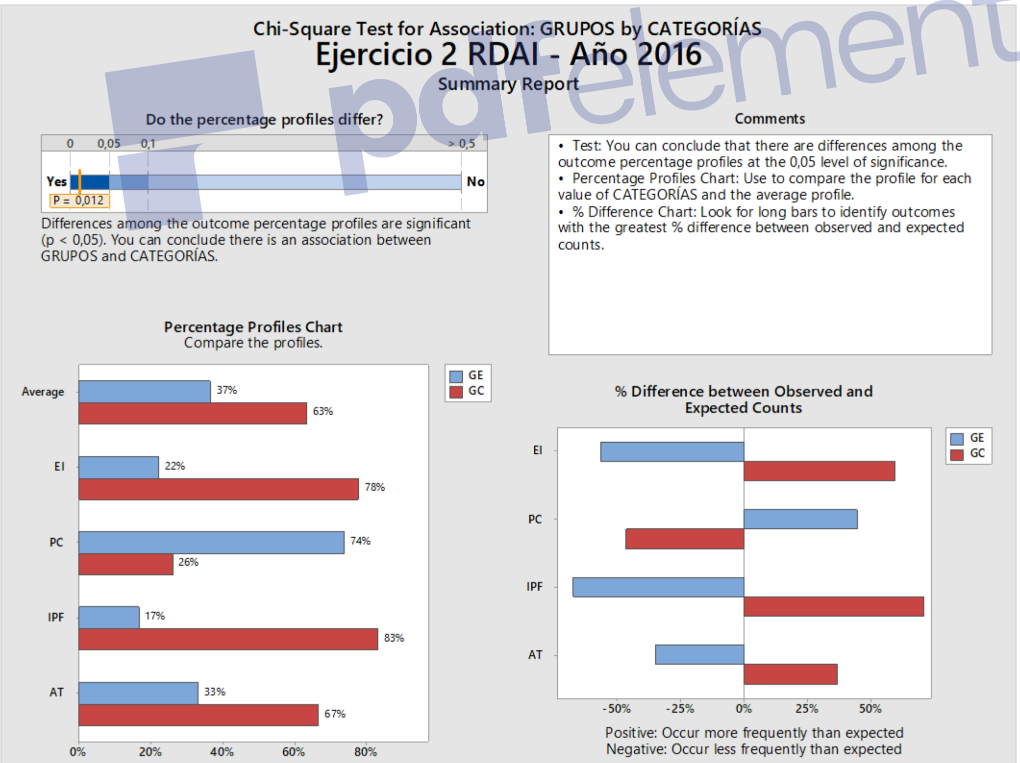


Figura 45: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 2 RDAI Año 2016

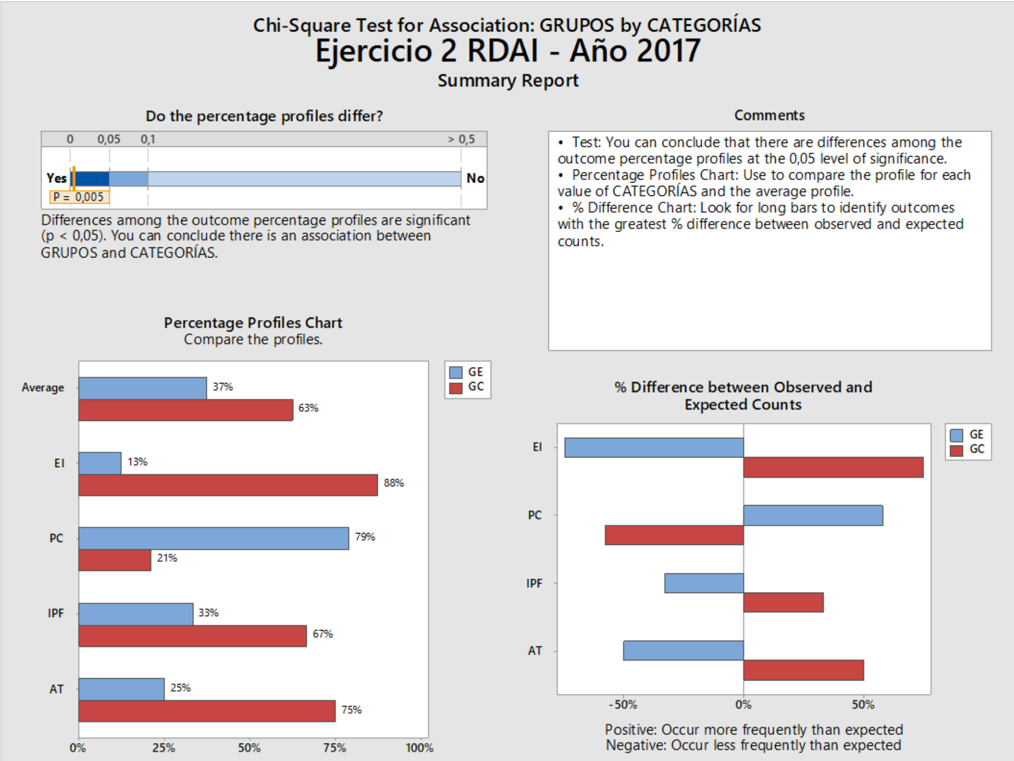


Figura 46: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 2 RDAI Año 2017

V.7.3. Análisis de Datos correspondientes al Ejercicio 2 RDAI

Se formulan a continuación las hipótesis nula y alternativa, respectivamente, a los efectos de poder extraer una conclusión de las precedentes pruebas de hipótesis. Hipótesis nula: La formación recibida y el paradigma de enseñanza y aprendizaje experimentado por dos grupos de estudiantes diferentes reacciona de igual forma frente a la propuesta de una prueba matemática que requiere un razonamiento deductivo por argumentación indirecta. Hipótesis alternativa: La formación recibida y el paradigma de enseñanza y aprendizaje experimentado por dos grupos de estudiantes diferentes reacciona de forma distinta frente a la propuesta de una prueba matemática que requiere un razonamiento deductivo por argumentación indirecta. Las pruebas de hipótesis realizadas sobre este ejercicio permiten observar que, a lo largo de los cinco años, rechazan la hipótesis nula, evidenciando una clara diferencia en los grupos, esa diferencia se manifiesta claramente en dos datos relevantes como la realización de la prueba formal planteada por la consigna del ejercicio versus la verificación como prueba. Son válidos los mismos comentarios que para el Ejercicio 1 RDAI realizados en 5.6.3. Asimismo, vale destacar que la justificación en este caso se requería en dos ocasiones, y se trata de la propiedad cancelativa para la adición y multiplicación. Es muy notable como en el ejercicio antes citado, la ausencia de esta acción en ambos grupos. Con respecto a IHT también es muy notable la ausencia de identificación por parte de ambos grupos. Esto puede deberse a que la proposición no tiene una estructura tradicional de implicación, por lo que la hipótesis y la tesis quedan muy difusas, específicamente la primera. La categoría SC/CC no hace su aparición en ninguno de las producciones presentadas por los estudiantes. El estudiante que alcanza la meta, no la reafirma, reformulando el enunciado que se quería probar.

V.8. Datos correspondientes al Ejercicio 3 RDAI

V.8.1. Tabla de frecuencias correspondiente al Ejercicio 3 RDAI

A continuación, se detalla la tabla de frecuencias correspondiente al **Ejercicio 3 RDAI** para los cinco años de trabajo. Surge una nueva categoría emergente que es EIF: Empirismo ingenuo fallido y otra que ha aparecido en ejercicios anteriores denominada PCP: Prueba consumada parcialmente, cuyo detalle se explicita en 5.8.3.

AÑO	**2013**		**2014**		**2015**		**2016**		**2017**	
GRUPO	**GE**	**GC**	**GE**	**GC**	**GE**	**GC**	**GE**	**GC**	**GE**	**GC**
EIF	**2**	**6**	**1**	**7**	**1**	**6**	**2**	**5**	**1**	**6**
PC	**7**	**3**	**7**	**4**	**8**	**4**	**7**	**4**	**7**	**4**
PCP	**9**	**3**	**10**	**3**	**9**	**3**	**9**	**2**	**9**	**2**
PFC.c/s.just.*	**2/14**	**0/6**	**2/15**	**1/6**	**1/16**	**0/7**	**3/13**	**1/5**	**1/15**	**0/6**
IPF	**1**	**5**	**1**	**4**	**1**	**5**	**1**	**6**	**2**	**5**
AT	**1**	**3**	**1**	**2**	**1**	**2**	**1**	**3**	**1**	**3**
IHT	**17**	**11**	**17**	**10**	**18**	**12**	**17**	**11**	**17**	**10**

Tabla 7 de frecuencias correspondientes al Ejercicio 3 RDAI

V.8.2. Test de hipótesis correspondiente al Ejercicio 3 RDAI

Se detallan a continuación los gráficos con los datos asociados a las pruebas de hipótesis correspondientes al Ejercicio 3 RDAI.

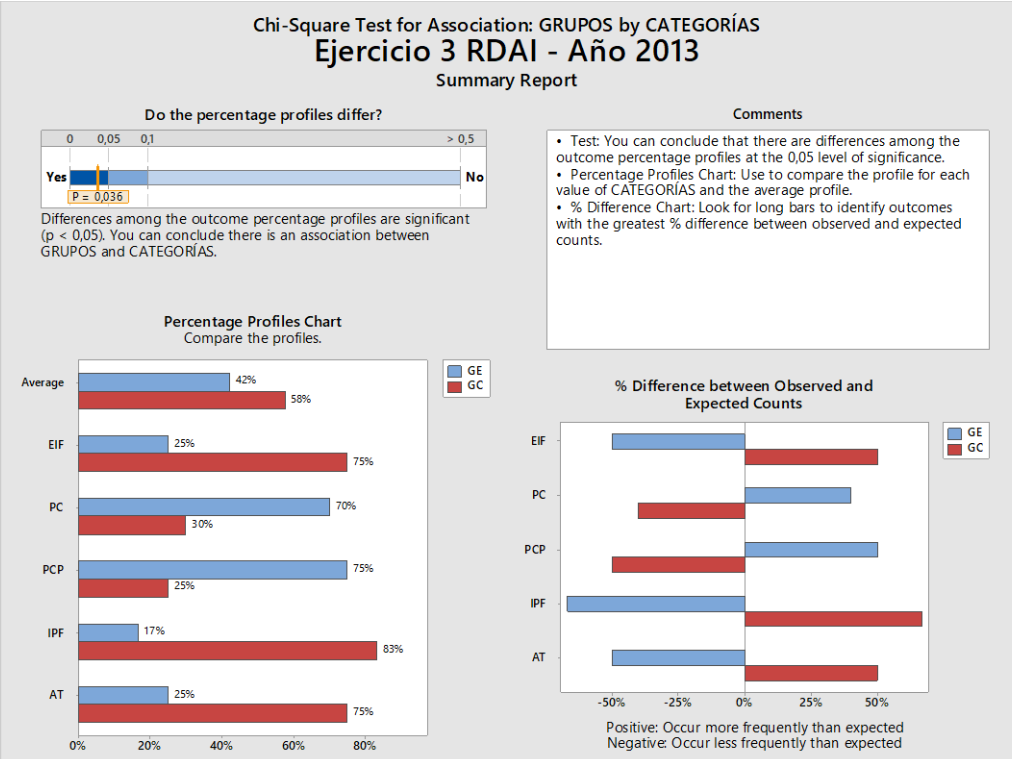


Figura 47: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 3 RDAI Año 2013

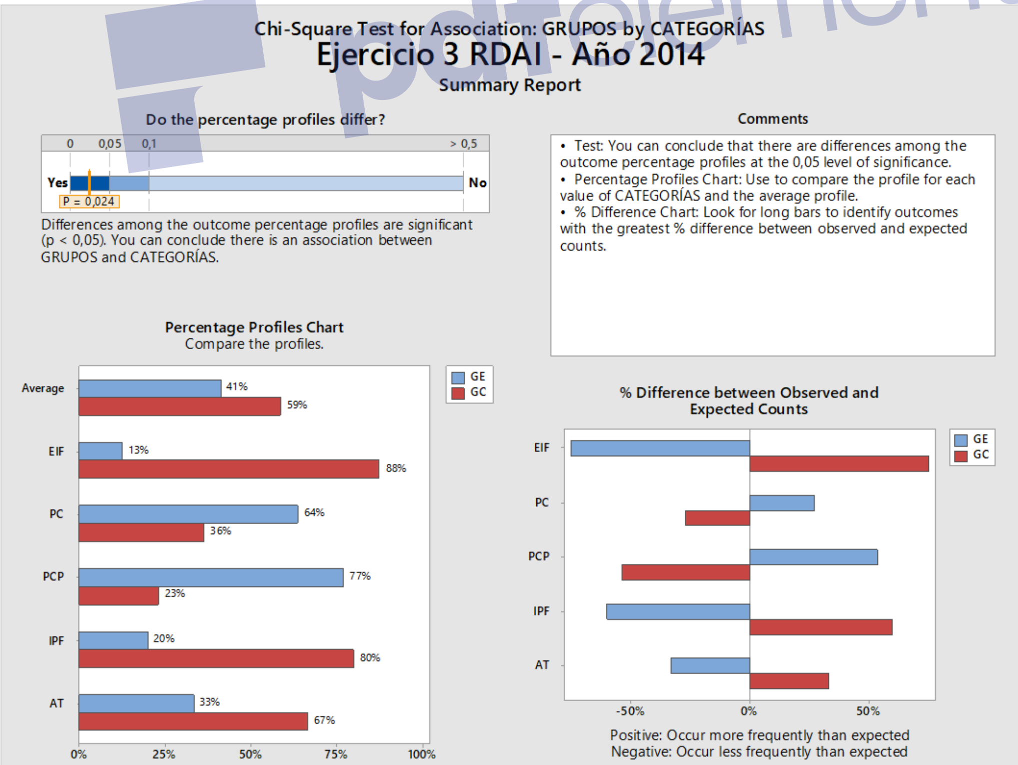


Figura 48: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 3 RDAI Año 2014

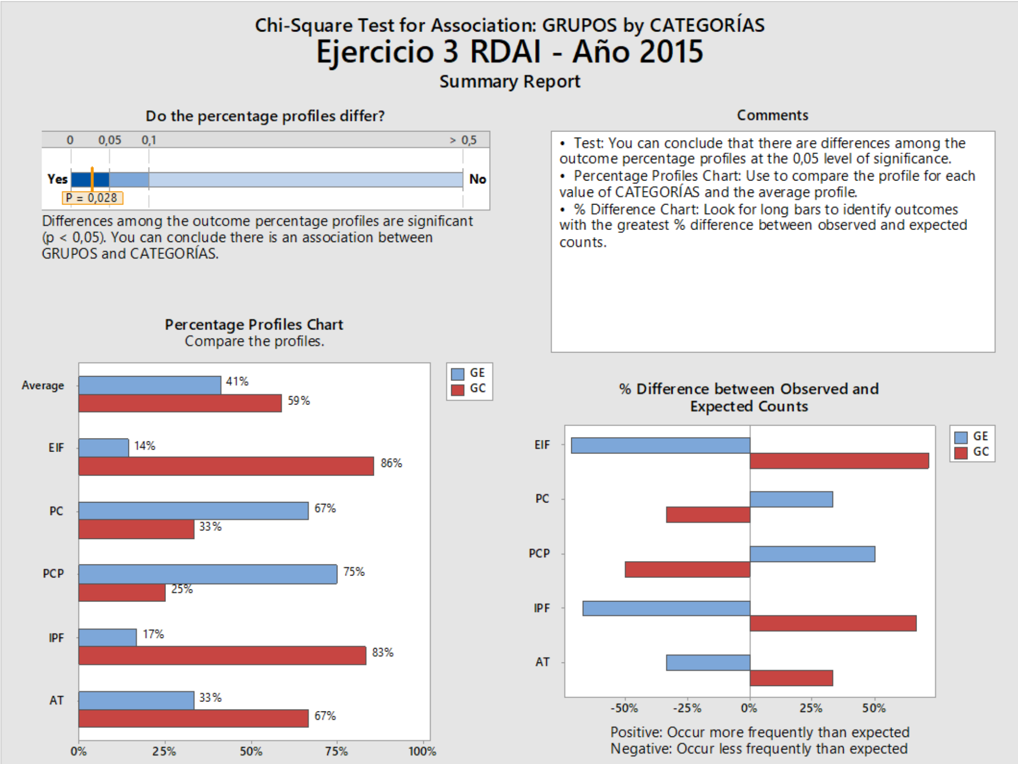
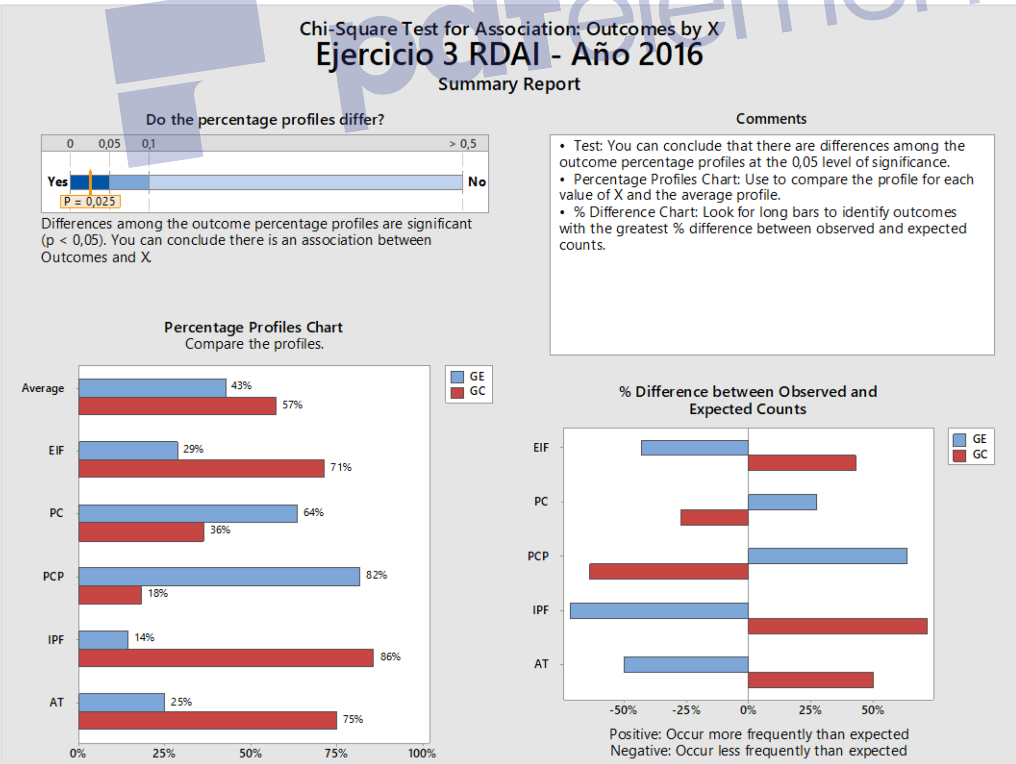
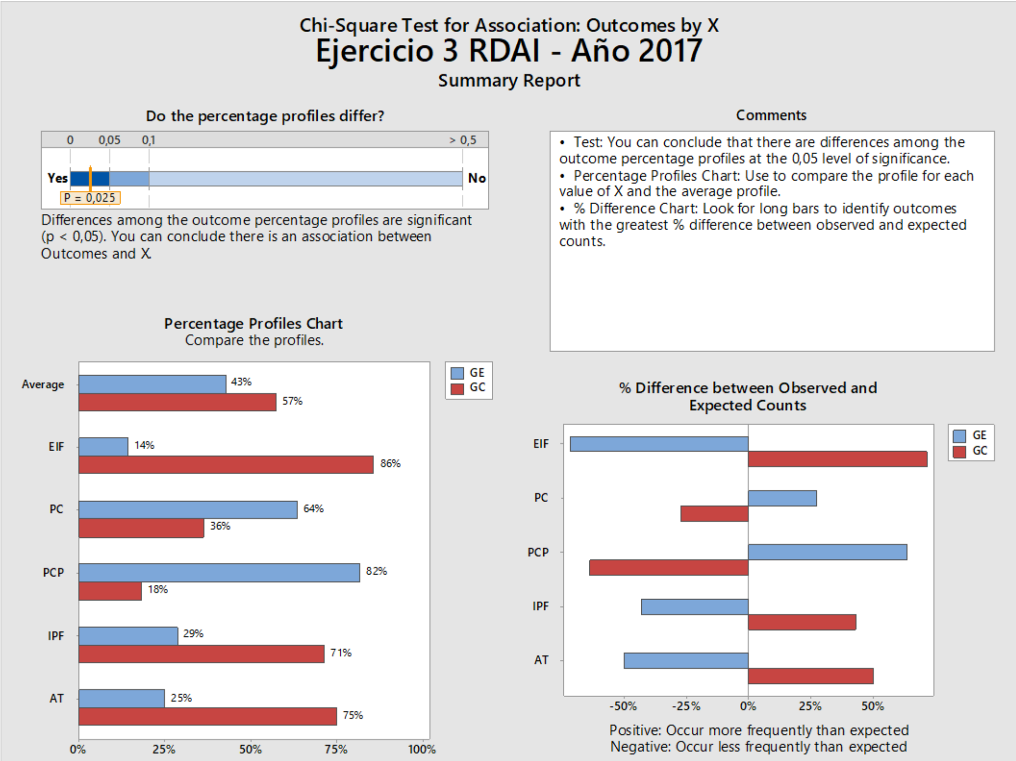


Figura 49: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 3 RDAI Año 2015



X: categorías

Figura 50: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 3 RDAI Año 2016



X: categorías

Figura 51: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 3 RDAI Año 2017

V.8.3. Análisis de Datos correspondientes al Ejercicio 3 RDAI

Se formulan a continuación las hipótesis nula y alternativa, respectivamente, a los efectos de poder extraer una conclusión de las precedentes pruebas de hipótesis. Hipótesis nula: La formación recibida y el paradigma de enseñanza y aprendizaje experimentado por dos grupos de estudiantes diferentes reacciona de igual forma frente a la propuesta de una prueba matemática que requiere un razonamiento deductivo por argumentación indirecta. Hipótesis alternativa: La formación recibida y el paradigma de enseñanza y aprendizaje experimentado por dos grupos de estudiantes diferentes reacciona de forma distinta frente a la propuesta de una prueba matemática que requiere un razonamiento deductivo por argumentación indirecta. Las pruebas de hipótesis realizadas sobre este ejercicio permiten observar que, a lo largo de los cinco años, rechazan la hipótesis nula, evidenciando una clara diferencia en los grupos, esa diferencia se manifiesta claramente en dos datos relevantes como la realización de la prueba formal planteada por la consigna del ejercicio versus la verificación como prueba. Aquí hay que destacar y analizar varias cuestiones. Por un lado, la aparición de la categoría emergente EIF. En esta categoría se encuadran los estudiantes que utilizaron la verificación como prueba pero que no pudieron llevarla a cabo como tal. Ocurre que, en este caso particular, y a diferencia de otras proposiciones, la dificultad para realizar la verificación es representativa, ya que por un lado existe una dificultad en el conocimiento epistemológico del funcionamiento del bicondicional. Esto inclusive debe tenerse en cuenta para el GE que, si bien ha sido instruido en estas cuestiones, no poseen demasiada experiencia y el estudiante tiende a reincidir en sus concepciones cuando no tiene solidez de un cierto contenido, es decir, predomina lo que Perkins (1995), denomina conocimiento ingenuo. Otro hecho, es que, si tuvieron presente que no debía operarse así, el estudiante lo hace como 'escape' para lograr el objetivo, de alguna forma. Volviendo específicamente al problema de la verificación en este ejercicio, debe considerarse que verificar una proposición expresada como bicondicional requiere que se exhiba un ejemplo que satisfaga al mismo tiempo antecedente y consecuente. Por otro lado, y de acuerdo a lo expuesto en el Capítulo III, párrafo III.10. en general al estudiante no le es simple, ni 'empático', ni usual la comprobación de que una función es diferenciable en un punto o en un conjunto, proceso contrario a la verificación de si una función es derivable en un punto o en un conjunto. Esta última acción es la que abordaron los que utilizaron la verificación como prueba, categoría encuadrada como EIF en este caso particular. Se pueden suponer dos cosas, una es el desconocimiento epistemológico del funcionamiento del bicondicional, ya descripto. Si se observan las estadísticas, en el grupo GC es donde más se da la frecuencia de esta categoría mientras que en el grupo GE es ínfima la frecuencia. La otra suposición, también ya abordada en la descripción precedente es la falta de solidez, y como consecuencia 'ausencia de empatía' con el concepto de diferenciabilidad. En general, el estudiante de los cursos de Cálculo para Ciencias e Ingeniería, limita todo a la derivabilidad, especialmente 'cuando lo llevan a descubrir' o 'le descubren' que derivabilidad y diferenciabilidad son dos relaciones equivalentes, en una variable, por supuesto. Si bien aquí, el estudiante debía probar precisamente esta equivalencia, el estudiante momentáneamente lo olvida y usualmente puede llegar a asumir la equivalencia explicitada como verdadera, olvidando el objetivo, y limitarse a verificar la derivabilidad de la función. Por ende, el proceso de verificación asumido como prueba ha sido erróneo por todos los estudiantes que lo abordaron, porque lo que hicieron fue 'chequear' que la función propuesta resulta derivable y consideraron que esto era suficiente para verificar la equivalencia entre derivabilidad y diferenciabilidad, por esta razón esencialmente, se reitera la necesidad de la incorporación de esta categoría: EIF.

La otra categoría emergente es PCP y se manifestó porque hubo estudiantes que realizaron la prueba de forma parcial. Esto quiere decir, que cuando el estudiante negó el consecuente, formuló que la función no es derivable, por ende, al no existir derivada, directamente concluyó que la función no es diferenciable. Es decir, que el estudiante no analizó la diferenciabilidad de la misma, examinando la definición con el hecho de la no existencia de la derivada y pasó directamente a la conclusión. El hecho acá no radica en un problema específico de argumentación, ya que la lleva a cabo parcialmente, sino que se interfiere una específica cuestión conceptual del Cálculo. La prueba puede observarse en el marco metodológico en IV.3.3. pág. 106. y claramente puede observarse cuál es la omisión a la que se hace referencia, líneas atrás. Hay un número importante todos los años de EIF, especialmente en el GC y también un número importante de PCP, especialmente en el GE. La justificación, como en todos los ejercicios anteriores ha estado ausente mayoritariamente. La categoría IHT de la misma forma que en el ejercicio anterior, fue notable la no identificación también en este ejercicio, por las razones explicadas en su momento, mientras que en este ejercicio donde la estructura es tradicional, fue casi total por parte de ambos grupos, la detección de hipótesis y tesis. La proposición tiene una estructura lógica 'tradicional', pero el estudiante cuando ve una implicación puede detectar fácilmente la hipótesis y la tesis, pero frente a una doble implicación, el estudiante tiende a confundir al punto de partida y punto de llegada. Por ende, en este ejercicio, mayoritariamente los estudiantes no respondieron y cuando lo hicieron, lo hicieron erróneamente, manifestando, por ejemplo, que hipótesis y tesis en esta proposición son lo mismo. Esto último, no es erróneo, pero tampoco es adecuado. Son dos condiciones en las que cada una retroalimenta a la otra y viceversa, y que se imponen entre sí, siendo la diferenciabilidad una condición necesaria y suficiente para la derivabilidad, de acuerdo a lo establecido y enunciado en el marco teórico por Ibañez & Ortega (2004) cuando hacen referencia al parateorema de enunciados. Esto no es algo muy conocido por el estudiante ingresante a la universidad en la actualidad, inclusive para los integrantes del GE, que si bien han sido instruidos en estas cuestiones no llegan a consolidar una maduración suficiente en tiempo y forma para internalizar estas estructuras conceptuales. La categoría SC/CC no hace su aparición en ninguno de las producciones presentadas por los estudiantes. El estudiante que alcanza la meta, no la reafirma, reformulando el enunciado que se quería probar.

V.9. Datos correspondientes al Ejercicio 1 RI

V.9.1. Categorías emergentes

Las nuevas categorías emergentes son las siguientes:

Gen: Generalización. En esta categoría se encuadran aquellos estudiantes que pudieron llevar a cabo la generalización requerida por la consigna del ejercicio. Esta categoría fue excluida de la prueba de hipótesis y contiene las frecuencias de los estudiantes que realizaron Gensol; PISVi; PC; PCsuH.

Gensol: Generalización solamente. En esta categoría se encuadran aquellos estudiantes que únicamente realizaron la generalización, es decir, la fase inicial de la consigna propuesta por el ejercicio.

PISVi: Prueba incompleta sin validación inicial. En esta categoría se encuadran aquellos estudiantes que pudieron llevar a cabo la prueba, pero no habiendo realizado la validación inicial, requerida a través del método de inducción matemática.

PCsuH: Prueba consumada sin uso de hipótesis. En esta categoría se encuadran aquellos estudiantes que pudieron consumar la prueba, sin justificar en cierto momento necesario, la utilización de la hipótesis para la consecución de la prueba.

V.9.2. Tabla de frecuencias correspondiente al Ejercicio 1 RI

A continuación, se detalla la tabla de frecuencias correspondiente al **Ejercicio 1RI**.

AÑO	2013		2014		2015		2016		2017	
GRUPO	GE	GC	GE	GC	GE	GC	GE	GC	GE	GC
Gen	20	19	19	19	20	19	19	20	19	20
Gensol	6	15	3	14	2	12	2	10	2	14
PC	2	0	3	0	3	0	2	0	3	0
PC.c/s.just.*	1/8	0/2	0/12	0/2	1/10	0/2	1/11	0/3	0/10	0/2
PISVi	5	1	6	1	7	1	8	1	5	1
IPF	5	2	4	3	5	5	5	7	7	4
PCsuH	2	1	3	1	1	1	2	2	2	1
AT	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0

Tabla 8 de frecuencias correspondientes al Ejercicio 1 RI

V.9.3. Test de hipótesis correspondiente al Ejercicio 1 RI

Se detallan a continuación los gráficos con los datos asociados a las pruebas de hipótesis del Ejercicio 1 RI.

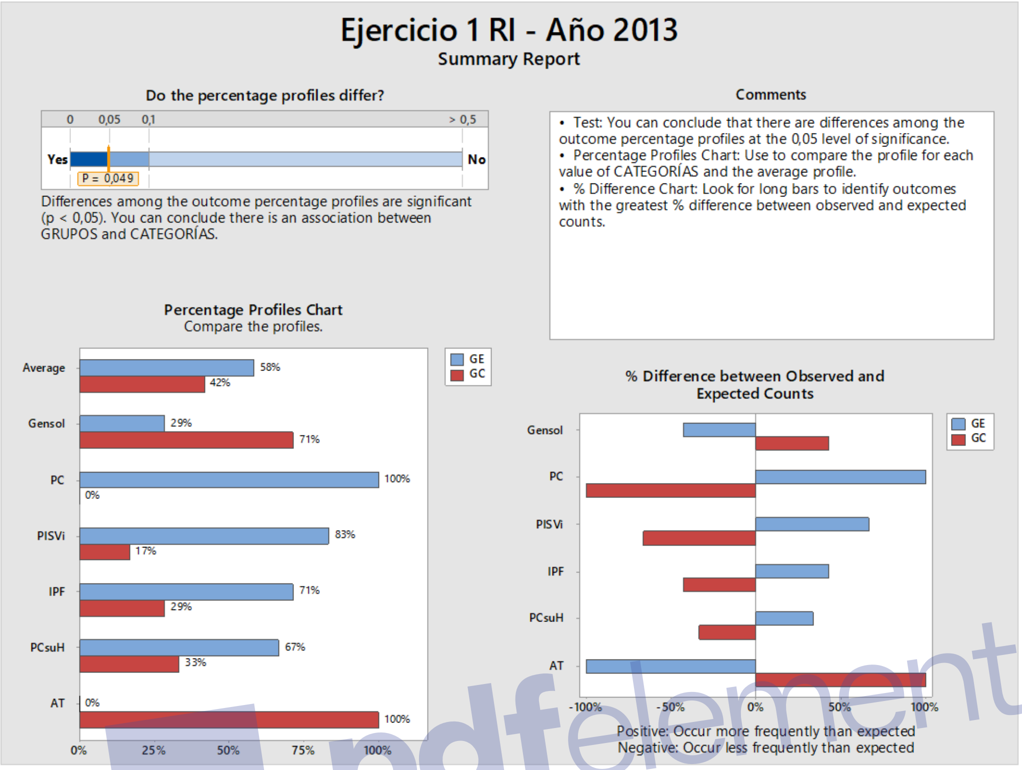


Figura 52: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 1 RI Año 2013

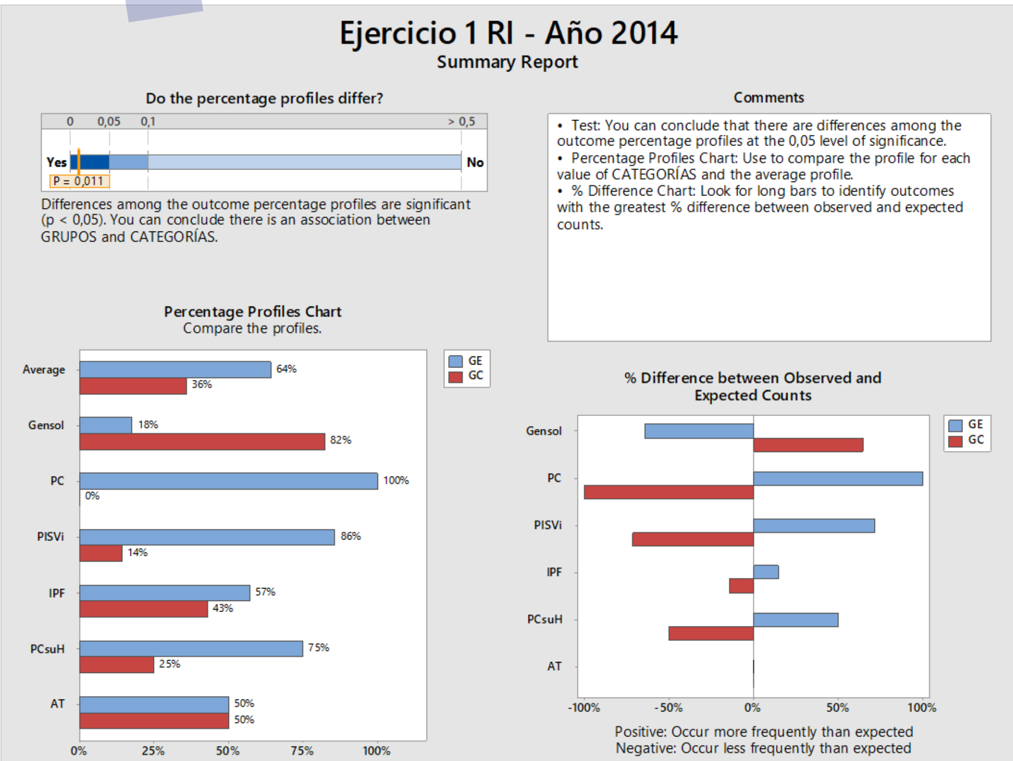


Figura 53: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 1 RI Año 2014

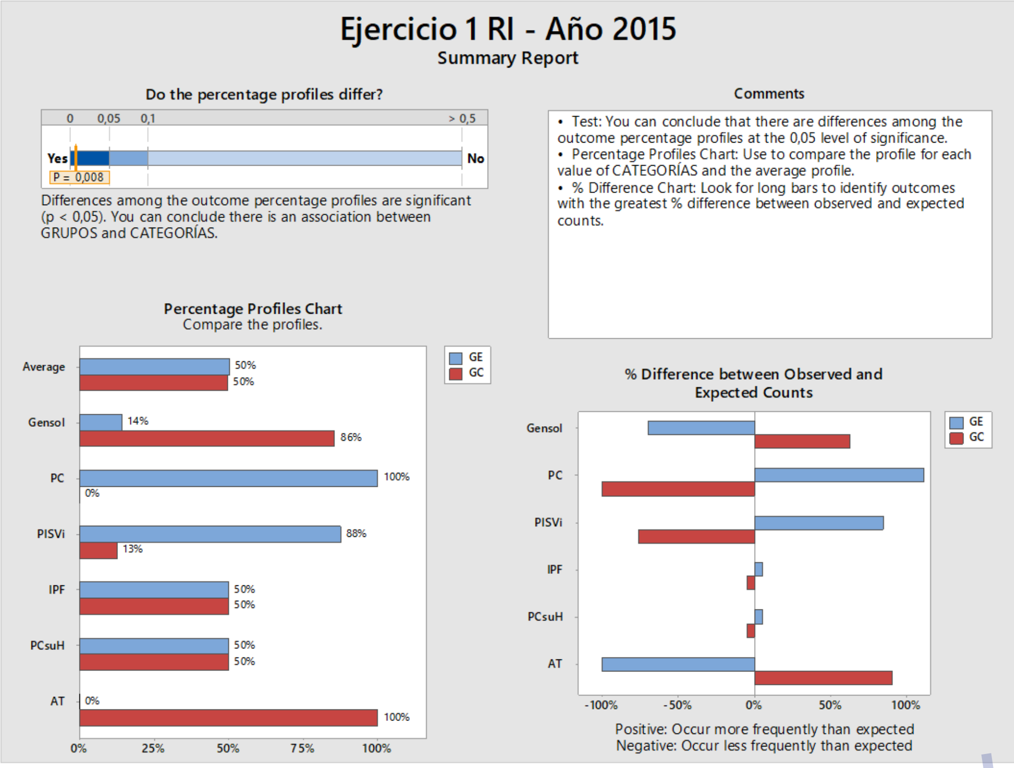


Figura 54: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 1 RI Año 2015

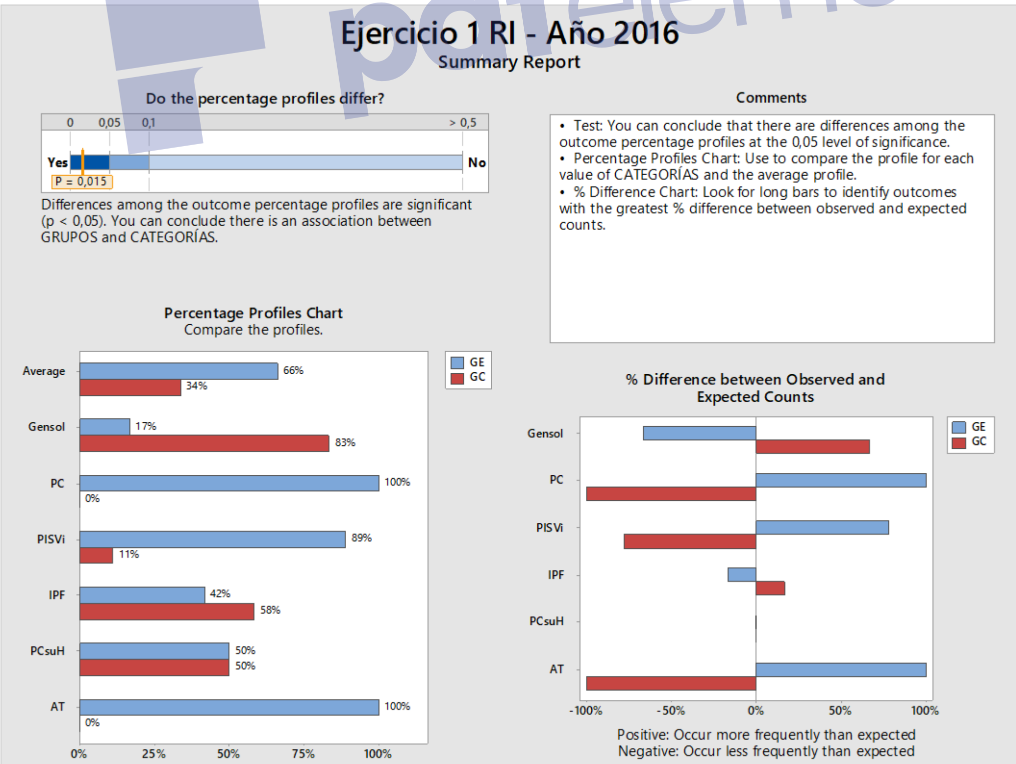


Figura 55: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 1 RI Año 2016

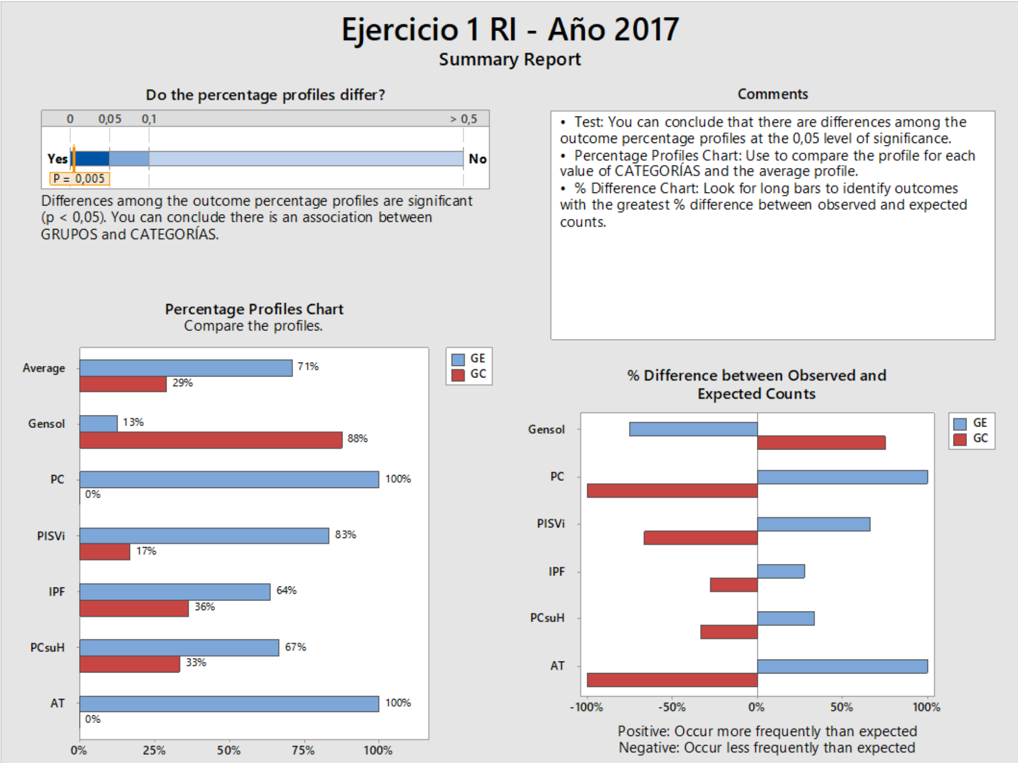


Figura 56: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 1 RI Año 2017

V.9.4. Análisis de Datos correspondientes al Ejercicio 1 RI

Se formulan a continuación, las hipótesis nula y alternativa, respectivamente, a los efectos de poder extraer una conclusión de las precedentes pruebas de hipótesis.

Hipótesis nula: La formación recibida y el paradigma de enseñanza y aprendizaje experimentado por dos grupos de estudiantes diferentes reacciona de igual forma frente a la propuesta de una prueba matemática que requiere un razonamiento inductivo.Hipótesis alternativa: La formación recibida y el paradigma de enseñanza y aprendizaje experimentado por dos grupos de estudiantes diferentes reacciona de forma distinta frente a la propuesta de una prueba matemática que requiere un razonamiento inductivo.

Las pruebas de hipótesis realizadas sobre este ejercicio permiten observar que, a lo largo de los cinco años, rechazan la hipótesis nula, evidenciando una diferencia en los grupos.

Aquí hay que destacar que a diferencia de lo ocurrido con los ejercicios 1, 2 y 3 RDAI y los ejercicios 1, 2 y 3 RDAD, la diferencia entre los grupos no es tan notoria en cuanto a la consecución de la prueba en forma total, si se observa la tabla de frecuencias como en los ejercicios mencionados. Debe observarse que en las cinco cohortes solo en GE muy pocos estudiantes pudieron consumar por completo la prueba y ninguno en el GC. En GE, la frecuencia alcanzada en PC en cada cohorte fue de aproximadamente un 50% o un porcentaje ligeramente menor y un 60% en la cohorte de 2017. La justificación como en todos los ejercicios anteriores, estuvo muy ausente, pero asimismo la justificación de la utilización de la hipótesis de inducción en el momento requerido de la prueba fue realizada por la mayoría de los estudiantes tanto por aquellos que elaboraron la prueba total o parcialmente. Debe destacarse asimismo que se evidencia que la metodología del proceso inductivo no fue claramente comprendida en virtud del número importante de la categoría emergente: PISVi.

Los estudiantes que realizaron la prueba parcial o totalmente no realizaron mayoritariamente la validación inicial, fue ignorada casi por completo, esto evidencia desconocimiento o simplemente indiferencia frente a este hecho, esa indiferencia puede ser el no considerarlo relevante. Deben observarse y relacionarse con estas acciones, ciertas apreciaciones realizadas por los estudiantes y que se vierten en los párrafos V.1.1. y V.1.2.

La generalización fuerealizada mayoritariamente por ambos grupos y en su casi totalidad. Existe una categoría, no incluida en la prueba de hipótesis, denominada Gen y aglutina la totalidad de las frecuencias de los estudiantes que realizaron la generalización. Se puede observar en el análisis de datos de este ejercicio que hubo muy poca ausencia de trabajo, ya que, si bien hubo muy poca consecución de la prueba por parte de GC y mucho menor aún en GE, prácticamente ningún estudiante dejó el trabajo 'vacío' y se enfocó a la primera instancia del ejercicio que era la generalización, la que realizó adecuadamente y en muchos casos no continuó con el proceso.

La categoría SC/CC no hace su aparición en ninguno de las producciones presentadas por los estudiantes. El estudiante que alcanza la meta, no la reafirma, reformulando el enunciado que se quería probar.

V.10. Datos correspondientes al Ejercicio 2 RI

V.10.1. Tabla de frecuencias correspondiente al Ejercicio 2 RI

Las categorías para este ejercicio son las mismas que las del Ejercicio 1 RI.

AÑO	2013		2014		2015		2016		2017	
GRUPO	GE	GC	GE	GC	GE	GC	GE	GC	GE	GC
Gen	20	19	19	19	20	19	19	20	19	20
Gensol	5	14	1	11	2	11	2	9	2	12
PC	3	0	4	1	4	0	2	0	3	0
PC.c/s.just.*	2/8	0/3	2/12	0/5	1/13	0/3	1/11	0/4	1/10	1/3
PISVi	5	2	7	2	7	2	8	2	5	2
IPF	5	2	4	3	4	5	5	7	6	4
PCsuH	2	1	3	2	3	1	2	2	3	2
AT	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0

Tabla 9 de frecuencias correspondientes al Ejercicio 2 RI

V.10.2. Test de hipótesis correspondiente al Ejercicio 2 RI

Se detallan a continuación los gráficos con los datos asociados a las pruebas de hipótesis del Ejercicio 2 RI.

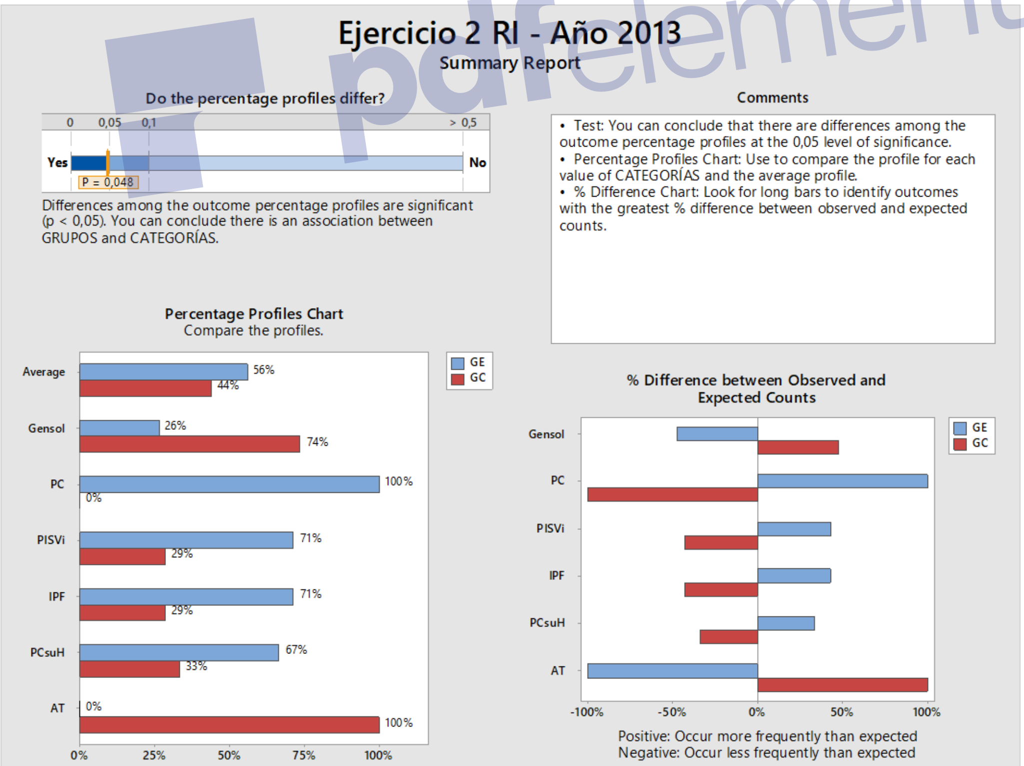


Figura 57: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 2 RI Año 2013

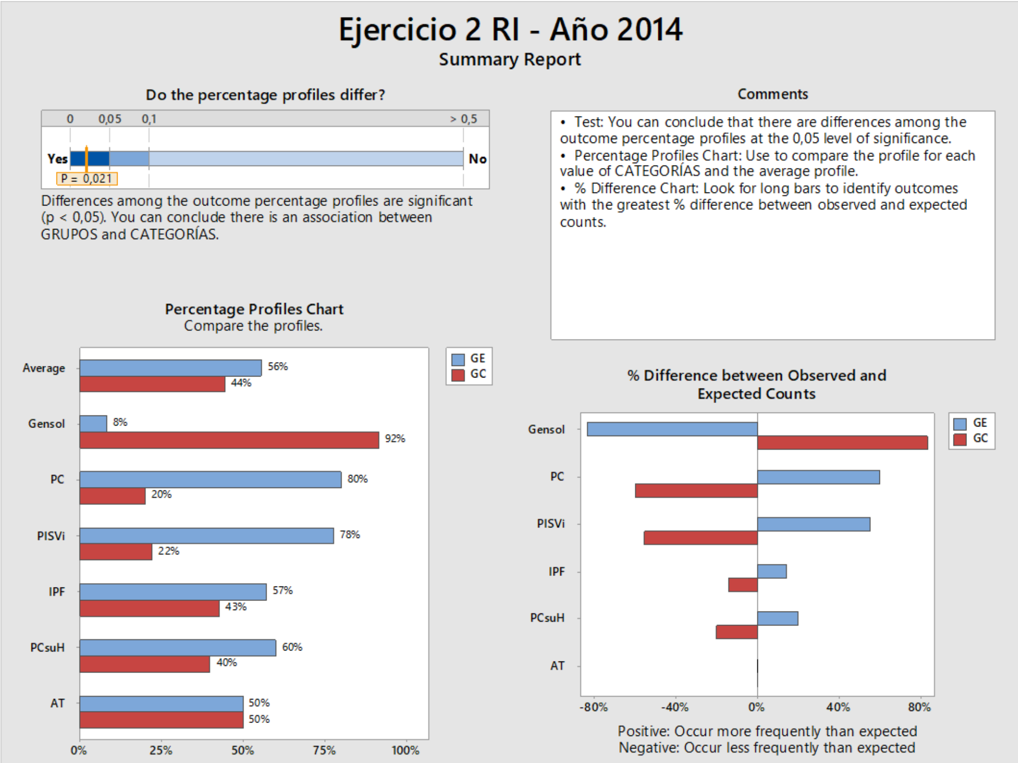


Figura 58: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 2 RI Año 2014

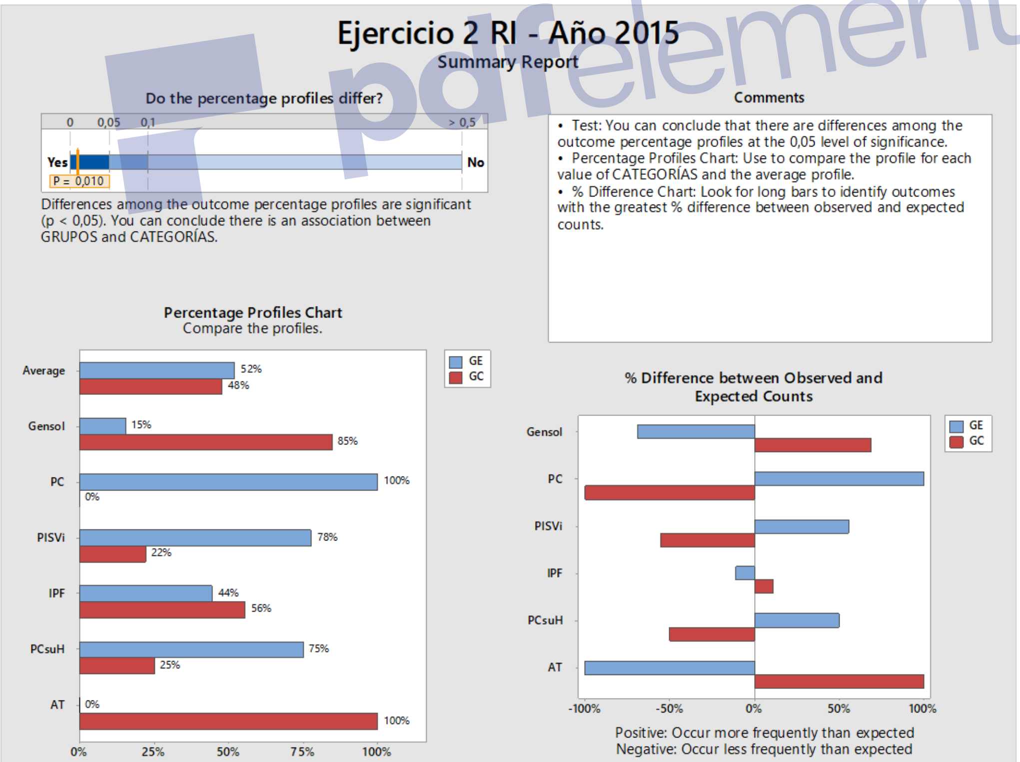


Figura 59: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 2 RI Año 2015

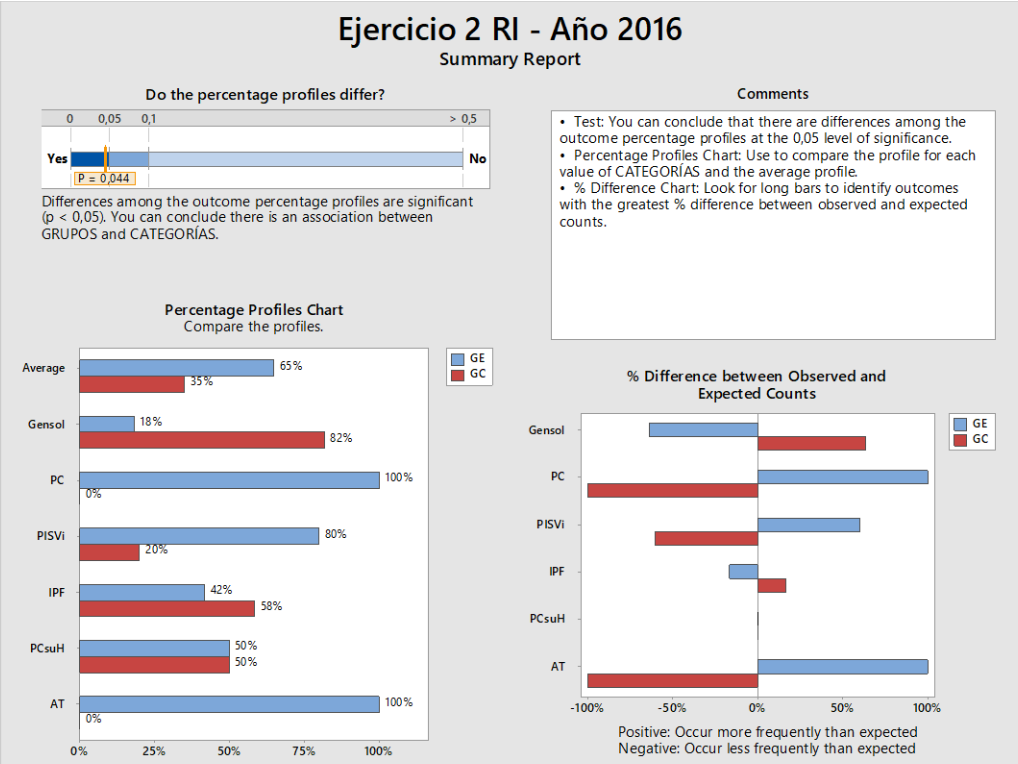


Figura 60: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 2 RI Año 2016

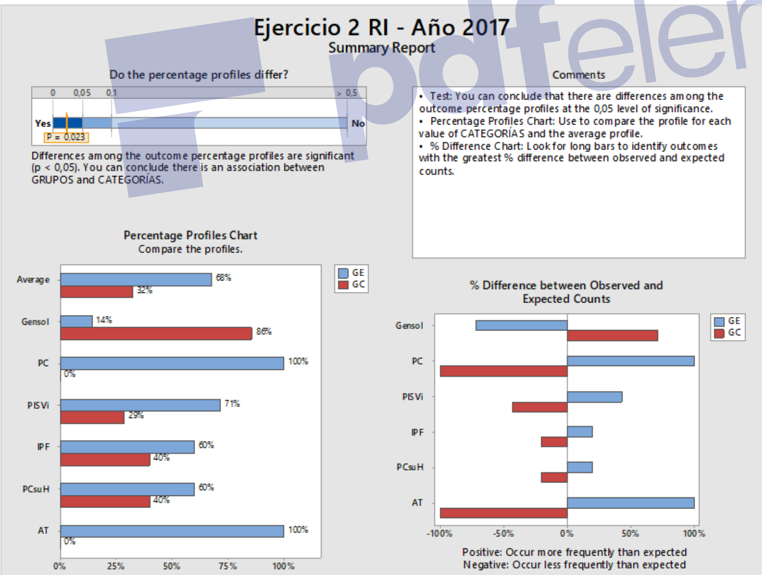


Figura 61: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 2 RI Año 2017

V.10.3. Análisis de Datos correspondientes al Ejercicio 2 RI

El análisis de datos correspondiente a este ejercicio no difiere del realizado en V.9.3.

V.11. Datos correspondientes al Ejercicio 3 RI

V.11.1. Tabla de frecuencias correspondiente al Ejercicio 3 RI

La siguiente tabla de frecuencias es idéntica a la generada para los Ejercicios 1 y 2 RI salvo las categorías Gen y Gensol, que aquí no aparecen porque no son necesarias ya que se trata solamente de un ejercicio de validación por inducción matemática.

AÑO	**2013**		**2014**		**2015**		**2016**		**2017**	
GRUPO	**GE**	**GC**	**GE**	**GC**	**GE**	**GC**	**GE**	**GC**	**GE**	**GC**
PC	**4**	**0**	**5**	**0**	**4**	**0**	**5**	**0**	**3**	**0**
PC.c/s.just.*	**1/11**	**0/4**	**2/12**	**2/2**	**3/13**	**0/3**	**1/11**	**1/3**	**3/10**	**0/4**
PISVi	**5**	**2**	**5**	**1**	**6**	**2**	**4**	**1**	**5**	**2**
IPF	**7**	**5**	**5**	**5**	**2**	**7**	**7**	**7**	**7**	**8**
PCsuH	**3**	**2**	**4**	**3**	**6**	**1**	**3**	**3**	**5**	**2**
AT	**1**	**11**	**1**	**11**	**2**	**10**	**1**	**9**	**0**	**8**

Tabla 10 de frecuencias correspondientes al Ejercicio 3 RI

V.11.2. Test de hipótesis correspondiente al Ejercicio 3 RI

Se detallan a continuación los gráficos con los datos asociados a las pruebas de hipótesis del Ejercicio 3 RI.

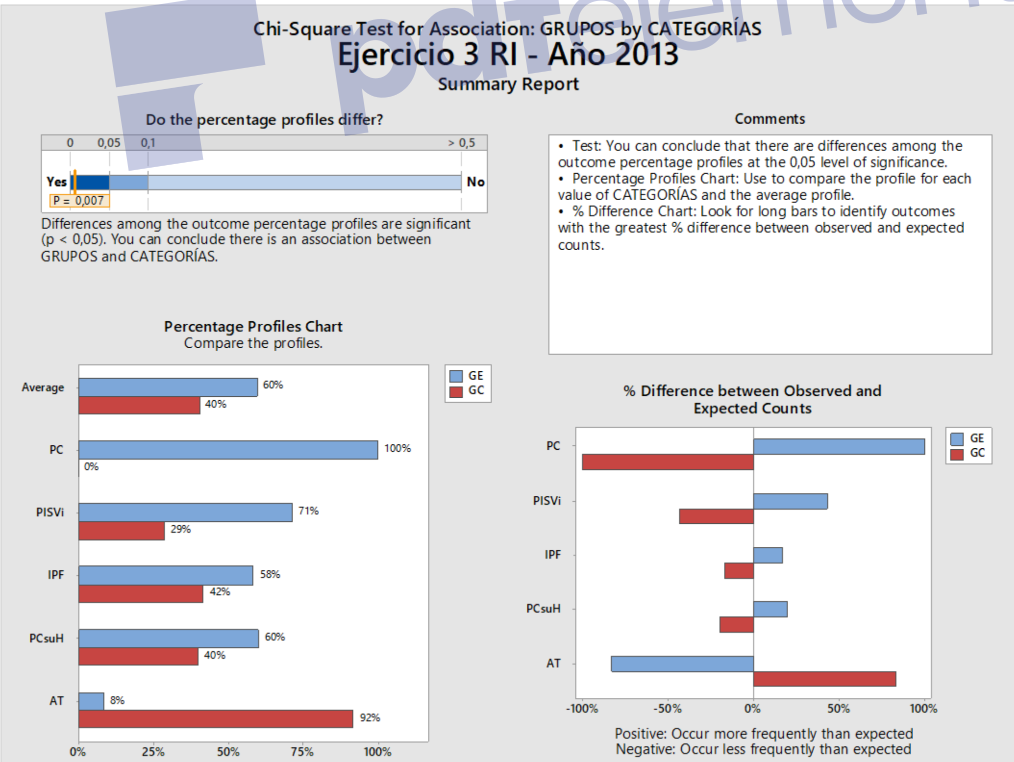


Figura 62: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 3 RI Año 2013

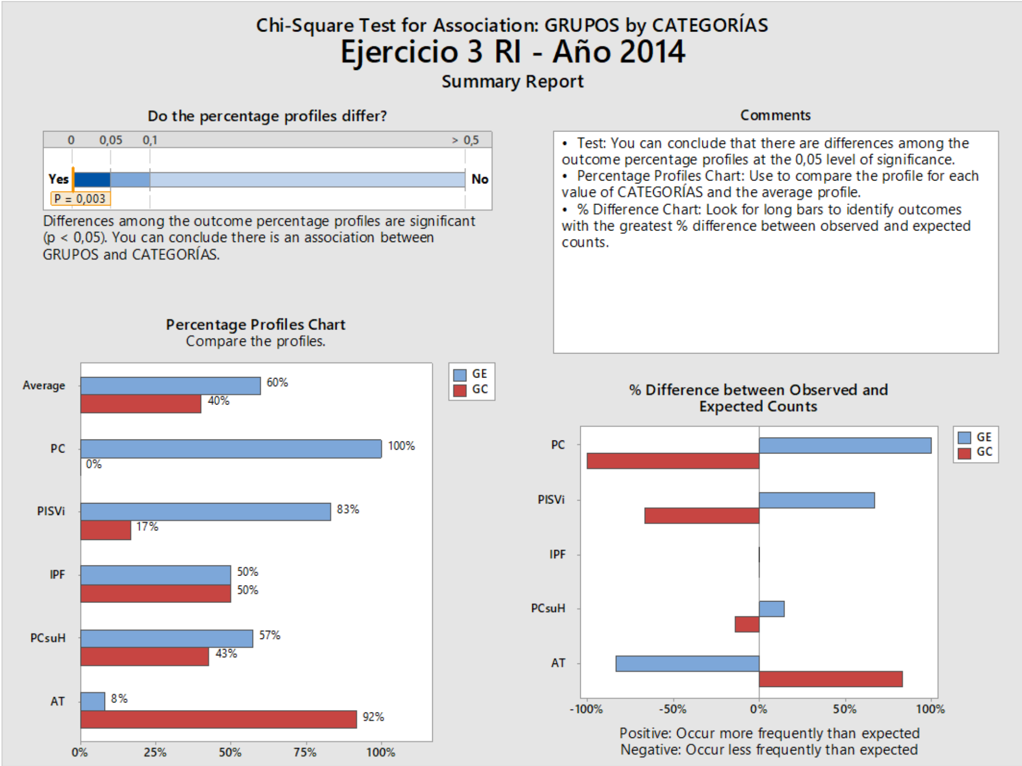


Figura 63: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 3 RI Año 2014

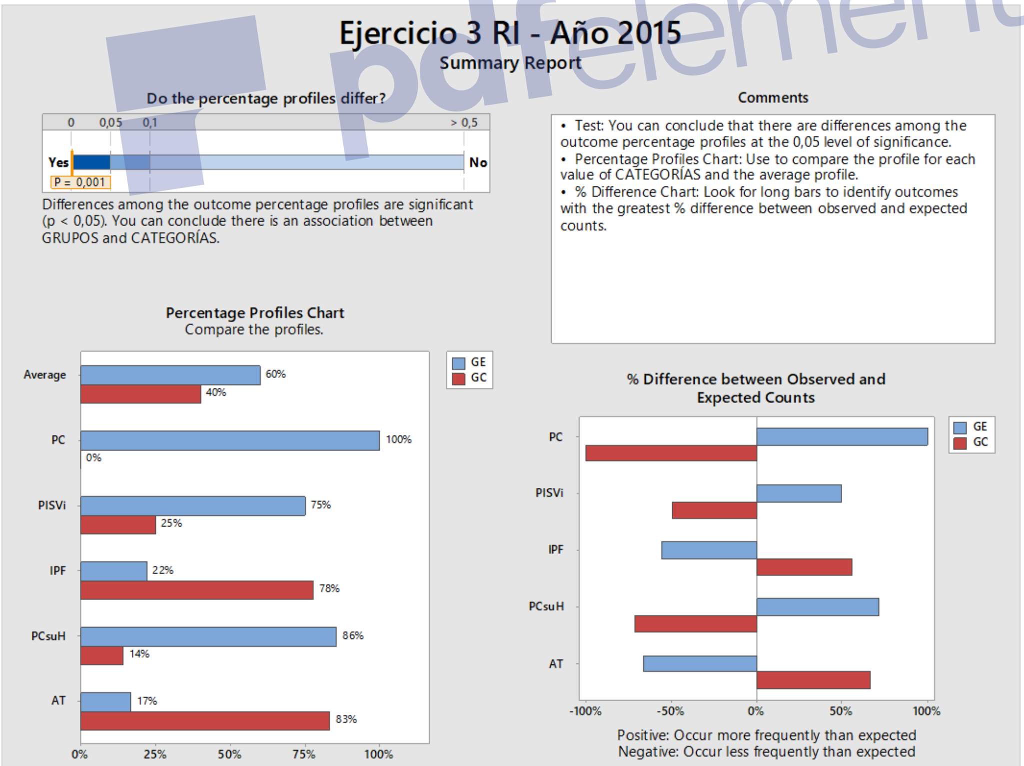


Figura 64: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 3 RI Año 2015

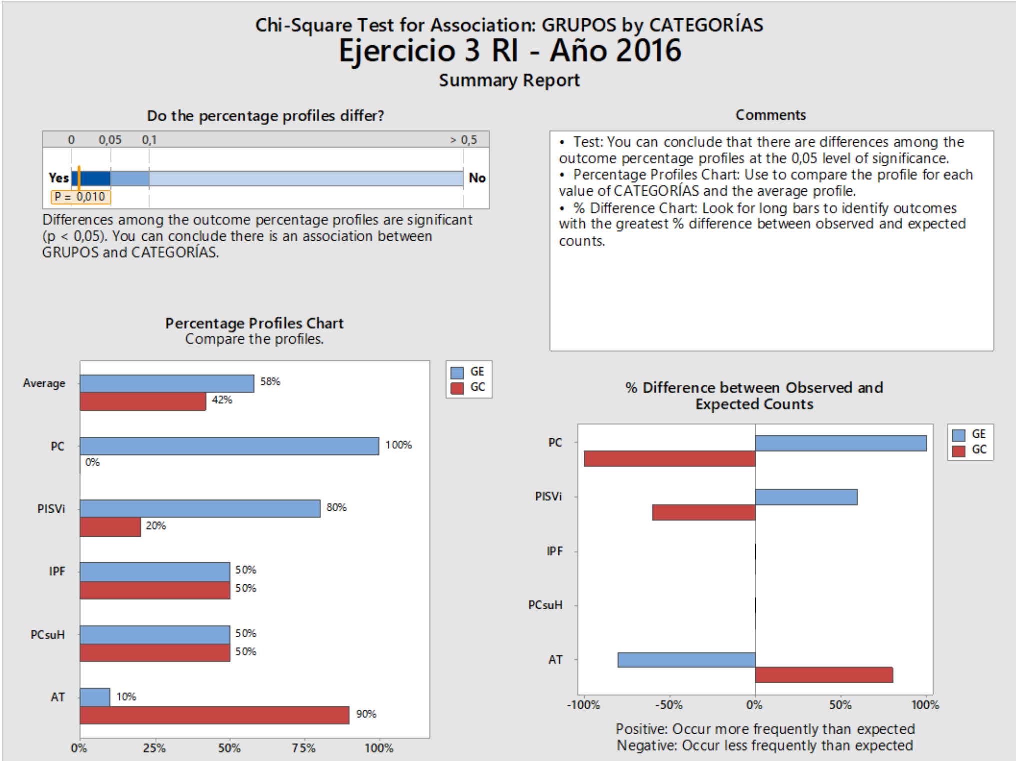


Figura 65: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 3 RI Año 2016

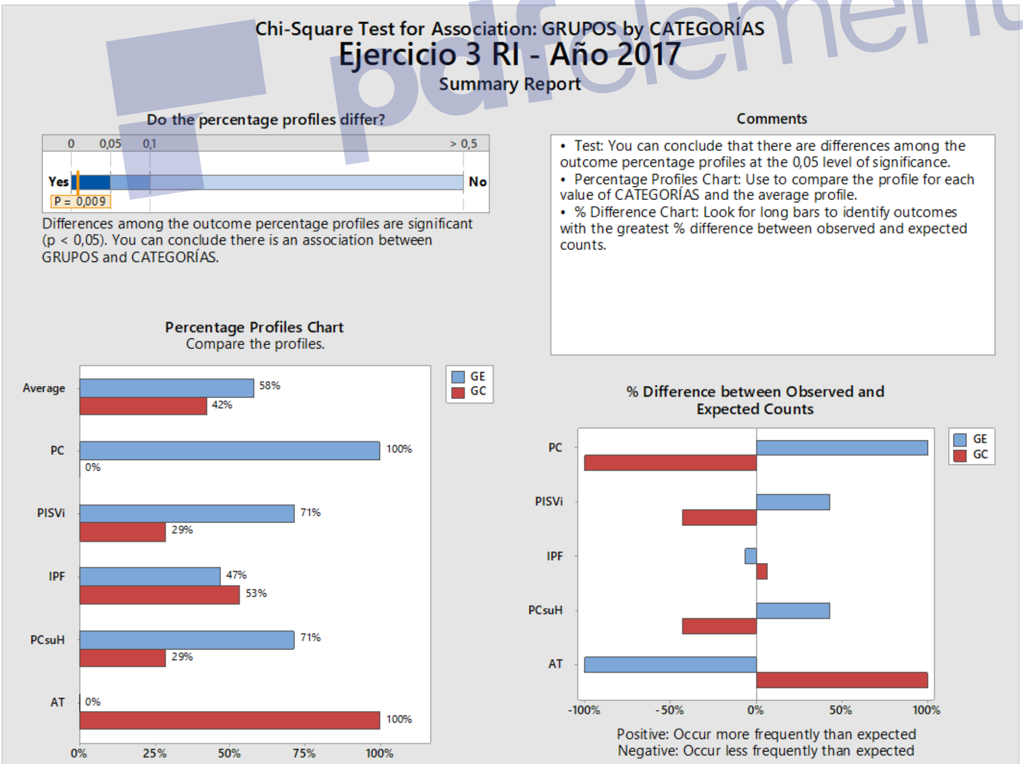


Figura 66: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 3 RI Año 2017

V.11.3. Análisis de Datos correspondientes al Ejercicio 3 RI

Se formulan a continuación las hipótesis nula y alternativa, respectivamente, a los efectos de poder extraer una conclusión de las precedentes pruebas de hipótesis. Hipótesis nula: La formación recibida y el paradigma de enseñanza y aprendizaje experimentado por dos grupos de estudiantes diferentes reacciona de igual forma frente a la propuesta de una prueba matemática que requiere un razonamiento inductivo.Hipótesis alternativa: La formación recibida y el paradigma de enseñanza y aprendizaje experimentado por dos grupos de estudiantes diferentes reacciona de forma distinta frente a la propuesta de una prueba matemática que requiere un razonamiento inductivo.Las pruebas de hipótesis realizadas sobre este ejercicio permiten observar que, a lo largo de los cinco años, rechazan la hipótesis nula, evidenciando una diferencia en los grupos.Aquí se ve claramente que el GE si bien en aproximadamente un 60%, un poco más según el año, pudo llevar a cabo la prueba requerida, con falencias, omitiendo la justificación por hipótesis de inducción u omitiendo la validación inicial. En el GC la prueba fue casi inexistente, muchos estudiantes no presentaron trabajo alguno, sumando mucha frecuencia a la categoría AT y proporcionalmente muchos estudiantes en ambos grupos realizaron una prueba fallida sumando frecuencias a la categoría IPF. La justificación como en todos los ejercicios anteriores, estuvo muy ausente. La categoría SC/CC no hace su aparición en ninguno de las producciones presentadas por los estudiantes. El estudiante que alcanza la meta, no la reafirma, reformulando el enunciado que se quería probar.

V.12. Datos correspondientes al Ejercicio 4 RI

V.12.1. Tabla de frecuencias correspondiente al Ejercicio 4 RI

Las categorías emergentes son las mismas que para el Ejercicio 3 RI.

AÑO	**2013**		**2014**		**2015**		**2016**		**2017**	
GRUPO	**GE**	**GC**	**GE**	**GC**	**GE**	**GC**	**GE**	**GC**	**GE**	**GC**
PC	**5**	**0**	**6**	**1**	**4**	**0**	**5**	**0**	**6**	**1**
PC.c/s.just.*	**1/8**	**0/2**	**0/12**	**0/2**	**1/10**	**0/2**	**1/11**	**0/3**	**0/10**	**0/2**
PISVi	**4**	**2**	**4**	**2**	**5**	**2**	**4**	**1**	**4**	**1**
IPF	**8**	**5**	**6**	**6**	**7**	**7**	**7**	**7**	**4**	**7**
PCsuH	**3**	**2**	**4**	**1**	**3**	**2**	**3**	**3**	**5**	**3**
AT	**0**	**11**	**0**	**10**	**1**	**9**	**1**	**9**	**1**	**8**

Tabla 11 de frecuencias correspondientes al Ejercicio 4 RI

V.12.2. Test de hipótesis correspondiente al <u>Ejercicio 4 RI</u>

Se detallan a continuación gráficos con los datos asociados a las pruebas de hipótesis.

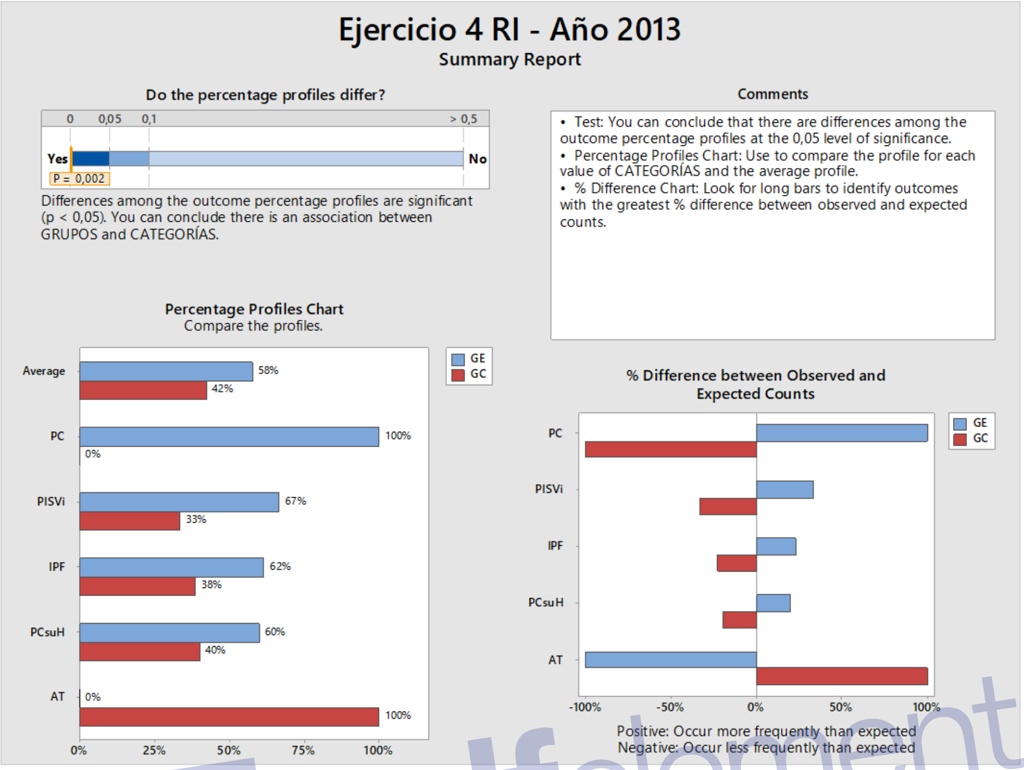


Figura 67: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 4 RI Año 2013

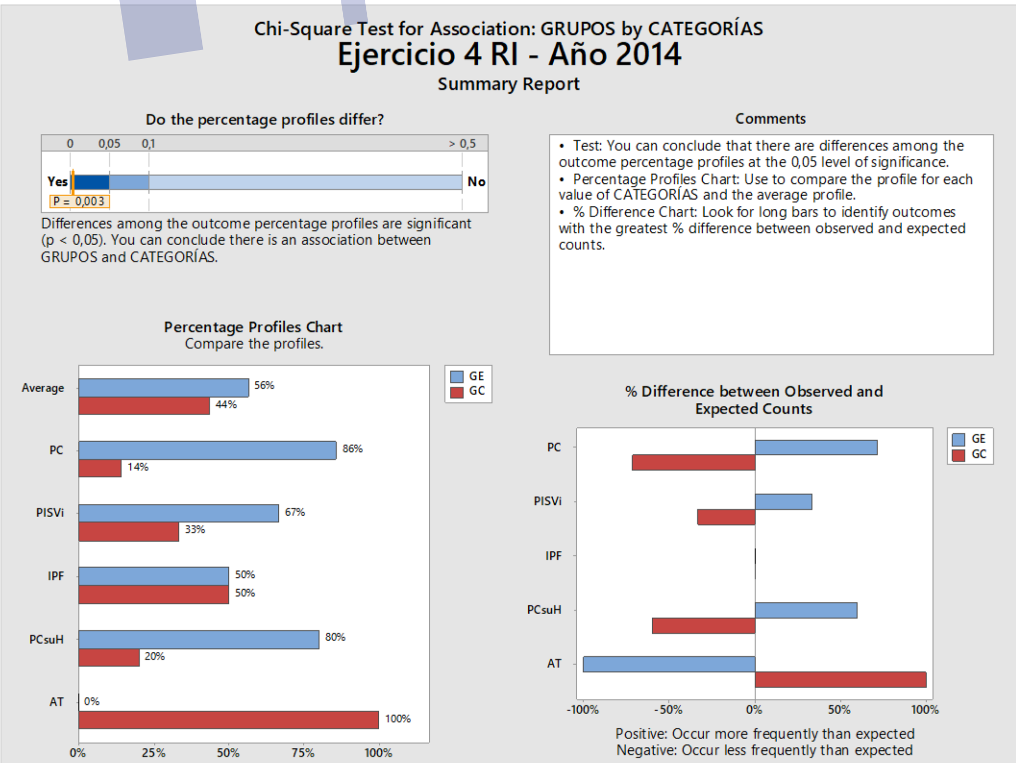


Figura 68: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 4 RI Año 2014

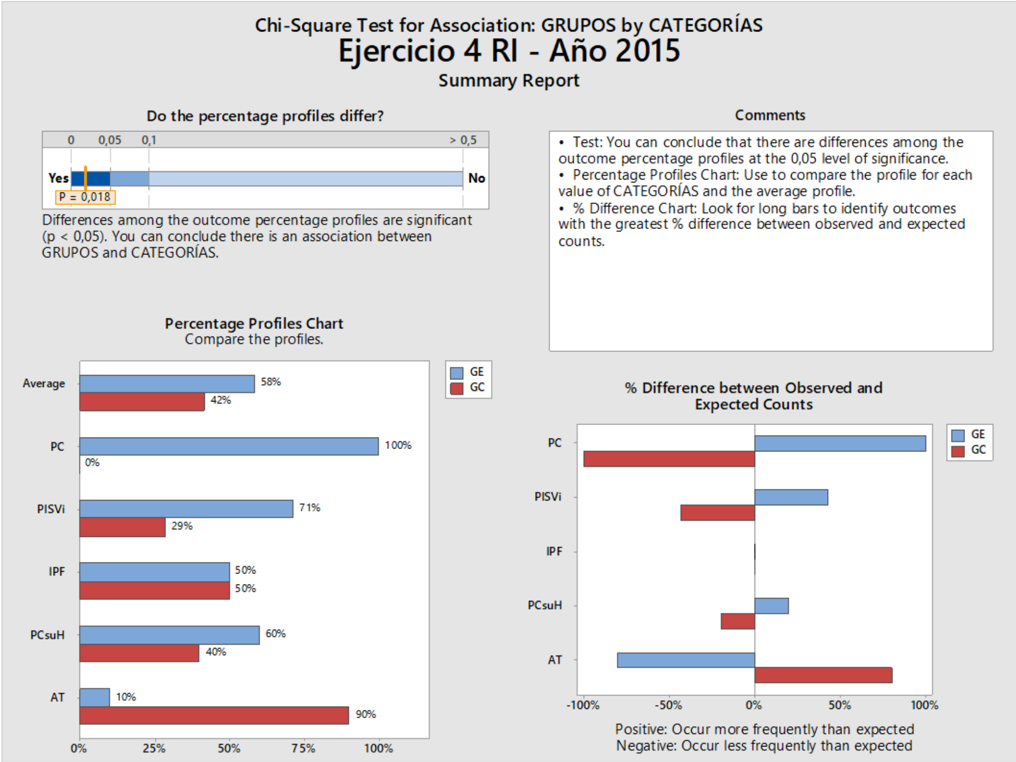


Figura 69: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 4 RI Año 2015

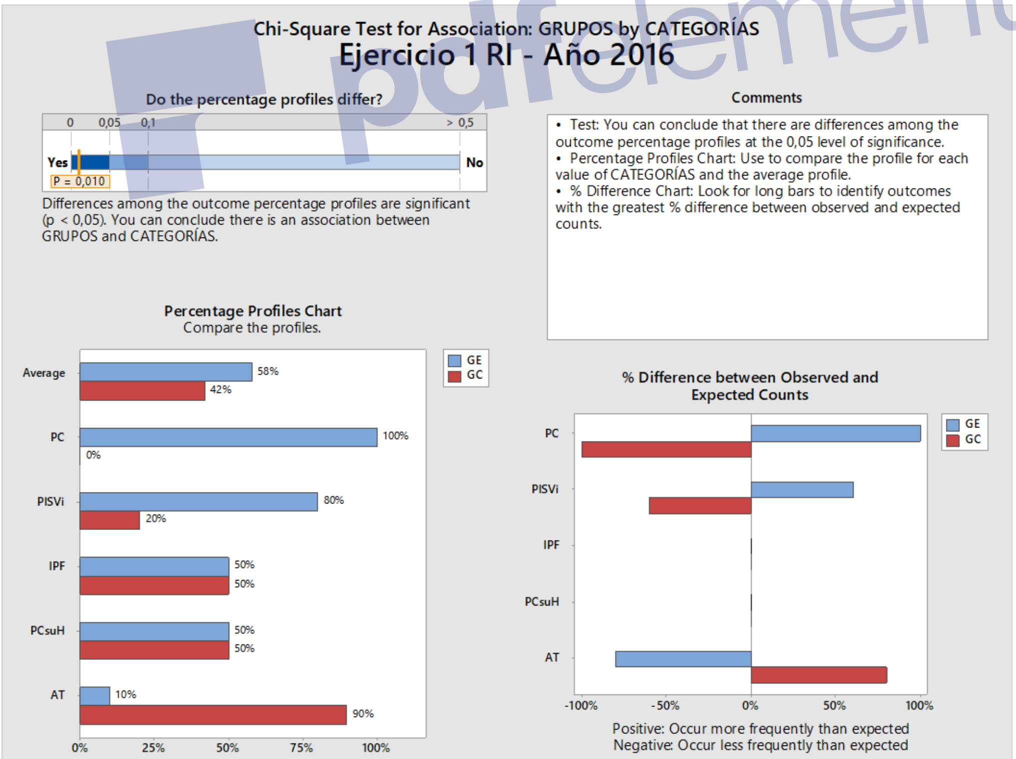


Figura 70: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 4 RI Año 2016

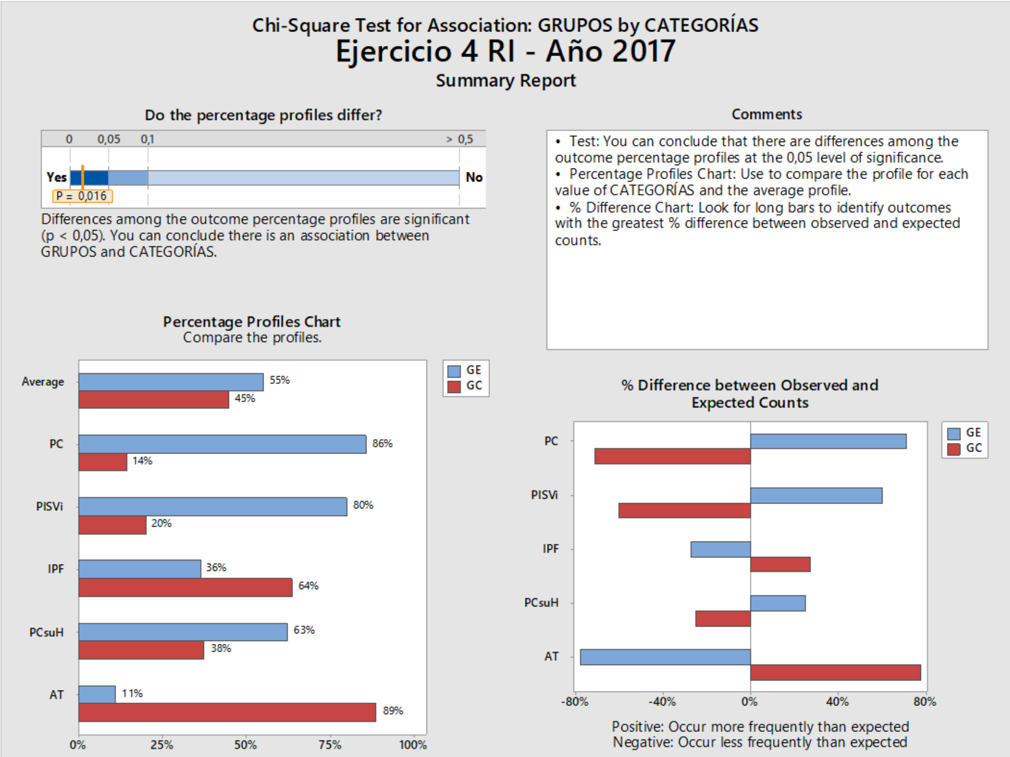


Figura 71: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 4 RI Año 2017

V.12.3. Análisis de Datos correspondientes al <u>Ejercicio 4 RI</u>

El análisis de datos correspondiente a este ejercicio no difiere del correspondiente al realizado en V.11.3.

V.13. Datos correspondientes al <u>Ejercicio 1 RRA</u>

V.13.1. Categorías Emergentes

<u>**Categorías incluidas en el test de hipótesis**</u>

Tipos de pruebas presentadas por los estudiantes:

PC: Prueba consumada

Casos especiales:

IPF: Intento de prueba fallido: Se recuerda que en esta categoría se agrupan las frecuencias de los estudiantes que intentan llevar a cabo la prueba realizando la negación inicial requerida de la tesis y ahí quedan detenidos.

IPAF: intento de prueba avanzado fallido: En esta categoría se agrupan las frecuencias de los estudiantes que avanzan ligeramente en la prueba, pero no pueden seguir más allá de algunos esbozos que pueden ser presentación de

definiciones y propiedades con el fin de relacionarlos a los efectos de llegar a probar lo que se busca. En este caso particular se presentan un par de intentos de prueba como se detallan a continuación:Supone el estudiante que el elemento absorbente no es único y que existen dos absorbentes, por ejemplo: k y a (esto es lo que presenta en IPF)

En esta categoría continúa algo más, por ejemplo, operando con los elementos que presentó en la negación de la tesis y se queda en ese estadío.

Si k es absorbente de a resulta que k*a=k

Si a es absorbente de k resulta que a*k=a

AT: Ausencia de trabajo

Categorías complementarias al test de hipótesis

IHT: Identificación de hipótesis y tesis.

*** PC prueba consumada con o sin justificación y agrupa a las frecuencias correspondientes a PC y se corresponde así en la tabla: valor c.just./valor s.just.**

V.13.2. Tabla de frecuencias correspondiente al Ejercicio 1 RRA

A continuación, se detalla la tabla de frecuencias correspondiente al **Ejercicio 1 RRA** para los cinco años de trabajo y también se detallan las nuevas categorías emergentes.

AÑO	2013		2014		2015		2016		2017	
GRUPO	GE	GC	GE	GC	GE	GC	GE	GC	GE	GC
PC	7	1	8	2	6	1	7	2	5	1
PC.c/s.just.*	2/5	0/1	2/6	0/2	1/5	0/1	1/6	0/2	1/4	0/1
IPF	5	9	6	10	4	9	5	10	5	10
IPAF	5	2	4	1	6	2	5	1	9	4
AT	3	8	2	7	4	8	3	7	1	5
IHT	10	2	7	5	11	6	8	7	9	6

Tabla 12 de frecuencias correspondientes al Ejercicio 1 RRA

V.13.3. Test de hipótesis correspondiente al Ejercicio 1 RRA

Se detallan a continuación los gráficos con los datos asociados a las pruebas de hipótesis del Ejercicio 1 RRA.

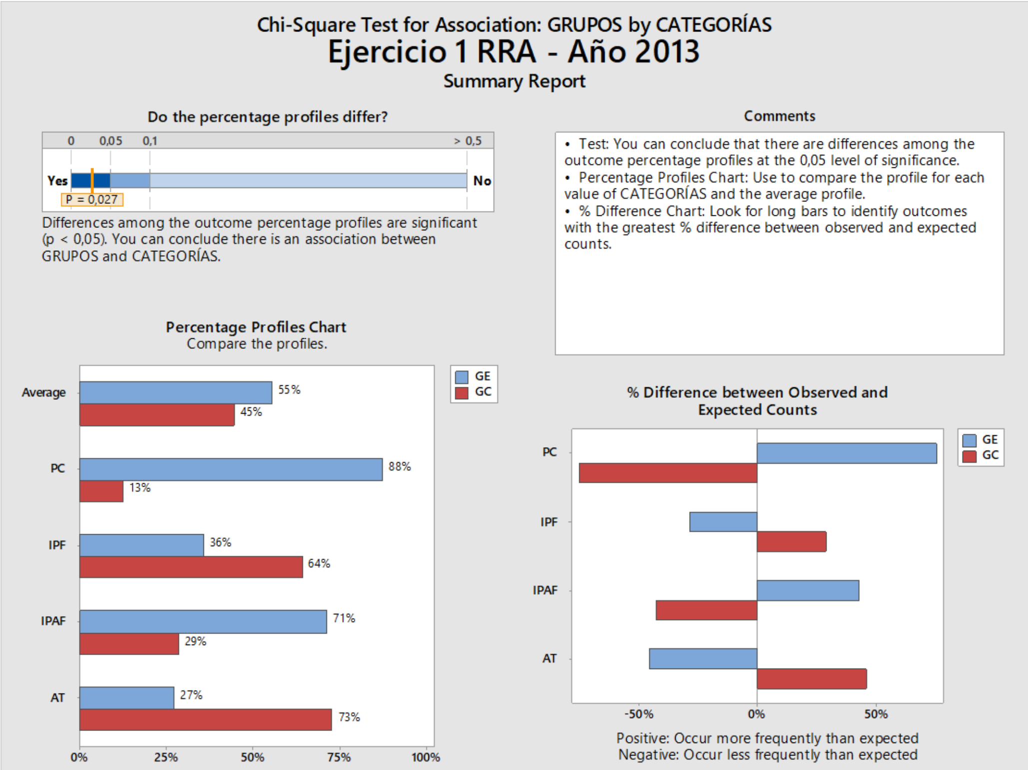


Figura 72: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 1 RRA Año 2013

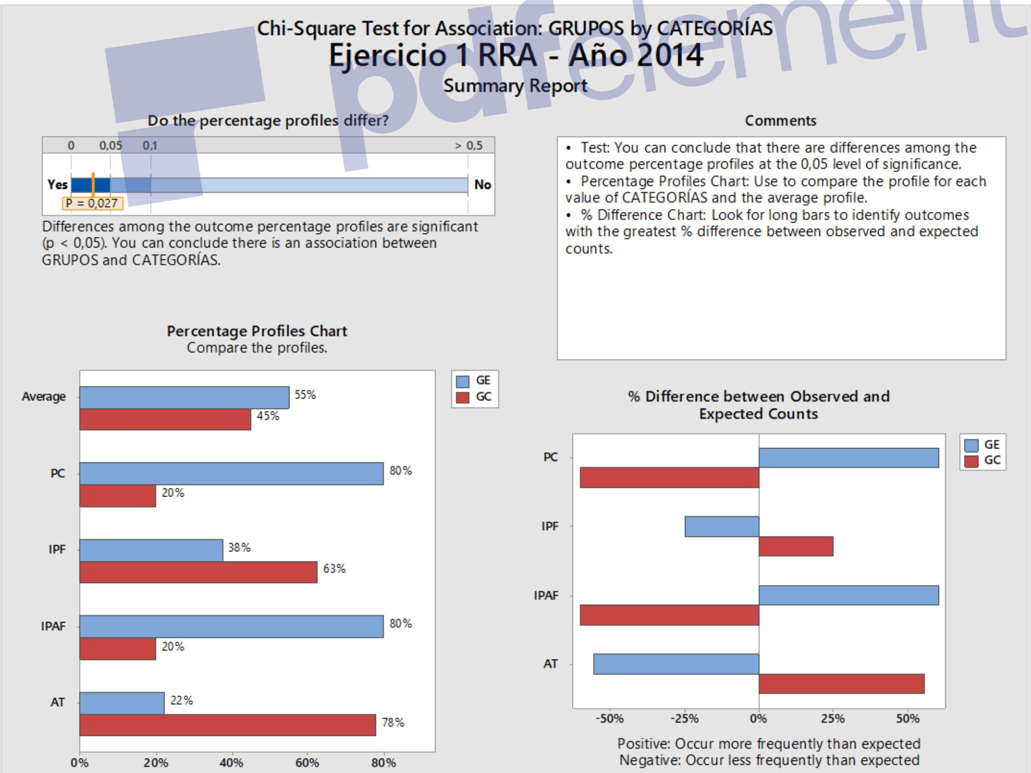


Figura 73: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 1 RRA Año 2014

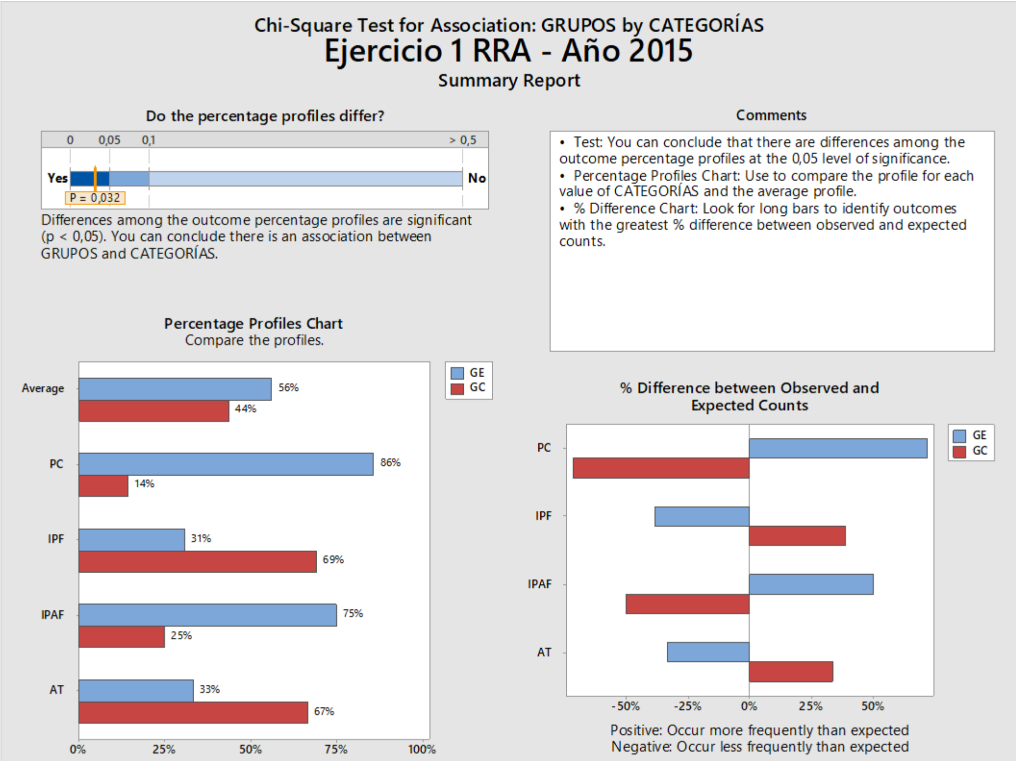


Figura 74: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 1 RRA Año 2015

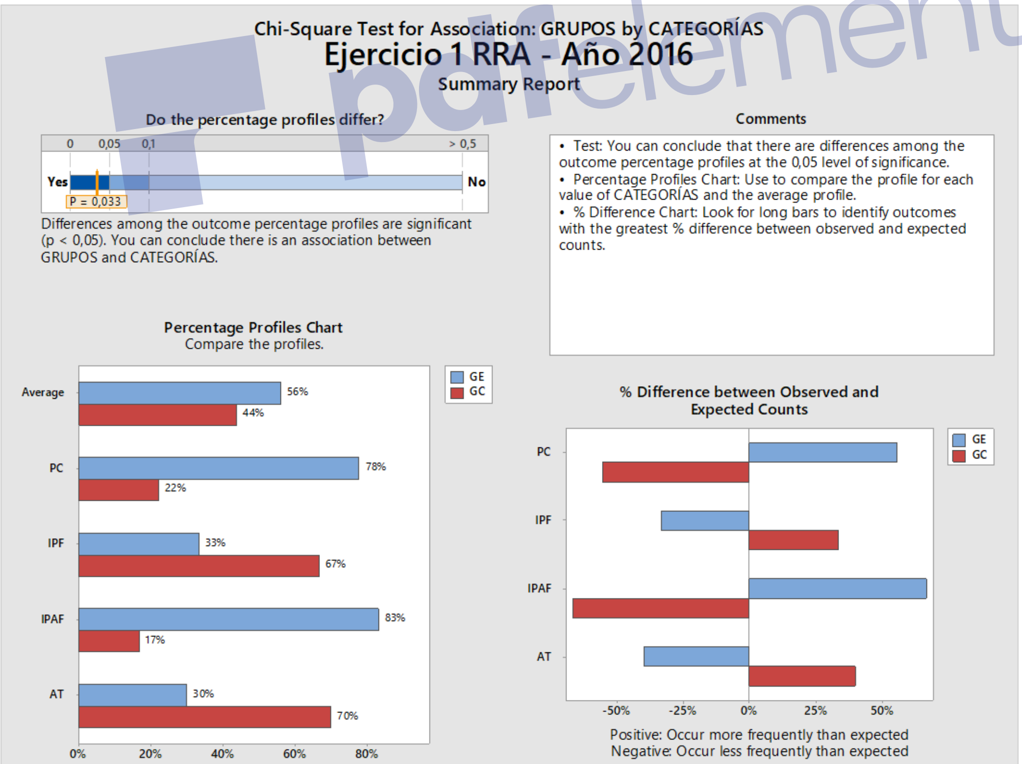


Figura 75: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 1 RRA Año 2016

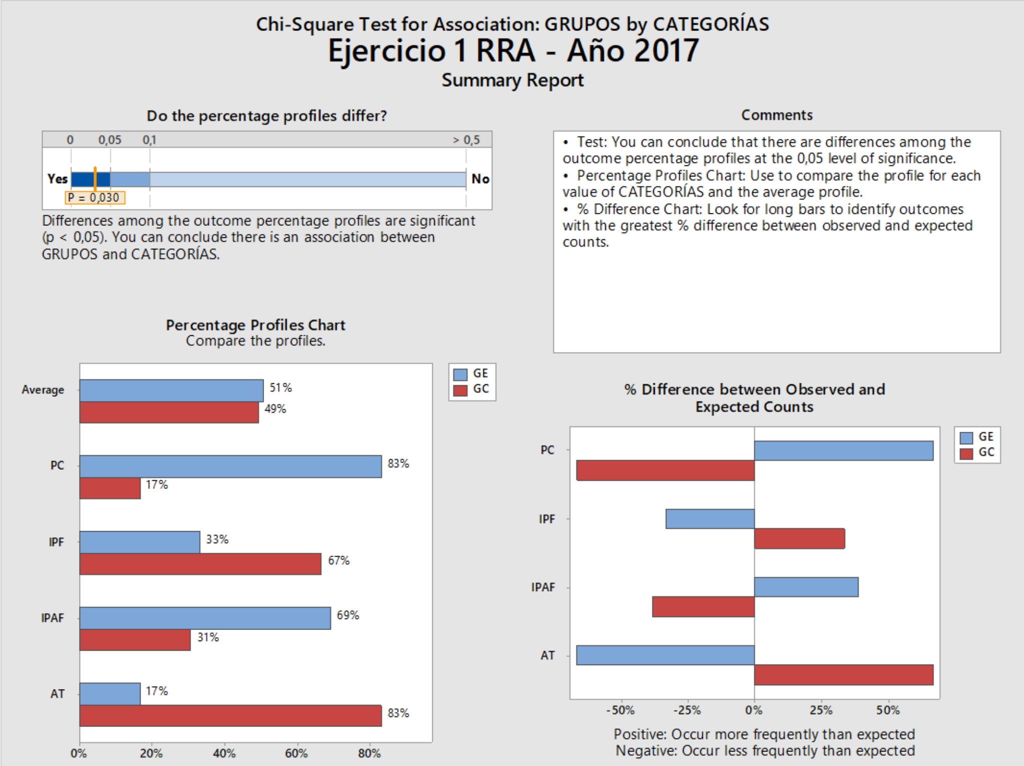


Figura 76: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 1 RRA Año 2017

V.13.3. Análisis de Datos correspondientes al Ejercicio 1 RRA

Se formulan a continuación las hipótesis nula y alternativa, respectivamente, a los efectos de poder extraer una conclusión de las precedentes pruebas de hipótesis.

Hipótesis nula: La formación recibida y el paradigma de enseñanza y aprendizaje experimentado por dos grupos de estudiantes diferentes reacciona de igual forma frente a la propuesta de una prueba matemática que requiere un razonamiento por reducción al absurdo.

Hipótesis alternativa: La formación recibida y el paradigma de enseñanza y aprendizaje experimentado por dos grupos de estudiantes diferentes reacciona de forma distinta frente a la propuesta de una prueba matemática que requiere un razonamiento por reducción al absurdo.

Las pruebas de hipótesis realizadas sobre este ejercicio permiten observar que, a lo largo de los cinco años, rechazan la hipótesis nula, evidenciando una diferencia en los grupos.

Se observa una diferencia en los grupos, pero de forma similar a los ejercicios correspondientes a razonamiento inductivo, el número de estudiantes que pudo consumar la prueba fue mínimo en ambos grupos. En GE ese número traducido en porcentaje osciló entre 20% y 40% en los cinco años. Hubo mucha frecuencia en las categorías: IPF e IPAF y también un mayor número en AT, especialmente en el GC. La identificación de la hipótesis y tesis también fue en un número significativamente menor en los dos grupos, agudizándose en GC. Esta falta de identificación puede provenir del hecho de que la proposición no responde a la estructura tradicional de proposición y el estudiante se desorienta. Los estudiantes pertenecientes a GE estaban más entrenados, pero asimismo no fue mucho el número de gente que logró tal identificación. Debe destacarse que con respecto a los ejercicios de RI, el número de estudiantes que pudo llevar a cabo la prueba de este ejercicio fue significativamente menor. El razonamiento de este tipo en teoremas de unicidad es 'duro' y no simple de llevar a cabo para un estudiante inicial que no ha tenido un período de tiempo significativo para que pueda internalizar estas cuestiones. También destaca la ausencia de una categoría muy presente en muchos de los ejercicios anteriores y es: EI, y puede suponerse la imposibilidad de verificar la unicidad del cualquier elemento distinguido de una operación, por lo que el estudiante que no pudo llevar a cabo la prueba o intentarlo, aumentó la frecuencia en AT, al no poder efectivizar la prueba a través de EI.

La categoría SC/CC de la misma forma que en los ejercicios de inducción y argumentación indirecta no hace su aparición en ninguna de las producciones de los estudiantes. El estudiante que llega a la meta, no la reafirma, reformulando el enunciado que se quería probar.

V.14. Datos correspondientes al Ejercicio 2 RRA

V.14.1. Categorías Emergentes

Previamente a la presentación de la tabla de frecuencias correspondiente al presente ejercicio, se deben destacar dos cuestiones de suma importancia.

Por un lado, de forma similar al Ejercicio 1 RRA, la categoría IPF encuadra en este caso a los estudiantes que negaron la tesis y se quedaron allí mientras que IPAF encuadra a los estudiantes que avanzaron significativamente pero que 'se animaron a traspasar la barrera' y no hallaron la contradicción que era un simple paso más consistente en la contrastación con la hipótesis, como se muestra a continuación.

La demostración que se plantea en este ejercicio es la siguiente:

Si un conjunto $X \neq \varnothing$ **de vectores es finito y** $V \subset X \wedge X \text{ es } L.I. \Rightarrow V \text{ es } L.I.$

Supongamos que el conjunto $V \text{ es } L.D$ y simultáneamente aceptamos que $V \subset X$ $\Rightarrow X \text{ es } L.D$ (por otra propiedad de la dependencia lineal) (***)

Hasta aquí es lo que hizo aproximadamente el estudiante encuadrado en la categoría IPAF, y lo que hubiera faltado para completar esta prueba desarrollada en capítulo IV en IV.3.5. pág.114. es lo siguiente:

(***) lo que es absurdo porque contradice la hipótesis, es decir que $X \text{ es } L.I.$

Por lo tanto, la implicación $V \subset X \wedge X \text{ es } L.I. \Rightarrow V \text{ es } L.I$ es válida.

V.14.2. Tabla de frecuencias correspondiente al Ejercicio 2 RRA

A continuación, se presenta la tabla de frecuencias correspondiente a este ejercicio, cuyas categorías son iguales al Ejercicio 1 RRA pero, que agrega una ya descripta y muy frecuente en ejercicios anteriores, EI: Empirismo ingenuo.

AÑO	**2013**		**2014**		**2015**		**2016**		**2017**	
GRUPO	**GE**	**GC**	**GE**	**GC**	**GE**	**GC**	**GE**	**GC**	**GE**	**GC**
EI	**2**	**7**	**1**	**5**	**1**	**6**	**1**	**4**	**2**	**7**
PC	**10**	**2**	**10**	**3**	**9**	**1**	**8**	**2**	**9**	**2**
PC.c/s.just.*	10	2	10	3	9	1	8	2	9	2
IPF	**2**	**7**	**1**	**7**	**3**	**8**	**3**	**9**	**4**	**8**
IPAF	**4**	**1**	**5**	**2**	**5**	**2**	**5**	**1**	**3**	**1**
AT	**2**	**3**	**3**	**3**	**2**	**3**	**3**	**4**	**2**	**2**
IHT	10	2	7	5	11	6	8	7	9	6

Tabla 13 de frecuencias correspondientes al Ejercicio 2 RRA

V.14.3. Test de hipótesis correspondiente al Ejercicio 2 RRA

Se detallan a continuación gráficos con los datos asociados a las pruebas de hipótesis.

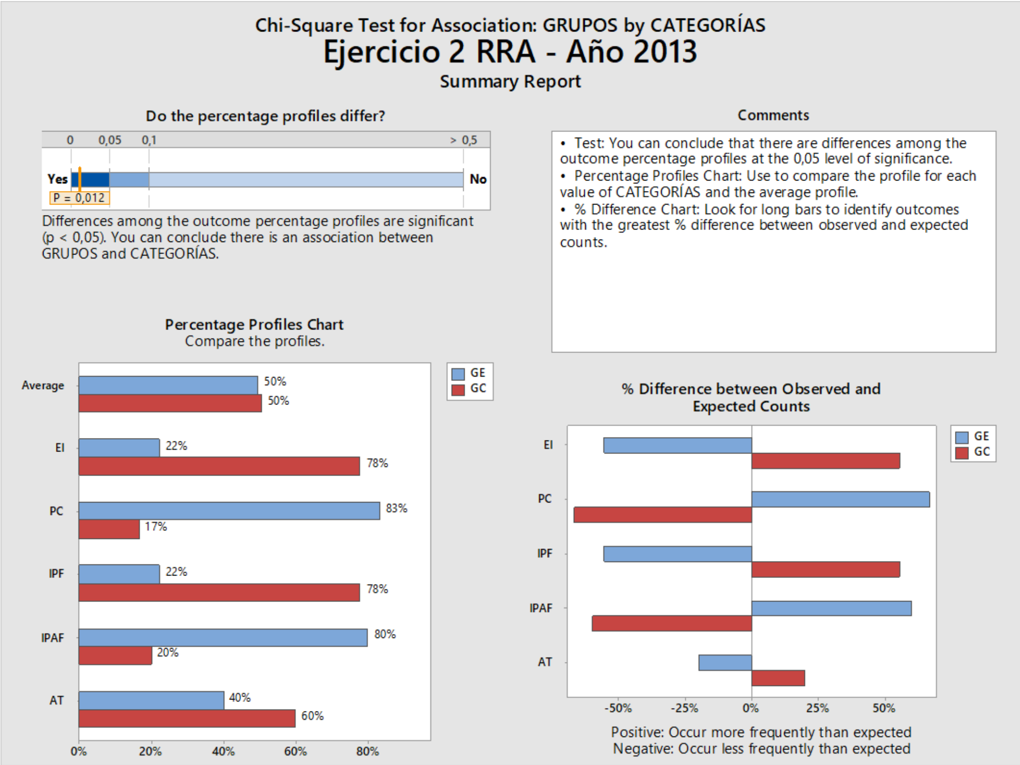


Figura 77: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 2 RRA Año 2013

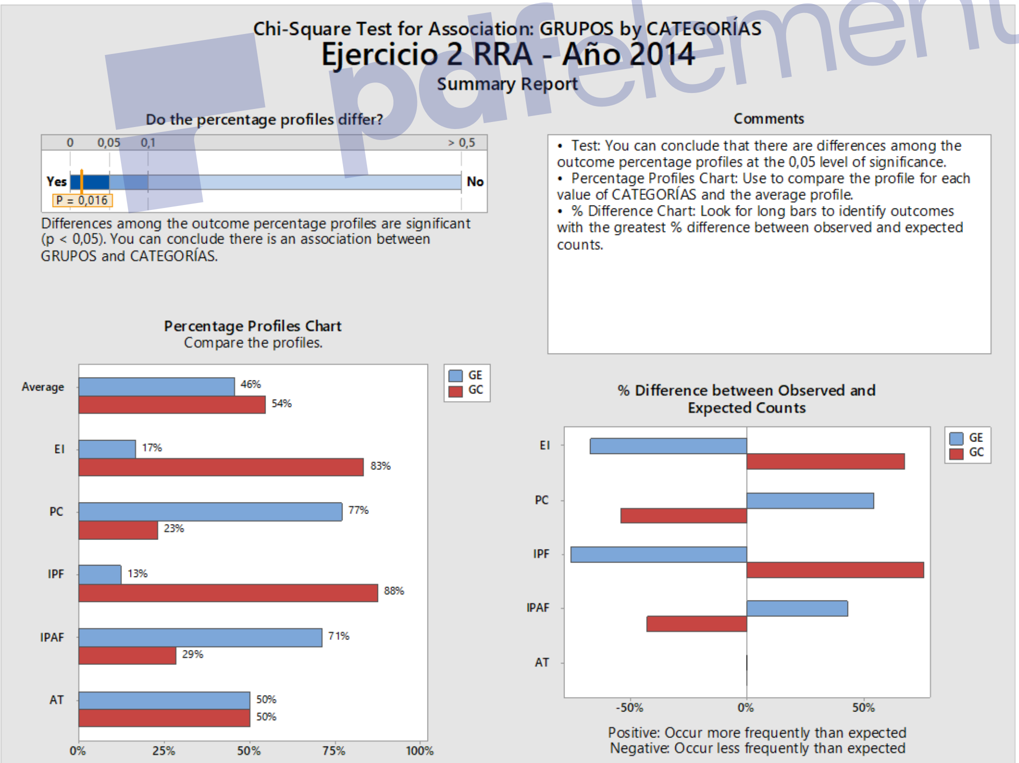


Figura 78: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 2 RRA Año 2014

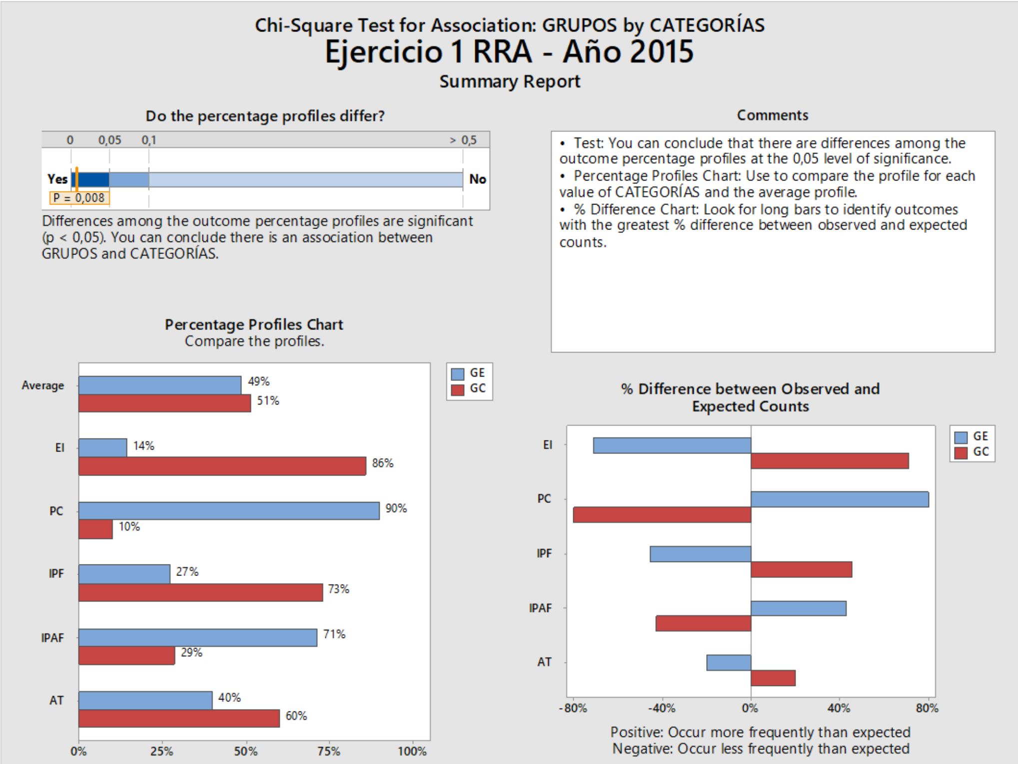


Figura 79: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 2 RRA Año 2015

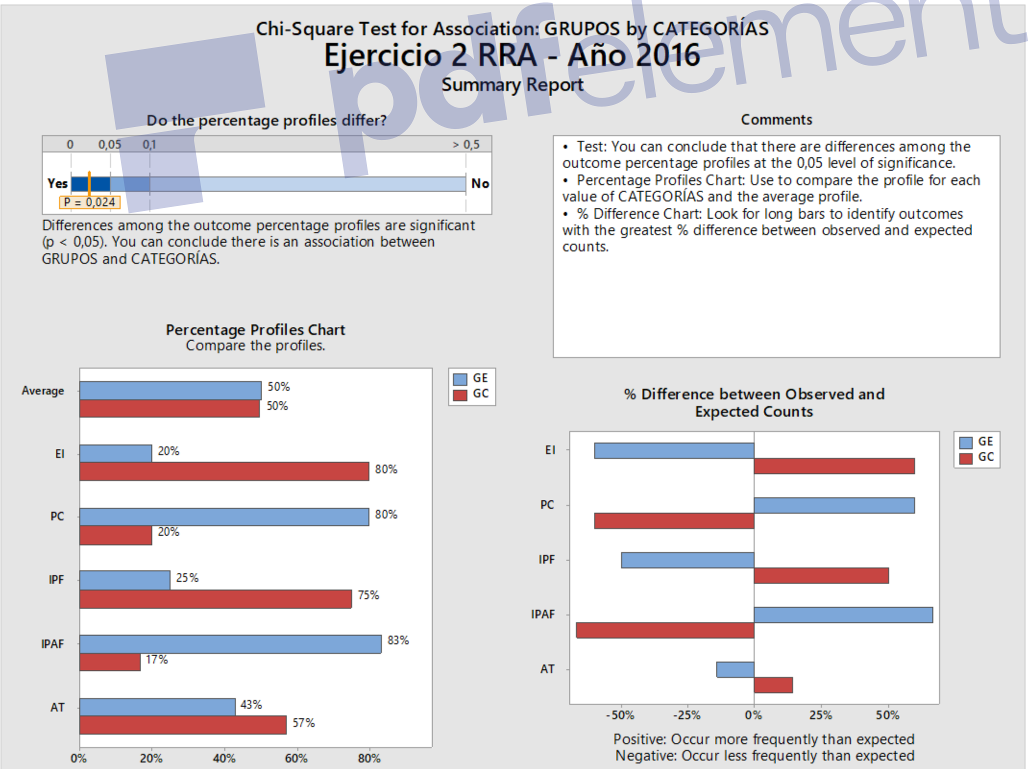


Figura 80: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 2 RRA Año 2016

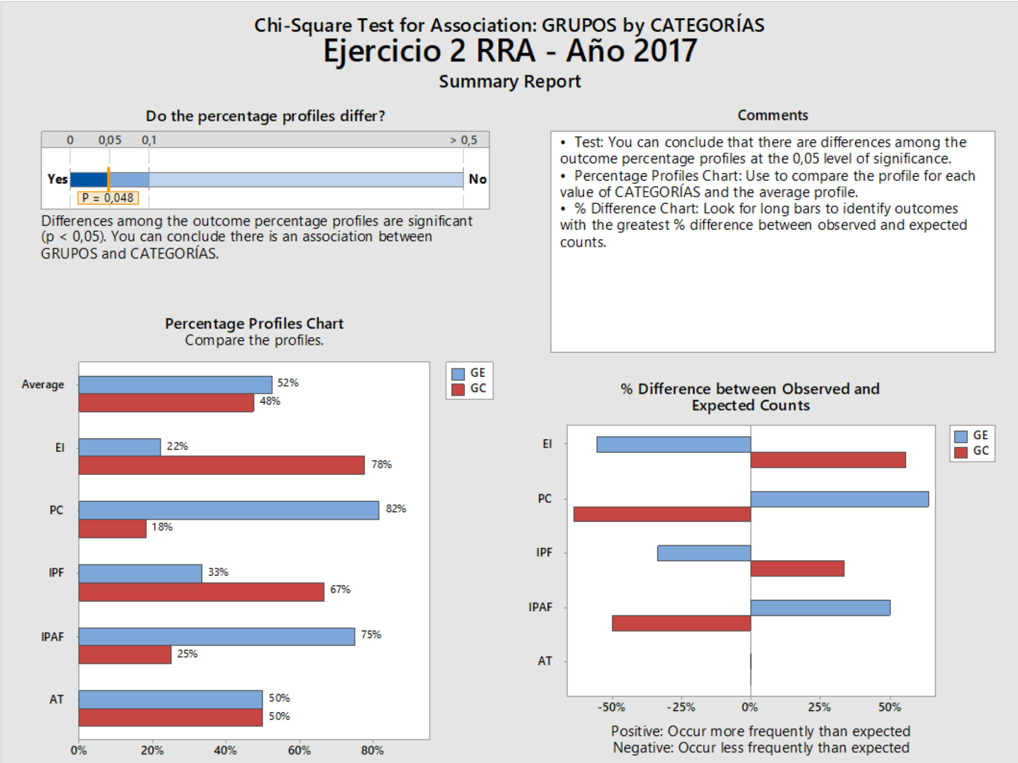


Figura 81: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 2 RRA Año 2017

V.14.4. Análisis de Datos correspondientes al Ejercicio 2 RRA

Se formulan a continuación las hipótesis nula y alternativa, respectivamente, a los efectos de poder extraer una conclusión de las precedentes pruebas de hipótesis.

Hipótesis nula: La formación recibida y el paradigma de enseñanza y aprendizaje experimentado por dos grupos de estudiantes diferentes reacciona de igual forma frente a la propuesta de una prueba matemática que requiere un razonamiento por reducción al absurdo.

Hipótesis alternativa: La formación recibida y el paradigma de enseñanza y aprendizaje experimentado por dos grupos de estudiantes diferentes reacciona de forma distinta frente a la propuesta de una prueba matemática que requiere un razonamiento por reducción al absurdo.

Las pruebas de hipótesis realizadas sobre este ejercicio permiten observar que, a lo largo de los cinco años, rechazan la hipótesis nula, evidenciando una diferencia en los grupos.

A diferencia del ejercicio anterior, aumentó la frecuencia de estudiantes que consumaron la prueba en ambos grupos, especialmente el GE. No fue un gran aumento, pero si considerable. Una cuestión muy significativa en este ejercicio fue la justificación que se requiere inexorablemente al final del razonamiento cuando se encuentra la contradicción y se puede concluir la verdad de la proposición. Todos los estudiantes en ambos grupos, que llevaron a cabo la prueba, justificaron. Es que ocurre algo muy simple, sin esa justificación, es imposible mostrar la contradicción. Eso ocurrió en la categoría IPAF, que el estudiante avanza en el razonamiento luego de negar la tesis y se queda en la aplicación del teorema que lleva a la contradicción, como se mostró en 5.14.1. Nuevamente en este ejercicio vuelve a aparecer la categoría de EI con mayor frecuencia en GC. AT se da con mayor frecuencia en GC, pero está presente en ambos grupos.La categoría SC/CC de la misma forma que en los ejercicios de inducción y argumentación indirecta no hace su aparición en ninguna de las producciones de los estudiantes. El estudiante que llega a la meta, no la reafirma, reformulando el enunciado que se quería probar.

V.15. Datos correspondientes al Ejercicio 3 RRA

V.15.1. Categorías Emergentes

Aquí se agregan dos nuevas categorías emergentes:PI: Prueba inconsistente, en esta categoría se encuadran aquellos estudiantes que plantean el ejercicio del modo siguiente: $f(x,y)=f(x,mx)=\frac{mx^2}{x^2+m^2x^2}=\frac{m\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(1+m^2)}=\frac{m}{1+m^2}\, si\ x\neq 0$

ASC: argumento sin conclusión, en esta categoría se encuadran aquellos estudiantes que plantean aproximadamente el ejercicio del modo siguiente: Supongamos que el límite en el origen si existe y a lo largo de distintas rectas que pasan por el origen asume el valor que se muestra a continuación:

$$f(x,y)=f(x,mx)=\frac{mx^2}{x^2+m^2x^2}=\frac{m\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(1+m^2)}=\frac{m}{1+m^2}\, si\ x\neq 0$$

Debe observarse que a diferencia de la categoría PI, aquí el estudiante supone por reducción al absurdo que el límite si existe y plantea su comportamiento a lo largo de rectas que pasan por el origen, pero la argumentación se queda allí ‘varada’ sin el arribo a una conclusión. En PI el estudiante opera de forma ‘algorítmica’, evaluando al campo escalar en rectas pasantes por el origen, pero sin fundamento ni explicación. Vale la pena destacar que esta categoría se diferencia de IPAF en lo siguiente. En IPAF el estudiante llega a presentar ciertos argumentos que no puede relacionar mientras que en

PI presenta un proceso de tipo 'algorítmico' sin fundamento ni explicación alguna. Es decir, realiza el proceso de 'sustituir' a 'y' por 'mx' pero sin explicación alguna, concluyendo lo esperado, pero como un procedimiento 'aprendido' ritualmente a los efectos de satisfacer un requisito,carente de cualquier reflexión o un comentario personal a modo de conclusión.

V.15.2. Tabla de frecuencias correspondiente al Ejercicio 3 RRA

A continuación, se muestra la tabla de frecuencias similar a los dos primeros ejercicios de este tipo de razonamiento.

AÑO	**2014**		**2015**		**2016**		**2017**		**2018**	
GRUPO	**GE**	**GC**	**GE**	**GC**	**GE**	**GC**	**GE**	**GC**	**GE**	**GC**
PC	**8**	**9**	**9**	**8**	**10**	**9**	**9**	**9**	**10**	**9**
PC.c/s.just.*	8	9	9	8	10	9	9	9	10	9
PI	**4**	**3**	**3**	**4**	**5**	**6**	**6**	**6**	**5**	**4**
ASC	**7**	**7**	**6**	**6**	**4**	**5**	**5**	**4**	**4**	**5**
AT	**1**	**1**	**2**	**2**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**2**

Tabla 14 de frecuencias correspondientes al Ejercicio 3 RRA

V.15.3. Test de hipótesis correspondiente al Ejercicio 3 RRA

Se detallan a continuación los gráficos con los datos asociados a las pruebas de hipótesis del Ejercicio 3 RRA.

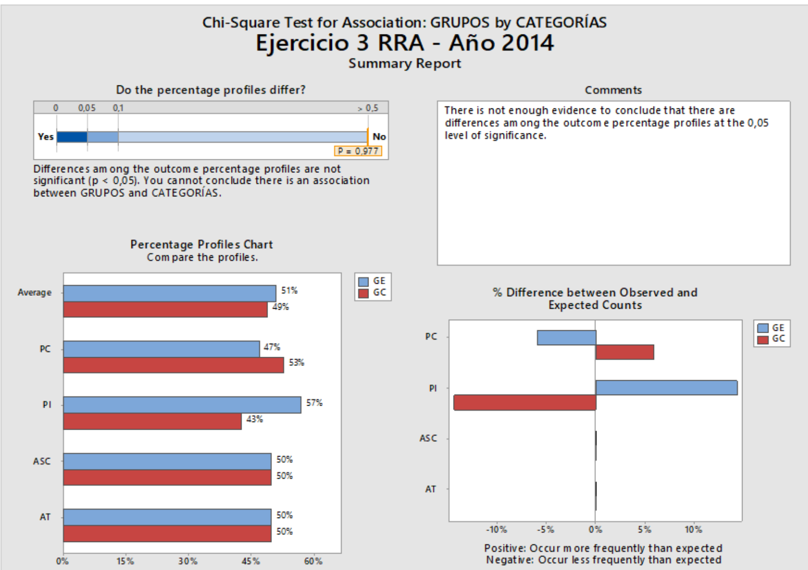


Figura 82: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 3 RRA Año 2014

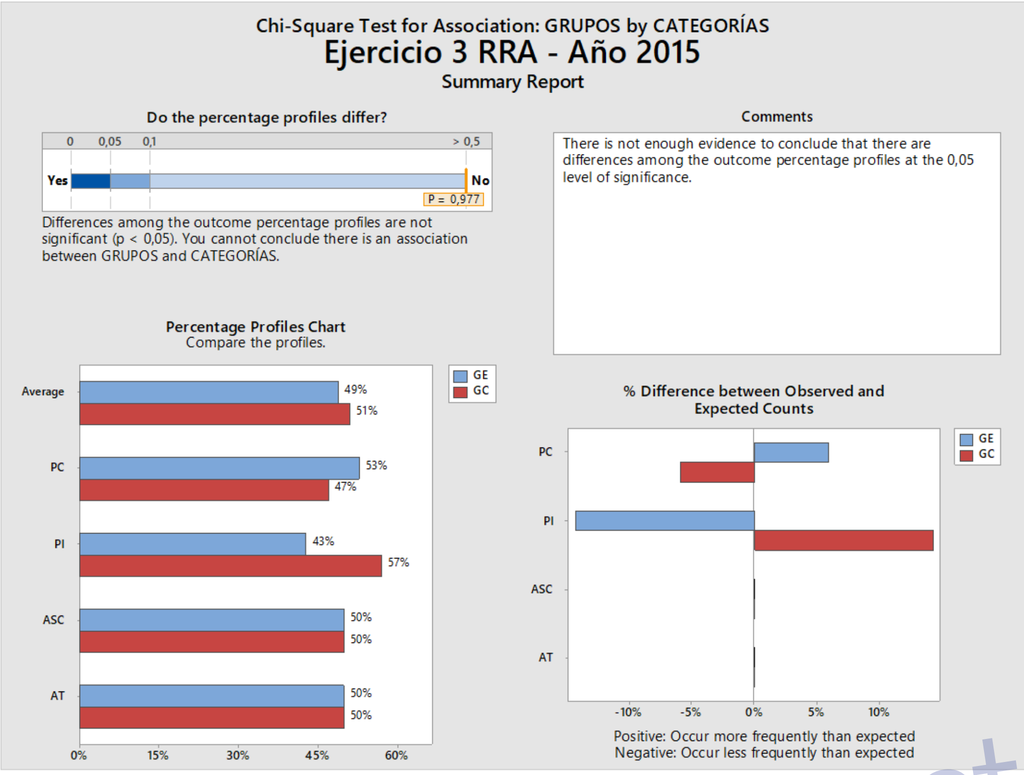


Figura 83: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 3 RRA Año 2015

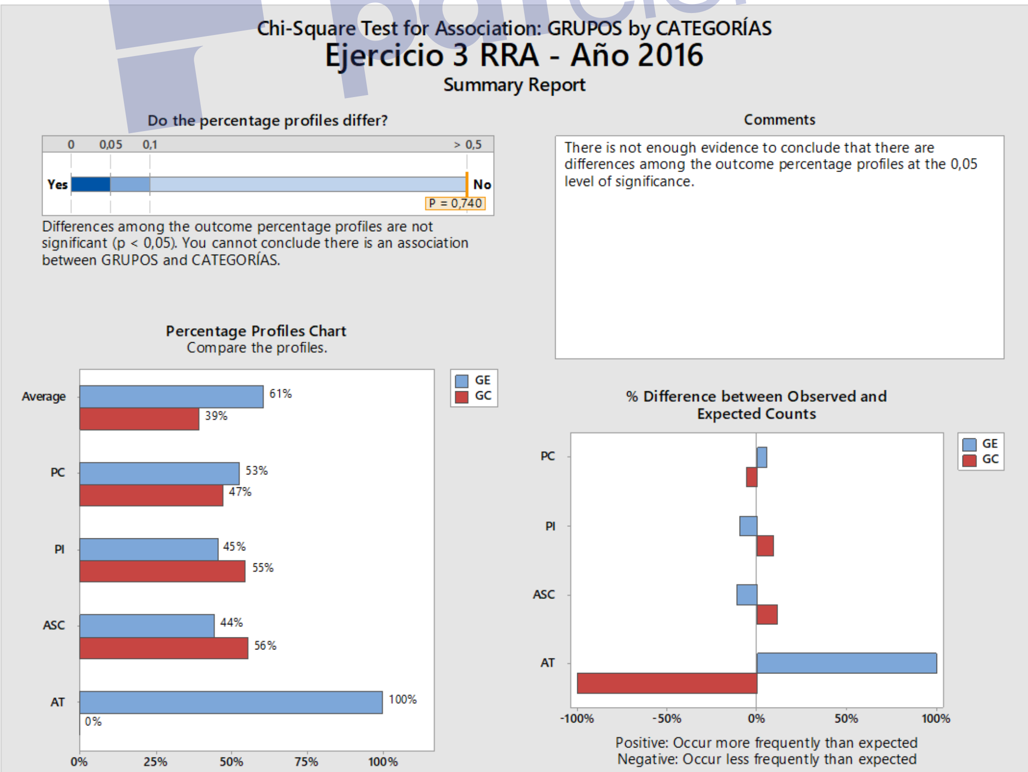


Figura 84: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 3 RRA Año 2016

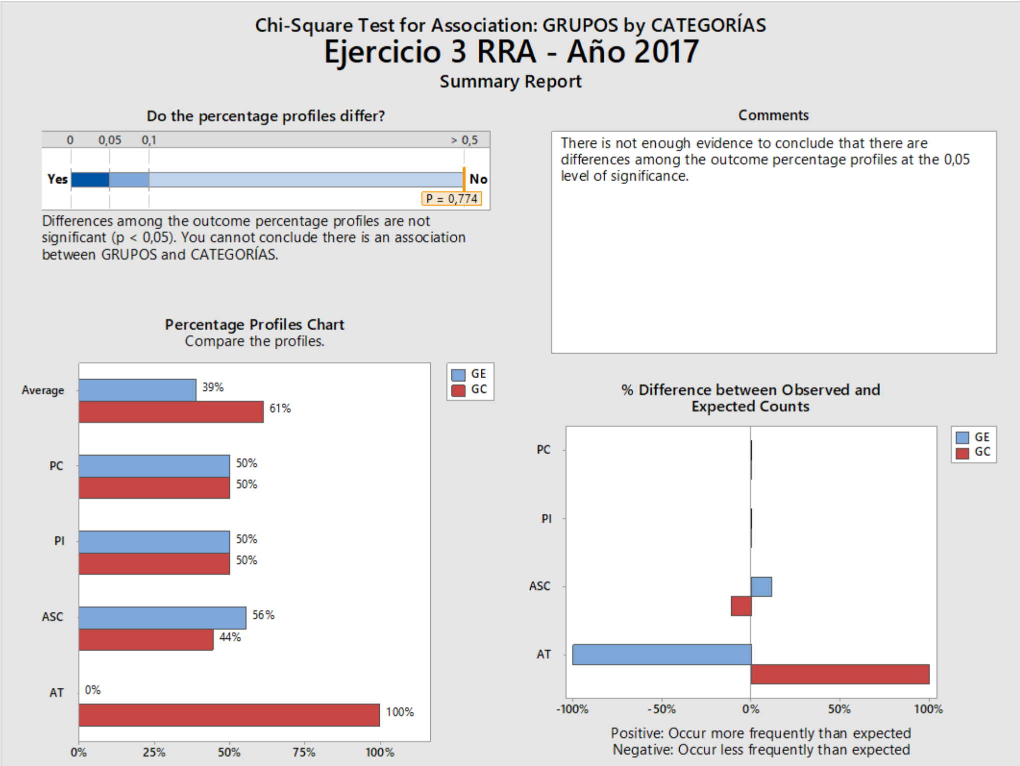


Figura 85: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 3 RRA Año 2017

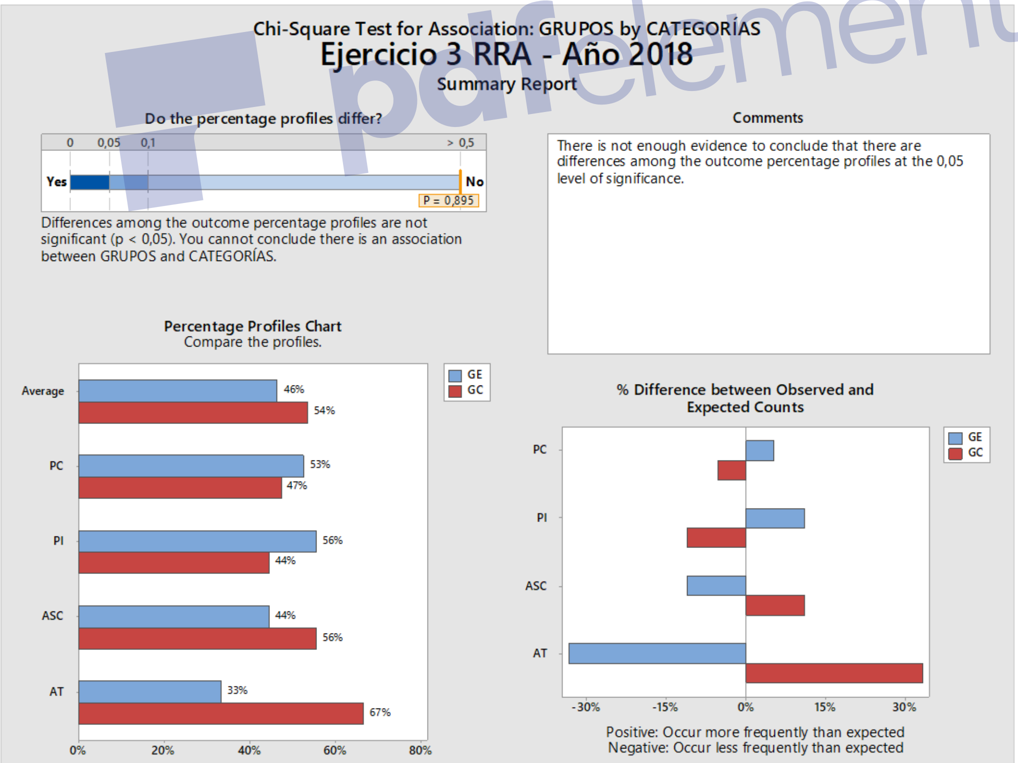


Figura 86: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 3 RRA Año 2018

V.15.3. Análisis de Datos correspondientes al Ejercicio 3 RRA

Se formulan a continuación las hipótesis nula y alternativa, respectivamente, a los efectos de poder extraer una conclusión de las precedentes pruebas de hipótesis.

Hipótesis nula: La formación recibida y el paradigma de enseñanza y aprendizaje experimentado por dos grupos de estudiantes diferentes reacciona de igual forma frente a la propuesta de una prueba matemática que requiere un razonamiento por reducción al absurdo.Hipótesis alternativa: La formación recibida y el paradigma de enseñanza y aprendizaje experimentado por dos grupos de estudiantes diferentes reacciona de forma distinta frente a la propuesta de una prueba matemática que requiere un razonamiento por reducción al absurdo.

Las pruebas de hipótesis realizadas sobre este ejercicio permiten observar que, a lo largo de los cinco años, aceptan la hipótesis nula, no evidenciando una diferencia en los grupos.

De forma diferente a los dos primeros ejercicios, en el presente ejercicio y el siguiente, la prueba de hipótesis pone de manifiesto que los grupos no se diferencian. Aproximadamente un 50% de los estudiantes de cada grupo pudo llevar a cabo la prueba, todos con justificación, porque aquí se considera que la prueba está consumada y es realmente efectiva si se argumenta consistentemente, caso contrario se encuadra el trabajo realizado por el estudiante en las categorías ASC o PI si es simplemente la presentación de la evaluación del campo escalar como se indica en 5.15.1. La frecuencia es mayor, en ambos grupos, en ASC que en PI. Muy poca frecuencia se presenta en AT. Se puede suponer que el razonamiento por reducción al absurdo aquí aplicado es un argumento más 'lineal', es decir, se parte de suponer la existencia del límite para llegar a que no existe por el camino de la unicidad. No hay 'bifurcaciones posibles en el camino' que posibiliten la probabilidad de generarse una contradicción por otro camino, como en el 'absurdo clásico', por lo que el estudiante se siente más seguro y confiado, además de que es un proceso que ha aprendido en clase y que, a diferencia de otros, no tiene la posibilidad de otros matices, se reitera y el estudiante puede hacer una mímesis situándose 'en una zona de confort'. Cabe destacar que el razonamiento aplicado a este ejercicio y el siguiente tiene una componente visual, de forma similar al Ejercicio 4 RDAD y los correspondientes a RV que se verán en el último párrafo de este capítulo. La componente visual se asienta en el contenido implícito de este razonamiento (rectas que pasan por el origen, en el ejercicio siguiente, diferentes curvas que pasan por el origen) y esa componente visual juega a favor de la argumentación realizada por el estudiante.

V.16. Datos correspondientes al Ejercicio 4 RRA

V.16.1. Tabla de frecuencias correspondiente al Ejercicio 4 RRA

Las categorías emergentes son idénticas al Ejercicio 3 RRA.

AÑO	2014		2015		2016		2017		2018	
GRUPO	GE	GC	GE	GC	GE	GC	GE	GC	GE	GC
PC	7	6	6	5	8	6	8	9	7	8
PC.c/s.just.*	7	6	6	5	8	6	8	9	7	8
PI	4	7	3	4	5	6	6	5	6	5
ASC	7	5	8	9	5	7	6	5	6	5
AT	2	2	3	2	2	1	0	1	1	2

Tabla 15 de frecuencias correspondientes al Ejercicio 4 RRA

V.16.2. Test de hipótesis correspondiente al Ejercicio 4 RRA

Se detallan a continuación los gráficos con los datos asociados a las pruebas de hipótesis del Ejercicio 4 RRA.

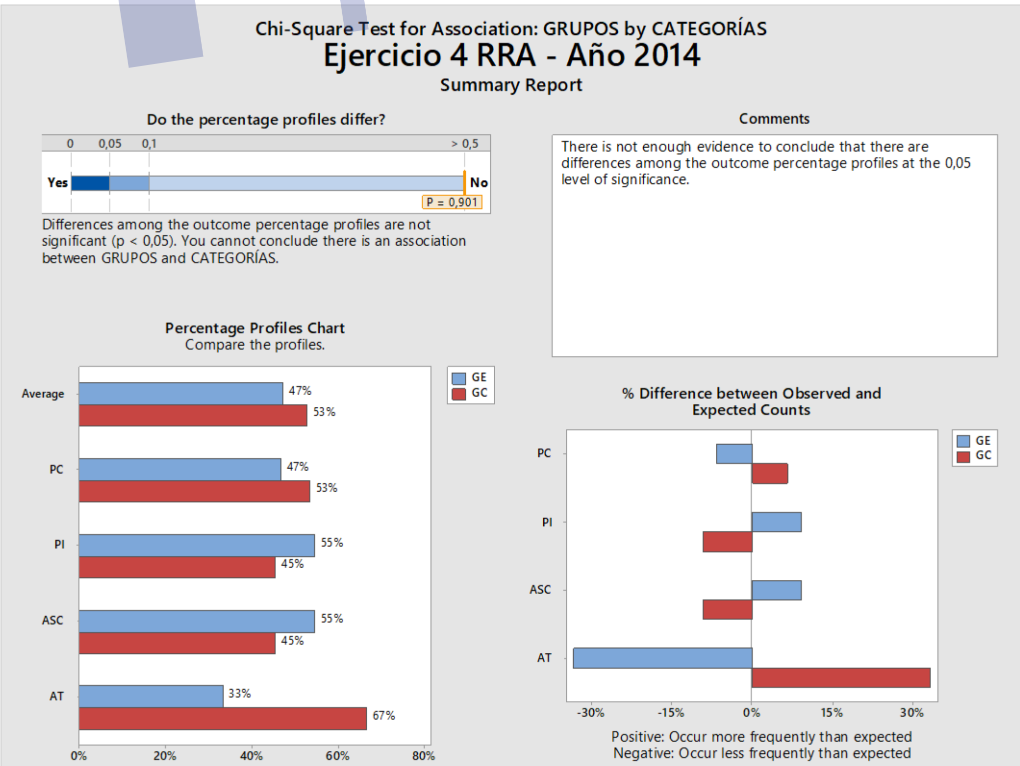


Figura 87: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 4 RRA Año 2014

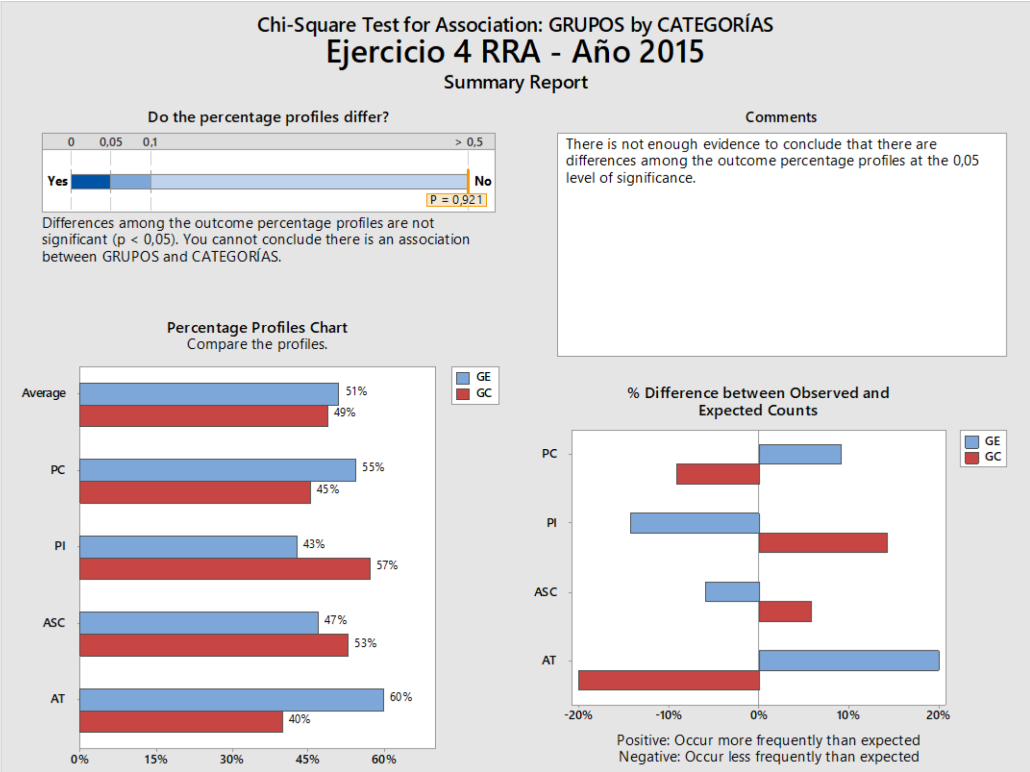


Figura 88: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 4 RRA Año 2015

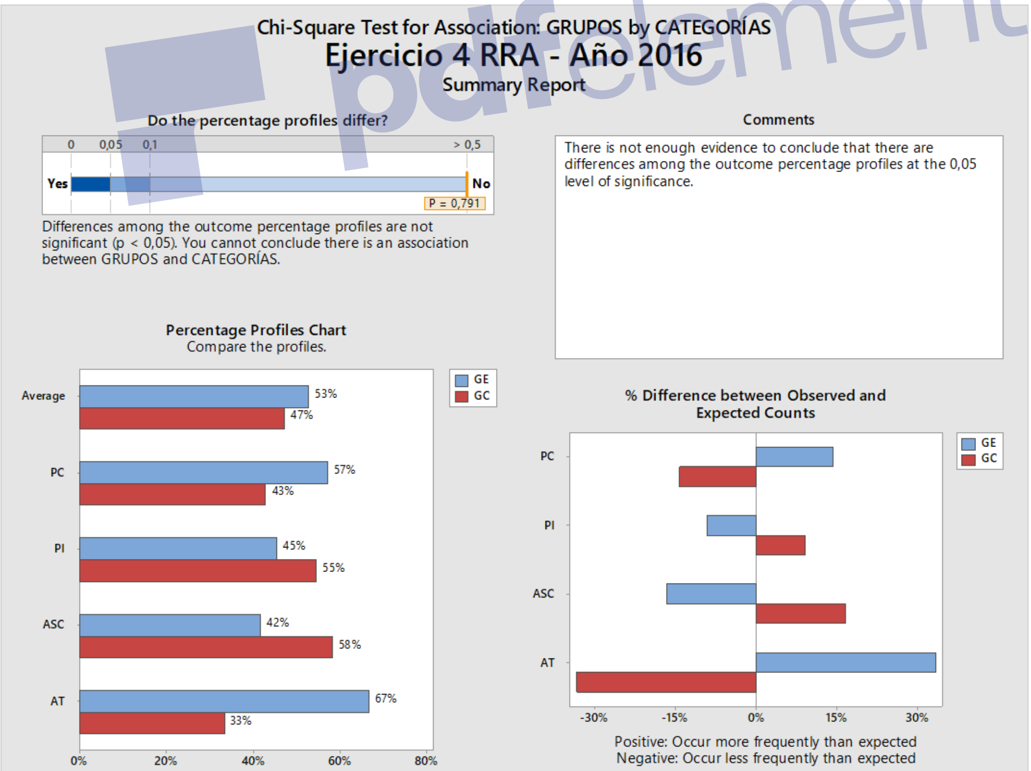


Figura 89: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 4 RRA Año 2016

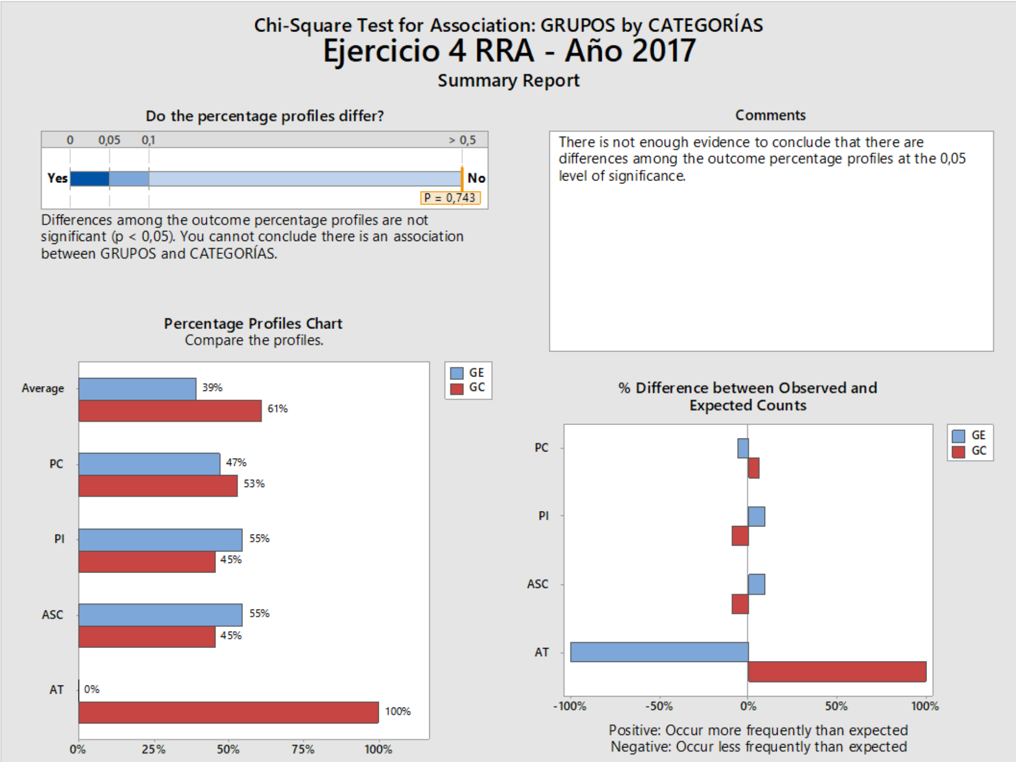


Figura 90: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 4 RRA Año 2017

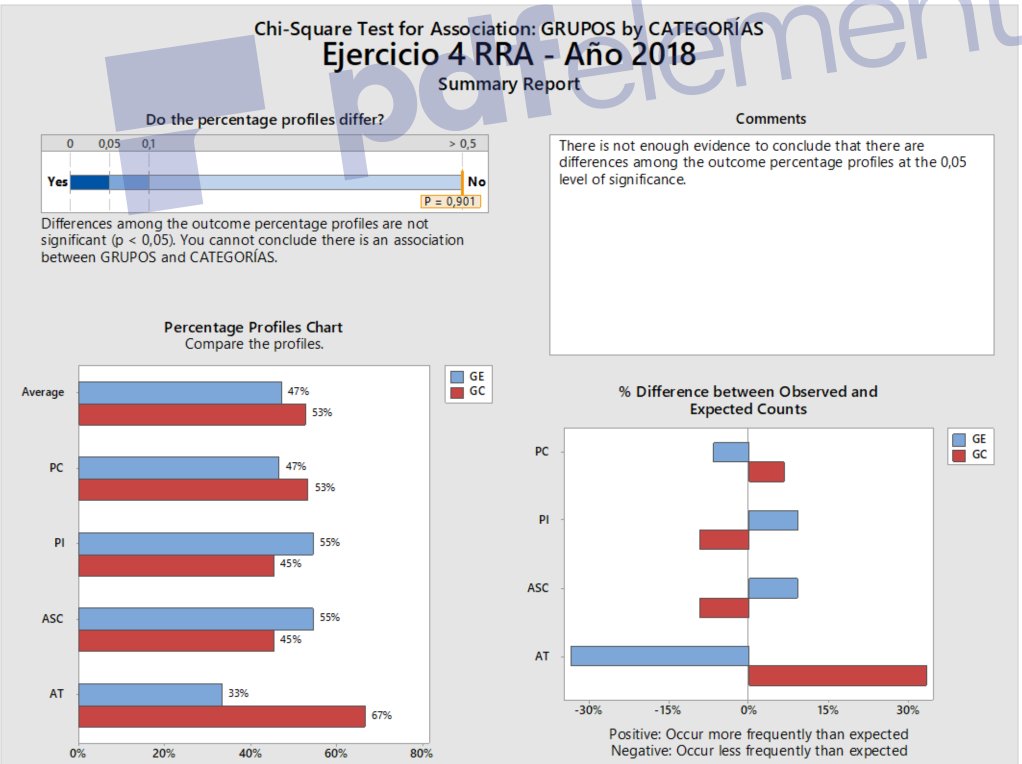


Figura 91: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 4 RRA Año 2018

V.16.3. Análisis de Datos correspondientes al Ejercicio 4 RRA

El análisis de datos correspondiente a este ejercicio no difiere del correspondiente al realizado en 5.15.3.

V.17. Datos correspondientes al Ejercicio 1 RPoC

V.17.1. Categorías emergentes

Las categorías emergentes son las siguientes: EI: Empirismo ingenuo; PC: Prueba Consumada; IPF: Intento de prueba fallido; AT: Ausencia de trabajo y aparece una nueva denominada PCI: Prueba Consumada Inconsistente.

La categoría emergente PCI aglutina las frecuencias de los estudiantes que realizaron la prueba, pero de una manera miméticaa otras que seguramente realizaron en clase procediendo del modo siguiente, pero sin la argumentación, justificación o explicación que sostenga la secuencia de prueba realizada.

$$x < y \Rightarrow x - y < 0 \Rightarrow (x-y)(x+y) > 0 \Rightarrow x^2 - y^2 > 0 \Rightarrow x^2 > y^2$$

Puede observarse que el estudiante 'arranca' de la hipótesis, realiza el pasaje correspondiente en la segunda cadena argumentativa, y en la tercera por 'razones desconocidas' realiza una inversión en el signo de la desigualdad, 'como por arte de magia', y luego la continuación del esquema argumentativo es simple pero el momento clave precisamente es el anteriormente descripto y requiere de una justificación que, en caso de obviarse, la prueba carece de validez.

IPF: Intento de Prueba Fallido. Esta categoría emergente tiene las mismas características que en ejercicios anteriores. El procedimiento aquí desarrollado por los estudiantes muestra situaciones que incurren en obstáculos propios de álgebra elemental y llegan a una falsa conclusión, mientras que otros realizan una argumentación consistente que intenta llegar a una conclusión, pero que queda 'trunca', como se indican a continuación:

$$x < y \Rightarrow x - y < 0 \Rightarrow x^2 - y^2 > 0 \Rightarrow x^2 > y^2$$

$$x < y \Rightarrow x - y < 0 \Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 < 0 \Rightarrow x^2 + y^2 < 2xy$$

V.17.2. Tabla de frecuencias correspondiente al Ejercicio 1 RPoC

AÑO	2013		2014		2015		2016		2017	
GRUPO	GE	GC	GE	GC	GE	GC	GE	GC	GE	GC
EI	1	12	3	11	1	9	1	10	1	11
PC.c/s.just.*	5	0	1	0	2	0	3	0	2	0
PC	5	0	1	0	2	0	3	0	2	0
PCI	10	2	2	0	8	1	9	2	11	1
IPF	2	5	11	5	5	7	4	6	5	7
AT	2	1	3	4	4	3	3	2	1	1
IHT	18	16	20	17	19	15	17	16	20	18

Tabla 16 de frecuencias correspondientes al Ejercicio 1 RPoC

V.17.3. Test de hipótesis correspondiente al Ejercicio 1 RPoC

Se detallan a continuación gráficos con los datos asociados a las pruebas de hipótesis.

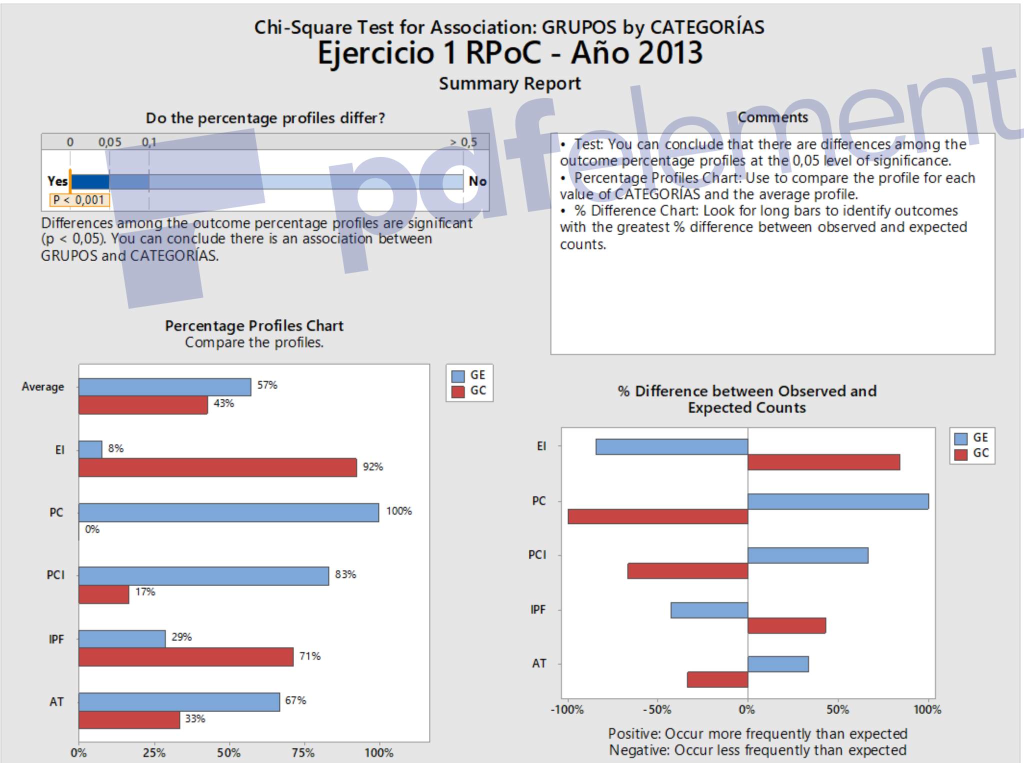


Figura 92: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 1 RPoC Año 2013

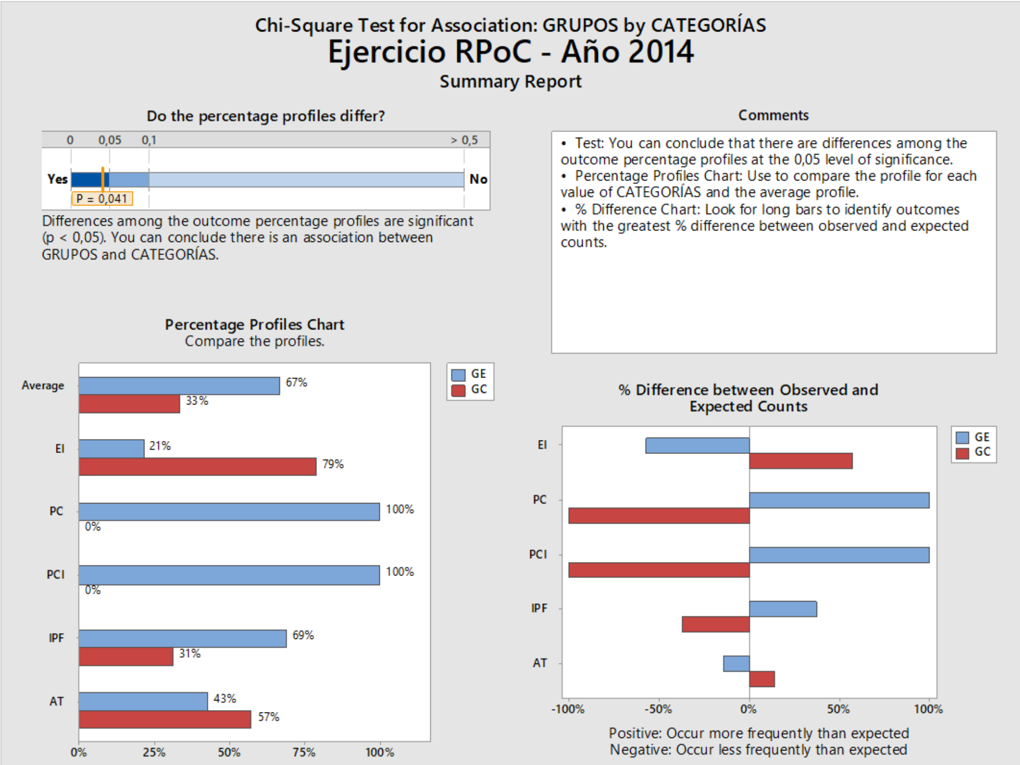


Figura 93: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 1 RPoC Año 2014

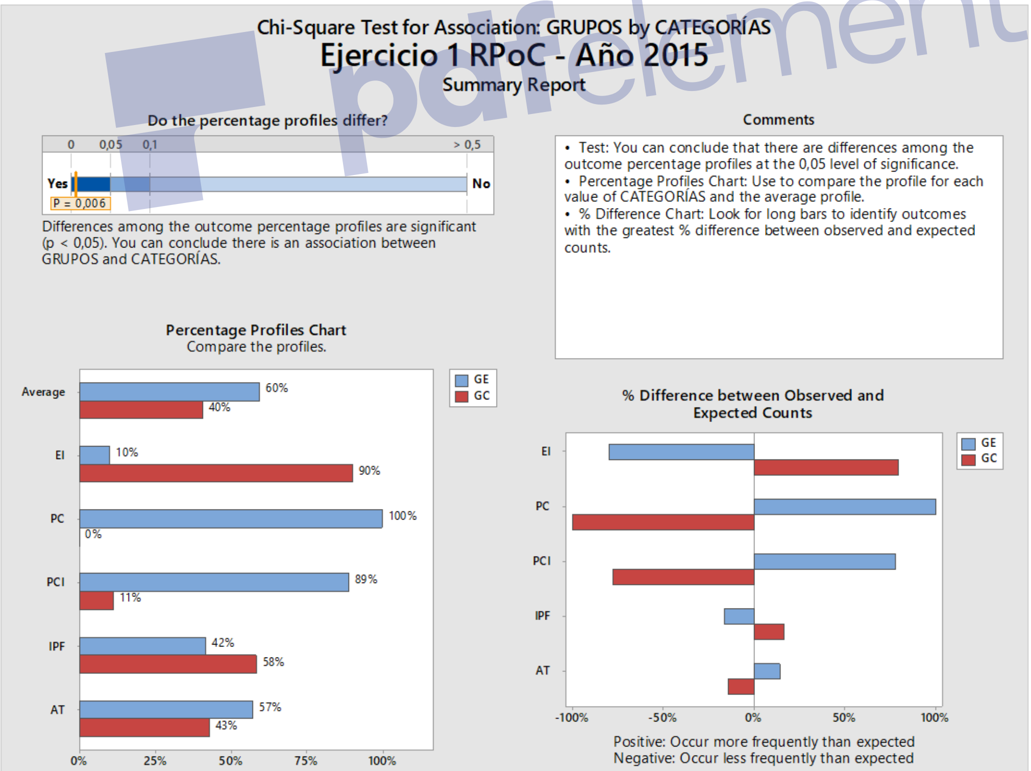


Figura 94: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 1 RPoC Año 2015

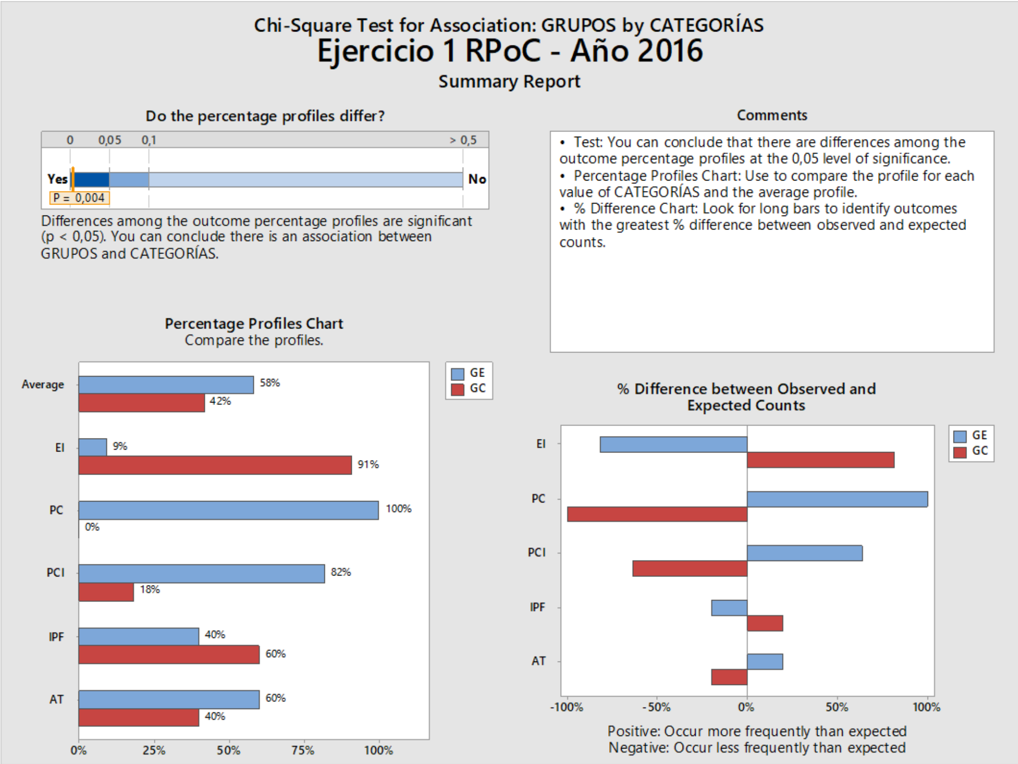


Figura 95: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 1 RPoC Año 2016

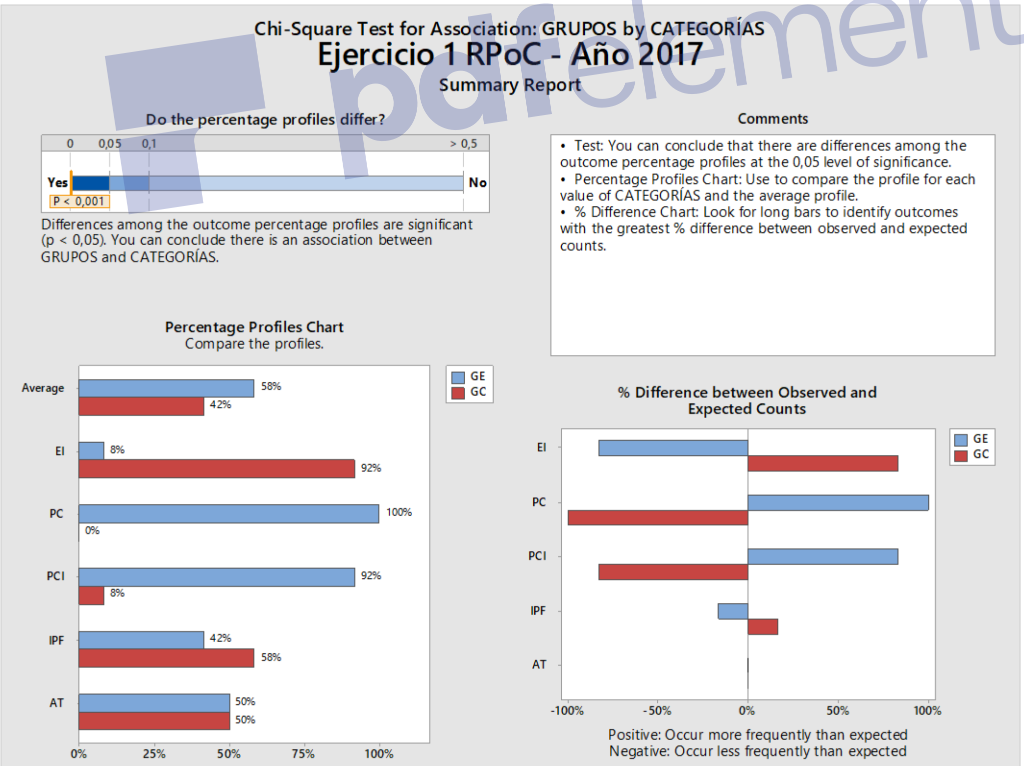


Figura 96: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 1 RPoC Año 2017

V.17.4. Análisis de datos correspondiente al Ejercicio 1 RPoC

Se formulan a continuación las hipótesis nula y alternativa, respectivamente, a los efectos de poder extraer una conclusión de las precedentes pruebas de hipótesis.

Hipótesis nula: La formación recibida y el paradigma de enseñanza y aprendizaje experimentado por dos grupos de estudiantes diferentes reacciona de igual forma frente a la propuesta de una prueba matemática que requiere un razonamiento plausible o conjetural.Hipótesis alternativa: La formación recibida y el paradigma de enseñanza y aprendizaje experimentado por dos grupos de estudiantes diferentes reacciona de forma distinta frente a la propuesta de una prueba matemática que requiere un razonamiento plausible o conjetural.

Las pruebas de hipótesis realizadas sobre este ejercicio permiten observar que, a lo largo de los cinco años, rechazan la hipótesis nula, evidenciando una diferencia en los grupos.

Se observa que, si bien existe diferencia entre los grupos, de forma similar a los ejercicios por reducción al absurdo (los dos primeros) y los ejercicios por inducción, hay pocos estudiantes que pudieron consumar la prueba, mayor frecuencia en GE que en GC. Hay muchísimos estudiantes de GE que realizaron la prueba tal como se describe en el párrafo anterior en referencia a la categoría emergente PCI. Un número similar de estudiantes en ambos grupos realizaron IPF y también AT en un número mucho menor. EI reaparece en este ejercicio y es dominante como prueba en GC y con una ínfima frecuencia en GE.

V.18. Datos correspondientes al <u>Ejercicio 2 RPoC</u>

V.18.1. Categorías Emergentes

Aquí la tabla de frecuencias difiere de la del Ejercicio 1 RPoC no apareciendo la categoría PCI y PC.c/s.just.*, esta última porque ninguno de los estudiantes de ninguno de los grupos realizó justificación alguna en la secuencia argumentativa de la prueba. Aparecen tres nuevas categorías emergentes a saber:

PCcH: Prueba consumada con heurística. En esta categoría se aglutinan las frecuencias de los estudiantes que realizaron la prueba partiendo desde el lado de la igualdad que corresponde a la tangente de la suma de dos ángulos y que se detalla su modo de prueba en IV.3.5. pág.122.

PCsH: Prueba consumada sin heurística. En esta categoría se aglutinan las frecuencias de los estudiantes que realizaron la prueba partiendo desde el lado de la igualdad de la suma de las tangentes y que su desarrollo es lineal y no requiere heurística alguna y donde el detalle de su modo de prueba se encuentra en el pie de página 118 en IV.3.6.

PRI: Prueba reducida a una identidad. En esta categoría se aglutinan las frecuencias de los estudiantes que realizaron la prueba desarrollándola como la verificación de una identidad, como se detalla a continuación:

$$\frac{tg(\alpha)+tg(\beta)}{1-tg(\alpha).tg(\beta)}=tg(\alpha+\beta)\Leftrightarrow\frac{\frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)}+\frac{sen(\beta)}{cos(\beta)}}{1-\frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)}\frac{sen(\beta)}{cos(\beta)}}=tg(\alpha+\beta)\Leftrightarrow$$

$$\frac{\frac{sen(\alpha).cos(\beta)+cos(\alpha).sen(\beta)}{cos(\alpha).cos(\beta)}}{\frac{cos(\alpha).cos(\beta)-sen(\alpha)sen(\beta)}{cos(\alpha).cos(\beta)}}=tg(\alpha+\beta)\leftrightarrow\Leftrightarrow\frac{sen(\alpha+\beta)}{cos(\alpha+\beta)}=tg(\alpha+\beta)$$

V.18.2. Tabla de frecuencias correspondiente al <u>Ejercicio 2 RPoC</u>

AÑO	**2013**		**2014**		**2015**		**2016**		**2017**	
GRUPO	**GE**	**GC**	**GE**	**GC**	**GE**	**GC**	**GE**	**GC**	**GE**	**GC**
EI	**1**	**5**	**1**	**7**	**1**	**5**	**2**	**5**	**1**	**5**
PCcH	**5**	**0**	**4**	**0**	**5**	**0**	**4**	**1**	**6**	**0**
PRI	**5**	**4**	**6**	**4**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**4**
PCsH	**5**	**8**	**7**	**7**	**6**	**8**	**6**	**8**	**6**	**9**
IPF	**3**	**2**	**4**	**1**	**2**	**1**	**2**	**1**	**1**	**1**
AT	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**

Tabla 17 de frecuencias correspondientes al Ejercicio 2 RPoC

Observación: La categoría IHT no aparece ya que ninguno de los estudiantes pudo hacer esa identificación. Esto se supone que puede deberse a que la estructura de esta propiedad no propone una forma tradicional, ya que presenta directamente una fórmula.

V.18.3. Test de hipótesis correspondiente al <u>Ejercicio 2 RPoC</u>

Se detallan a continuación los gráficos con los datos asociados a las pruebas de hipótesis del Ejercicio 2 RPoC.

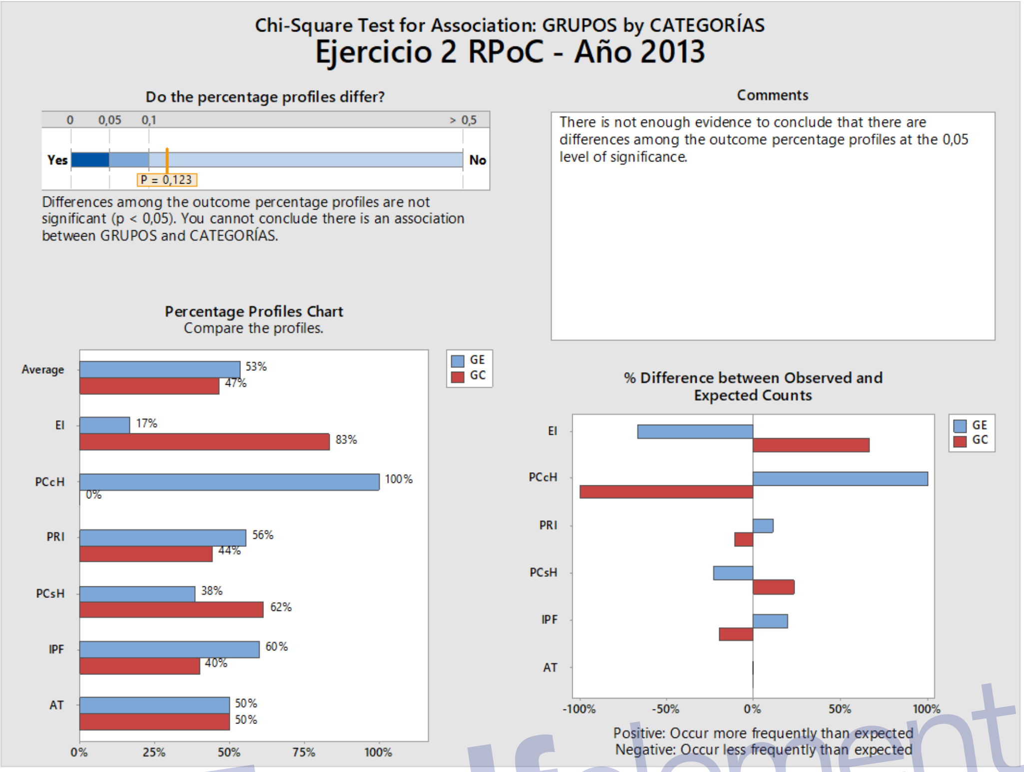


Figura 97: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 2 RPoC Año 2013

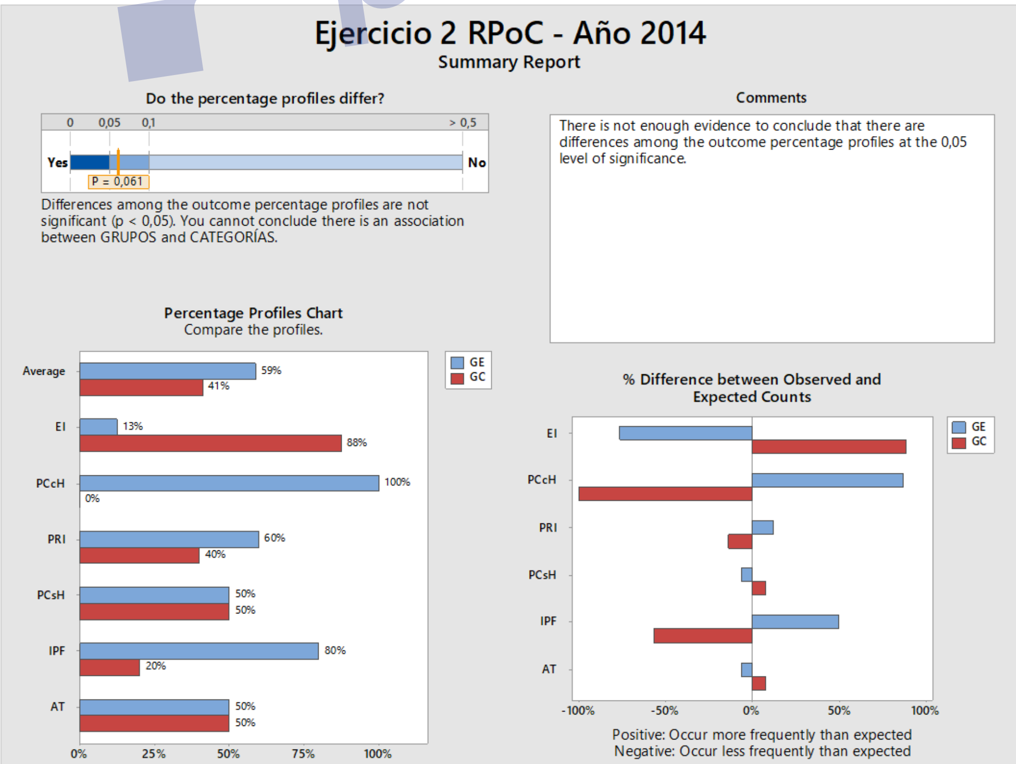


Figura 98: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 2 RPoC Año 2014

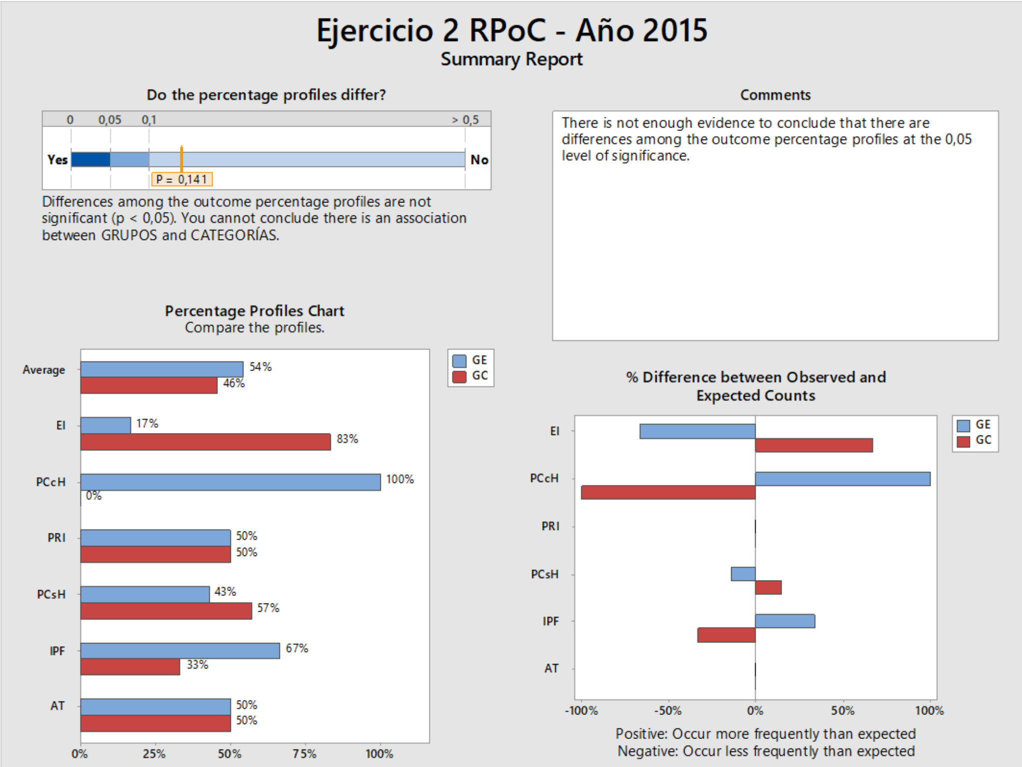


Figura 99: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 2 RPoC Año 2015

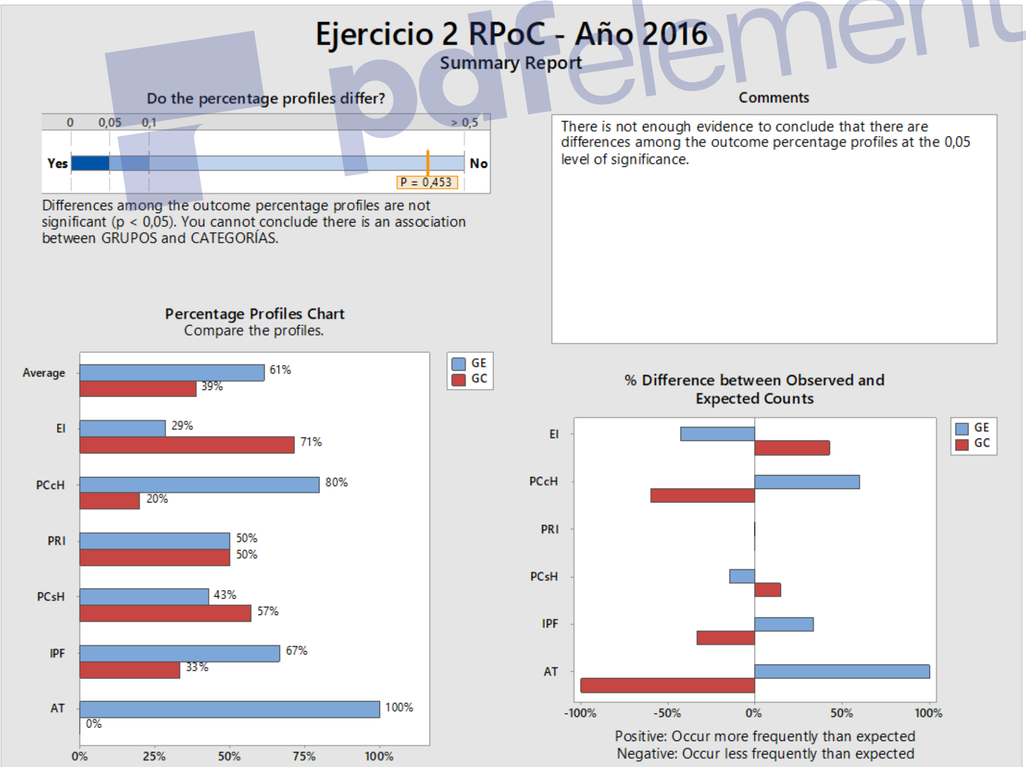


Figura 100: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 2 RPoC Año 2016

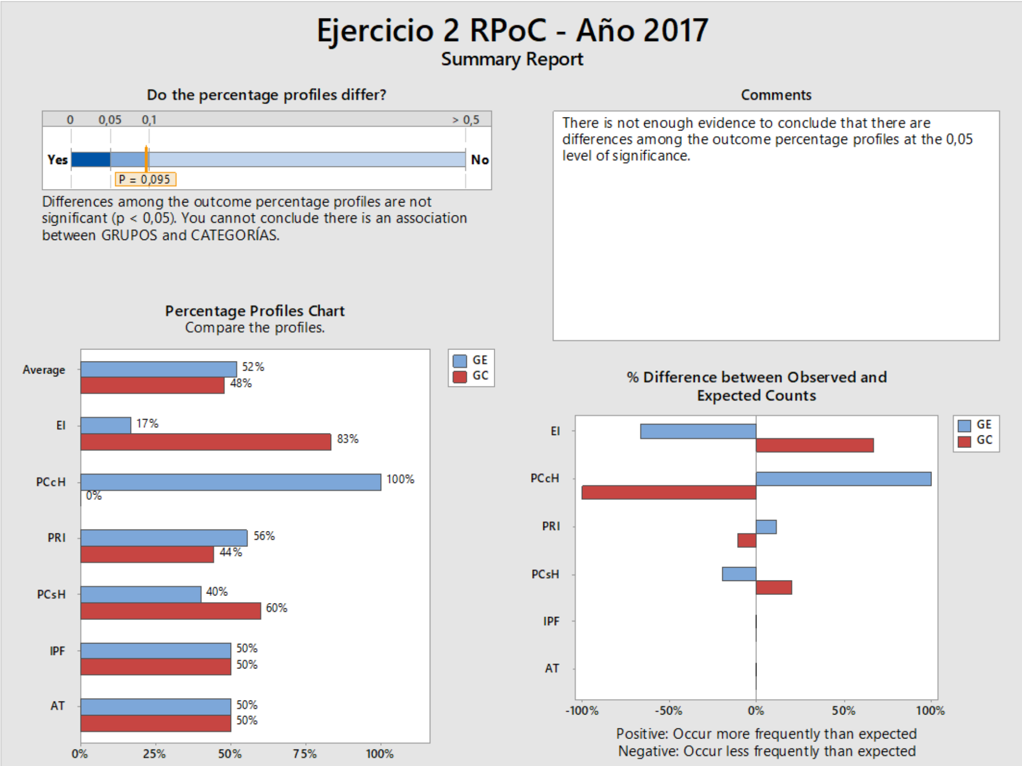


Figura 101: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 2 RPoC Año 2017

V.18.4. Análisis de datos correspondiente al Ejercicio 2 RPoC

Se formulan a continuación las hipótesis nula y alternativa, respectivamente, a los efectos de poder extraer una conclusión de las precedentes pruebas de hipótesis.

Hipótesis nula: La formación recibida y el paradigma de enseñanza y aprendizaje experimentado por dos grupos de estudiantes diferentes reacciona de igual forma frente a la propuesta de una prueba matemática que requiere un razonamiento plausible o conjetural.

Hipótesis alternativa: La formación recibida y el paradigma de enseñanza y aprendizaje experimentado por dos grupos de estudiantes diferentes reacciona de forma distinta frente a la propuesta de una prueba matemática que requiere un razonamiento plausible o conjetural.

Las pruebas de hipótesis realizadas sobre este ejercicio permiten observar que, a lo largo de los cinco años, no rechazan la hipótesis nula, no evidenciando diferencia en los grupos.Es claro no que hay diferencias, puede verse esto claramente en la tabla de frecuencias. Esta vez está distribuida la forma de probar. En GC predominó todos los años PCsH, no dándose en este grupo la categoría correspondiente PCcH. En GE, se distribuyen de forma equilibrada las frecuencias correspondientes a las categorías mencionadas. EI se manifiesta más en GC y menos en GE, mientras que la frecuencia en AT es mínima y equitativo en ambos grupos y todos los años, mientras que IPF se da un poco más los primeros años en GE, equiparándose en ambos grupos los tres últimos años.Interesante es ver que el GC trató de encontrarle la vuelta a la prueba desde el costado que no requiere heurística alguna y en el GE, a pesar de la Guía Secuenciada, también trataron de buscar otras vías de menor complejidad.Las justificaciones, tal como se expresó al comienzo de 5.18.1. estuvieron completamente ausentes por parte de ambos grupos. Cabe destacar que en este ejercicio, el procedimiento llevado a cabo por un importante número de estudiantes en ambos grupos mostró un camino diferente para la consecución de la prueba que escapó del camino de la heurística necesaria si la misma prueba se abordaba a partir de la tangente de la suma de dos ángulos.

V.19. Datos correspondientes al Ejercicio 3 RPoC

V.19.1. Tabla de frecuencias correspondiente al Ejercicio 3 RPoC

La tabla de frecuencias en este caso es muy similar a V.17.1. pero, sin la categoría emergente PCI. Aquí el estudiante o probó con un ejemplo o más o directamente consumó la prueba o realizó un intento de la misma de manera fallida.

AÑO	2013		2014		2015		2016		2017	
GRUPO	GE	GC	GE	GC	GE	GC	GE	GC	GE	GC
EI	2	10	1	9	1	12	1	11	1	9
PC.c/s.just.*	2/3	0/1	2/4	0/1	1/3	0/1	1/4	0/1	1/5	1/0
PC	5	1	6	1	4	1	5	1	6	1
IPF	10	6	9	6	10	5	9	5	8	6
AT	3	3	4	4	5	2	5	3	5	4
IHT	11	5	9	6	10	7	11	8	10	9

Tabla 18 de frecuencias correspondientes al Ejercicio 3 RPoC

V.19.2. Test de hipótesis correspondiente al Ejercicio 3 RPoC

Se detallan a continuación los gráficos con los datos asociados a las pruebas de hipótesis del Ejercicio 3 RPoC.

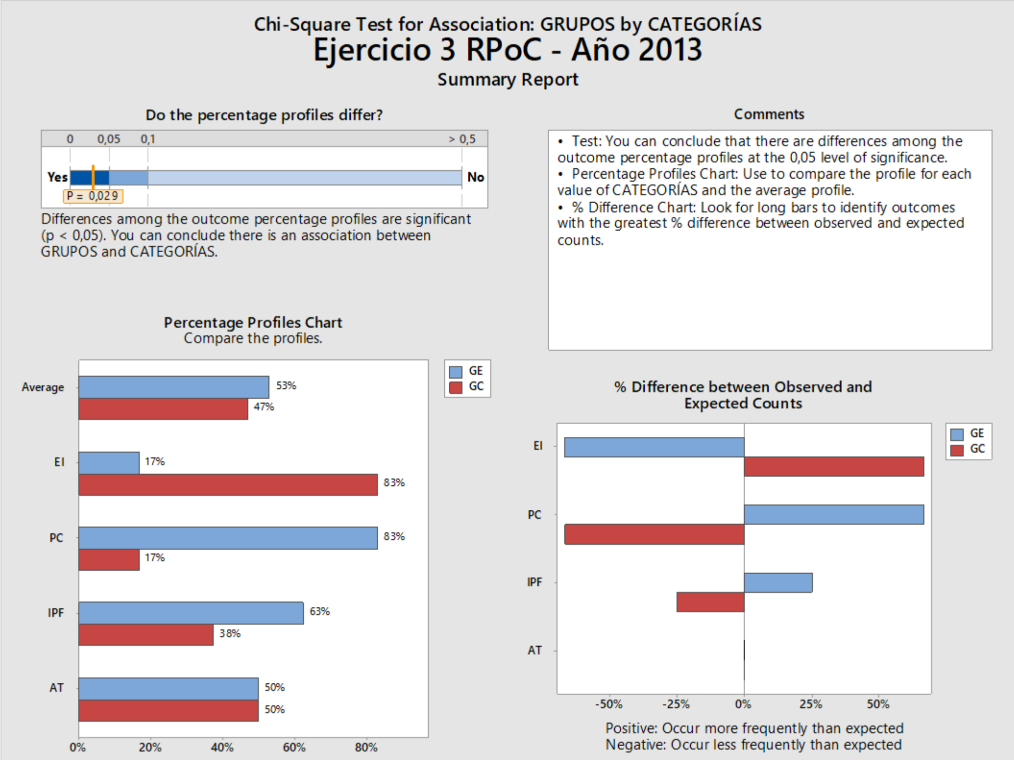


Figura 102: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 3 RPoC Año 2013

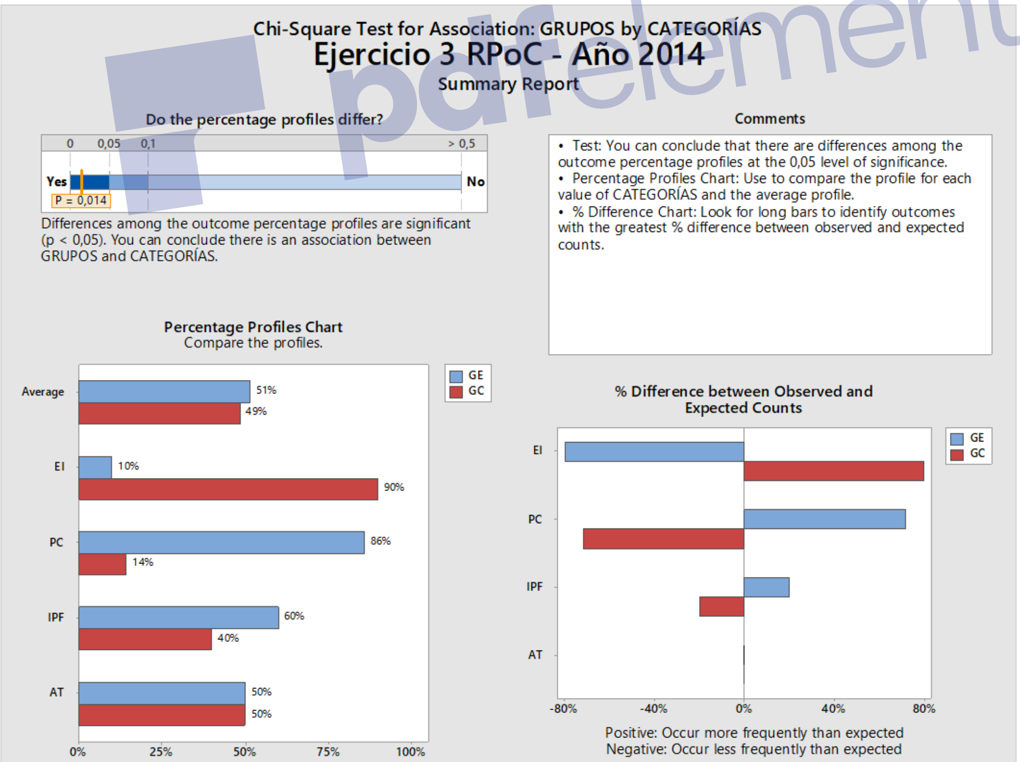


Figura 103: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 3 RPoC Año 2014

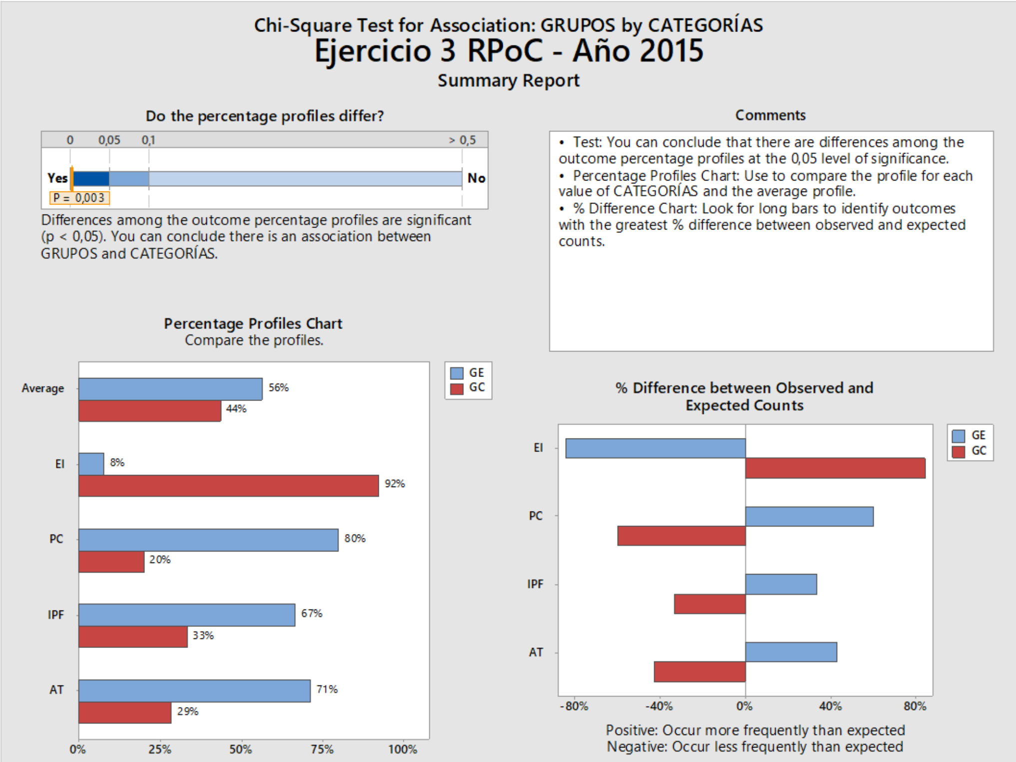


Figura 104: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 3 RPoC Año 2015

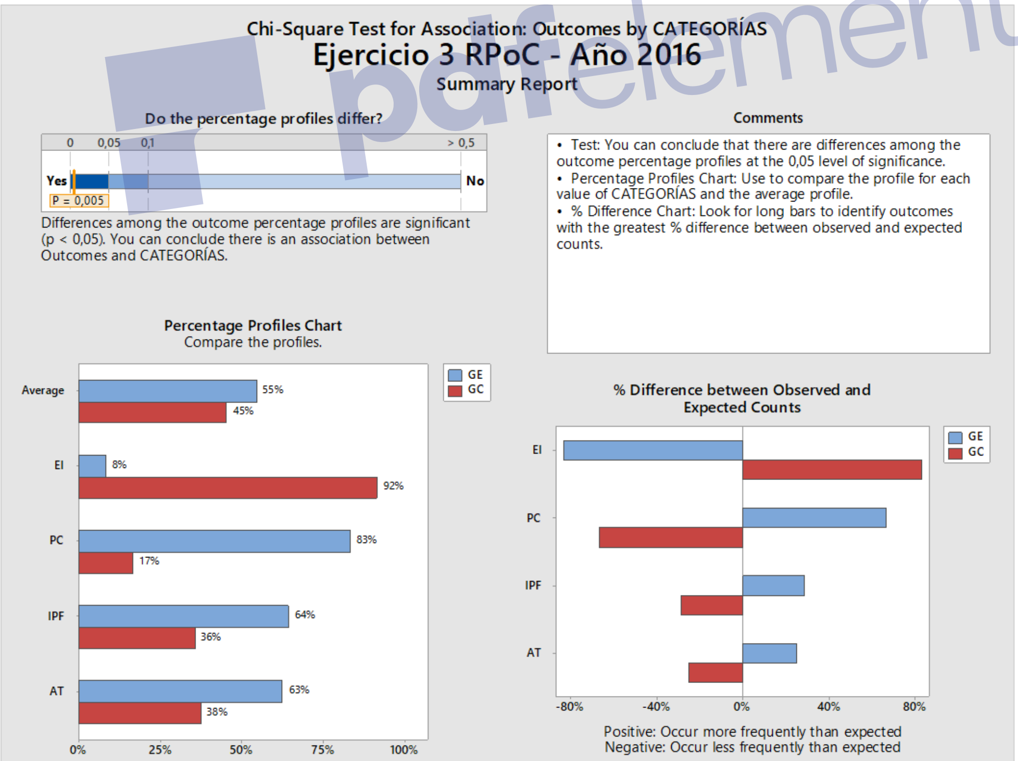


Figura 105: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 3 RPoC Año 2016

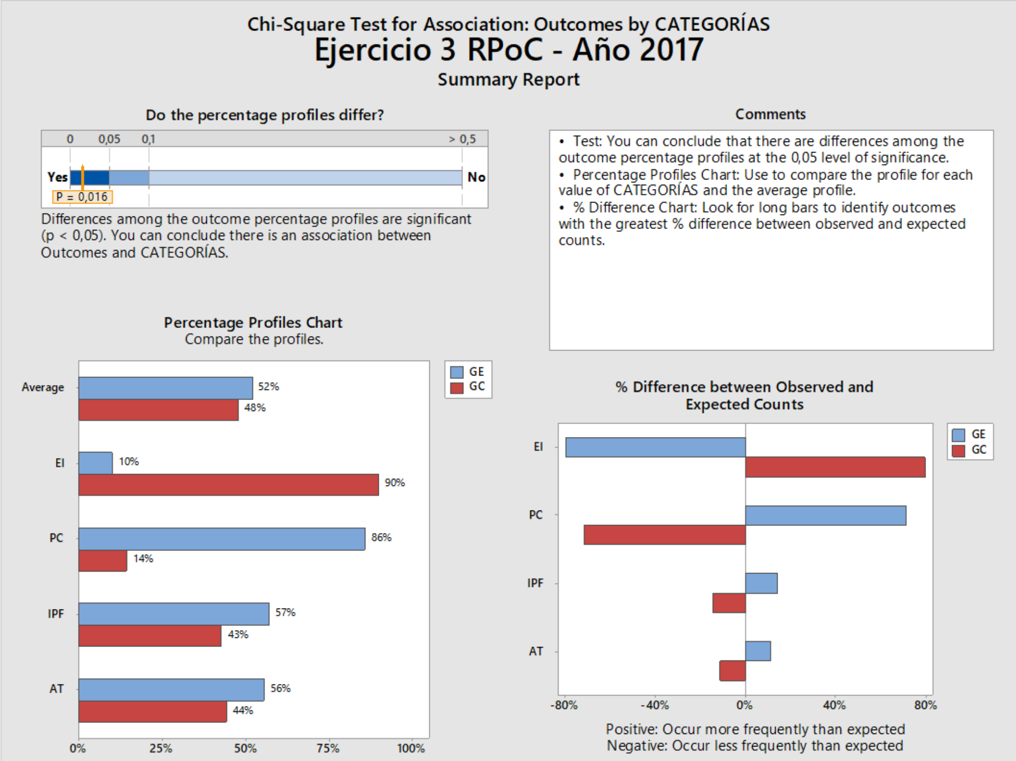


Figura 106: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 3 RPoC Año 2017

V.19.3. Análisis de datos correspondiente al Ejercicio 3RPoC

Se formulan a continuación las hipótesis nula y alternativa, respectivamente, a los efectos de poder extraer una conclusión de las precedentes pruebas de hipótesis.

Hipótesis nula: La formación recibida y el paradigma de enseñanza y aprendizaje experimentado por dos grupos de estudiantes diferentes reacciona de igual forma frente a la propuesta de una prueba matemática que requiere un razonamiento plausible o conjetural.

Hipótesis alternativa: La formación recibida y el paradigma de enseñanza y aprendizaje experimentado por dos grupos de estudiantes diferentes reacciona de forma distinta frente a la propuesta de una prueba matemática que requiere un razonamiento plausible o conjetural.

Las pruebas de hipótesisrealizadas sobre este ejercicio permiten observar que, a lo largo de los cinco años, rechazan la hipótesis nula, evidenciando diferencia en los grupos.

A pesar de que los grupos son diferentes, pero similarmente al Ejercicio 1 RPoC y los de inducción y absurdo (los dos primeros) son pocos los estudiantes que consumaron la prueba y en GE y en un porcentaje de aproximadamente de un 20% a 30% en los cinco años. En GC hubo un solo estudiante todos los años que hizo la prueba formal. Por otro lado, IPF en GE aproximadamente un 50% todos los años, mientras que en GC, se observa un porcentaje menor. EI fue el modo de prueba preferido para GC todos los años y en un porcentaje muchísimo menor lo fue para GE. AT fue equilibrado para ambos grupos en todos los años y en un porcentaje apreciable de aproximadamente un 20%.La identificación de hipótesis y tesis fue equitativa en ambos grupos y en todos los años. Esto puede suponerse que obedece a que la estructura del teorema no es tan tradicional y el estudiante ve solo el objetivo como protagonista y que es el álgebra de las derivadas, olvidando que la hipótesis postula la derivabilidad de las dos funciones intervinientes en el producto.

V.20. Datos correspondientes al Ejercicio 4 RPoC

V.20.1. Categorías emergentes

En este ejercicio aparecen una nueva categoría emergente y reaparece otra, ya conocida, con nuevas connotaciones y que tienen las siguientes características que se detallan a continuación.

EIF: Empirismo ingenuo fallido.

Esta categoría aglutina la frecuencia de todos los estudiantes que realizaron inadecuadamente la verificación. Realizar adecuadamente la verificación del teorema de Cauchy que propone este ejercicio requiere que se chequeen todas las hipótesis que postula el teorema para poder satisfacer la tesis del mismo. Los estudiantes que se encuadraron en esta categoría, usualmente lo que hicieron fue aplicar al ejemplo propuesto, la tesis que postula el teorema en cuestión sin el chequeo de las hipótesis.

PCI: Prueba Consumada incompleta.

En esta categoría emergente se encuadran todos los estudiantes que llegaron a la tesis y a probarla, pero omitiendo el chequeo de algunas de las hipótesis del teorema de Rolle, que se aplica a la función auxiliar que contiene la tesis. Usualmente lo que los estudiantes realizaron fue chequear que la función de la hipótesis asume imágenes iguales en los puntos de frontera del dominio de

definición de la función, ignorando la derivabilidad en el abierto y la continuidad en el cerrado.

V.20.2. Tabla de frecuencias correspondiente al Ejercicio 4 RPoC

AÑO	2013		2014		2015		2016		2017	
GRUPO	GE	GC	GE	GC	GE	GC	GE	GC	GE	GC
EI	2	1	2	1	2	1	1	1	1	1
EIF	0	6	0	6	0	8	0	9	0	8
PC.c/s.just.*	2/13	0/6	2/14	0/7	3/13	0/6	1/17	2/6	2/15	2/5
PC	5	1	6	1	7	1	6	1	7	1
PCI	10	5	10	6	9	5	12	7	10	6
IPF	1	4	1	4	1	4	1	1	1	2
AT	2	3	1	2	1	1	0	1	1	2
IHT	16	10	17	10	17	9	18	8	18	9

Tabla 19 de frecuencias correspondientes al Ejercicio 4 RPoC

V.20.3. Test de hipótesis correspondiente al Ejercicio 4 RPoC

Se detallan a continuación los gráficos con los datos asociados a las pruebas de hipótesis del Ejercicio 4 RPoC.

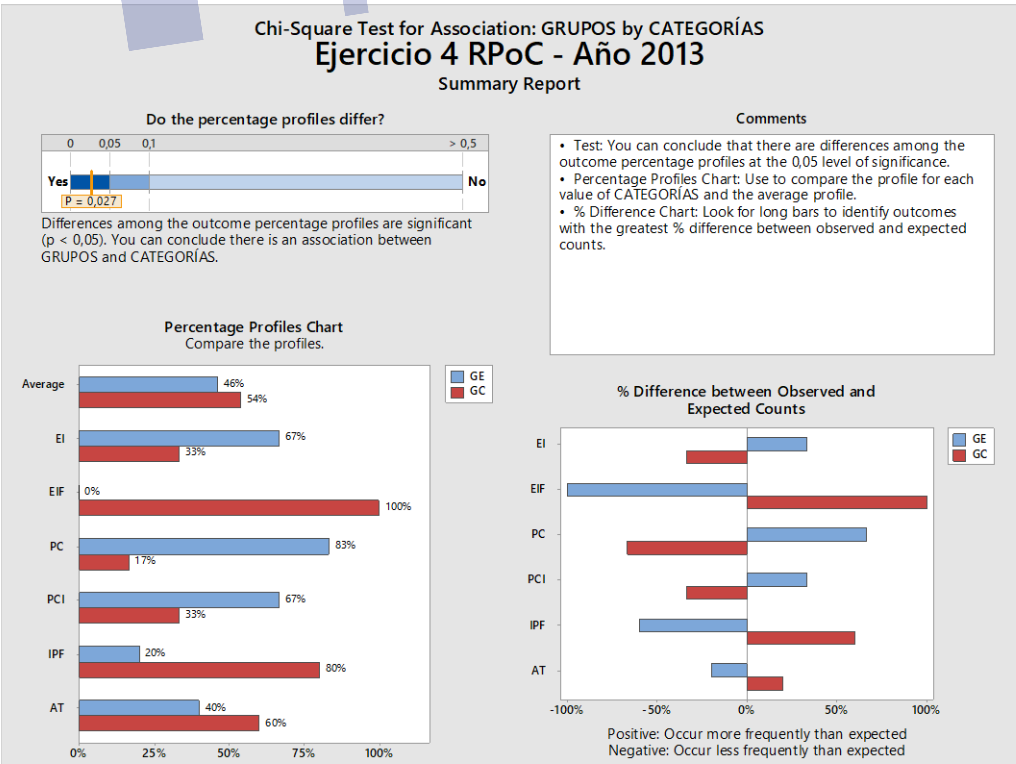


Figura 107: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 4 RPoC Año 2013

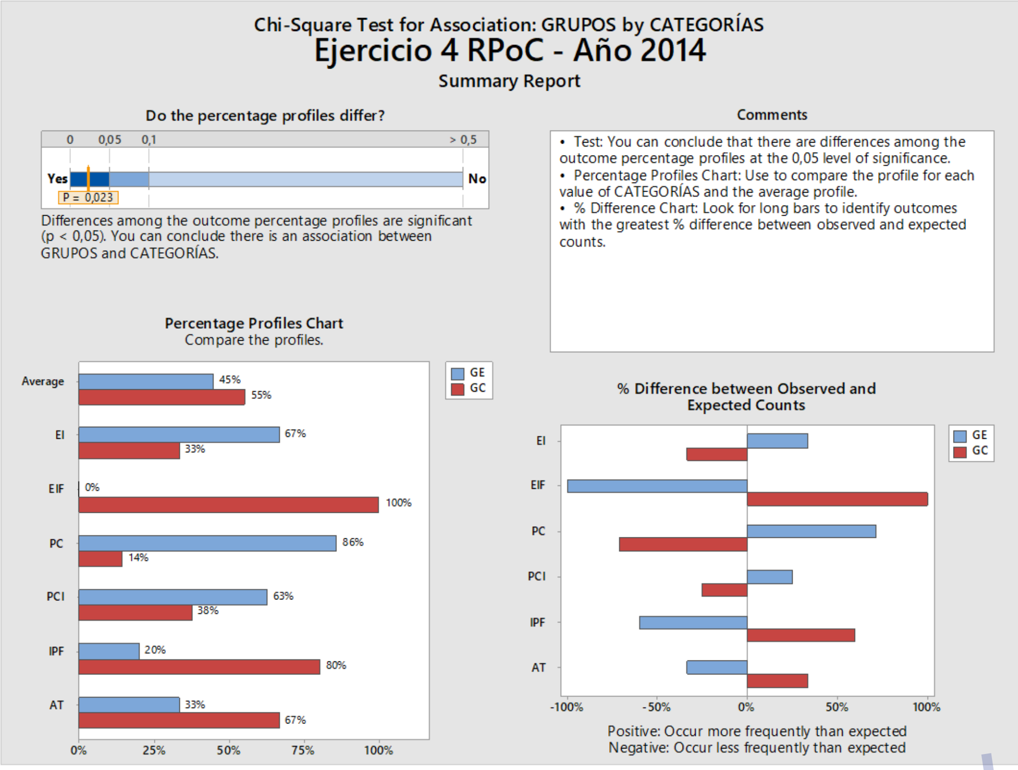


Figura 108: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 4 RPoC Año 2014

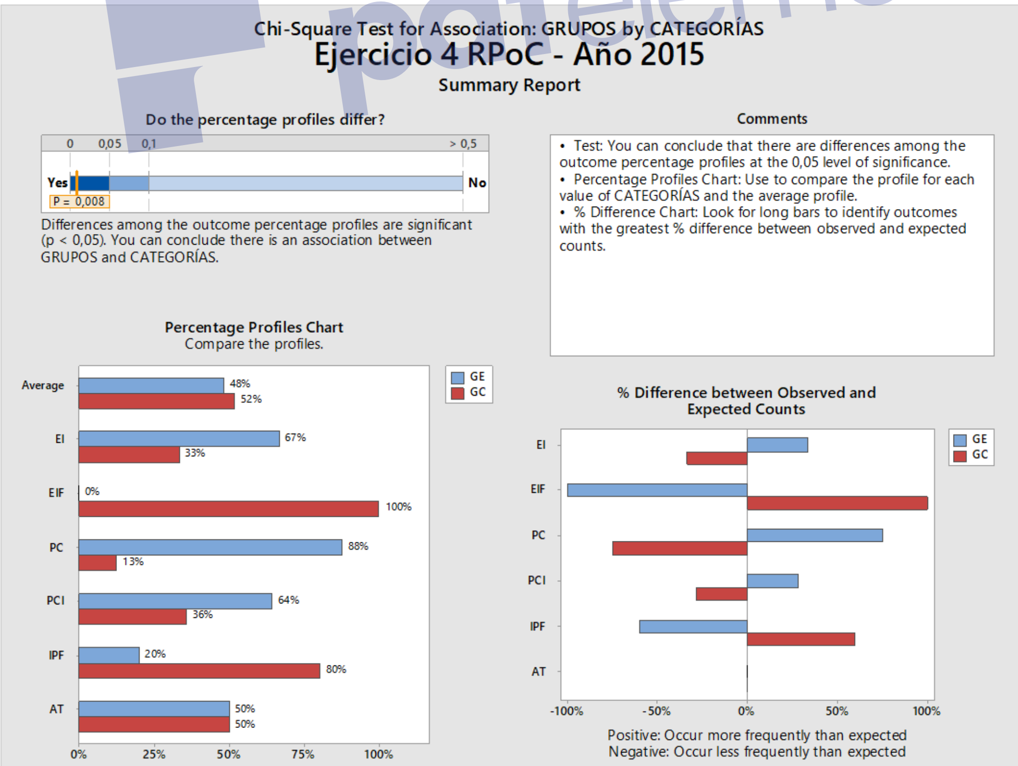


Figura 109: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 4 RPoC Año 2015

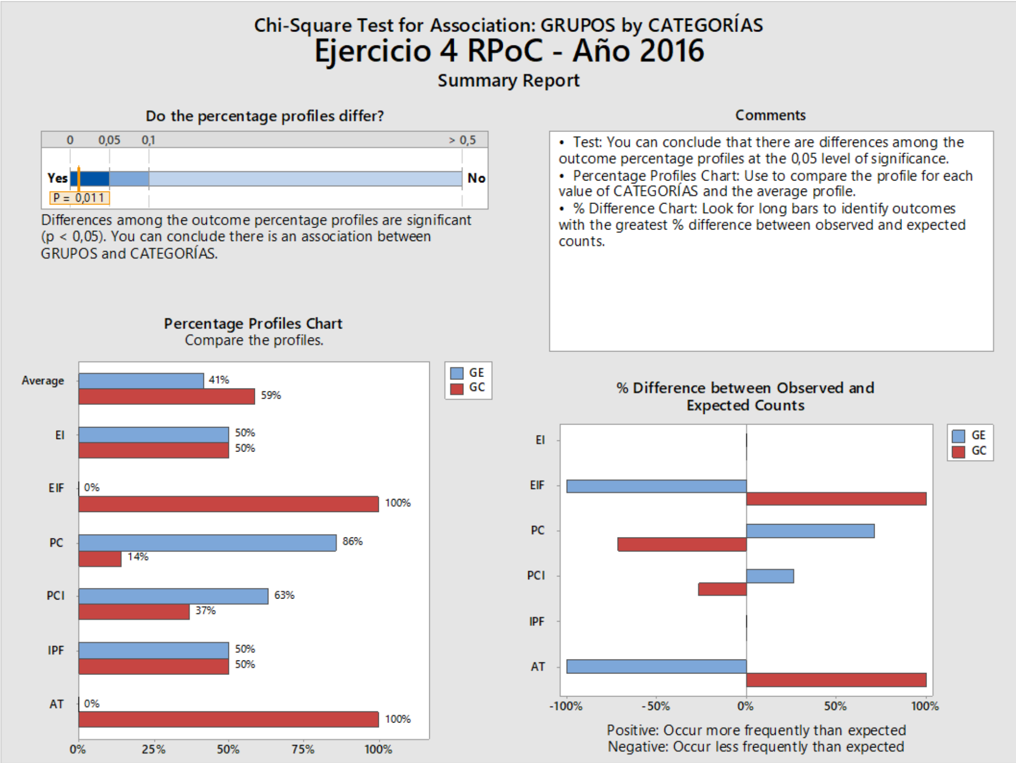


Figura 110: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 4 RPoC Año 2016

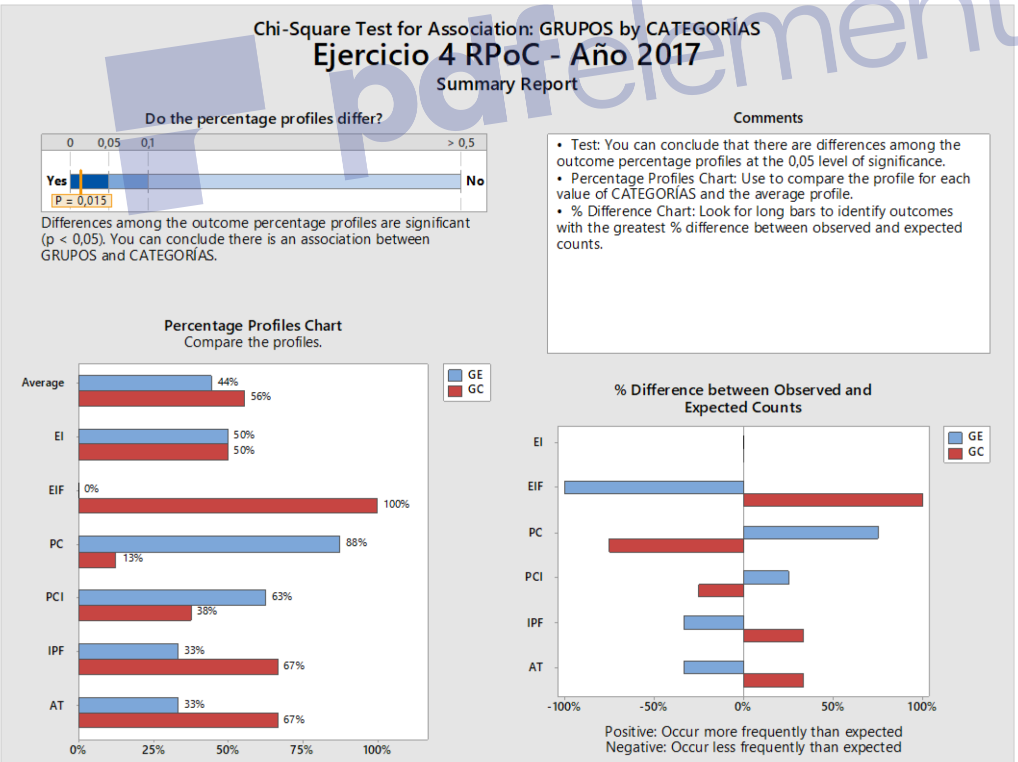


Figura 111: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 4 RPoC Año 2017

V.20.3. Análisis de datos correspondiente al Ejercicio 4 RPoC

Se formulan a continuación las hipótesis nula y alternativa, respectivamente, a los efectos de poder extraer una conclusión de las precedentes pruebas de hipótesis.

Hipótesis nula: La formación recibida y el paradigma de enseñanza y aprendizaje experimentado por dos grupos de estudiantes diferentes reacciona de igual forma frente a la propuesta de una prueba matemática que requiere un razonamiento plausible o conjetural. Hipótesis alternativa: La formación recibida y el paradigma de enseñanza y aprendizaje experimentado por dos grupos de estudiantes diferentes reacciona de forma distinta frente a la propuesta de una prueba matemática que requiere un razonamiento plausible o conjetural. Las pruebas de hipótesis realizadas sobre este ejercicio permiten observar que, a lo largo de los cinco años, rechazan la hipótesis nula, evidenciando diferencia en los grupos. La diferencia se resuelve en dos categorías relevantes: PC y PCI. En GE, PC obtuvo una frecuencia entre 20% y 30% todos los años, duplicándose aproximadamente la categoría PCI. En GC, resulta que en estas categorías estos resultados mencionados en GE se van a la mitad aproximadamente. EI es realizado por muy pocos estudiantes todos los años, superando ampliamente la categoría EIF especialmente en GC. IPF tiene muy poca frecuencia en ambos grupos, siendo un poco mayor los primeros años en GC mientras que AT estuvo equitativo y en mínimo porcentaje en ambos grupos. La identificación de hipótesis y tesis fue casi total en los dos grupos y en todos los años y aglutina las frecuencias de PC; PCI e IPF. Esto se supone que obedece a la riqueza de las hipótesis que posee este teorema, y que están muy ‘marcadas’ y diferenciadas como suele ocurrir en un ‘teorema tradicional’.

V.21. Ejercicio 1 RV

V.21.1. Categorías emergentes

Aquí aparecen las siguientes y únicas nuevas categorías emergentes.

PV: Prueba Visual. En esta categoría se aglutinan las frecuencias de todos los estudiantes que realizaron una prueba netamente visual acorde a lo desarrollado en el Capítulo 3, III.4.4., Ejemplo 4, página 70.

PF: Prueba formal. En esta categoría se aglutinan todos los estudiantes que realizaron la prueba de manera formal, ignorando cualquier argumento visual.

PC.c/s.just.*: Esta categoría no aparece porque ya sea en las categorías PV o PF, los estudiantes que realizaron PV para que esta sea efectiva, debe existir una ligera explicación que sostiene el diagrama visual. En el caso de PF, no se requiere ninguna justificación, directamente lo que se necesita es el desarrollo argumentativo, que habla por sí mismo.

V.21.2. Tabla de frecuencias correspondiente al Ejercicio 1 RV

AÑO	2013		2014		2015		2016		2017	
GRUPO	GE	GC	GE	GC	GE	GC	GE	GC	GE	GC
EI	1	1	1	1	2	1	1	1	0	1
PV	18	19	18	19	17	19	18	19	19	19
PF	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Tabla 20 de frecuencias correspondientes al Ejercicio 1 RV

V.21.3. Test de hipótesis correspondiente al Ejercicio 1 RV

Se detallan a continuación los gráficos con los datos asociados a las pruebas de hipótesis del Ejercicio 1 RV.

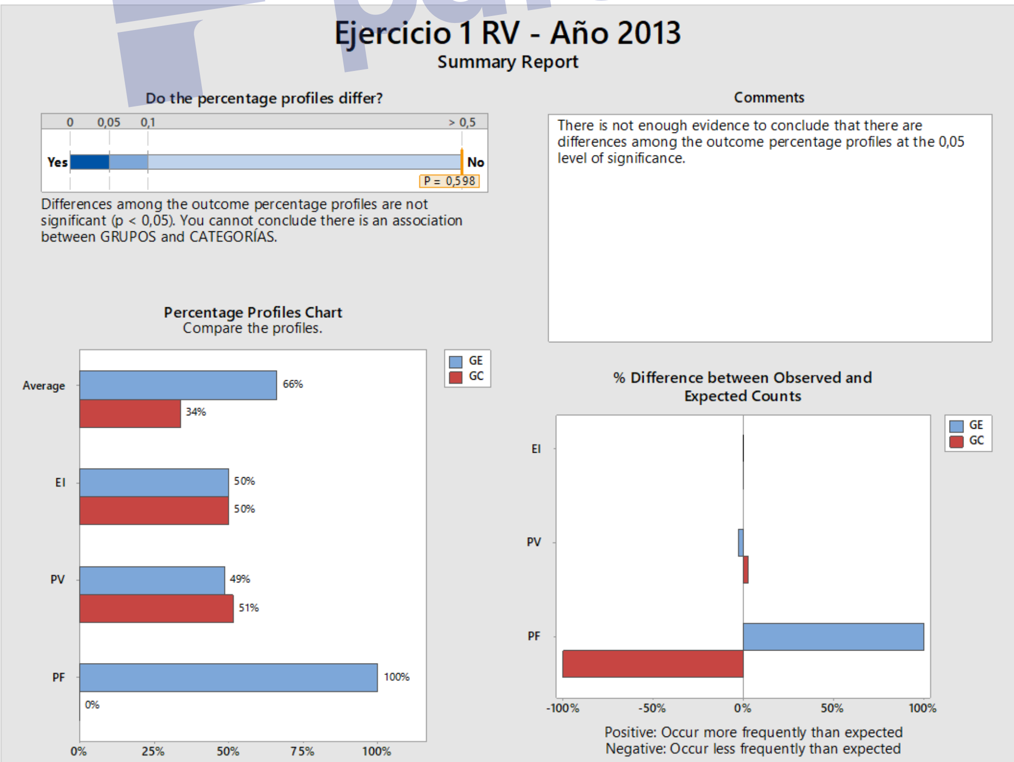


Figura 112: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 1 RV Año 2013

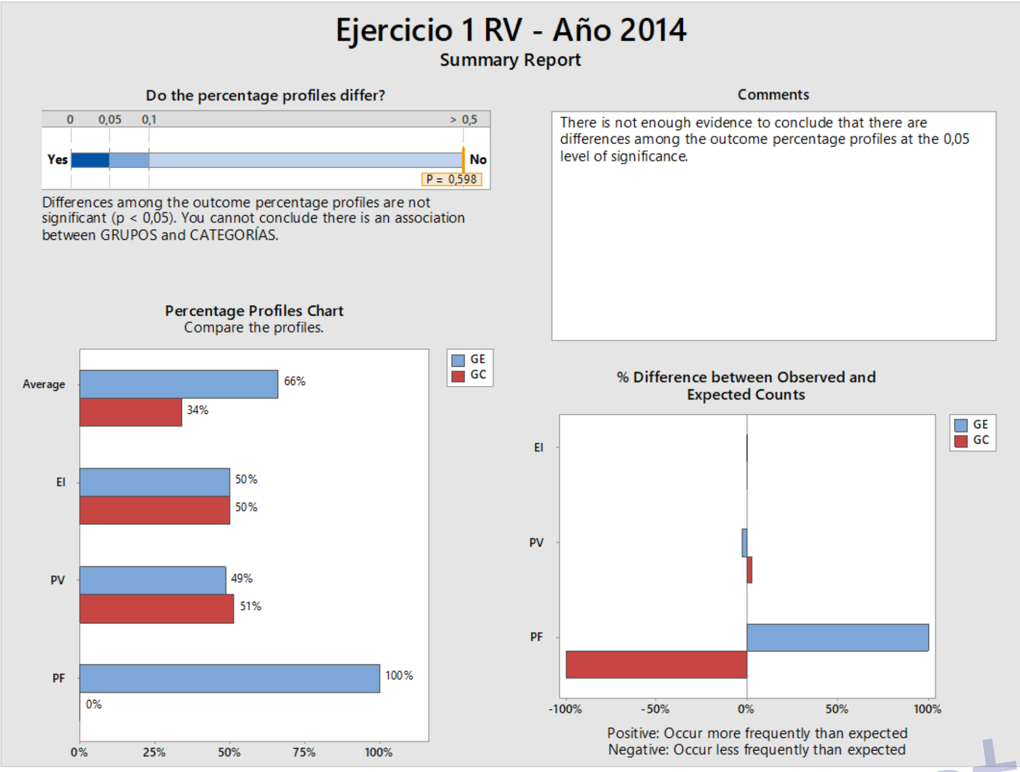


Figura 113: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 1 RV Año 2014

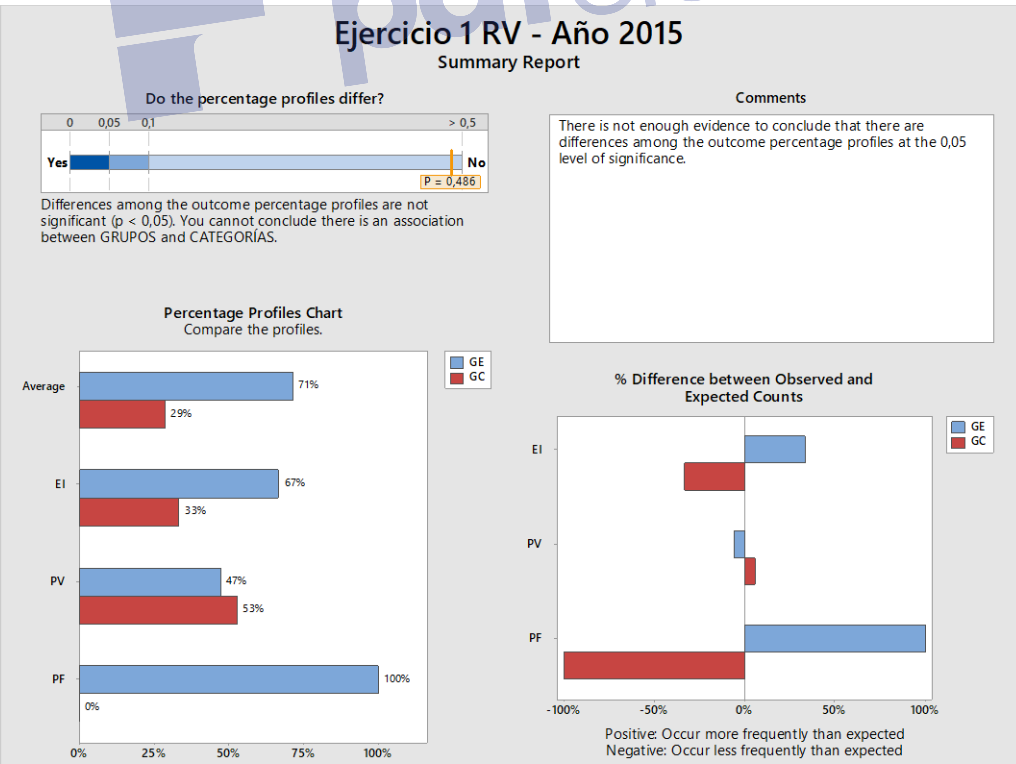


Figura 114: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 1 RV Año 2015

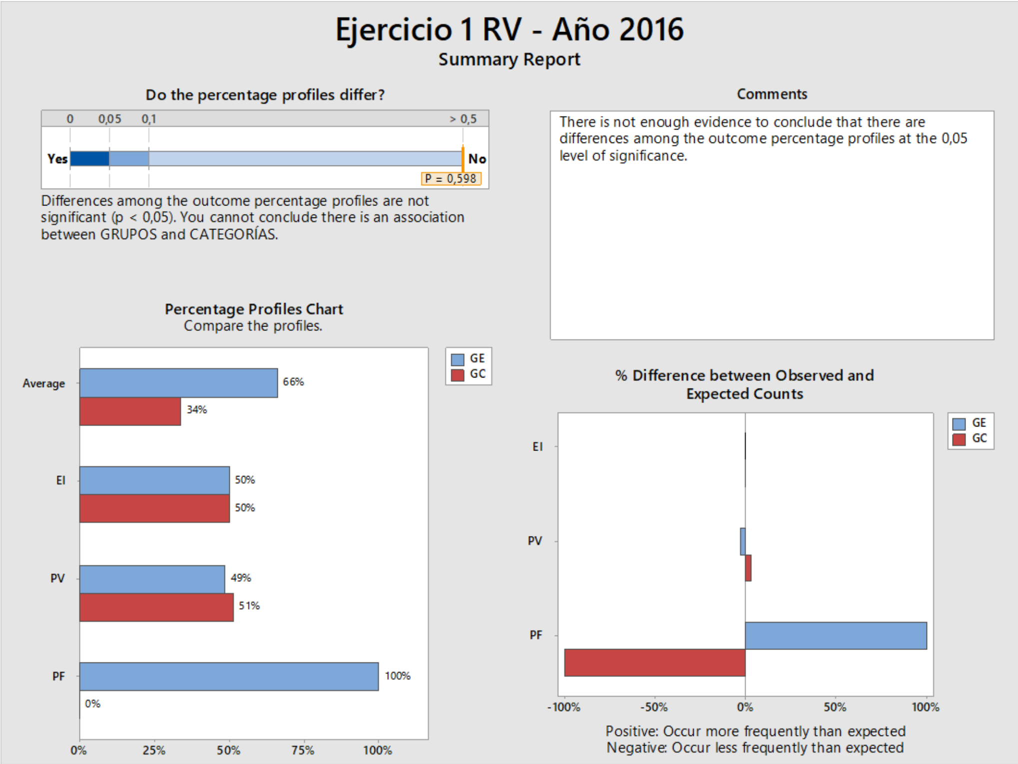


Figura 115: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 1 RV Año 2016

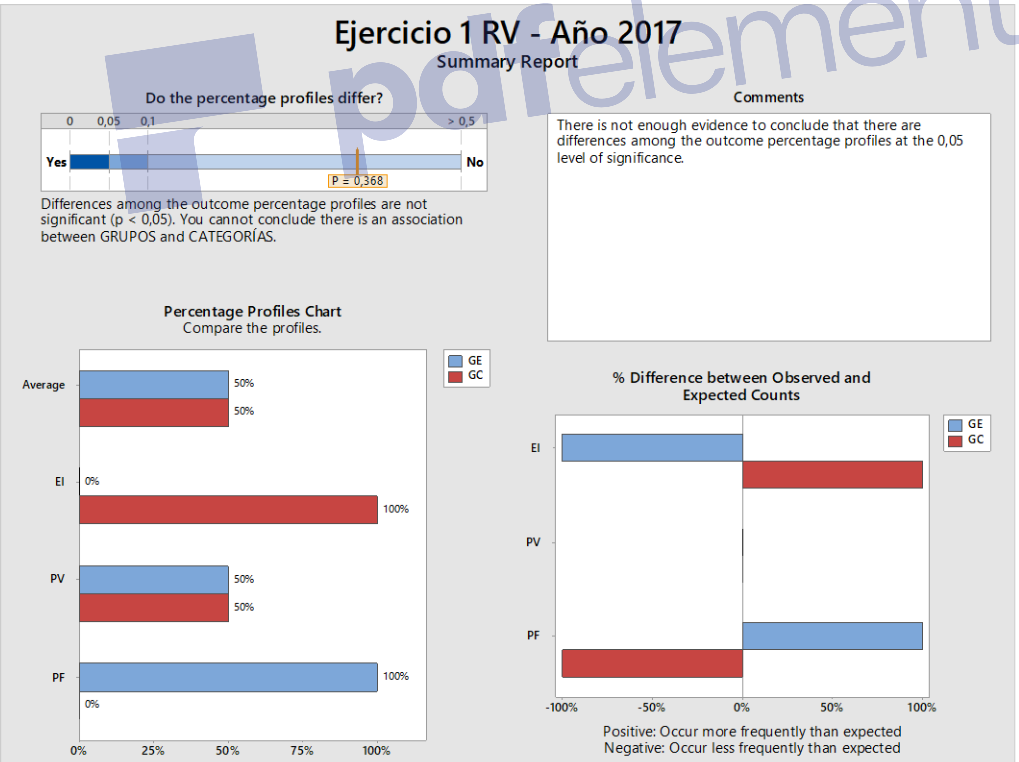


Figura 116: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 1 RV Año 2017

V.21.4. Análisis de datos correspondientes al Ejercicio 1 RV

Se formulan a continuación las hipótesis nula y alternativa, respectivamente, a los efectos de poder extraer una conclusión de las precedentes pruebas de hipótesis.

Hipótesis nula: La formación recibida y el paradigma de enseñanza y aprendizaje experimentado por dos grupos de estudiantes diferentes reacciona de igual forma frente a la propuesta de una prueba matemática que requiere un razonamiento visual.

Hipótesis alternativa: La formación recibida y el paradigma de enseñanza y aprendizaje experimentado por dos grupos de estudiantes diferentes reacciona de forma distinta frente a la propuesta de una prueba matemática que requiere un razonamiento visual.

Las pruebas de hipótesis realizadas sobre este ejercicio permiten observar que, a lo largo de los cinco años, no rechazan la hipótesis nula, no evidenciando diferencia en los grupos. Y esto es así y se evidencia en la tabla de frecuencias y luego se refleja en los datos obtenidos en las pruebas de hipótesis. Los dos grupos se desempeñan de forma similar, ya que ambos presentan una prueba visual como respuesta a la consigna propuesta por el ejercicio, solo un estudiante todos los años recurre a la prueba formal y uno o dos a lo sumo en alguno de los grupos al empirismo ingenuo.

V.22. Ejercicio 2 RV

V.22.1. Tabla de frecuencias correspondiente al Ejercicio 2 RV

La tabla de frecuencias y las categorías son idénticas a las desarrolladas en V.21.1.

AÑO	2013		2014		2015		2016		2017	
GRUPO	GE	GC	GE	GC	GE	GC	GE	GC	GE	GC
EI	1	1	0	1	0	1	0	1	0	2
PV	17	19	17	19	16	19	18	19	19	18
PF	2	0	3	0	4	0	2	0	1	0
IHT	20	18	19	17	20	20	19	18	19	17

Tabla 21 de frecuencias correspondientes al Ejercicio 2 RV

V.22.2. Test de hipótesis correspondiente al Ejercicio 2 RV

Se detallan a continuación los gráficos con los datos asociados a las pruebas de hipótesis del Ejercicio 2 RV.

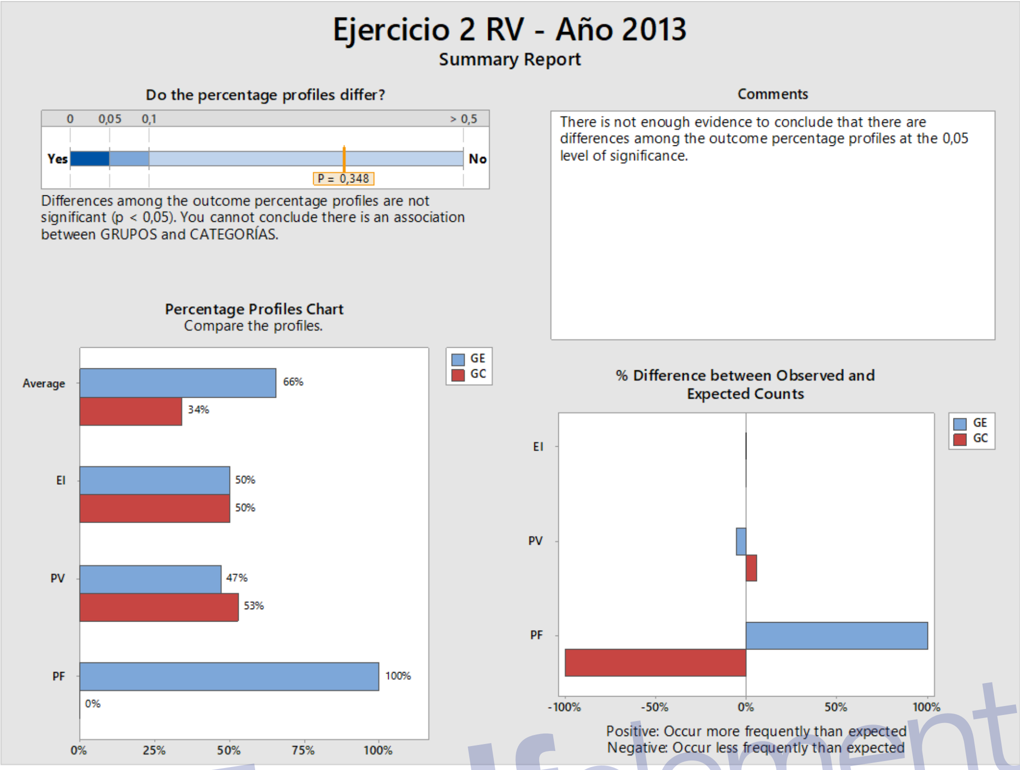


Figura 117: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 2 RV Año 2013

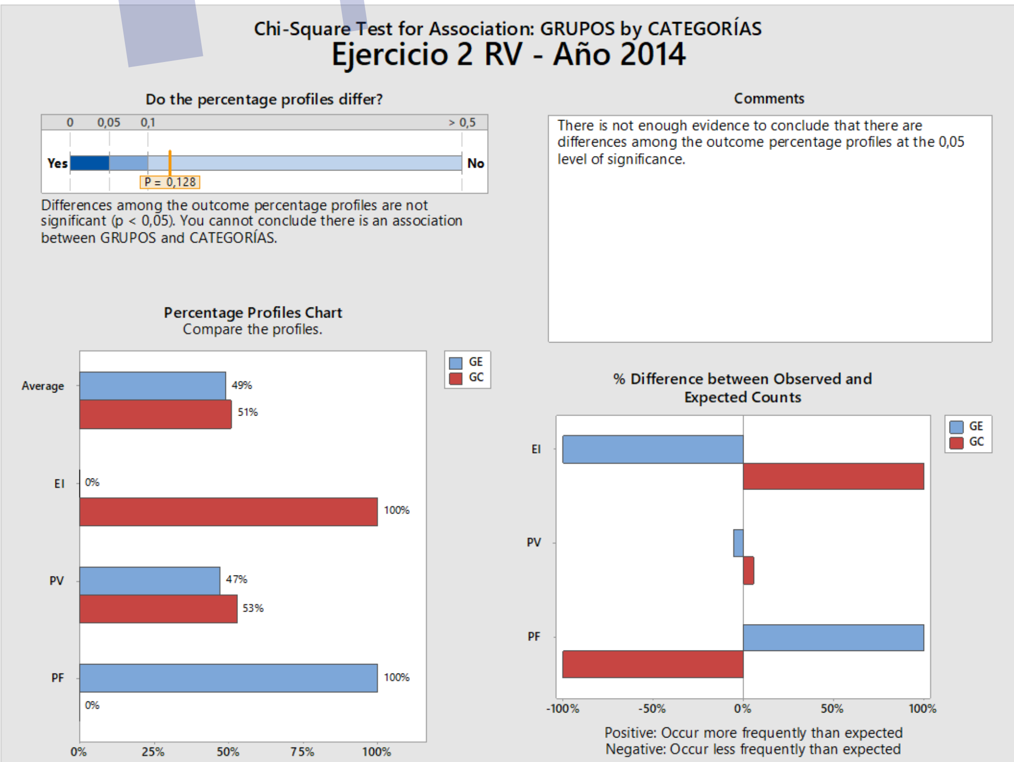


Figura 118: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 2 RV Año 2014

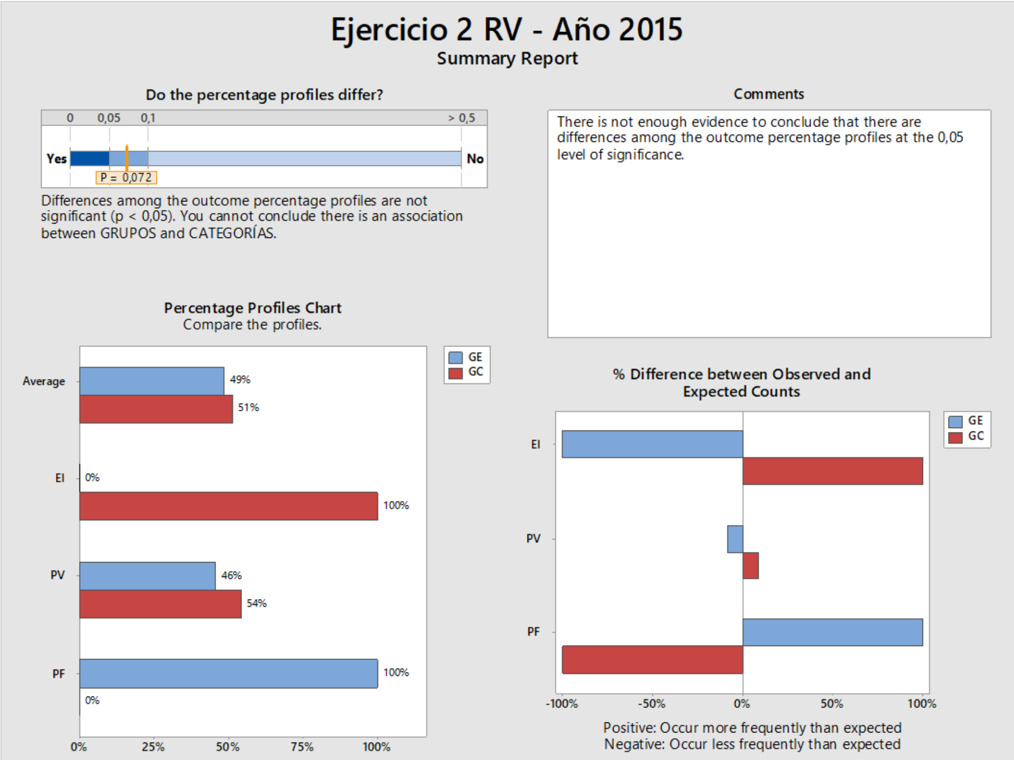


Figura 119: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 2 RV Año 2015

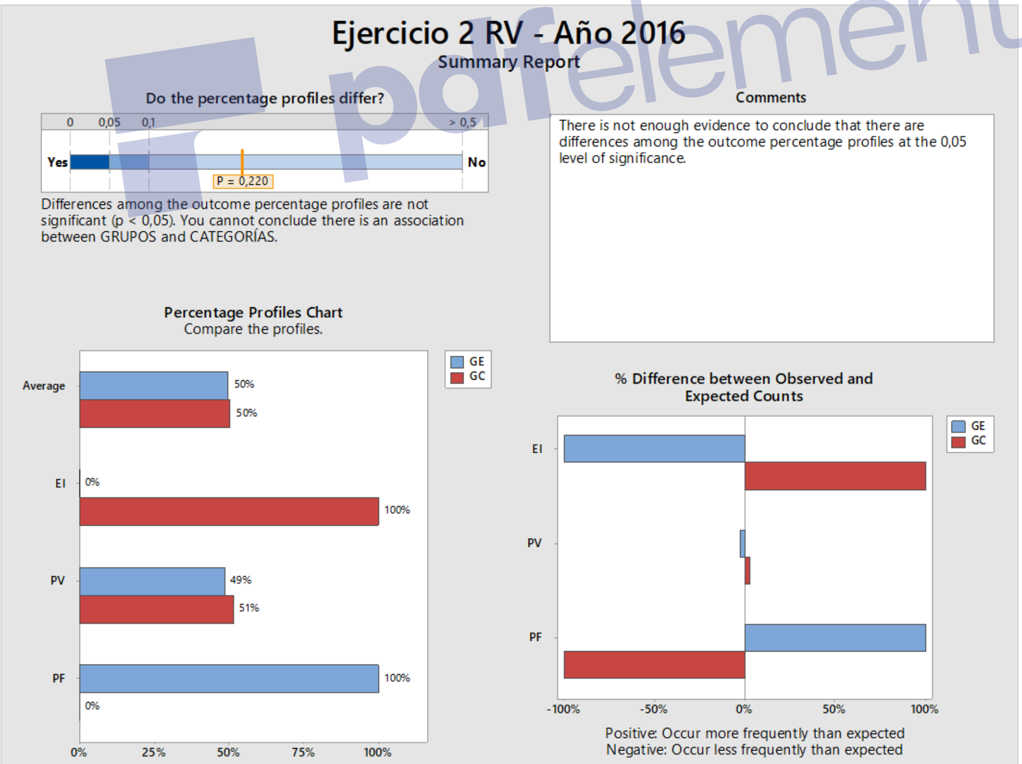


Figura 120: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 2 RV Año 2016

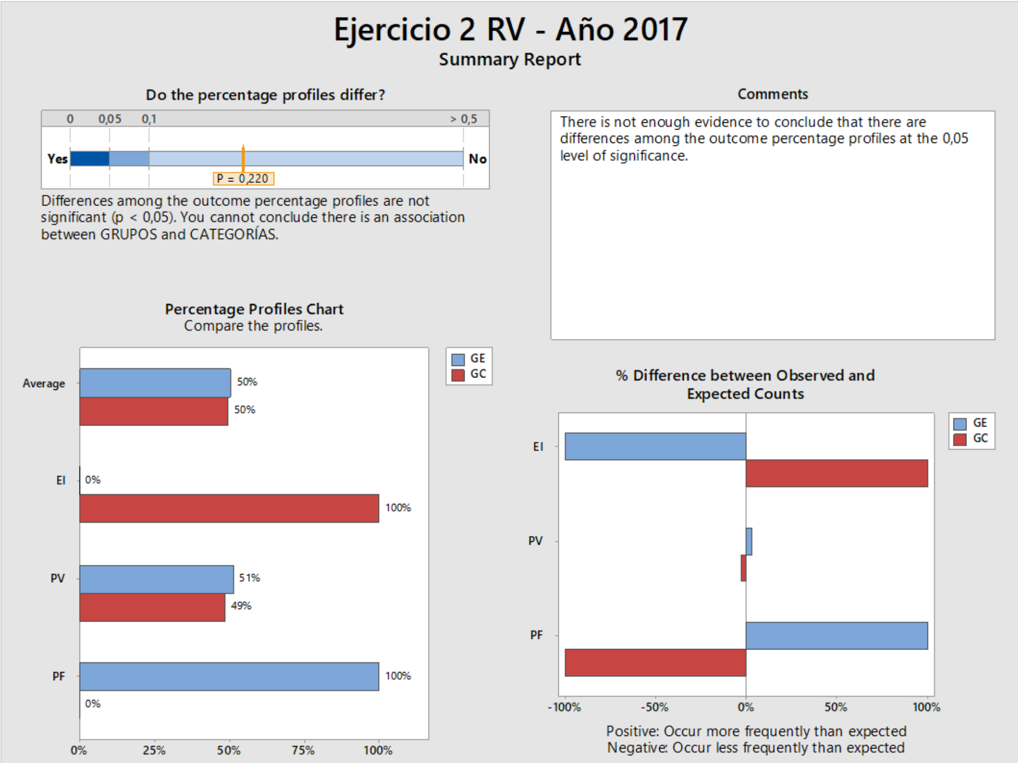


Figura 121: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 2 RV Año 2017

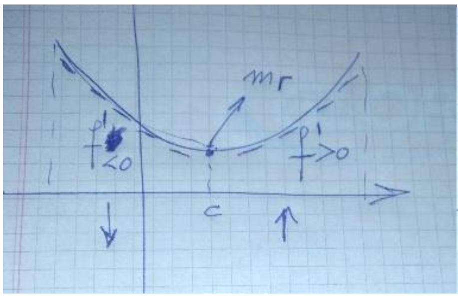
V.22.3. Análisis de datos correspondientes al Ejercicio 2 RV

El análisis para este ejercicio es análogo al Ejercicio 1 RV y fue realizado en V.21.3.

V.23. Ejercicio 3 RV

V.23.1. Tabla de frecuencias correspondiente al Ejercicio 3 RV

La tabla de frecuencias y las categorías son idénticas a las desarrolladas en V.21.2.



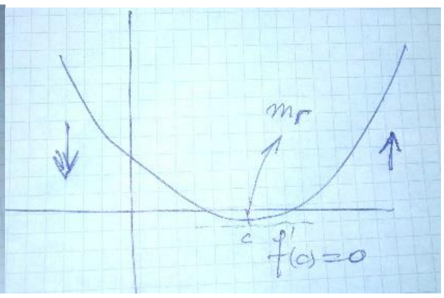


Figura 122 (izquierda) y Figura 123 (derecha): figuras realizadas por diferentes estudiantes que muestran la prueba visual del criterio de la derivada primera para la determinación de mínimo relativo.

La justificación aquí es innecesaria, ya que en PF, es inmediata porque cada eslabón que se va agregando en la cadena argumentativa, cada una es consecuencia

de la anterior. La justificación en PV se considera como tal si hay una explicación de lo realizado, caso contrario se considera fallida.

AÑO	2013		2014		2015		2016		2017	
GRUPO	GE	GC	GE	GC	GE	GC	GE	GC	GE	GC
EI	1	2	1	1	1	1	1	1	1	0
PV	15	18	14	18	15	18	16	19	17	19
PF	4	0	5	1	4	1	3	0	2	1
IHT	19	18	20	19	20	20	20	19	20	20

Tabla 22 de frecuencias correspondientes al Ejercicio 3 RV

V.23.2. Test de hipótesis correspondiente al Ejercicio 3 RV

Se detallan a continuación los gráficos con los datos asociados a las pruebas de hipótesis del Ejercicio 3 RV.

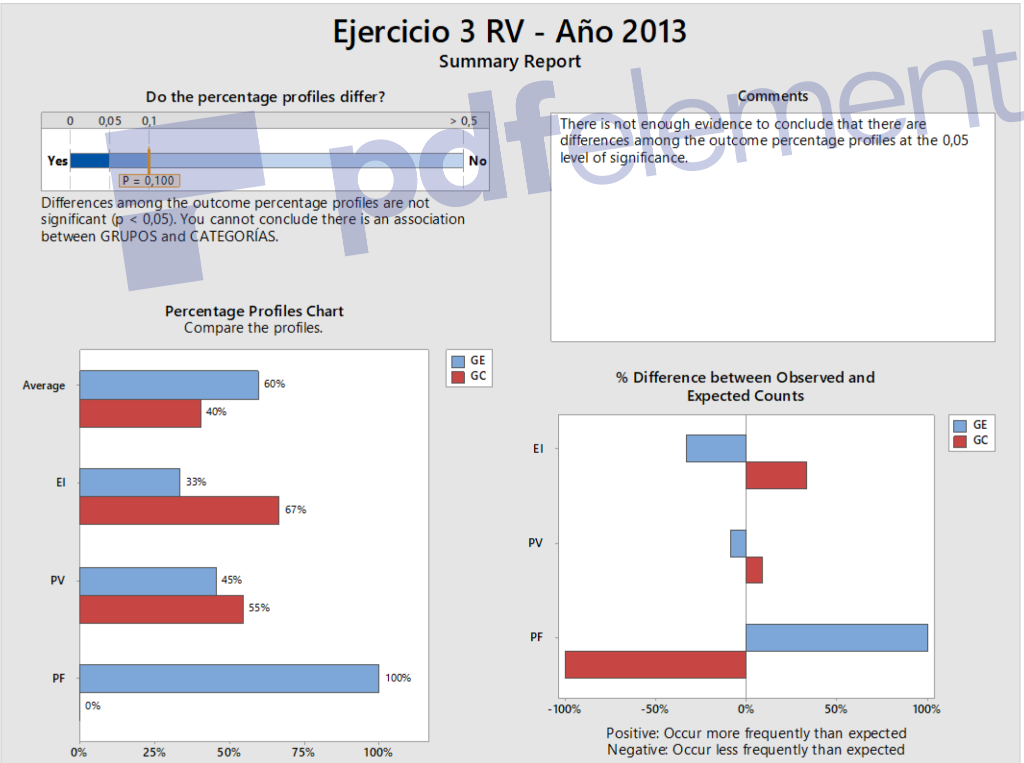


Figura 124: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 3 RV Año 2013

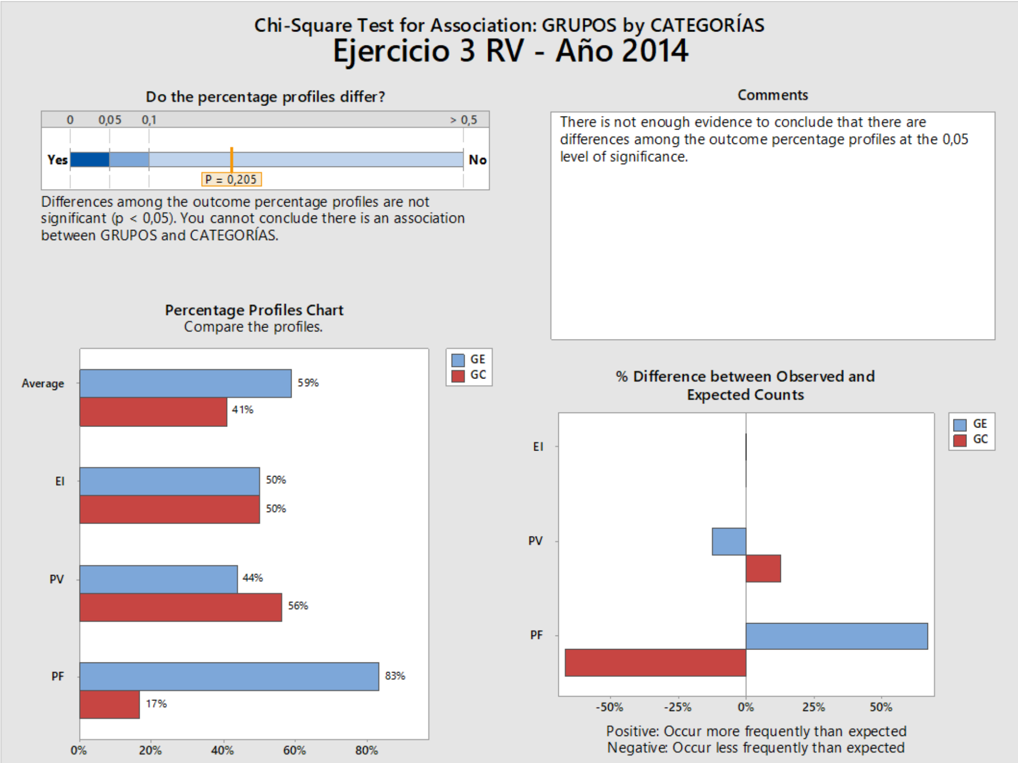


Figura 125: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 3 RV Año 2014

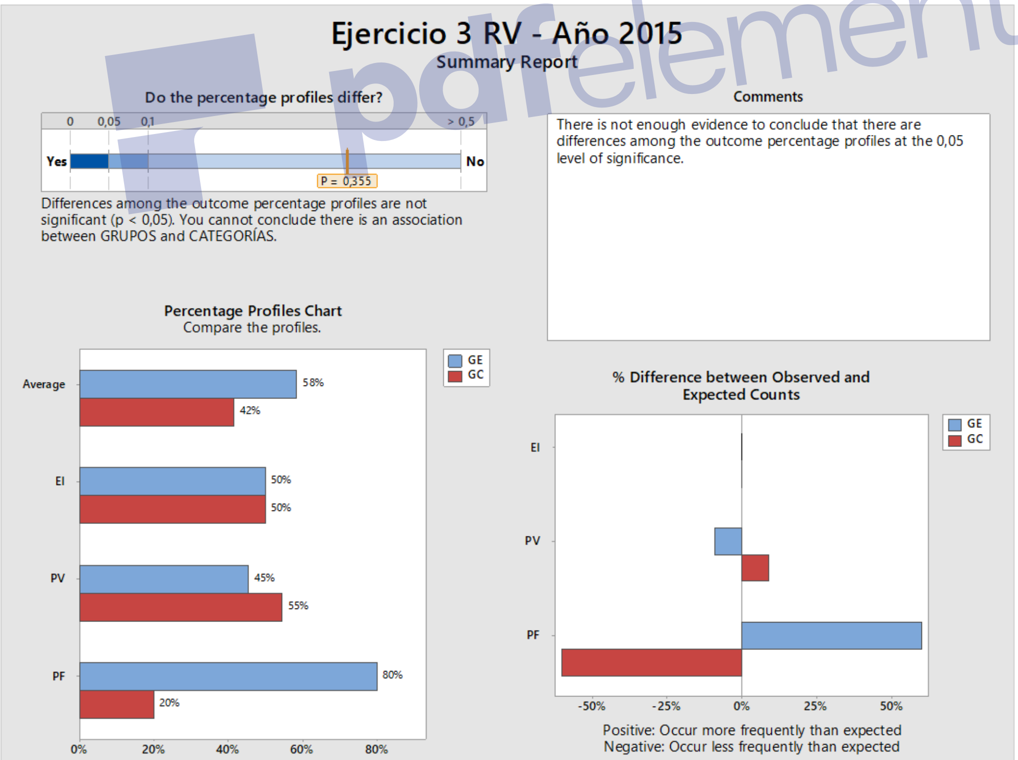


Figura 126: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 3 RV Año 2015

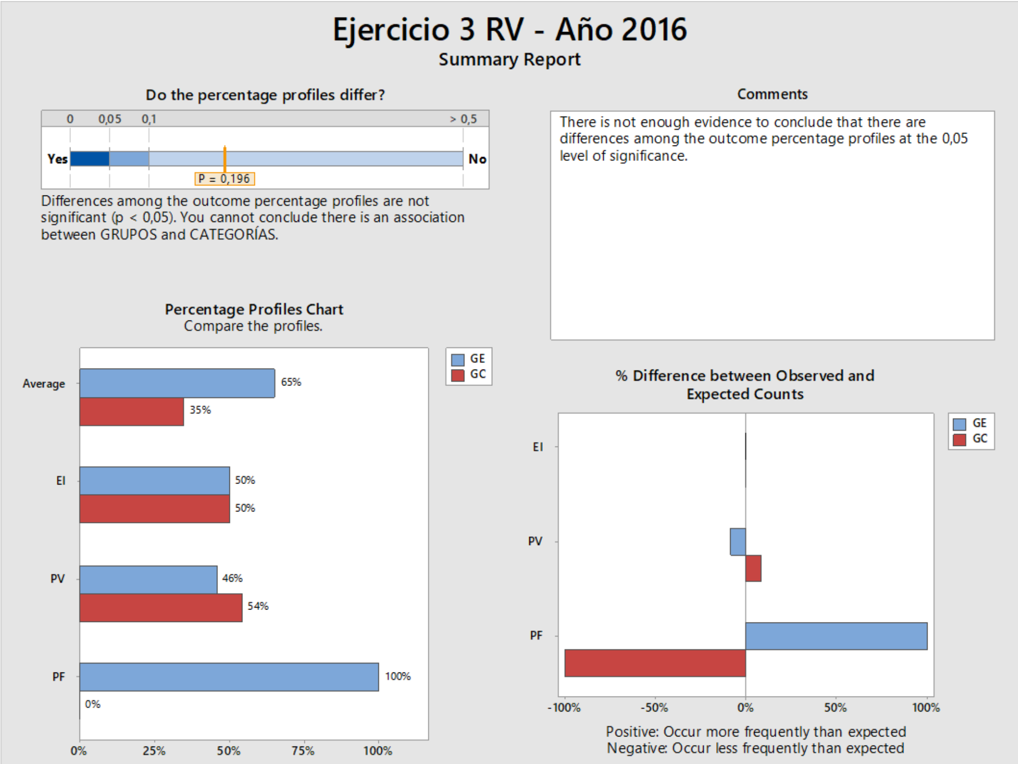


Figura 127: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 3 RV Año 2016

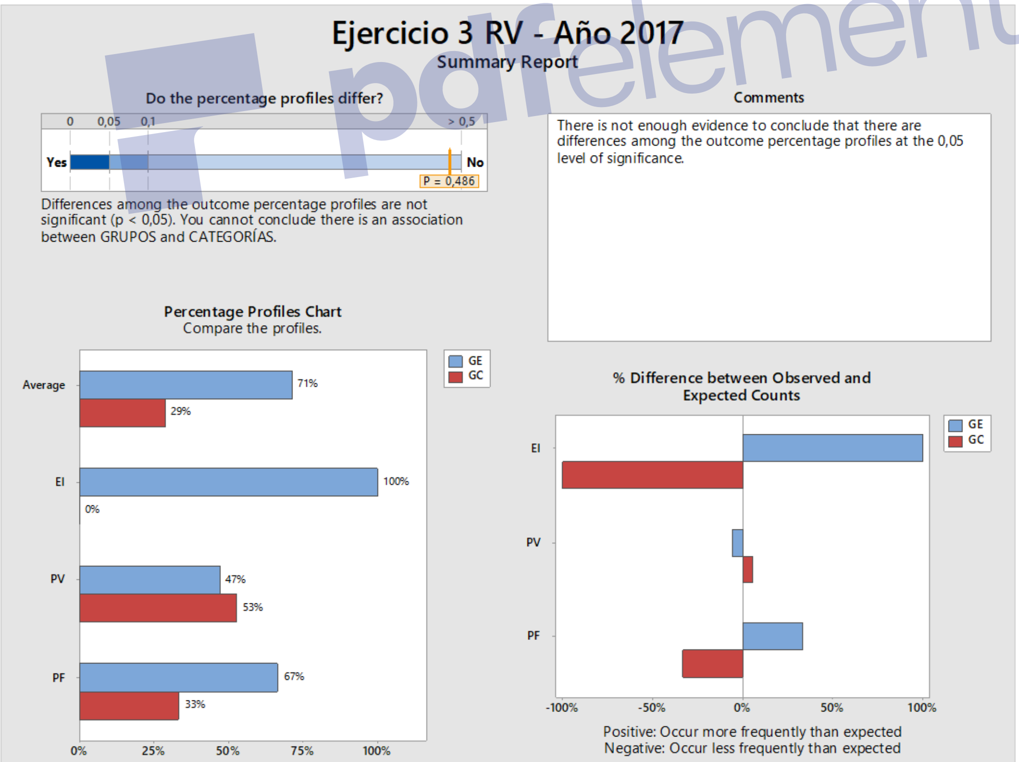


Figura 128: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 3 RV Año 2017

V.23.3. Análisis de datos correspondientes al <u>Ejercicio 3 RV</u>

El análisis para este ejercicio es análogo a los Ejercicios 1,2 RV y fue realizado en V.21.3.

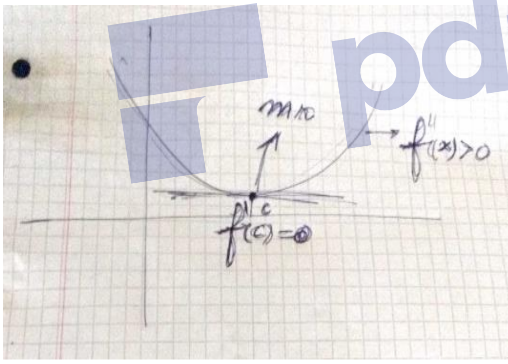
V.24. Datos correspondientes al Ejercicio 4 RV

V.24.1. Tabla de frecuencias correspondientes al Ejercicio 4 RV

La tabla de frecuencias y las categorías emergentes son idénticas a las desarrolladas en V.21.2. La justificación en PV se considera como tal si hay una explicación de lo realizado, caso contrario se considera fallida. La prueba visual en general presentada por los estudiantes consiste en lo siguiente:

Si la función derivada segunda es positiva, la función es convexa. Si la función es convexa, resulta que, si en c existe un punto crítico, la tangente es horizontal en ese punto, y en ese punto existe un mínimo relativo (y esto surge por el trazado de una figura que es producto del razonamiento generado por la visualización).

A continuación, se muestran dos pruebas visuales realizadas por los estudiantes:



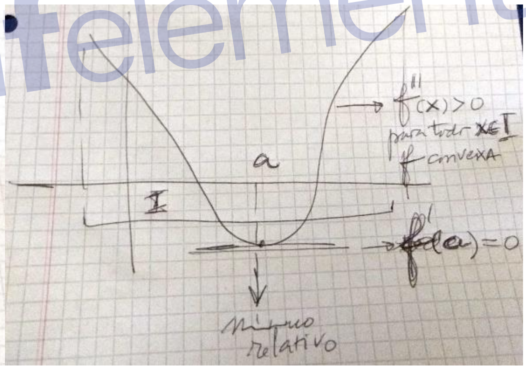


Figura 129 (izquierda) y Figura 130 (derecha): figuras realizadas por diferentes estudiantes que muestran la prueba visual del criterio de la derivada segunda para la determinación de la convexidad de una función.

PPV: Pseudoprueba visual. En esta nueva categoría emergente se aglutinan aquellos estudiantes que creen haber realizado una prueba visual consistente en un bosquejo similar al que se muestra líneas atrás, pero sin explicación alguna. Resulta entonces que es una falsa prueba visual, en virtud de la inconsistencia que resulta de la mostración de una figura sin explicación.

PV: Prueba visual. Se aglutinan en esta categoría aquellos estudiantes que realizaron la prueba visual completa con la debida y necesaria argumentación.

AÑO	2013		2014		2015		2016		2017	
GRUPO	GE	GC	GE	GC	GE	GC	GE	GC	GE	GC
EI	3	5	1	5	1	7	1	4	1	5
PV	8	6	9	6	10	6	8	6	8	6
PPV	2	8	1	7	2	5	2	8	3	6
PF	7	1	9	2	7	2	9	2	8	3
PC.c/s.just.*	2/5	0/1	2/7	1/1	2/5	1/1	2/7	1/1	2/6	1/2
IHT	19	18	20	19	20	20	20	19	20	20

PC.c/s.just.*: únicamente para la prueba formal.

Tabla 23 de frecuencias correspondientes al Ejercicio 4 RV

V.24.2. Test de hipótesis correspondiente al Ejercicio 4 RV

Se detallan a continuación los gráficos con los datos asociados a las pruebas de hipótesis del Ejercicio 4 RV.

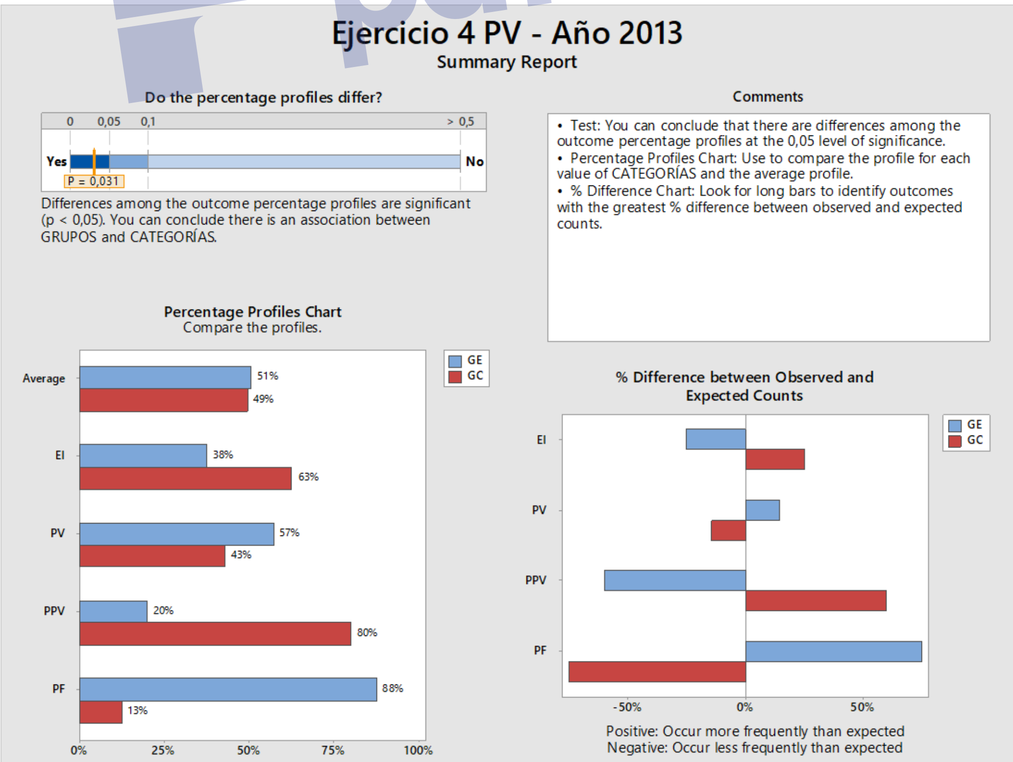


Figura 131: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 4 RV Año 2013

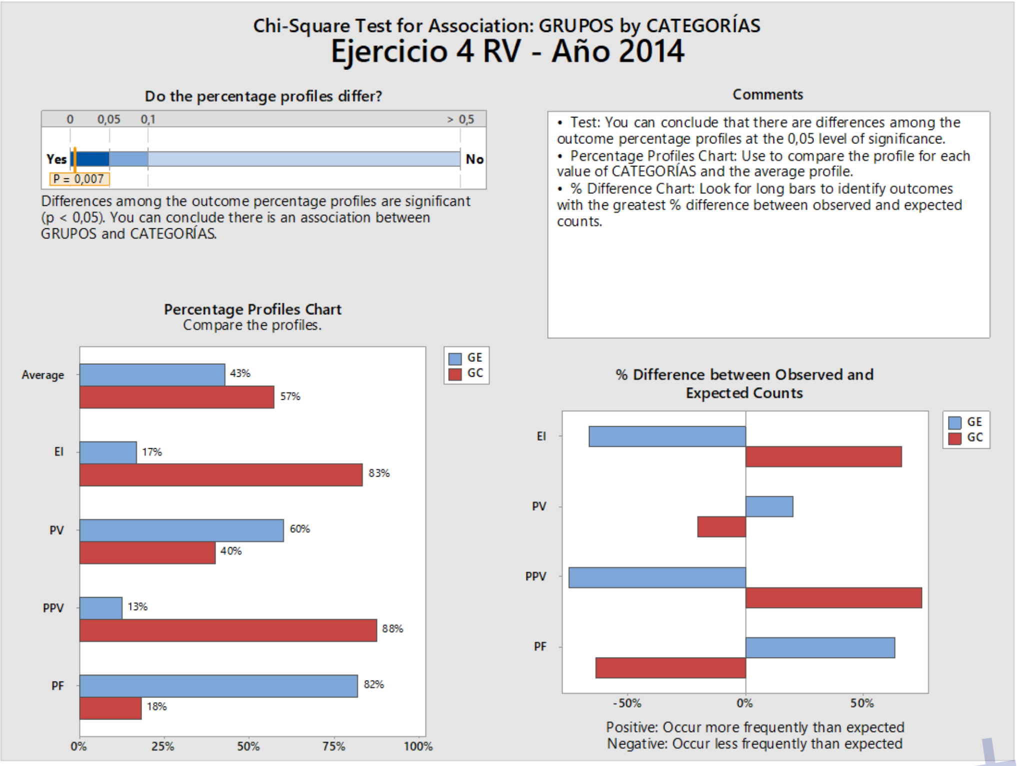


Figura 132: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 4 RV Año 2014

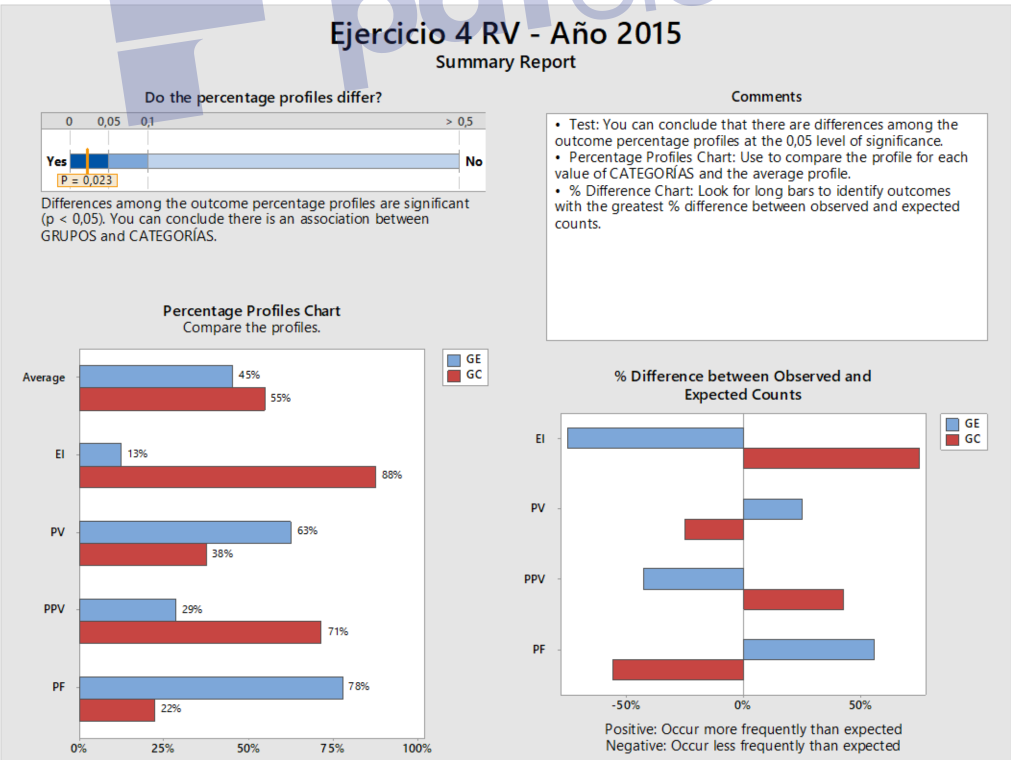


Figura 133: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 4 RV Año 2015

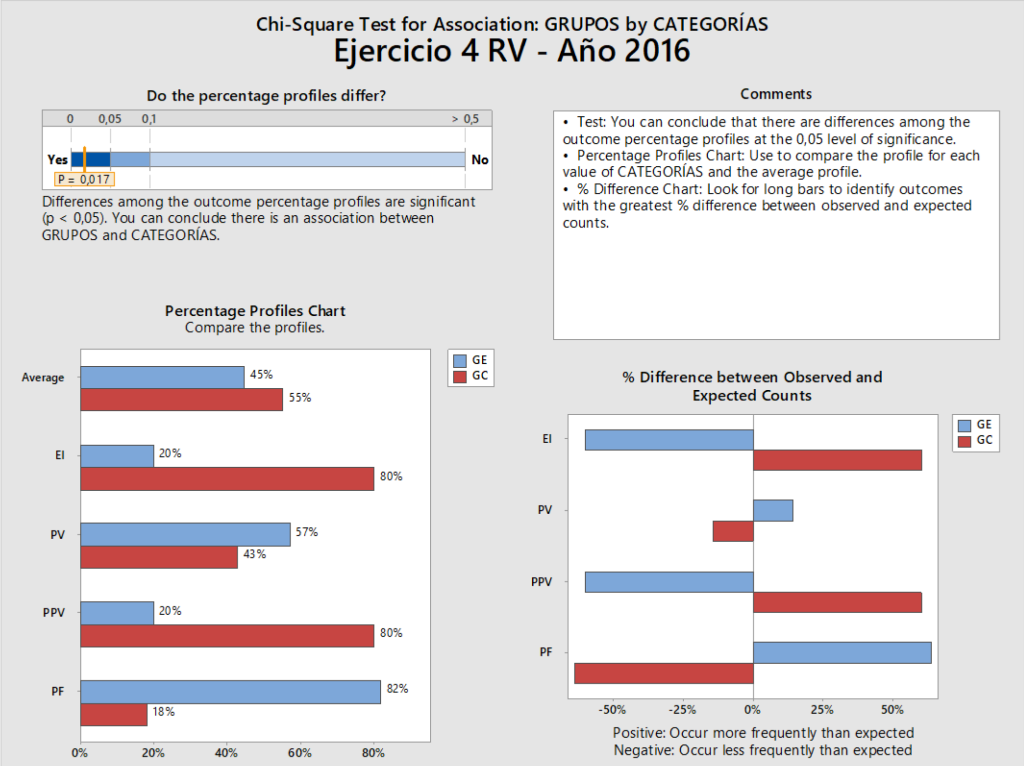


Figura 134: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 4 RV Año 2016

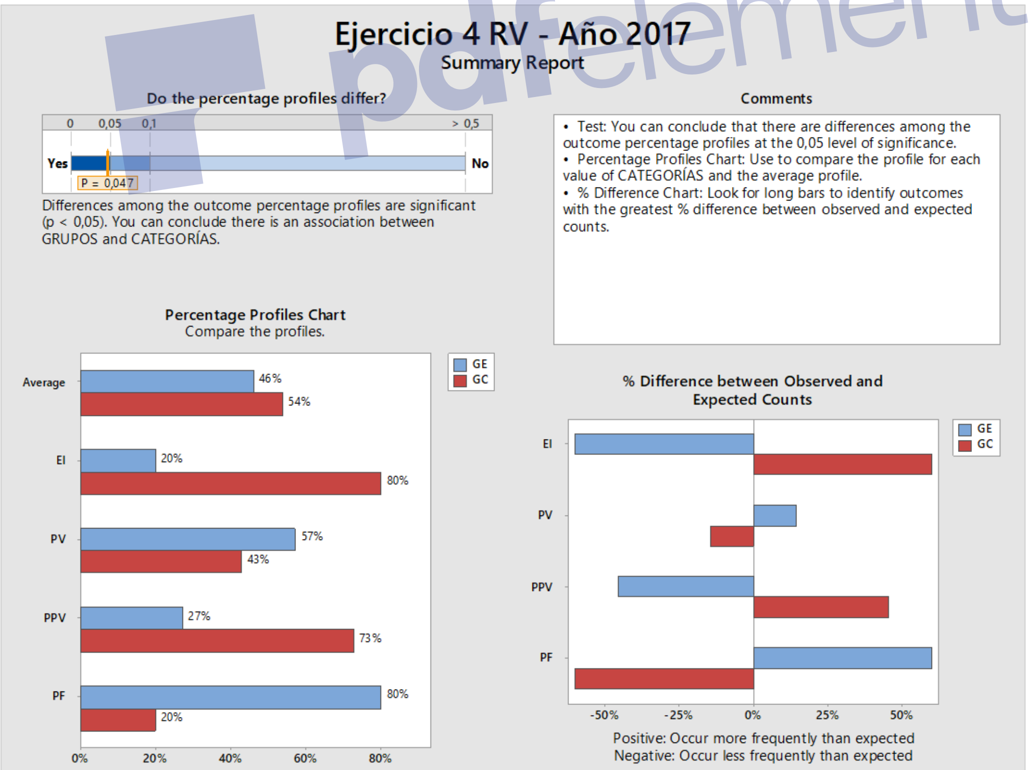


Figura 135: Prueba de hipótesis correspondiente al Ejercicio 4 RV Año 2017

V.24.3. Análisis de datos correspondientes al Ejercicio 4 RV

Se formulan a continuación, las hipótesis nula y alternativa, respectivamente, a los efectos de poder extraer una conclusión de las precedentes pruebas de hipótesis.

Hipótesis nula: La formación recibida y el paradigma de enseñanza y aprendizaje experimentado por dos grupos de estudiantes diferentes reacciona de igual forma frente a la propuesta de una prueba matemática que requiere un razonamiento visual.

Hipótesis alternativa: La formación recibida y el paradigma de enseñanza y aprendizaje experimentado por dos grupos de estudiantes diferentes reacciona de forma distinta frente a la propuesta de una prueba matemática que requiere un razonamiento visual.

Las pruebas de hipótesis realizadas sobre este ejercicio permiten observar que, a lo largo de los cinco años, rechazan la hipótesis nula, evidenciando diferencia en los grupos.

La diferencia se hace esencial en el tipo de prueba presentada. GE presenta prueba formal y prueba visual y apenas PPV todos los años a diferencia del GC que presenta poca prueba formal, mucha PPV y poca visual. En los tres ejercicios anteriores donde la prueba visual no requería de una argumentación más elaborada, o al menos con una explicación más detallada, los grupos resultaron sin diferencia, pero aquí esa diferencia se impone desde GE vs GC. EI es predominante todos los años en GC frente a un número mínimo en GE. La justificación sigue muy ausente mientras que la identificación de hipótesis y tesis ha sido casi total por ambos grupos todos los años. Debe destacarse que IHT aglutina las frecuencias de EI; PF; PV y PPV.

Es notable que del análisis no se desprende la aparición de las categorías: AT y PF, aunque de características similares a esta última es la categoría PPV.

CAPÍTULO VI

CONCLUSIONES

Y PROYECCIONES

"El aspecto más triste de la vida actual es que la ciencia gana en conocimiento más rápidamente que la sociedad en sabiduría". Isaac Asimov

VI.1. Cuestiones históricas y epistemológicas

Es muy usual escuchar a profesores universitarios de Matemática expresar su asombro ante un tipo de respuesta por parte de un estudiante frente a la consigna que propone la prueba de validez de una proposición. Esta respuesta generadora del asombro consiste en la exhibición de uno o varios ejemplos como prueba. Esta acción se encuadra con la evolución y genésis histórica de la prueba, acorde a lo expuesto en III.1. en el marco teórico. Crespo Crespo (2007) manifiesta que el desarrollo matemático manifestado en pueblos muy primitivos se relacionó directamente con sus necesidades materiales. Esta relación, no es ajena a la realidad del país y del mundo en el presente, ni tampoco al contexto donde se encuentra inserto el estudiante posmoderno. El estudiante posmoderno es ante todo una persona, y está inmerso en un mundo tecnológico que avanza de forma exponencial. Este joven necesita de satisfacciones y respuestas instantáneas de la misma forma en que las obtiene cuando hace clic con el mouse de una computadora o apenas roza la pantalla de un teléfono móvil y accede instantáneamente a una información transfinita, literalmente ‘tiene al mundo en sus manos’. El proceso de una prueba es lento, profundo y complejo, muy lejano a la inmediatez de la verificación. No se está con esto gestando una apología de las bondades del empirismo ingenuo de Balacheff (2000) sino describiendo y contextualizando al estudiante posmoderno inserto en la escena digital del mundo actual.

Cabe destacar que también de acuerdo a lo expuesto en III.1. en el marco teórico, la Matemática en China, entre otros pueblos primitivos, tuvo clara preferencia por lo concreto, aunque también en geometría fueron comunes en sus argumentaciones, las de tipo visuales. Con esto, no es de extrañar esa inclinación evidente, manifestada por los resultados obtenidos y desarrollados en el capítulo anterior, acerca de los estudiantes y la prueba visual. Cabe preguntarse, ¿Por qué ante el avance tecnológico avasallante, la persona tiende a recurrir a procesos aparentemente tan primitivos, en apariencia?

Parte de la respuesta, quedó manifestada en el párrafo anterior pero también se abre un abanico de posibilidades y múltiples cuestionamientos ante el mundo que viene…

Esta cuestión está acorde con los resultados obtenidos en esta investigación y desarrollados en el Capítulo V. Los estudiantes del GC insertos en un curso tradicional de Matemática sin una visión explícita del lenguaje y la epistemología que le es propia a esta ciencia, se apropian de sus estructuras en la forma más rápida, simple y eficaz que le es posible: la verificación o empirismo ingenuo. La verificación, en el lenguaje propio de los estudiantes iniciales consiste en expresiones y preguntas tales como: ‘reemplazo con números’, ‘Profe, ¿no es lo mismo si hago esto con números?’. Este es el procedimiento más simple y estándar en la vida cotidiana y la persona tiende a hacer una analogía de todas sus acciones habituales en otros contextos, por ende, no sorprende que recurra a estas acciones también en el ámbito áulico. El estudiante tiene convicciones y concepciones muy potentes sobre una Ciencia Matemática que consiste según su propio lenguaje ‘en hacer ejercicios’ en el peor de los casos; y en el mejor, que permite resolver problemas que tienen que ver con la cotidianeidad, pero sea como sea, su epistemología es algo muy lejano y hasta inexistente y desconocido. La verificación, por lo tanto, resulta un método usual de la vida cotidiana y las ciencias fácticas, y probablemente la actitud esté asociada a este hecho. Como afirma Dreyfus (2000): “*no deberíamos esperar que nuestros estudiantes sean capaces de captar demostraciones sofisticadas y de alto nivel, sin haber estado expuestos durante muchos años al espíritu de la justificación y a la naturaleza del pensamiento matemático.*”

En el GE, los estudiantes han sido instruidos específicamente en el conocimiento del lenguaje y la epistemología que le es propia a la ciencia matemática, asimismo, no tuvieron el tiempo suficiente de maduración, como afirma Dreyfus (2000) como para vencer prejuicios y concepciones adquiridas en el nivel medio y hasta en los niveles iniciales. Su proceder es diferente frente a una consigna que requiere la prueba de validez de una proposición, asimismo reacciona utilizando el *empirismo ingenuo* cuando no encuentra el camino para llevar a cabo la prueba, ganando las concepciones o ‘la comodidad’ a la hora de poder satisfacer un requerimiento, aún a sabiendas de que no es el procedimiento adecuado.

Pero debe destacarse que, en los procesos de aprendizaje, el estudiante tiende a repetir como a escala y en ‘un acelerado salto cuántico hacia atrás en el tiempo’, los procesos que históricamente la humanidad necesitó y experimentó hasta llegar a las estructuras conceptuales o procesos epistemológicos actuales. Es necesario conocer y respetar estos procesos además de comprenderlos para encausarlos hacia las vías que en los contextos de la ciencia actual se consideran adecuados o tener la flexibilidad necesaria y suficiente para comprender nuevos procedimientos y acciones como la prueba visual, propia de la *cultura de videoclip* (Economist.com, 2006) en que se encuentra inserto el estudiante posmoderno.

VI.2. Hipótesis de investigación. Contrastación con los resultados obtenidos.

Al comienzo de la investigación se formularon las siguientes hipótesis de trabajo, hipótesis generadas a partir de la observación experimental y cotidiana de la praxis docente. A continuación, se detallan nuevamente esas hipótesis y en cada una se manifiesta la contrastación o refutación, de acuerdo a los resultados obtenidos, con los comentarios pertinentes.

1) **El desarrollo y evolución del razonamiento del estudiante en demostraciones matemáticas, depende del paradigma del proceso de enseñanza adoptado por el docente.**

De hecho, las pruebas de hipótesis aplicadas a los resultados encuadrados en categorías de las producciones de los estudiantes marcaron la diferencia esencial, salvo como antes se mencionó, en casos puntuales y esta diferencia radicó en el tipo de prueba presentado y adoptado por los dos grupos de estudiantes analizados en cinco cohortes distintas y a lo largo de tres cuatrimestres, en cada una. Por un lado, un grupo con un paradigma de enseñanza aproximativo, es decir, centrado en la construcción del saber por el estudiante, y bajo los cánones establecidos por una ingeniería didáctica sostenida en el conocimiento del lenguaje y la epistemología matemática como punto de partida para el o los cursos iniciales de matemática en la universidad. El otro grupo, sostenido en un paradigma de enseñanza normativo, es decir, centrado en el contenido y en la transmisión pasiva de ese contenido a los estudiantes.

2) **Desde un paradigma de aprendizaje de tipo aproximativo, el estudiante es capaz, en ciertos casos, de llevar a cabo de forma autónoma un razonamiento puramente deductivo, que sigue la línea trazada por el denominado método directo de demostración de implicaciones.**

De hecho, los resultados más contundentes que mostraron las pruebas de hipótesis, radican en los ejercicios que involucran el razonamiento deductivo de argumentación directa e inclusive los de argumentación indirecta que siguen un desarrollo argumentativo de tipo ‘lineal’, es decir, sin bifurcaciones ni giros en su camino, con esto se hace referencia a la inexistencia de constructos o artificios que permiten la consecución de la prueba. Es decir, con la expresión ‘lineal’ se hace alusión a un camino que tiene un punto de partida en un dato de comienzo, usualmente, la hipótesis y una proposición objetivo, en referencia a como definen el razonamiento los investigadores Codina Sánchez y Lupiañez Gómez (1999). Cuando se hace referencia a resultados contundentes, se refiere la cuestión a resultados que tienen que ver con demostraciones claramente consumadas y realizadas en un número importante, en cinco cohortes, respecto de los otros tipos de razonamiento implícitos en las demostraciones propuestas en otros ejercicios. Cabe destacar que estos resultados fueron relevantes específicamente en el grupo de estudiantes denominado experimental instruido en un paradigma de aprendizaje aproximativo.

3) **El estudiante no es capaz de llevar a cabo de forma autónoma, razonamientos en pruebas que requieren para su desarrollo construcciones y artificios para llegar a la meta.**

De hecho, los resultados obtenidos en las cinco cohortes con los ejercicios correspondientes al razonamiento plausible o conjetural junto con los de razonamiento inductivo y por el absurdo clásico (recuérdese los dos primeros ejercicios de los correspondientes a RRA), son los que menos frecuencias presentan de pruebas consumadas, a pesar de evidenciarse diferencias entre los dos grupos.

4) **Cuando el estudiante generaliza, emplea el razonamiento inductivo y es capaz de obtener la proposición generalizada, pero es reacio a su proceso de validación.**

De hecho, de acuerdo a los resultados obtenidos en el capítulo anterior, el estudiante pudo generalizar con soltura, esto se evidenció en ambos grupos y en las cinco cohortes, pero no pudo hacer frente al método inductivo, simplemente porque no pudo comprender su mecanismo que al momento específico de la prueba puede ser tan o más simple que otras demostraciones que les fueron propuestas y que pudieron llevar a cabo, pero que en el contexto del proceso de inducción no pudieron llevarlas a cabo.

VI. 3. Respuestas a las preguntas de investigación

VI.3.1. Respuestas a las preguntas de investigación referentes a los Objetivos Específicos

A continuación, se escriben en negrita las preguntas de investigación relativas a los objetivos específicos y luego de la pregunta, aparece la respuesta acorde a los resultados obtenidos de la investigación.

¿Qué considera el estudiante como hipótesis para el desarrollo de una prueba y como la utiliza?

El estudiante puede identificar la hipótesis y la tesis en una proposición de tipo 'tradicional', es decir, Si p entonces q. En caso contrario, le cuesta mucho detectar estos elementos, y a la hora de hacerlos, o lo hace erróneamente o lo ignora, posición esta última como preferida, lo que posteriormente perjudica en el proceso de prueba. Esta actitud está acorde con lo expresado en el punto 2. de las hipótesis de investigación contrastadas en VI.2., ya que el estudiante 'se siente cómodo' frente a una 'argumentación lineal' sin 'sobresaltos ni giros artificiosos' 'en el camino'. En Razonamientos inductivos, que han sido manifiestamente los menos comprendidos, apreciación obtenida primero a través de las producciones realizadas por los estudiantes y luego por los resultados evidenciados por las pruebas hipótesis, resulta entonces que aquellos estudiantes que pudieron llevar a cabo el proceso de validación por inducción en una proposición de variable natural, supieron utilizar adecuadamente la hipótesis de inducción en el momento preciso. Asimismo, no justificaron otros pasos de la cadena argumentativa, pero si, pudieron sostener este momento clave que corresponde a la prueba que le es propia al método de inducción matemática.

¿Qué considera el estudiante como tesis para el desarrollo de una prueba y como la utiliza?

El estudiante frente a estructuras que siguen el paradigma que Ibañez & Ortega (2004) establece en su parateorema de enunciados pueden identificar la hipótesis y la tesis de una proposición a demostrar. La tesis claramente es tomada como la proposición objetivo, según acuerdan Codina Sánchez y Lupiáñez Gómez (1999). Es decir, que el estudiante cuando es capaz de abordar una prueba, se enfoca claramente en esa proposición que es la meta a alcanzar. La utilización que hace de la misma, es precisamente la mencionada, la considera como la meta, el objetivo final que tiene que alcanzar luego de un desarrollo argumentativo.

¿Cuándo el estudiante utiliza la justificación y/o explicación como sustento de la argumentación que sostiene a una prueba?

El estudiante, en general evita o ignora la justificación como puede verse en los resultados de la investigación vertidos en el capítulo anterior. En V.1. se muestran un par de opiniones textuales sobre la justificación y posteriormente en el resumen de los resultados de la encuesta abierta se hace referencia a lo que los estudiantes manifiestan adicionalmente sobre las dificultades encontradas con el proceso de justificación. Pero la justificación se hace imprescindible cuando tiene que llevar a cabo una prueba visual ya que, de lo contrario, carece de sentido. Es de destacar que tal explicación y/o justificación es escueta pero contundente. Asimismo, pueden verse en el capítulo anterior en los ejercicios 4 RDAD y los ejercicios 3 y 4 RV algunas producciones textuales escaneadas de los estudiantes, donde no aparece una explicación coloquial sino un gráfico con cierto simbolismo representativo que opera de explicación y/o justificación. La justificación también se hace evidente en los ejercicios de inducción, específicamente en el momento preciso en que en el proceso de validación se hace necesaria la utilización de la hipótesis de inducción como se manifestó en la primera pregunta de investigación en este párrafo. En aquellos estudiantes que son capaces de llevar a cabo la prueba, hay una frecuencia relevante que lo lleva a cabo.

Recordemos lo que Codina Sánchez y Lupiañez Gómez (1999) postulan sobre el razonamiento en el marco teórico. Lo definen como un esquema organizado y orientado hacia una proposición objetivo o meta. Un discurso para ser considerado un razonamiento debe estar centrado en ese objetivo y no específicamente en el contenido, porque en caso de centrarse en esto último, tal discurso se convierte en una explicación. Lo que definitivamente mostró el estudiante a lo largo de todas sus producciones fueron razonamientos, en general, se insiste, salvo casos puntuales, carentes de explicaciones y justificaciones. De acuerdo a lo establecido por Azcárate Giménez y Camacho Machín (2003) en el marco teórico, los estudiantes tienden a realizar sus tareas de forma espontánea, de acuerdo con los hábitos adquiridos en la vida cotidiana, es decir que elaboran sus respuestas a partir de los elementos de sus esquemas conceptuales evocados por el contexto de la situación, y no específicamente desde un esquema de autoridad, rememorando el patrón de razonamiento retórico postulado por Rigo, Rojano y Pluvinage (2011). De ahí entonces que la justificación sea una tarea esperada por el profesor, pero difícilmente establecida por el estudiante.

¿Cómo se relacionan las justificaciones que el estudiante realiza con las hipótesis implícitas?

Como se expresó en el objetivo anterior, el estudiante en general evita o ignora la justificación que tiene que ver precisamente con las hipótesis implícitas de la proposición a demostrar. Cuando lo hace, se atiene estrictamente a justificaciones imprescindibles para el sostenimiento de la verdad de la prueba, pero omite otras que completarían totalmente el espectro. Es decir, que este aspecto epistemológico de la prueba es prácticamente vacío. Recordemos lo postulado en el marco teórico sobre la justificación, tan asociada a la explicación y al razonamiento.

El hecho de que el estudiante ignore u omita la justificación durante el proceso de prueba, en los casos en que lo lleva a cabo, está haciendo referencia a que ignora la trascendencia de lo que esto significa en cuando a la fundamentación de la verdad matemática que debe sostener, acorde con lo postulado con Hanna y Jahnke (1996) como asimismo, está ausente el estado epistémico al que aluden estos investigadores, y también Rigo (2009) en virtud que el estudiante no cobra la verdadera dimensión de lo que está realizando. Cuando puede llevar a cabo una prueba, la hace y utiliza las herramientas que necesita como propiedades, por ejemplo, pero no siente que tenga que efectivizar y mostrar esa acción que realiza como justificación. Es interesante destacar que, a nivel de la prueba visual, los estudiantes que la consuman, justifican su accionar con una explicación o justificación que sostiene el diagrama visual presentado. En muchos casos, este accionar también está ausente de la prueba visual y es claro que ese diagrama, en tal caso, carece de validez por no estar sostenido por una explicación o justificación. Cabe destacar que en los ejercicios de argumentación por el absurdo (Ejercicios 3 y 4 RRA) donde el razonamiento sigue un camino 'lineal', es decir, que se trata de un absurdo 'predecible' a diferencia del tradicional, el estudiante puede justificar el accionar, ya que en caso contrario el proceso de la prueba carece de sentido. Este proceder, debe destacarse, fue llevado por una importante frecuencia en ambos grupos de estudiantes.

¿Cómo llega el estudiante a la conclusión de una prueba?

Como pudo verse en los resultados de las pruebas de hipótesis del capítulo anterior, el estudiante en general no reafirma la verdad de la proposición al llegar a la meta, es decir, a la proposición objetivo. Llegan y punto. No lo muestran como un momento trascendente. Se puede suponer que el estudiante lleva a cabo a la prueba como un ejercicio, de un carácter de mayor complejidad al habitual, ya que no se trata de un simple ejercicio donde lo requerido es la aplicación de un algoritmo. Puede considerarse que lo toma como un problema ya que trasciende lo antes descripto, pero lo esperado tanto en un ejercicio como en un problema es la justificación del procedimiento realizado, pero en la opinión de Segura y Chacón (1996), los sistemas tradicionales de enseñanza en la educación no dan al estudiante las herramientas para indagar, analizar y discernir la información, que lo lleve a la verdadera toma de decisiones. Los conocimientos impartidos son más bien atomizados, memorísticos y no fomentan el desarrollo de la iniciativa, la creatividad, ni la capacidad para comunicarse efectivamente por distintas vías. Ocurre entonces que, el estudiante ingresante a la universidad toma contacto con estos procedimientos por vez primera, y al momento de ponerlos en práctica, tiene muy poco tiempo de maduración y tiende a recurrir a sus antiguas creencias y/o concepciones o también según la terminología de Perkins (1995) a su conocimiento ingenuo, ganando las concepciones y creencias frente a los nuevos conocimientos.

¿Cómo utiliza el estudiante la justificación en apoyo de una conclusión?

Como se dijo antes, no la utiliza en general, salvo en casos puntuales como en la prueba visual y en casos particulares de la reducción por el absurdo, por ende, en términos generales la justificación no juega un papel preponderante, en apoyo de una conclusión.

VI.3.2. Respuestas a las Preguntas de Investigación referentes a Objetivos Generales

¿Qué actividades potencian los diferentes razonamientos que el estudiante utiliza al realizar demostraciones?

¿De qué depende la construcción de los razonamientos que utiliza el estudiante?

¿Cómo se vinculan los diferentes razonamientos que el estudiante construye con las acciones de argumentar, justificar y explicar en demostraciones realizadas en clase?

¿Cómo influye el paradigma de enseñanza adoptado por el docente a cargo de una clase en la utilización que el estudiante hace del razonamiento en procesos de prueba?

Las preguntas precedentes están muy relacionadas ya que el paradigma de enseñanza adoptado por el docente influye en la utilización que el estudiante hace del razonamiento en procesos de prueba, y como consecuencia, esto incide en la construcción de los razonamientos que utiliza el estudiante.

De acuerdo a los resultados obtenidos en el capítulo anterior, puede verse claramente que el paradigma de enseñanza utilizado por el docente en clase influye notablemente en el estudiante desde sus concepciones a la posición epistemológica adoptada por el mismo. El estudiante formado desde un comienzo en el conocimiento del lenguaje y ciertos rudimentos de la epistemología matemática opera de una manera diferente a un estudiante formado en un paradigma de aprendizaje que carezca de estas cuestiones. Este último puede llevar a cabo algunas acciones, pero de una manera distinta, ya que al no haber sido formado e informado sobre estos contenidos, trata de alcanzarlos de maneras no formales, y al momento de apropiarse, lo hace como puede. Esa acción descripta como ‘se apropia como puede’, podría no ser la adecuada porque no tiene la supervisión del conductor del aprendizaje, e incluso podría ser una vía de adquisición: internet, que también requiere de esa fiscalización, ya que el sujeto de aprendizaje se encuentra en un proceso de formación.

El estudiante que tiene la posibilidad de conocer ciertas cuestiones concretas que hacen a la estructura del conocimiento matemático y su bagaje epistemológico, además de su lenguaje puede discernir las acciones que necesita llevar a cabo frente a diferentes problemas que se le presentan, por supuesto, que siempre va asociado a esto, el tiempo, que juega un papel preponderante en el proceso madurativo de la persona que lo necesita imperiosamente para poder internalizar conceptos, inexorablemente.

El proceso madurativo sumado al conocimiento epistemológico y a nivel de lenguaje de esta ciencia, inciden completamente en la construcción de un pensamiento lógico-matemático que se da en el proceso de prueba, imprescindible para un estudiante universitario de ingeniería. La actividad ‘demostrar’ como recurso no formal, sino integrado a las actividades procedimentales de un curso universitario de matemática, potencia de forma determinante el tipo de razonamiento requerido en estas carreras de grado.

Las acciones de justificar, explicar y argumentar están asociadas a la construcción de un razonamiento lógico-matemático, pero requieren de una cotidianeidad que el profesor en clase estimule a través del ejemplo, sus concepciones, su formación y el tipo de actividades procedimentales que construya en función de los estudiantes a quiénes van dirigidas. Estos son factores indispensables a la hora del logro de un tipo de razonamiento como el antes mencionado.

¿Cómo pueden generarse pautas de razonamientos a partir del trabajo realizado por el estudiante en demostraciones matemáticas?

Como resultado de este trabajo de investigación, y producto de las reflexiones generadas desde el marco teórico, pasando por el metodológico y los resultados obtenidos, producto del trabajo experimental, se generan las diferentes pautas que se exponen en el párrafo siguiente, en virtud de ser el corolario central de este trabajo.

VI. 4. Pautas de Razonamiento utilizadas por estudiantes universitarios de ingeniería en demostraciones matemáticas

Como producto de los resultados obtenidos en el capítulo anterior puede observarse que el estudiante puede llevar a cabo un razonamiento deductivo por argumentación directa y también por argumentación indirecta. El estudiante es capaz de llevar a cabo un razonamiento deductivo que siga una trayectoria 'lineal' sin giros ni artificios en el camino que lo entorpezcan hacia la meta o proposición objetivo. Crespo Crespo & Farfán (2006) como resultado de sus investigaciones concluyen algo similar para estudiantes de informática, cabe destacar que su investigación se orienta a observar como la orientación profesional influye en el tipo de argumentación utilizado y su comprensión desde una construcción sociocultural.

El estudiante puede también generalizar, pero no validar una fórmula utilizando el principio de inducción matemática. El estudiante no puede llevar a cabo un razonamiento por reducción al absurdo, entendiendo como funciona, pero es capaz de desarrollar un razonamiento de este calibre de forma autónoma. Crespo Crespo & Farfán (2006) observan estas cuestiones en estudiantes de profesorado de matemática entendiendo que son capaces de comprender el mecanismo, características y dificultades en este tipo de argumentaciones.

Cabe destacar que el estudiante es capaz también de presentar una prueba visual con una justificación adecuada que sustente esa imagen construida por el mismo, a mano alzada o a través del software.

En base a estas cuestiones, surgen como consecuencia las siguientes pautas de razonamiento presentes en estudiantes universitarios de ingeniería en demostraciones matemáticas, como corolario de esta investigación.

Pauta de razonamiento deductivo por argumentación directa

El estudiante universitario de ingeniería puede llevar a cabo un razonamiento deductivo por argumentación directa con un recorrido lineal, es decir, desde una proposición considerada como punto de partida (hipótesis) hacia una proposición objetivo, considerada como meta (tesis), sin giros ni constructos que operen de artificios que obstruyan el recorrido lineal del camino de la prueba.

Pauta de razonamiento deductivo por argumentación indirecta

El estudiante universitario de ingeniería puede llevar a cabo un razonamiento deductivo por argumentación indirecta con un recorrido lineal, es decir, desde una proposición considerada como punto de partida (negación de la tesis de la proposición original que ahora opera de hipótesis) hacia una proposición objetivo, considerada como meta (negación de la hipótesis de la proposición original que ahora opera de tesis), sin giros ni constructos que operen de artificios que obstruyan el recorrido lineal del camino de la prueba.

Pauta de razonamiento inductivo de generalización

El estudiante universitario de ingeniería puede llevar a cabo un razonamiento inductivo que implícitamente requiere una generalización a partir de patrones o comportamientos iterativos.

Pauta de razonamiento visual

El estudiante universitario de ingeniería puede llevar a cabo un razonamiento visual, es decir, un razonamiento basado estrictamente en una visualización generada por el estudiante a través de un diagrama a mano alzada, construido por el mismo, o un software y como consecuencia de la observación de la figura obtenida, generar una justificación y/o explicación que permita sostener el valor epistémico de la prueba.

VI. 5. Proyecciones de la investigación

Los resultados obtenidos en la investigación, y las pautas de razonamiento recientemente expuestas abren un panorama amplio y novedoso para futuras investigaciones.

Si bien en estudiantes de Ingeniería no interesa desarrollar la habilidad ‘demostrar’, es importante que éstos puedan comprender y reproducir no textualmente, pero de forma aproximada las pruebas de las proposiciones y teoremas que el curso de Matemática requiera. Estimular el pensamiento lógico–matemático no se logra solamente a través de la fase procedimental de esta disciplina, según manifiesta Dreyfus (2000), al expresar que *“las demostraciones – entendidas en sentido amplio – deberían estar presentes de forma subyacente en todos los componentes del currículo de Matemáticas. Esto no significa reproducir demostraciones de memoria, tomando el formalismo bourbakiano, sino tener en cuenta como expresa Arrieta (1994) que ‘la aceptación de un teorema por la comunidad matemática se realiza mediante un proceso social en que interesa más la comprensión y significado del mismo que el de la prueba rigurosa’*.”
Esto lleva a pensar en la importancia de fortalecer en el estudiante de ingeniería, la comprensión de lo postulado por un teorema y la generación de una “*working proof*” (Resnick, 1992). Este investigador afirma que la matemática contemporánea está repleta de "*working proof*", esto es, pruebas informales, no axiomatizadas. En el ámbito profesional matemático, las pruebas son deductivas pero no formales, se expresan mediante el lenguaje ordinario completado con el uso de expresiones simbólicas. No hay un estándar generalmente aceptado del grado de rigor y sistematización exigible a una prueba matemática. Con mayor razón, el tipo de prueba para un estudiante de ingeniería es el mencionado, donde el eje central de la misma sea la comprensión de la proposición y el razonamiento de sus principales argumentos. La prueba debe estar despojada de formalismos bourbakianos que pertenecen a un paradigma ya fuera de estos tiempos, inclusive para un estudiante de Matemática pura. Es de destacar que en muchos casos es potable la incorporación de pruebas visuales “*visual proof*“ (Hanna, 1995). Ya que cuando sea posible, es esencial hacer ver al estudiante que este tipo de pruebas es tan válida, como la que requiere de una construcción intelectual. Lo fundamental radica en la construcción de pruebas que expliciten y clarifiquen, y extrapolen lo más fielmente posible ese “*saber sabio a un saber áulico*” (Chevallard, 1998).

En Argentina, desde fines del siglo pasado se inició una tendencia a la supresión de demostraciones rigurosas, en cursos de Matemática universitaria que utilizan esta Ciencia como herramienta. Las demostraciones informales fueron tomando su lugar, aunque no en la generalidad. La utilidad de la prueba matemática es el razonamiento que se oculta detrás de los eslabones argumentativos que constituyen la cadena de la demostración.

El ejercicio cotidiano de la demostración, fundado en la práctica habitual y natural de la clase teórica y práctica, es lo que realmente estimulará los diferentes tipos de razonamientos que el estudiante universitario necesita desarrollar. Esta práctica no requiere del rigor de una prueba formal, sino de una prueba que arribe al objetivo, sin pretensiones de estar encuadradas en un paradigma bourbakiano y que permita que el estudiante pueda justificar cada eslabón de la argumentación que constituye la prueba. Las pruebas informales no requieren de artificios o construcciones complejas que permitan el arribo a la tesis, requiriendo únicamente de razonamientos simples que establecen los eslabones de la cadena argumental de la prueba.

La comprensión del desarrollo de la demostración en su totalidad constituye el verdadero objetivo del proceso de validación de la proposición y esto puede satisfacerlo una prueba informal y también una prueba visual, esta última con más énfasis ya que está claramente encuadrada en la cultura visual que se halla inserto el estudiante actual.

Independientemente del rigor de la prueba y de su valor epistemológico, lo que interesa realmente es que el estudiante pueda argumentar y como consecuencia, razonar ante el valor de verdad de una proposición, y a través de un razonamiento, aunque simple y sin grandes pretensiones, de forma tal que este, no termine aceptando a esa proposición como un axioma.

El estudiante posmoderno, retrasa cada vez más el pensamiento formal, y aquellas pruebas tan rigurosas del pasado, son cada vez menos accesibles a su pensamiento y a través del mecanismo de la prueba informal se pretende impedir 'la muerte de la demostración'. De esta forma, se pretende que el estudiante pase por el tamiz de la demostración, y no termine aceptando axiomáticamente la propiedad con la conformidad de algunos ejemplos. Ese tamiz de la demostración, si bien es carente de rigor formal, tiene como fin, que el sujeto de aprendizaje pueda llevar a cabo un razonamiento que exceda, aunque ligeramente, una simple justificación.

A continuación, consideraremos, un ejemplo representativo de una prueba estructurada formalmente y su versión informal. Consideremos el teorema de la derivada de la función compuesta o regla de la cadena, extraído de bibliografías tradicionales como Calculus de Apóstol (1980), volumen 1.

Se reproduce el teorema mencionado con detalle a continuación:

Sea I un intervalo abierto, y sea $f: I \to R$ una función derivable en $x_0 \in I$, y sea g: $R \to R$, una función derivable en $y_0 = f(x_0)$, entonces:

$F = gof: I \to R / gof(x) = g(f(x))$ es derivable en x_0 y resulta: $g'(y_0).f'(x_0)/y_0 = f(x_0)$.

prueba formal: Sea $h \in R/x_0 \in I$

$$
\begin{aligned}
F'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h} \\
&= \lim_{k \to 0} \frac{g(y_0+k) - g(y_0)}{h} = \lim_{k \to 0} \frac{k.g'(y_0) + k.\gamma(k)}{h} = \\
&= \lim_{k \to 0} \frac{k.(g'(y_0) + \gamma(k))}{h} = \lim_{k \to 0} \frac{k}{h}(g'(y_0) + \gamma(k)) = \\
&= \underbrace{\lim_{k \to 0} \frac{k}{h}}_{\to f'(x_0)} . \left[\underbrace{\lim_{k \to 0} g'(y_0)}_{= g'(y_0)} + \underbrace{\lim_{k \to 0} \gamma(k)}_{\to 0} \right] = f'(x_0).g'(y_0)
\end{aligned}
$$

La prueba expuesta carece de justificaciones como en la generalidad de los textos universitarios. Es tarea del estudiante encontrar esos argumentos que sostienen las cadenas argumentativas.

En esta prueba, el sostenerse sobre las hipótesis permite generar a partir del cociente incremental, la tesis que se quiere probar, teniendo en cuenta que si g es una función derivable, también es diferenciable.

En la prueba informal, más allá del artificio (elemental) de multiplicar y dividir por el incremento de la función f, que permite la construcción de los cocientes incrementales que se quieren llegar a establecer de la tesis, se halla presente como en la prueba formal. El momento clave en el final, donde se llega a la tesis a partir de que los límites de los cocientes incrementales hallados existen en función de argumentaciones que provienen de las hipótesis del teorema. Cabe destacar que la prueba informal que se presenta a continuación está dotada de una heurística propia de un razonamiento conjetural o plausible y esto se halla presente en la operación de multiplicar y dividir por el incremento de la variable dependiente. Se expone a continuación, la prueba informal de la regla de la cadena, ya expuesta en el Capítulo III correspondiente al marco teórico.

$$F'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{h}.\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{f(x_0+h)-f(x_0)} =$$

$$= \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{f(x_0+h)-f(x_0)}}_{\to g'(f(x_0))}.\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{\to f'(x_0)} = g'\big(f(x_0)\big).f'(x_0)$$

Esto es una realidad que día a día puede experimentar cualquier docente universitario de Argentina, pero que también, día a día se va debilitando ya que la cultura visual del estudiante cada vez más dominante, convierte directamente la ritualidad en una negación a la reproducción de pruebas cargadas de rigor. El estudiante posmoderno, cada vez se va alejando de la ritualidad para abrirse a una nueva postura. Esa nueva postura equivale a la no realización de lo requerido por el docente, en oposición a la actitud protocolar usual en las décadas pasadas. Esto invita a la reflexión de los docentes, acerca del valor de la prueba informal y la prueba visual como agente eficaz y seguro para el razonamiento del estudiante. Esto no significa generar una apología del facilismo y una cultura ligera. El estudiante, en definitiva, terminará haciendo lo pedido por el docente, pero desde una obligación y no desde la persuasión y el desenvolvimiento en su propio terreno, que en definitiva es el terreno del hoy y de un futuro muy cercano donde lo actual frente a lo cuántico será prehistórico.

En el capítulo III del marco teórico, fue expuesta la prueba formal correspondiente al criterio de la derivada primera para la determinación de la monotonía de una función, específicamente se probó el caso de la derivada primera negativa y como consecuencia, el decrecimiento de la función. Los resultados de esta investigación ponen de relieve la importancia de la imperante cultura visual donde se hallan insertos los estudiantes universitarios actuales.

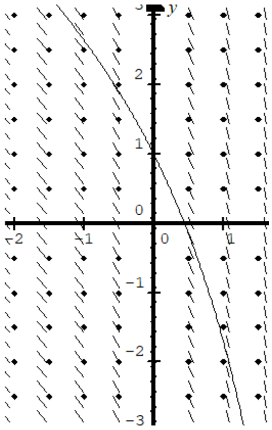


Figura 136: Prueba visual del criterio de la derivada primera para la determinación de la monotonía de una función (en este caso particular: decrecimiento)

La figura 136 muestra una prueba visual del denominado criterio de la derivada primera para la determinación de la monotonía de una función, en particular, el decrecimiento de la misma. La gráfica muestra una función decreciente donde se observa claramente que cualquier recta tangente en cualquier punto de la misma, tiene una pendiente negativa. Evidentemente, la función que se muestra en la figura precedente es decreciente ya que presenta en cualquier punto, una recta tangente de pendiente negativa, lo que es equivalente a una derivada primera negativa.

La investigación presente pone de relieve algunas cuestiones trascendentes como las pautas de razonamiento que utilizan estudiantes universitarios de ingeniería al abordar demostraciones matemáticas y la incidencia que el paradigma de enseñanza recibido por el estudiante repercute en estos procesos.

Estas pautas, como consecuencia de las dificultades, procedimientos y realizaciones observadas por parte de los estudiantes deja abierta una puerta para futuras investigaciones.

Esa puerta abierta se puede traducir en algunas preguntas de investigación como las siguientes:

¿Cuál es el futuro de la prueba visual en los nuevos escenarios académicos de aprendizaje?;

¿El razonamiento y la argumentación, que rol jugaran en la estructura que conforma una prueba visual?;

¿Pueden considerarse eficaces los resultados de aprendizaje obtenidos en cursos donde los desarrollos de pruebas formales tradicionales son sustituidos por pruebas visuales?;

¿Se puede considerar a la prueba formal en vías de extinción?;

¿Qué desafíos plantean los nuevos escenarios académicos de aprendizaje en lo concerniente a la prueba o demostración de los teoremas que conforman las teorías matemáticas?

Estas preguntas de investigación son algunas de las proyecciones que permite la investigación presente, y esas proyecciones son las nuevas pruebas e implícitamente los nuevos razonamientos que se pueden poner de manifiesto en los nuevos escenarios académicos, que no son los mismos que imperaron durante el siglo XX donde la digitalización era apenas un sueño, que en apenas, la quinta parte de transcurrido este siglo XXI ha sido un fenómeno arrasador y ha cambiado todos los conceptos que se consideraban como definitivos en el siglo anterior. Hoy, estos conceptos, están expuestos a cambios constantes y a un vértigo tal como el vertiginoso movimiento al que estamos expuestos todos, debido a la vorágine en que nos sumerge este impresionante cambio tecnológico que crece dia a dia.

Referencias bibliográficas

Adúriz-Bravo, A. (2017). Puentes entre la argumentación y la modelización en la enseñanza de las ciencias. *Enseñanza de las ciencias*, (Extra), 4491-4496.

Adúriz-Bravo, A., Echeverri, G. A. P., & Badillo, E. (2002). *Actualización en Didáctica de las Ciencias Naturales y las Matemáticas*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Adúriz-Bravo, A. (2001). *Integración de la epistemología en la formación del profesorado de ciencias.* Tesis doctoral. [En línea.] Publicada por el sitio *Tesis Doctorals en Xarxa* del Consorci de Biblioteques. Universitàries de Catalunya. http://www.tdx.cesca.es/TDCat-1209102-142933.

Alonso, I. (2014). Conferencia: "La enseñanza de la Matemática a través de la Resolución de Problemas". *Actas del IV Encontro Internacional de Ensino e Pesquisa em Ciências na Amazônia*. Congreso llevado a cabo en Amazonas, Tabatinga, Brasil. 6 a 10 de diciembre de 2014.

Alonso, A. A. (1998). Matemáticas y filosofía: ¿una buena amistad? *Aula de innovación educativa*, (69), 34-36.

Álvarez, A. (2005). *Escribir en Español*. México: Porrúa.

Anderson, M. (1995). *Abduction.* Trabajo presentado en el Mathematics Education Colloquium Series en la University of North Carolina. Charlotte, North Carolina.

Arboleda, L. (2007). Objetividad Matemática, Historia y Educación Matemática. Conferencia inaugural en el VII Seminario Nacional de Historia de la Matemática, SNHM, Guarapuava, Brasil, 1 – 4 de abril de 2007.

Artigué, M.; Douady, R.; Moreno, L., & Gómez, P. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. *Ingeniería didáctica en educación matemática*, *1*, 97-140.

Ausubel, D.P.; Novak, J.D.; Hanesian, H. (1983). *Psicología Educativa: Un punto de vista cognoscitivo*. Segunda Edición. México: Trillas.

Azcárate, C. y Camacho, M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 10 (2), 135-149.

Azcárate Giménez, C. (1995). *Procesos de pensamiento matemático avanzado. Definiciones, demostraciones, ¿Por qué?, ¿Cuándo?, ¿Cómo?* Barcelona: Departamento de Didáctica de la Matemática y Ciencias Experimentales, Universidad Autonóma de Barcelona.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Una empresa docente. Bogotá: Universidad de Los Andes.

Bernot, E. (2018). Las ciencias matemáticas frente al De nominum analogia. *Espíritu: cuadernos del Instituto Filosófico de Balmesiana*, *67*(156), 435 – 471.

Bonotto, C. (2013). Artifacts as sources for problem-posing activities. Educational Studies in Mathematics. 83 (1), 37 – 55

Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en didactique des mathématiques*, *2*(1), 37-127.

Brousseau, G. (1983). Obstacles épistémologiques en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, *4*(2), 165-198.

Brousseau, G. (1989). *Les obstacles epistemologiques et la didactique des mathematiques*. En N. Bednarz y C. Garnier (eds.). *Construction des savoirs. Obstacles et conflits*. (pp. 41 – 63). Canadá, Quebec: Les Editions Agence d'ARC, Quebec.

Burton, L. (1984). Mathematical thinking: the struggle for meaning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15(1), pp.35 – 49.

Cantoral y Mirón (2000). Sobre el estatus de la noción de derivada: de la epistemología de Joseph Louis Lagrange al diseño de una situación didáctica. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa *3* (3), 265–292.

Cañadas, María C. (2002). *Razonamiento inductivo puesto de manifiesto por alumnos de secundaria. Trabajo de investigación tutelada para la obtención de la Suficiencia Investigadora.* Granada: Universidad de Granada.

Cañadas, C. Deulofeu, J. Figueiras, L. Reid, D. Yevdokimov, O. (2008). Perspectivas teóricas en el proceso de elaboración de conjeturas e implicaciones para la práctica: tipos y pasos. *Enseñanza de las Ciencias, 26* (3), 431–444.

Chevallard, I. (1998). *La transposición didáctica*. Buenos Aires: Aiqué.

Chopra, D. (1992). *El sendero del mago*. Colombia, Bogotá: Norma.

Chrobak, R., Sempere, P. G., & Prieto, A. B. (2015). Creatividad, mapas conceptuales y TIC en educación. *EDMETIC*, *4*(1), 78 – 94.

Chrobak, R. (2017). El aprendizaje significativo para fomentar el pensamiento crítico. *Archivos de Ciencias de la Educación*, *11*(12), e031

Chrobak, R. (2001). La metacognición y las herramientas didácticas. *Contextos de Educación*. *4* (5), 123 – 145

Cifarelli, V. (1997). *Emergence of abductive reasoning in mathematical problem solving.* Trabajo presentado en el Annual Meeting of the American Educational Research Association, Chicago.

Codina, Antonio; Lupiáñez, José Luis (1999). *El razonamiento matemático: argumentación y demostración.* Comunicación presentada en XXXII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Méxicana (Oct 1999). Guadalajara, México.

Corral, N. J. (2011). Razonamiento causal con contenidos del área disciplinar en estudiantes universitarios. *Praxis: revista de psicología*, (19), 9.

Correa, A. C. (1990). Mimesis, analogía y semejanzas como vías de acceso a lo divino en la obra de Aristóteles. *Revista de filosofía*, 143 – 153.

Crespo Crespo, C., Farfán, R., & Lezama, J. (2008). Acerca de la existencia de formas de argumentación construidas fuera de escenarios escolares que llegan al aula de matemática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 21, 825 – 835

Crespo Crespo, C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología*. (Tesis de doctorado sin publicar). CICATA – IPN: Centro de investigación en ciencia aplicada y tecnología avanzada. Instituto politécnico nacional. Ciudad de México, México.

Crespo Crespo, C.; Farfán, R. (2006). Las argumentaciones por reducción al absurdo como construcción sociocultural. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 19, 766 – 772

D´Amore (2005). La argumentación matemática de jóvenes alumnos y la lógica hindú (nyaya). *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 38, 83 – 99.

D´Andrea, R.E., Curia, L., Lavalle, A. (2012). *Razonamiento deductivo y validación en estudiantes universitarios.* Alemania: Editorial Académica Española.

D´Andrea, R.E., Curia, L., Lavalle, A. (2010). *Análisis del razonamiento deductivo de estudiantes de Ciencias Naturales e Ingenierías en el proceso de validación de proposiciones matemáticas.* Tesis para optar al título de Magíster en Educación en Ciencias con mención en Matemática. Universidad Nacional del Comahue. Facultad de Ingeniería. Neuquén. República Argentina.

De Guzmán, M. (1996). *El rincón de la pizarra*. Madrid: Ediciones Pirámide. S.A.

Dreyfus, T. (2000). *La demostración como contenido a lo largo del curriculum*. En Gorgorió, N.,Deulofeu, A. y Bishop, A. (Coords.). Matemáticas y Educación. *Retos y cambios desde una perspectiva internacional*. (pp.125–133). España, Barcelona: Graó, S.R.L.

Duval, R. (2000). Écriture, raisonnement el decouverté de la démostration en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques,* 20(2), 135 – 170

Duval, R. (1999). Argumentar, demostrar, explicar:¿continuidad o ruptura cognitiva? México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duroux, A. (1982). *La valeur absolue: difficult´es majeures pour une notion mineure*. Memoria de DEA. Publications de l'IREM. Burdeos.

Economist.com. (2006). Print Edition. April 20th 2006. http://www.economist.com/printedition/index.cfm?d=20060429

Fatone, V. (1979). Lógica e Introducción a la Filosofía. Buenos Aires: Kapelusz.

Figueiras Ocaña, L., & Deulofeu Piquet, J. (2005). Atribuir un significado a la matemática a través de la visualización. *Enseñanza de las Ciencias*, *23*(2), 217-226.

Filloy, E. (1999). Aspectos teóricos del álgebra educativa. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Gascón Pérez, J. (1997). Cambios en el contrato didáctico: el paso de estudiar matemáticas en secundaria a estudiar matemáticas en la universidad. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 26, 11 – 22.

Gil Flores, J. (2003). La Estadística en la investigación educativa. *Revista de Investigación Educativa. 21*(1), 231 – 248

Gillings, R. (1972) Mathematics in the time of the pharaons. New York: Dover Publications.

Glaeser, G. (1981), Epistemologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 2(3), 303 – 346.

Godino, Juan D. & Recio, Ángel M. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la Educación Matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, *19*(3), 405 – 414.

Gómez, R. P. (2001). Mathema año 2000. *Sigma: revista de matemáticas= matematika aldizkaria*, *19*, 33 – 42.

Gómez Chacón, Inés María (2012) *Visualización matemática: intuición y razonamiento.* In Contribuciones matemáticas en honor a Juan Tarrés. UCM, Madrid, pp. 201-219.

Grand, R., Grillo, M., Nanas, H. (Productores); Brooks, A. (Director). (1991). Defending your Life. [Película]. Estados Unidos. Warner Bros.

Hanna, G. (1995). Challeges to the importance of proof. *For the Learning of Mathematics*,15(3), 43 – 49

Hanna, G y de Villers, M. (2008). ICMI Study 19: Proof and proving in mathematics education. En ZDM: *Mathematics Education*, 40, 329–336.

Hanna, G. y Jahnke, H. N. (1996). Proof and proving. En A. J. Bishop et al. (Eds.): *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 877-908). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Hardy, G.H. (2005). *Apología de un matemático*. Madrid: Nivola ediciones y Libros.

Hay, L. (1995). *Usted puede sanar su vida*. Hay House, Inc. Barcelona: Ediciones Urano.S.A.

Hitt, F. (1998). *Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum.*Educación Matemática, 10(02), pp. 23-45 .

Ibañes, M., & Ortega, T. (2004). Origen, nudo y desenlace de una investigación sobre los Esquemas de Prueba. Aspectos Cognitivos. *Economistas*, *9*(6), 15.

Inzunsa Cazares, S. y Vidal Jiménez Ramírez, J. (2013). Caracterización del razonamiento estadístico de estudiantes universitarios acerca de las pruebas de hipótesis. *RELIME: Revista Latinoamericana de Educación en Investigación Educativa*. *16* (2), pp. 179 – 211.

Iriarte Díaz-Granados, F.; Espeleta Maya, A.; Zapata Zapata, E.; Cortina Peñaranda, L.; Zambrano Ojeda, E.; Fernández Candama, F. (2013). El razonamiento lógico en Estudiantes universitários. *Zona próxima. (12)*, 40–61.

Jones, R., Platt, M., Kidney, R. (Productores), Luketic, R. (Director) (2001). Legally Blonde. [Película]. Estados Unidos. Metro Goldwyn Mayer.

Joseph, G. (1991). *La cresta del pavo real: Las matemáticas y sus raíces no europeas*. Madrid: Pirámide.

Kitcher, P. (1984). *The nature of mathematical knowledge*. New York: Oxford University Press.

Klimovsky, G. (1997) *Las desventuras del conocimiento científico: Una introducción a la Epistemología.* Buenos Aires: A – Z editora.

Klimovsky, G.; Boido, G. (2005) *Las desventuras del conocimiento matemático. Filosofía de la matemática: una introducción.* Buenos Aires: A – Z editora.

Le Lionnais, F. (1965). *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*. Buenos Aires: Eudeba.

Lakatos, I. (1978). La Metodología de los Programas de Investigación. Madrid: Alianza Editorial.

Lang, S. (1985). *Math!: Encuentros con estudiantes de secundaria*. New York, N.Y.: Springer Science & Business Media.

Magee, B. (1999). *HISTORIA de la FILOSOFÍA*. Buenos Aires: Editorial La Isla.

Markiewics, M. (2004). *Algunas preguntas de investigación acerca del razonamiento plausible desde la perspectiva del enfoque ontológico–semiótico.* Ponencia presentada en el Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas en Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Jaén. España.

Mariño, Xurxo (2019) *El misterio de la mente simbólica. Cerebro. Lenguaje y evolución.* Colecciòn Neurociencia & Psicologìa. Madrid: Emse Edapp, S.L. y Editorial Salvat, S.L.

Mariotti, A. (1998). La intuición y la prueba: Reflexiones sobre los aportes de Fischbein. Preuve, International Newsletter of the Teaching and Learning of Mathematical Proof.
http://www.cabri.net/Preuve/Newsletter/981112Theme/981112ThemeES.html

Mason, J. (1995), *Abduction at the heart mathematical being.* Trabajo presentado en honor de David Tall en el Centre for Mathematics Education of the Open University: Milton Keynes.

Mellado, V. (2003) Cambio didáctico del profesorado de Ciencias Experimentales y Filosofía de la Ciencias. Revista ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, *21* (3), 343 – 358

Minitab 17 Statistical Software (2010). [Computer software]. Escuela de Estadística Universidad Nacional de Rosario.

Padrón, V. (2002). El sentido numérico: cómo la mente crea las matemáticas, por Stanislas Dehaene. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, *1*, 97-103.

Paul, R.; Elder, L. (2003). La mini-guía para el Pensamiento crítico. Conceptos y herramientas. Fundación para el pensamiento crítico. www.criticalthinking.org

Peirce, C.S. (1988). *Un hombre, un signo (El pragmatismo de Peirce).* Barcelona: Crítica.

Perkins, D. (1995). La escuela inteligente. Gedisa: Barcelona.

Pedemonte, B. (2001). Some cognitive aspects of the relationship between argumentation and proof in mathematics, en Van den Heuvel-Panhuizen, M. (ed.). Proceedings of the 25th International Group for the Psycology of Mathematics Education, 4, pp. 33 – 40. Utrecht: Utrecht University.

Pérez Gómez, R. (2001). Mathema año 2000. *Sigma: Revista de Matemáticas. 19*, 33 – 42.

Polya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning*. New Jersey: Princeton University Press.

Radford, L. (1997). On Psychology, Historical Epistemology and the teaching of Mathematics: Toward a Socio-Cultural History of Mathematics. For the learning of Mathematics. *17* (1), 26 – 33.

Ramírez Arce, G. (2008). Formas de razonamiento que muestran estudiantes de maestría de matemática educativa sobre la distribución normal mediante problemas de simulación en Fathom. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias*, *3*(1), 10 – 23.

Ramírez, R.; Flores, P.; Castro, E. (2010). *Visualización y talento matemático: una experiencia docente*. En Moreno, Mar; Carrillo, José; Estrada, Assumpta (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIV (pp. 499-510). Lleida: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Resnick, M.D. (1992). Proof as a source of truth, en Detlefsen, M.(ed.). Proof and knowledge in mathematics, pp.6-32. Londres: Routledge.

Rigo, M. (2009). *La cultura de racionalidad en el aula de matemáticas de la escuela primaria*. Tesis doctoral no publicada. México DF, México: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Rigo, M., Rojano, T. y Pluvinage, F. (2011). Las Prácticas de Justificación en el Aula de Matemáticas. *PNA: Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, *5*(3), 93 – 103.

Roa, R., Batanero Bernabeu, C., Díaz Godino, J. (2000). *Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación matemática avanzada*. Tesis para optar por el grado de doctor en didáctica de la matemática. Departamento de didáctica de la matemática de la Universidad de Granada. Granada. España.

Rodd, M. M. (2000). On Mathematical Warrants: Proof Does Not always Warrant, and a Warrant May Be Other Than a Proof. *Mathematical Thinking and learning*, *2*(3), 221–244.

Rojano, T. (1994). La matemática escolar como lenguaje nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. Enseñanza de las ciencias, 12(1), 45-56.

Rojo, A. (1983). *Álgebra I*. Buenos Aires: El Ateneo.

Santaló, L. (1981). *La enseñanza de la Matemática en la escuela media*. Buenos Aires, Argentina: Proyecto Cinae.

Sánchez, Á. M. M., González, O. L. P., & Martínez-López, Y. (2017). Propuesta didáctica para la enseñanza del concepto espacio vectorial. *REFCalE: Revista Electrónica Formación y Calidad Educativa*, *5*(2), 195 – 209.
Disponible en:
http://runachayecuador.com/refcale/index.php/refcale/article/view/1796 15

Searle, J. (1969). Speech Acts; An Essay in the Philosophy of Language. Cambridge: Cambridge University Press.

Segura, M. & Chacón, I. (1996). Competitividad en la educación superior. Umbral, 11(5), 29-37.

Serrano, L., Batanero, C., Ortíz, J. J., & Cañizares, M. J. (1998). Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilísticode los estudiantes de secundaria. *Educación Matemática*, *10*(1), 7 – 25.

Valverde Mayol, V. (1989). La teoría de los objetos en Alexius Meinong. *Pensamiento: Revista de investigación e información filosófica*. *45* (180), 461 – 475.

Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. En TALL, D. (Ed.), Advanced mathematical thinking. Dordrecht: Kluwer, pp. 65-81.

SALVAT (Ed.) (1978). *Enciclopedia SALVAT Diccionario*. Vol.8. Barcelona: Salvat.

Waldegg, G., de Agüero, M. (1999). Habilidades cognoscitivas y esquemas de razonamiento en estudiantes universitarios. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*. *4*, (8), 203 – 244.

ANEXO

1. SIGLAS UTILIZADAS PARA SIMPLIFICACIÓN E IDENTIFICACIÓN DE LOS EJERCICIOS UTILIZADOS COMO INSTRUMENTO EN LA FASE EXPERIMENTAL DE LA INVESTIGACIÓN

Nombres generales de los ejercicios

Ejercicio de razonamiento deductivo por argumentación directa: RDAD

Ejercicio de razonamiento deductivo por argumentación indirecta: RDAI

Ejercicio de razonamiento plausible o conjetural: RPoC

Ejercicio de razonamiento por reducción al absurdo:RRA

Ejercicio de razonamiento inductivo: RI

Ejercicios de razonamiento visual: RV

A continuación, se detallan las siglas y el detalle de los ejercicios en el orden en que fueron aplicados a los estudiantes:

1RDAD: Ejercicio 1 de razonamiento deductivo por argumentación directa

1RDAI: Ejercicio 1 de razonamiento deductivo por argumentación indirecta

1RPoC: Ejercicio 1 de razonamiento plausible o conjetural

1RRA: Ejercicio 1 de razonamiento por reducción al absurdo

1RI: Ejercicio 1 de razonamiento inductivo

2RI: Ejercicio 2 de razonamiento inductivo

2RPoC: Ejercicio 2 de razonamiento plausible o conjetural

1RV: Ejercicio 1 de razonamiento visual

2RV:Ejercicio 2 de razonamiento visual

2RDAI: Ejercicio 2 de razonamiento deductivo por argumentación indirecta

2RDAD: Ejercicio 2 de razonamiento deductivo por argumentación directa

3RI: Ejercicio 3 de razonamiento inductivo

4RI: Ejercicio 4 de razonamiento inductivo

3RDAD:Ejercicio 3 de razonamiento deductivo por argumentación directa

3RPoC:Ejercicio 3 de razonamiento plausible o conjetural

3RDAI:Ejercicio 3 de razonamiento deductivo por argumentación indirecta

4RPoC: Ejercicio 4 de razonamiento plausible o conjetural

2RRA:Ejercicio 2 de razonamiento por reducción al absurdo

4RDAD: Ejercicio 4 de razonamiento deductivo por argumentación directa

3RV:Ejercicio 3 de razonamiento visual

4RV:Ejercicio 4 de razonamiento visual

3RRA: Ejercicio 3 de razonamiento por reducción al absurdo

4RRA: Ejercicio 4 de razonamiento por reducción al absurdo

2. SIGLAS UTILIZADAS PARA SIMPLIFICACIÓN E IDENTIFICACIÓN DE LAS CATEGORÍAS EMERGENTES

GC: Grupo de Control

GE: Grupo Experimental

CATEGORÍAS EMERGENTES

EI: Empirismo ingenuo

PC: Prueba consumada

PCP: Prueba consumada parcialmente

IPF: Intento de prueba fallido

AT: Ausencia de trabajo

IHT: Identificación de hipótesis y tesis

Prueba.c/s.just.: Prueba con o sin justificación

SC/CC: Pruebas sin conclusión/ Pruebas con conclusión

Fila k=0 presente: frecuencia de estudiantes que consumaron una prueba que involucraba la definición de igualdad de complejos en forma polar, especificando en este estadio de la prueba que la definición mencionada tiene sentido si k=0.

Fila k=0 fallida: caso contrario a fila k=0 presente

Gen:Generalización

Gensol:Generalización solamente

PISVi: Prueba incompleta sin validación inicial

PCsuH: Prueba consumada sin uso de hipótesis

IPAF: intento de prueba avanzado fallido

PI: Prueba inconsistente

ASC: argumento sin conclusión

PCI: Prueba Consumada Inconsistente

PCcH:Prueba consumada con heurística

PCsH: Prueba consumada sin heurística.

PRI:Prueba reducida a una identidad

PCI: Prueba Consumada incompleta

PV: Prueba Visual

PF: Prueba formal

PF: Prueba pseudovisual