Tesis de Maestría

Maestría en la Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Orientación: Matemática

IMÁGENES CONCEPTUALES SOBRE ASÍNTOTAS GENERADAS POR EL USO DE SOFTWARE MATEMÁTICO

Lic. Roxana Scorzo

Directora: Mg Adriana Favieri

Codirectora: Mg Rosa F. Martínez

Facultad de Ingeniería

Universidad Nacional del Comahue

Neuquén, Argentina

2019

RESUMEN

En la presente tesis presentamos una investigación realizada con estudiantes de carreras de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Matanza, de la asignatura Análisis Matemático I. El propósito es analizar las imágenes mentales y conceptuales sobre asíntotas de funciones y los registros de representación utilizados en ellas cuando se utiliza software Mathematica durante las clases. El marco teórico de referencia se encuadra en un enfoque cognitivista abarcando aspectos vinculados a registros de representación semiótica, imágenes mentales, conceptuales, y uso de tecnología en ámbitos académicos matemáticos. Incorporamos definiciones propias sobre los primeros aspectos adaptadas a un contexto de trabajo con software. Esta investigación es de tipo cualitativa y para llevarla a cabo diseñamos un Test de Diagnóstico Inicial, analizamos las producciones de los estudiantes a través de instrumentos creados para este trabajo y luego realizamos entrevistas. Logramos establecer una clasificación de imágenes mentales y conceptuales sobre el concepto de asíntotas en relación con el uso de software matemático. Pudimos poner en evidencia los registros de representación semiótica utilizados por los alumnos en este contexto y entender las imágenes mentales y conceptuales relacionadas con el uso del software Mathematica. Concluimos que el uso del software tuvo una influencia positiva en el desarrollo de las imágenes conceptuales, ya que la facilidad de graficar que el mismo ofrece contribuyó a que se realizara un análisis más centrado en los conceptos.

Palabras claves

Asíntotas de una función – Software - Imágenes conceptuales - Registros de representación - Análisis Matemático

Abstract

In this thesis we introduce a research carried out with Engineering students of the "Universidad Nacional de La Matanza", from the Calculus I subject. The purpose is to analyze mental and conceptual images about asymptotes of functions and the representation records utilized in them, when Mathematica software is used throughout the classes. The theoretical framework of reference is framed in a cognitive approach covering aspects related to semiotic representation records, mental and conceptual images, and the use of technology in mathematical academic fields. We incorporate our own definitions about the first aspects, adapted to a context of working with software. This is a qualitative investigation and to accomplish it we designed an Initial Diagnosis Test, we analyzed the productions of the students with instruments developed for the task, and finally we carried out interviews. We managed to stablish a classification for mental and conceptual images about the concept of asymptotes, related to the use of mathematical software. We were able to highlight the record of the semiotic representation utilized by students under this context, and we understood the mental and conceptual images related to the use of Mathematica software. We conclude that the use of the software had a positive influence in the development of conceptual images, given that the easiness of graphing that it offers contributed to an analysis focused on the concepts.

Keywords

Function asymptotes – Software – Mental Images – Representation records – Calculus

AGRADECIMIENTOS

A mi esposo Claudio, mis hijos Pablo y Santiago, quienes siempre me han alentado a realizar este trabajo.

A mi Directora de Tesis Mg. Adriana Favieri, por su apoyo incondicional, sus aportes, orientación y ayuda permanente.

A la Universidad Nacional de La Matanza, por permitirme realizar este trabajo de investigación con mis estudiantes.

A la Dra. Betina Williner, jefa de cátedra quien permitió que realice la experiencia en mi curso de Análisis Matemático.

A la profesora Romina Romano quien colaboró en el laboratorio de informática para poder realizar la experiencia.

A la Esp. Gabriela Ocampo por su aliento constante y apoyo incondicional.

A mis alumnos que colaboraron en la experiencia y entrevistas.

Roxana

Dedicatoria.

A mis padres, les debo a ambos lo que soy y gran parte de mis logros profesionales.

Reconocimiento

A las autoridades del Departamento de Ingeniería e Investigaciones Tecnológicas de la Universidad Nacional de La Matanza, que me permiten crecer profesionalmente trabajando con absoluta libertad.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

GLOSARIO DE SIGLAS

SIGLA	SIGNIFICADO
AMI	Análisis Matemático I
UNLaM	Universidad Nacional de La Matanza
DIIT	Departamento de Ingeniería e Investigaciones Tecnológicas
TDI	Test de Diagnóstico Inicial
EI	Entrevistas Individuales
EAIMuS	Escala de Apreciación de Imágenes Mentales con uso de Software
EAICuS	Escala de Apreciación de Imágenes Conceptuales con uso de Software
RVSM	Registro Verbal con uso de software Mathematica
RASM	Registro Algebraico con uso de software Mathematica
RGSM	Registro Gráfico con uso de software Mathematica
IMC1	Imágenes Mentales Categoría 1.
	(El número cambia de acuerdo con la categoría varía entre 1 y 5)
ICC1	Imágenes Conceptuales Categoría 1.
	(El número cambia de acuerdo con la categoría varía entre 1 y 9)

INTRODUCCIÓN

En los últimos años los docentes de Análisis Matemático I (AMI) de la Universidad Nacional de La Matanza (UNLaM) notamos que la comprensión de conceptos básicos en los cuales, en su definición interviene el de límite funcional, como continuidad, asíntotas de una función, derivada en un punto entre otros, se torna cada vez más compleja. La opinión es compartida por varios investigadores (Arce y Ortega, 2013; Engler, Vrancken, Hecklein, Müller y Gregorini, 2007; Mira López, Valls González y Llinares Ciscar, 2013; Cornu, 1991; Lasalvia y Piquet, 2000; Blázquez y Ortega, 2000; Ruiz-Moreno y del Rivero-Jiménez, 2019; Williner, 2018). Paralelamente observamos inconvenientes relacionados con el manejo de simbología, con la adquisición del lenguaje simbólico que, como dice Socas (2007), podría devenir en intentos de los docentes que recurren a imágenes, gráficos o representaciones que permiten un primer acercamiento al concepto que se pretende enseñar.

Numerosos son los conceptos que se desarrollan en Análisis Matemático, que tienen como denominación algún término utilizado en la vida cotidiana. Basta considerar las palabras límite, continuo, derivada/o, entre otros. A menudo decimos “esta línea es continua” entendiendo por tal a un trazo que no se interrumpe. Sin embargo, la complejidad de la definición de continuidad de una función en un punto no resulta tan intuitiva como la idea de la no interrupción del trazado de una curva. Lo propio sucede cuando en el lenguaje cotidiano usamos el término límite, sin embargo, este concepto lejos está de ser tan sencillo como pareciera si consideráramos su significado literal. Con el concepto de asíntota a una curva la situación es parecida pero no idéntica. El término en sí no suele ser usado en la cotidianidad, lo que no le suma, a quien aprende, una carga de significación previa a la enseñanza. Por otro lado, es común que en los primeros ejemplos de asíntotas se trabajen funciones elementales como las homográficas, exponenciales y logarítmicas, lo que hace que el alumno genere prototipos de funciones que admiten asíntotas, entendiendo que no deben cortar a la curva, o que son solo horizontales o verticales. Para el alumno, esta imagen posee una intensidad muy marcada, mucho más que la definición de asíntotas y responde más a esa idea al trabajar con el tema.

Sabemos por experiencia que la mayoría de los estudiantes de un curso de primer año de Análisis Matemático I diría que el concepto refiere a una recta a la cual la gráfica de la función se acerca pero que "nunca la toca". Esto puede evidenciarse en sus producciones ya que, al hacer gráficos de funciones con asíntotas, la mayoría muestra como modelos las funciones homográficas, poniendo especial hincapié en las asíntotas verticales y horizontales e ignorando las oblicuas. Rara vez recurren a las definiciones de límite que se trabajaron anteriormente en el aula para definir los distintos tipos de asíntotas, como si éstas no tuvieran nada que ver con el tema precedente.

Se suma a este escenario la incorporación de herramientas tecnológicas en los procesos en enseñanza y de aprendizaje, que facilitan la exploración y experimentación de conceptos (Lozano Rubiano, 2019). Para aprovechar estos beneficios, es necesario elaborar un buen diseño de actividades con el fin de lograr la intervención activa del estudiante en la elaboración de conceptos y que el docente sea un mediador y guía en este proceso (Codes, Sierra 2005). Actualmente hay mucha investigación en el campo de la Educación Matemática que tiende a proponer usos significativos de las nuevas tecnologías (TIC) para favorecer el aprendizaje de distintos conceptos matemáticos (Tall y Thomas, 1991; Lupiáñez y Moreno, 2001; Hitt, 2003; Villarreal, 2003; Artigue, 2004; Camacho, 2005; Árcega, Rangel, Reyes y Castillo, 2011; Kidron y Tall, 2014; Lozano Rubiano, 2019; Quispe Apaza y Amusquivar Caballero, 2018). La tecnología permite el manejo dinámico de objetos matemáticos en múltiples sistemas de representación, incluyendo escenarios interactivos, generando experiencias diferentes a las vividas en entornos de lápiz y papel. Consideramos que estas experiencias matemáticas mediadas por tecnología podrían contribuir a la generación de ideas, gráficos, procesos, dinámicas, construcciones mentales sobre el concepto de asíntota, que no siempre tienen un correlato matemáticamente correcto. Es en esta dirección en la que profundiza esta investigación.

En el caso de estudiantes que aprenden trabajando en papel y lápiz se han estudiado tipologías de construcciones mentales sobre este concepto lo que permite a los docentes prever y planificar sus clases atendiendo a los posibles conocimientos erróneos con los que los estudiantes operan. Consideramos que, cuando la enseñanza incluye entornos tecnológicos, podrían generarse otras construcciones mentales en los estudiantes, adecuadas o no, con las cuales ellos operarían. El problema con el que nos enfrentamos es el desconocimiento sobre qué construcciones mentales podrían generarse los estudiantes al trabajar conceptos matemáticos en entornos tecnológicos. Tall y Vinner (1981) emplean el término imagen conceptual para describir la estructura cognitiva de un individuo asociada a un concepto, que incluye todas las imágenes mentales (cualquier clase de representación: forma simbólica, verbal, gráfica), las propiedades y los procesos que las caracterizan. La imagen conceptual es algo no verbal que está en la mente de un individuo vinculado al nombre del concepto; y en los estudiantes, es el resultado de su experiencia frente a ejemplos y contraejemplos de este. Es por esta razón que surge la necesidad de indagar sobre las imágenes conceptuales que tienen los alumnos de Análisis Matemático I de la Universidad Nacional de La Matanza, sobre el concepto de asíntotas de una función, en clases con uso de software matemático. Y para tal fin nos planteamos los siguientes interrogantes:

¿Cuáles son las imágenes conceptuales de los estudiantes de Análisis Matemático de la UNLaM sobre el concepto de asíntotas de funciones cuando usan software matemático en clases? ¿Cómo manifiestan los estudiantes dichas imágenes conceptuales? ¿Con gráficos? ¿Con expresiones verbales? ¿Con lenguaje simbólico? ¿Qué clase de actividades matemáticas con uso del software matemático podrían contribuir a modificar aquellas imágenes conceptuales sobre el concepto de las asíntotas de una función, que tengan algún grado de inexactitud?

La investigación se llevó a cabo en la asignatura Análisis Matemático I del Departamento de Ingeniería e Investigaciones Tecnológicas de la Universidad Nacional de La Matanza. Los alumnos que formaron parte de esta experiencia cursaban el primer año de Ingeniería Electrónica, Informática, Industrial o Civil y pertenecían al curso donde la que suscribe es la profesora a cargo del mismo. El régimen de cursado de la materia era cuatrimestral con una carga semanal de 8 horas distribuidas en dos días. Para acreditar y/o promocionar la materia además de los dos parciales debían aprobar Trabajos Prácticos haciendo uso específico de software Mathematica.

Estos alumnos contaban en su haber con un curso de Matemática y Geometría para ingresar a la carrera y entre los contenidos que allí se trabajan figuran las funciones exponenciales y logarítmicas. Al desarrollar dichos temas se hace referencia a las asíntotas de ambas funciones sin hacer uso de límites, pero sí, en ambos casos, se escriben las ecuaciones de las respectivas asíntotas en un caso horizontal y en el otro vertical. También se trabajan los desplazamientos de las gráficas y, en consecuencia, de sus asíntotas. En dicho curso no se hace uso de TIC en la enseñanza de ningún concepto.

Teniendo en cuenta los aspectos antes señalados, nos proponemos analizar las imágenes conceptuales del concepto de asíntotas de funciones en relación con el uso de software Mathematica, de los estudiantes de Análisis Matemático I del Departamento de Ingeniería e Investigaciones Tecnológicas de la Universidad Nacional de La Matanza. La finalidad es describirlas, incluyendo las imágenes mentales sobre asíntotas de funciones y la exploración de tipos de actividades matemáticas con uso del software que contribuirían a modificar las imágenes conceptuales erróneas de las asíntotas de una función.

Consideramos que el trabajo realizado es un punto de partida en el estudio de estas cuestiones y que los resultados obtenidos están sesgados a esta comisión de Análisis Matemático I, pero nos sirve como inicio para pensar las actividades matemáticas con uso de software Mathematica, tanto para asíntotas a funciones como también para otros conceptos matemáticos.

El presente trabajo de tesis se organiza en siete capítulos y anexos. La indagación bibliográfica sobre trabajos relativos a asíntotas de funciones, uso de tecnología en el aprendizaje de dicho concepto y diversas teorías cognitivistas forman parte del estado del arte (capítulo 1). A partir de allí elaboramos nuestro Marco Teórico (capítulo 2) sobre *imágenes mentales y conceptuales, uso de tecnología en ámbitos académicos matemáticos y registros de representación semiótica.* En el mismo hemos elaborado definiciones propias inspiradas en autores referentes que orientan nuestro trabajo de investigación.

En el capítulo 3 exponemos la metodología de tipo cualitativa e interpretativa y el diseño de los instrumentos que utilizamos para lograr los objetivos generales y específicos planteados: un *Test de Diagnóstico Inicial* (TDI) dividido en dos actividades, una previa a la enseñanza del concepto de asíntotas de funciones y la segunda posterior a la misma, *Entrevistas Individuales* (EI), diseñadas una vez que estudiamos las producciones de los estudiantes y para el análisis de los trabajos de los estudiantes definimos escalas de apreciaciones que denominamos *Escala de Apreciación de Imágenes Mentales con uso de Software* (EAIMuS) y *Escala de Apreciación de Imágenes Conceptuales con uso de*

Software (EAICuS). Las entrevistas fueron pactadas con los alumnos unos días después del desarrollo de la actividad, se les informó que las mismas serían insumo de un trabajo de tesis de la profesora del curso, por lo que podrían advertir una observación minuciosa de los docentes presentes en la clase. En principio íbamos a realizar cuatro entrevistas, una por cada grupo de actividades propuestas en el TDI, pero como se repetían muchas respuestas de los alumnos solo seleccionamos dos de ellas para no extender demasiado el presente trabajo. En los dos capítulos siguientes (capítulo 4 y 5) mostramos el análisis de las producciones de los alumnos a partir de las cuales pudimos proponer una clasificación de imágenes mentales y conceptuales sobre asíntotas de funciones cuando se trabaja con software y las entrevistas realizadas. Finalmente presentamos conclusiones y perspectivas que pueden surgir del presente estudio (capítulo 6), la Bibliografía citada (capítulo 7) y los Anexos con el detalle total de las producciones de los estudiantes de todas las actividades que hemos propuesto.

CAPÍTULO 1: ESTADO DEL ARTE

1.1 Introducción

Dentro de la bibliografía especializada podemos encontrar varios autores y estudios vinculados a conceptos del Análisis Matemático I, al de imágenes conceptuales y concepciones espontáneas, al de obstáculos en el aprendizaje, utilizando o no tecnología y con diferentes tipos de representación. Proponemos a continuación una breve descripción que muestre un recorrido que abarca tres aspectos: imágenes conceptuales y concepciones espontáneas, obstáculos de aprendizaje y registros de representación y, por último, uso de tecnología en ámbitos académicos matemáticos.

1.2 Imágenes conceptuales, concepciones espontáneas

Tall y Vinner (1981) sostienen que la Matemática, a diferencia de otras disciplinas, la definición de sus conceptos requiere de una gran precisión ya que toda la teoría se desarrolla a partir de éstos. Muchos conceptos matemáticos tienen denominaciones similares a las ya conocidas por el alumno en su vida cotidiana antes de ser definidos formalmente en la disciplina. Dado que la estructura cognitiva de cada individuo es compleja, es posible que se generen diferentes imágenes mentales al evocar un concepto que se pretende aprender, definir o indagar. Estos autores acuñaron el término *imagen conceptual* para describir la estructura cognitiva que se asocia con un concepto matemático, que incluye todas las imágenes mentales, propiedades, concepciones espontáneas y procesos asociados en la elaboración de este. Esta imagen conceptual se construye a lo largo de los años, a través de experiencias de todo tipo, y la misma se va modificando a medida que la persona recibe nuevos estímulos y afina el concepto. Diferencian las *imágenes conceptuales* de las *definiciones conceptuales.* Cuando hacen referencia a estas últimas expresan que se trata de un conjunto de términos o palabras que son usadas para especificar cierto concepto que puede ser aprendido de memoria o en forma significativa por parte de la persona. Los autores también señalan que en las *imágenes conceptuales* hay un claro predominio de la representación visual de un concepto sobre la verbal, ya que sostienen que en la mente de un individuo primero aparece la imagen o representación del objeto y luego la verbalización.

Otros conceptos que usan los autores es el de *imágenes evocadas.* Éstas son las que aparecen más visibles en la mente del sujeto cuando piensa en un determinado concepto. Pueden ser *contradictorias o erróneas* y esto genera lo que llaman *conflicto.* Así, señalan que ciertas imágenes mentales que un sujeto tiene acerca de un concepto, elaborada en su primera infancia, se transforman en obstáculos a la hora de definir un concepto de manera formal. Un ejemplo de este conflicto es el concepto de resta que elabora un estudiante, en principio vinculado a números naturales y en ese campo numérico claramente lo asocia con la imagen mental de reducción. Esta imagen se transforma en un obstáculo cuando se pretende ampliar el concepto de sustracción a otros campos numéricos, donde ya no se relaciona con la primera noción de reducción elaborada por el individuo en otra etapa de su pensamiento.

Valvidé y Garbin (2008), usan el término *esquema conceptual*, como traducción del concepto de Tall y Vinner de imagen conceptual. Diferencian entre la acepción epistemológica y cognitiva del término. La primera hace referencia a todos los conocimientos que evocaron matemáticos famosos en la formación de un concepto como ser ideas, representaciones, procedimientos, mientras que en la segunda se centran en los conocimientos que evocan los alumnos.

Por otro lado, Tall (1995) distingue dos clases de pensamiento matemático: el Pensamiento Matemático Elemental (PME) y el Pensamiento Matemático Avanzado (PMA). El primero se refiere al pensamiento matemático vinculado con la escuela primaria y secundaria, que incluye aritmética, álgebra y geometría. El segundo se refiere a la definición de los conceptos de manera más formal, incluyendo deducciones lógicas, propias del nivel universitario. Afirma que el paso del PME al PMA requiere una reconstrucción cognitiva que supone una transición que consiste por un lado describir un objeto matemático y por otro definirlo. Coincide con esta postura Garbin (2005) quien sitúa al PME con la etapa de enseñanza secundaria y al PMA con la enseñanza universitaria, sin embargo, Tall no asegura cuándo y en qué condiciones se pasa de un estado al otro.

Engler et al. (2007), diseñaron una propuesta didáctica para abordar la enseñanza del concepto de límite finito analizando *concepciones espontáneas personales* (Cornu, 1991). Esta noción se refiere a las construcciones mentales de los sujetos que son previas a la enseñanza. El sujeto las construye debido al uso cotidiano de la palabra ("límite" en este estudio). No necesariamente se relacionan con el concepto matemático, lo que puede acarrear errores y ofrecer resistencia a modificaciones.

Colombano y Rodríguez (2008) realizan un estudio con alumnos del profesorado de matemática acerca de las concepciones espontáneas del concepto de límite funcional presentes en los estudiantes y cómo éstas persisten o no luego de proponer actividades en diferentes registros de representación semiótica (Duval, 1993). Apoyándose en las ideas de Williams (1991) elaboran un test que ponen en práctica y concluyen que los alumnos usan las imágenes conceptuales y no estaban en conflicto con la definición formal del concepto que es por demás complejo. Los mismos autores (2015) realizaron otro estudio centrado en el diseño y fundamentación de actividades que evidencian las contradicciones que surgen cuando los estudiantes del profesorado de Matemática usan la noción intuitiva del concepto que no son necesariamente correctos.

Vinner (1983) realizó una experiencia con un grupo de estudiantes en la cual estudiaba sobre las imágenes conceptuales vinculadas al concepto de función y las agrupó en cuatro categorías:

-Categoría I: Los alumnos repiten palabras de diferentes textos para definirlas.

-Categoría II: Una función es considerada una regla de correspondencia.

-Categoría III: Una función se relaciona con una fórmula, una ecuación es decir un tema vinculado con el lenguaje algebraico.

- Categoría IV: Una función la reconocen a través de un gráfico o bien a apartir de su simbología característica y=f(x).

1.3 Obstáculos de aprendizaje, registros de representación

Las dificultades, errores y obstáculos con los que se encuentran los alumnos a la hora de elaborar una imagen conceptual de un objeto matemático son temas de discusión en numerosas investigaciones. Entre ellas se encuentran Cornu (1991) y Tall y Thomas (1991). Estos últimos utilizan el término *obstáculo cognitivo* como sinónimo de dificultad que deben afrontar los estudiantes en la comprensión del álgebra y en la compleja tarea de abstracción que implican los procesos algebraicos. Los clasifican en *obstáculos de análisis, de proceso-producto, de respuesta esperada y de cierre* (p.2). También hacen referencia al "uso del ordenador para promover el *pensamiento versátil"* (p.7). Al respecto señalan la importancia de representar los conceptos matemáticos haciendo uso de imágenes, símbolos y palabras para desarrollar un *pensamiento versátil* y en este sentido, un medio donde interactúa el ordenador, con actividades especialmente diseñadas facilita la manipulación de los objetos matemáticos. Desde el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS), Fuente, Armenteros y Moll (2012) señalan el conflicto semiótico vinculado con la intervención del docente frente a una respuesta del alumno.

En otra línea tanto Bachelard (2007) como Popper (1979) sostienen que los obstáculos epistemológicos son un motor importante en la construcción de conocimiento científico. El primero sostiene que "se conoce en contra de un conocimiento anterior, destruyendo conocimiento mal adquirido o superando aquello que, en el espíritu mismo, obstaculiza a la espiritualización" (p.15). Popper, por su parte, sostiene que la ciencia crece en términos de conjeturas y refutaciones y que esto último es condición para que una teoría sea considerada científica, es decir su contenido debe ser refutable. Estos obstáculos se ponen de manifiesto a través de los errores que observamos los docentes en los alumnos en la construcción de un cierto concepto.

Duval (1998) asegura que, en la formación de un concepto matemático con uso de tecnología, ésta no es el elemento central, sino que las *representaciones semióticas* son el medio para actuar sobre los objetos matemáticos y poder de esta forma romper con la *paradoja cognitiva del pensamiento matemático* donde por un lado se encuentra la comprensión conceptual del objeto matemático y por el otro la representación de dicho objeto. También sostiene que es necesario que interactúen diferentes representaciones de un objeto matemático para construir un concepto matemático (1993).

Por su parte Tall (1995) toma ideas centrales de Bruner quien ha distinguido tres tipos diferentes de representación de la realidad: la representación enactiva, que se vincula con un proceso físico como puede ser observar un objeto; la representación icónica, en la que se utilizan imágenes o esquemas y la representación simbólica, en la que se usa algún símbolo arbitrario. El autor lleva esta clasificación al campo de las representaciones matemáticas estableciendo que estas son: la representación *enactiva, la icónica y la simbólica.* La enactiva, se refiere al proceso físico, la icónica relacionada con lo visual y la tercera, la divide en tres tipos: *verbal, formal y proceptual.* La primera es asociada con la descripción de un objeto matemático, la segunda con la definición y la tercera es la dualidad entre el proceso y el objeto, que es lo que permite analizar las dificultades cognitivas vinculadas con los símbolos matemáticos.

Fuente et al. (2012), ratifican la postura de Tall acerca de los distintos sistemas de representación: gráfico, numérico y simbólico, imprescindibles en el aprendizaje de un concepto. Sierra, González y López (2000) estudiaron las concepciones acerca del concepto de límite y continuidad de una función en estudiantes del Bachillerato, que realizaron un Curso de Orientación Universitaria (COU). Señalaron dificultades relacionadas con los registros en los cuales las funciones estaban expresadas, siendo las tablas y gráficos los que presentaron mayores dificultades frente al registro algebraico.

Tall y Bakar (1992) realizan un estudio sobre la comprensión del concepto de función y la brecha que observan entre lo enseñado por los docentes y lo aprendido por los alumnos. Algunas conclusiones revelan concepciones erróneas significativas como por ejemplo que un número mayoritario de alumnos que ingresan a la universidad no reconocen a la función constante como una función ya sea que se la presente en forma algebraica o gráfica. Otro error que señalan los autores es que los estudiantes consideran a una circunferencia como una función. Plantean como hipótesis que los alumnos desarrollan prototipos para explicar el concepto de función como lo hacen con temas de la vida cotidiana, es decir recurren a propiedades como puede ser la regularidad de una gráfica o de una cierta fórmula explícita, pero señalan que la compresión que adquieren del concepto es frágil e inconsistente. Señalan también que no tienen en cuenta conceptos como dominio e imagen (rango). Esta idea de los prototipos con los cuales operan los estudiantes es parte de lo que se estudia bajo el concepto de las imágenes conceptuales y que es complejo por ser personal, difícil de advertir y de erradicar.

Arce y Ortega (2013) realizan un trabajo con estudiantes de Bachillerato, donde analizan las producciones escritas de ellos vinculadas con el trazado de gráficas de diferentes funciones y sus asíntotas, poniendo énfasis en los principales errores que observan en dichas representaciones y realizan ciertas recomendaciones didácticas para mejorarlas. Los prototipos de funciones que aparecen mencionados en el artículo son las homográficas, logarítmicas y por trozos. Solo se concentran en la representación gráfica sin mencionar otro tipo de registro. Engler, et al. (2007), realizaron una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de límite finito usando diferentes registros de representación. Por otro lado, Yerushalmy (1997) realizó un estudio en un curso de precálculo sobre asíntotas usando tecnología, pero se focalizó únicamente en el análisis de funciones racionales. Trabajó con pequeños grupos de alumnos, asistencia del docente, una herramienta informática de tipo gráfica y una guía de actividades sobre funciones racionales. La idea era que los alumnos pudiesen conjeturar, sacar conclusiones respecto de la existencia de las diferentes asíntotas verticales, horizontales y oblicuas. No se utilizó el concepto de límite, el énfasis estuvo en la potencialidad visual que le otorga la tecnología.

Radillo y González (2014) presentan funciones en tres registros diferentes (algebraico, numérico y gráfico) como actividad preliminar a la definición intuitiva de límite funcional con estudiantes de la licenciatura. Para que los estudiantes se acerquen a las ideas de asíntotas horizontal y oblicua asociadas a las definiciones de límite usan tabulaciones. No usan tecnología, sino que hacen referencia a técnicas de visualización a partir de las producciones en papel de los alumnos, las cuales usan para justificar las conclusiones a las que llegan, señalando los principales errores que cometen los alumnos.

1.4 Uso de tecnología en ámbitos académicos matemáticos

Las diversas investigaciones vinculadas al aprendizaje asistido por computadora han tenido un importante auge desde mediados de los noventa. El uso de sistemas Algebraicos Computarizados, reconocidos con las siglas en inglés: CAS, entre los cuales podemos enmarcar al software Mathematica, Maple, Derive, entre otros, forman un extenso capítulo en la enseñanza de conceptos matemáticos. Estos sistemas permiten realizar gráficos y manipulaciones algebraicas de variada complejidad de acuerdo con la versión utilizada. La integración de tecnologías en la enseñanza de la Matemática no está en discusión, pero sí lo está el cómo llevarlo a la práctica (Goldenberg, 2000).

Codes y Sierra (2005) señalan que existen dos líneas teóricas principales que orientan las investigaciones sobre el uso de sistemas algebraicos computarizados: el constructivista y el instrumental. Ambos tienen un objetivo común que es mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje, pero coincidentemente con Goldenberg (2000) la discrepancia entre ambos es el modo de llevar a cabo la mejora. El enfoque instrumental, basado en la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Chevallard (1999), sostiene que la forma de interactuar con los objetos matemáticos es a través de las actividades y técnicas como mediadores del conocimiento matemático. Los autores explican que el elemento central de este paradigma es el denominado “Génesis Instrumental” que Trouche (2003, citado en Codes y Sierra 2005, p. 4) define como “un proceso complejo, que requiere tiempo y conexiona las características de la herramienta (sus potencialidades y sus restricciones) con la actividad del individuo (su conocimiento), formando un método de trabajo” (p.4). En cambio, el enfoque constructivista no otorga el mismo valor a las técnicas ya que centra su atención en el aspecto cognitivo del aprendizaje, es decir en la comprensión del objeto de estudio y no en la automatización del conocimiento. Los autores señalan dos líneas de trabajo, por un lado, los del grupo de Investigación en Matemáticas de Pregrado en Educación Comunitaria (IMPEC) (del inglés, *Research in Undergraduate Mathematics Education Community* (RUMEC) inspirado en los aportes de Dubinsky y por otro, los de los cognitivistas Tall y Gray (1994), en ambos el ordenador es considerado una herramienta cognitiva que favorece la construcción de esquemas mentales. En el primero se recurre a la programación para favorecer la abstracción y usan una metodología que denominan Actividad-Discusión-Ejercitación (ADE). En el segundo utilizan la teoría del *Procepto*, expresión simbólica que denota la unión de un objeto matemático que funciona, según el contexto como concepto o como proceso.

Contreras, Font, García, Luque, Marcolini, Ordoñez, Ortega y Sanchez (2005) agregan a las líneas teóricas planteadas por los anteriores autores una tercera relacionada con la visualización y representaciones semióticas de los conceptos matemáticos con relación a las nuevas tecnologías. En esta línea teórica se destacan también los autores Gutiérrez (1997), Camacho y González (2001), Deulofeu (2007) y Queralt (2000), Hitt (2003). Uno de los seguidores de esta tercera línea, afirma que en la resolución de problemas matemáticos existen dos ideas fundamentales: el desarrollo de habilidades matemáticas y el uso de diferentes representaciones. Desde ese punto de vista, la tecnología es un instrumento fructífero para la construcción de conceptos matemáticos más profundos. Esta línea de investigación se basa fundamentalmente en la teoría de Duval acerca de las representaciones semióticas.

Kidron y Tall (2014) realizan una experiencia usando software Mathematica, donde vinculan el desarrollo histórico del concepto de límite con el cognitivo. Destacan la importancia de la herramienta informática en cuanto a la visualización rápida de funciones y a la posibilidad de trabajar en forma simbólica con el software. Concluyen que la experiencia se encuadra en el marco de "tres mundos" que, según ellos “caracteriza el desarrollo del pensamiento matemático a través de la percepción humana, operación simbólica y razonamiento matemático". (p.3).

Tall y Thomas (1991) discuten acerca del uso de computadoras para el desarrollo de imágenes conceptuales involucrando en el aprendizaje uso simbólico y visual de la herramienta computacional, advierten que el excesivo énfasis puesto en lo visual puede transformarse en una barrera que impida un buen desarrollo de alguna definición o deducción formal y la imagen conceptual vinculada a estos procesos. Por otra parte, señalan que al facilitarse el cálculo simbólico a través de la computadora el estudiante puede explorar ideas matemáticas más variadas como puede ser proponer contraejemplos para refutar alguna proposición.

Fuente, et al. (2012) analizan la noción intuitiva de límite con tendencia infinita y el concepto de asíntota horizontal en un curso de Bachillerato. Explicitan tres significados de referencia cuando se enseña el concepto de límite que son: "gráfico o geométrico, infinitesimal y numérico" (p.681). Ponen en evidencia ciertas imágenes mentales de los estudiantes con referencia al límite entre las que se encuentran aproximación gráfica, aproximación estimada, el límite como valor de la función en el punto, y el límite considerado como algoritmo de cálculo y en parte se las atribuyen al significado del concepto de límite que se dio a lo largo de la historia y que se evidenciaron en el proceso de enseñanza.

Villarreal (2003) describe los procesos de pensamientos de estudiantes universitarios que trabajan con software Derive al desarrollar actividades de Cálculo Diferencial vinculadas con el concepto de recta tangente a una función. Concluye que los estudiantes recurren al registro gráfico y algebraico que le provee la herramienta informática.

Por su parte Camacho (2005), apoyándose en la línea de investigación de *la génesis instrumental* (Trouche, 2005), realiza dos investigaciones. En una describe la enseñanza de las integrales definidas usando software Derive y en la otra las integrales impropias usando Maple. Una de las conclusiones a las que arriba es que el software facilita los cálculos y evita la memorización de fórmulas, pero el alumno es el que debe establecer relaciones entre los sistemas de representación que se involucran en la actividad propuesta que son el gráfico, algebraico y numérico. En el segundo trabajo, en cambio, el ordenador solo es usado para reforzar conceptos ya adquiridos por el alumno, pero no para generar nuevos conocimientos.

Kidron (2011) plantea que los alumnos construyen el conocimiento de noción de límite al abordar el concepto de asíntota horizontal, y lo hace proponiendo una serie de actividades que generan en los estudiantes un conflicto entre la imagen conceptual y la definición de las asíntotas horizontales. Las mismas las resuelven usando lápiz, papel y software matemático con tipos de representación.

Sosa, Aparicio y Tuyub (2008) proponen diseñar actividades con software y ponen el énfasis en que los alumnos no deben solamente representar y manipular “objetos matemáticos” con el recurso tecnológico, sino que éste debe permitirle reestructurar su pensamiento, permitiendo un acercamiento al concepto de dicho objeto de manera más válida. Los autores proponen una serie de actividades basadas en la manipulación y observación de la pantalla de la computadora y señalan cuatro fases, apoyándose en las ideas de Llinares (1994) que son: Experimentación, Argumentación, Validación y Reflexión. En la primera observan, manipulan, actúan en forma inductiva con los objetos matemáticos que le proporciona la herramienta, luego deben expresar con palabras o símbolos lo que realizaron en la fase anterior, en la tercera etapa buscar formas formales de validar dichas argumentaciones y finalmente se reflexiona a modo de puesta en común acerca de todo lo actuado.

1.5 Recapitulación

Como puede apreciarse en la literatura especializada, hay varios autores, líneas de investigación y estudios sobre conceptos de Análisis Matemático I, imágenes conceptuales con uso o no de tecnología, con variedad de registros de representación, pero hemos accedido sólo a uno que estudie la relación entre las imágenes conceptuales y el concepto de asíntota. En este caso es exclusivamente su vinculación con el concepto de asíntota horizontal, por lo que consideramos necesario ampliar el estudio de imágenes conceptuales asociadas al concepto de asíntotas, incluyendo los tres tipos, con uso de tecnología y con variedad de registros de representación.

Tal como mostramos en el siguiente capítulo nos fue necesario proponer adaptaciones a las definiciones de registros de representación, de imágenes mentales y conceptuales, para adecuarlas al tema de esta tesis y a la inclusión de tecnología. Dichas definiciones forman parte del marco teórico utilizado.

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO

2.1 Introducción

Como parte del marco teórico de este trabajo consideramos, de lo presentado en el estado del arte: el concepto de imágenes conceptuales planteado por Tall y Vinner, (1981) bajo una perspectiva cognitivista del aprendizaje, los registros de representación semiótica (Duval, 1993) y la postura de Tall y Thomas (1991) sobre el uso de computadoras y el desarrollo de imágenes conceptuales involucrando en el aprendizaje uso simbólico y visual de la herramienta computacional. A esto le sumamos una elaboración propia de definiciones de registros de representación y de imágenes mentales y conceptuales adaptados al contexto de uso de software en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

A continuación, mostramos primeramente aspectos relevantes sobre cada uno de estos puntos y luego damos paso a una explicación detallada de las adaptaciones de las definiciones que elaboramos y utilizamos para llevar a cabo nuestro trabajo.

2.2 Imágenes mentales y conceptuales

Tall y Vinner (1981), señalan que las imágenes mentales, no formales de un concepto, son de elaboración personal del sujeto, que se relacionan con experiencias previas, nociones anteriores que en algunos casos se transforman en obstáculos de aprendizaje de un determinado concepto. Para permitir que el sujeto las exprese usa gráficos, palabras o incluso puede recurrir a símbolos, es decir aparecen implícitamente ligadas a los registros de representación de Duval. Así, Vinner (1983) define imagen mental relacionada con un concepto matemático como el conjunto de todas las imágenes que están asociadas al mismo; y que puede incluir cualquier representación visual del concepto, incluso símbolos, gráficos o palabras. Estas son previas a la enseñanza del concepto.

Tall y Vinner (1981) sostienen que la matemática como actividad humana, a diferencia de otras disciplinas, en las definiciones de sus conceptos requiere de una gran precisión que sustenta la base de toda la teoría que se desarrolla a partir de éstos. Basándonos en las concepciones teóricas de los autores, una primera aproximación a la definición que adoptaremos de imagen conceptual en el presente trabajo es: la estructura cognitiva total de un sujeto que construye a lo largo del tiempo, a partir de las imágenes mentales previas, concepciones espontáneas y propiedades de un determinado concepto matemático. Vinner (1983) define a las **imágenes conceptuales**, como el conjunto de propiedades asociadas con el concepto junto con la imagen mental previa que tiene el estudiante de este, es decir es posterior a la enseñanza.

Font (2002, citado en Pochulu y Rodríguez, 2012), sostiene que cuando un alumno escucha el nombre de un concepto matemático, en su mente primero aparecen representaciones visuales de ese concepto, o bien expresiones que los evocan o símbolos que los asocien. Estas imágenes que aparecen en la mente de los individuos pueden no ser matemáticamente correctas, tampoco seguir un orden lógico, ya que las partes que la constituyen pueden no tener un vínculo entre sí. En palabras del autor:

> Mientras que la respuesta sea correcta, el individuo no toma conciencia si esa parte que se accionó de su imagen conceptual es o no correcta desde el punto de vista matemático. En consecuencia, la actividad debería permitir movilizar distintas porciones de su imagen conceptual donde se puedan manifestar contradicciones y se hagan evidentes con el objeto de generar un conflicto cognitivo. (pp.119).

Tall y Vinner (1981) desarrollaron el concepto de imagen conceptual o imagen del concepto, contrastándolo con la definición de los conceptos. La imagen del concepto se define como la estructura cognitiva que se asocia con el concepto, que incluye todas las imágenes mentales, las propiedades y procesos asociados. Cambia a medida que el individuo experimenta nuevos estímulos, y las imágenes mentales desarrolladas pueden producir conflictos futuros.

2.3 Registros de representación semiótica

Duval (2006) distingue dos cuestiones centrales para que un estudiante pueda comprender un concepto matemático, por un lado, el contenido matemático conceptual y no semiótico y por el otro las diferentes representaciones semióticas que se pueden elegir para representar dicho concepto de acuerdo con la necesidad del tratamiento de este. Considera al concepto matemático como un proceso mental y a la representación semiótica como algo externo o material. Sugiere que toda actividad matemática que implique la comprensión de un concepto debe utilizar diferentes representaciones semióticas y que no debe confundirse el objeto matemático con la representación utilizada del mismo.

Desde las teorías cognitivistas las *representaciones* son consideradas como cualquier signo, conjunto de símbolos del mundo exterior o bien del interior, que tienen algún significado para un sujeto. Cualquier elemento que percibamos a través de nuestros sentidos, la mente lo transforma en una representación. Mapas, diagramas, dibujos, palabras, símbolos son considerados *representaciones externas* que el sujeto produce en forma intencional para cumplir un determinado propósito. A estas representaciones externas se las denomina *representaciones semióticas.* En cambio, las *representaciones internas* están en la mente del sujeto, pueden ser conceptos, nociones, imágenes mentales, entre otras, que nos permiten, a pesar de no tener la presencia tangible del objeto o de poder verlo (Tamayo, 2006).

Duval (1993) determina tres registros de representación: verbal, simbólico y visual. En el primero prevalece el lenguaje de la palabra, en el segundo el lenguaje algebraico y en el tercero las representaciones gráficas. Se denominan también verbal, algebraico y gráfico respectivamente. Rotula que un buen aprendizaje y el dominio de un determinado concepto se basa en el reconocimiento de diferentes registros de representación y la capacidad de poder pasar de uno a otro.

Por otra parte, Duval (1999) explicita dos tipos de transformaciones de representaciones semióticas denominadas *conversión y tratamiento* (pp.10). La primera de las transformaciones es el paso de un registro de representación a otro, en cambio la segunda se refiere al complejo proceso de comprensión de un concepto matemático dentro del mismo registro. Para entender estas ideas pensemos en las acciones llevadas a cabo al resolver un problema. El enunciado está en registro verbal. Luego se lo expresa en registro algebraico, es decir la ecuación asociada a dicho enunciado. A esta transformación la denomina *conversión*, y al proceso de resolución de dicha ecuación, que mantiene en el registro algebraico, lo denomina *tratamiento.*

Duval (1998) asegura que, en la formación de un concepto matemático con uso de tecnología, ésta no es el elemento central, sino que las *representaciones semióticas* son el medio para actuar sobre los objetos matemáticos y poder de esta forma romper con la *paradoja cognitiva del pensamiento matemático* donde por un lado se encuentra la comprensión conceptual del objeto matemático y por el otro la representación de este.

D'Amore (2011), toma las ideas de Duval y explicita los conceptos de *Semiótica*, como la adquisición de una representación realizada por signos y la *Noética* como la adquisición conceptual de un objeto. La primera representa el uso de múltiples registros de representación, una característica del pensamiento humano y la segunda la creación de nuevos sistemas semióticos, implica progreso del conocimiento. Ambos conceptos están en estrecha dependencia, no existe una sin la otra, es decir la *Semiótica* podríamos decir que alimenta a la *Noética* y viceversa.

D'Amore (2011) aporta que una representación semiótica de un objeto o concepto no es absoluta, se debe asociar con el registro de representación y éste a su vez depende del objeto a representar. Por ejemplo, la representación semiótica de dos líneas paralelas ($||$), puede asociarse a las barras de módulo al trabajar en registro algebraico o a la representación de rectas paralelas en el registro gráfico. Así también la representación semiótica de flecha ($\rightarrow$), podría representar el símbolo lógico del condicional (Implica) en el registro algebraico y el registro gráfico puede representar un vector o una semirrecta.

2.4 Uso de tecnología en ámbitos académicos matemáticos

En cuanto al uso de la herramienta informática pondremos el énfasis en la línea de Tall y Thomas (1991) quienes alientan un aprendizaje versátil de los conceptos matemáticos interactuando en la formación de las imágenes conceptuales tanto lo simbólico como lo visual, sin que prevalezca uno por encima del otro. Adherimos a la idea por ellos propuesta, del uso de computadoras para el desarrollo de imágenes conceptuales usando representaciones simbólicas y visuales.

Tall (2000) destaca que el nuevo paradigma tecnológico obliga a los docentes a realizar una reflexión profunda acerca de cuáles son los contenidos matemáticos necesarios a enseñar, como así también a realizar un replanteo profundo en cuanto a la forma de organizar las clases. La utilización de las nuevas tecnologías (Tall, 1989) generan cambios metodológicos en la enseñanza de la matemática, y el uso de software por parte de los estudiantes les permite involucrarse más con actividades de exploración, conjetura, explicación, etc. Por otra parte, la incorporación de una herramienta potente como lo es el software Mathematica (Rawson, 1999) presenta en el proceso de aprendizaje algunas dificultades que son importantes señalar para tener en cuenta en la planificación de una clase:

- El proceso de enseñanza se torna más lento dado que los alumnos deben enfrentarse con un software que no conocen.
- El tiempo necesario para desarrollar actividades con software es mayor que el empleado en la enseñanza convencional y frente al cumplimiento de un programa de contenidos esto es una desventaja.
- La asistencia del docente es individual y en cursos numerosos esto modifica los tiempos de clase e incluso requiera que no esté solo sino con alguien que pueda ayudar en la tarea.
- Los espacios físicos con computadoras a veces no son lo suficientemente grandes para albergar a muchos estudiantes y si los cursos son muy numerosos esto se transforma en un elemento clave para elaborar la planificación de una clase.

Pero también la incorporación del software tiene una serie de ventajas que explicitamos (Rawson,1999):

- El potencial gráfico del software facilita la exploración por parte del alumno.
- Provoca una retroalimentación inmediata por su característica interactiva.
- El entorno algebraico poderoso del software evita pérdidas de tiempo por parte del alumno, concentrándolo más en la comprensión de conceptos.

Sosa et al. (2008) por su parte proponen diseñar actividades con software y ponen el énfasis en que los alumnos no deben solamente representar y manipular "objetos matemáticos" con el recurso tecnológico, sino que éste debe permitirle reestructurar su pensamiento, permitiendo un acercamiento al concepto de dicho objeto de forma más válida. Los autores proponen una serie de actividades basadas en la manipulación y observación de la pantalla de la computadora y señalan cuatro fases, apoyándose en las ideas de Llinares (1994) que son: Experimentación, Argumentación, Validación y Reflexión. En la primera observan, manipulan, actúan en forma inductiva con los objetos matemáticos que le proporciona la herramienta, luego deben expresar con palabras o símbolos lo que realizaron en la fase anterior, en la tercera etapa buscan formas formales de validar dichas argumentaciones y finalmente se reflexiona a modo de puesta en común acerca de todo lo actuado.

Por otra parte, Williner (2014) diseña actividades con software Mathematica para la enseñanza del Análisis Matemático y argumenta que dicha herramienta cognitiva, porque ese es el uso que le da a la misma, permite vincular aspectos numéricos, gráficos, verbales y simbólicos de manera sencilla. Considera el uso del software como herramienta cognitiva y destaca la posibilidad que ofrece de manipular objetos matemáticos usando diferentes registros de representación.

Contreras de la Fuente y Ortega Carpio (2009) consideran que existen dos concepciones distintas sobre el impacto de las tecnologías sobre las capacidades cognitivas de los sujetos, estas son:

- El ordenador es un *amplificador cognitivo.*
- El ordenador es el responsable de un *cambio cualitativo.*

En el primer caso la computadora juega un papel similar a un libro de texto interactivo, el desempeño mental del sujeto permanece igual que si no actuara con el ordenador, es decir, los objetivos y actividades didácticas son iguales a las de un entorno de lápiz y papel, solo que en este caso la herramienta informática mejora la eficacia y rapidez de los procesos que llevan adelante los estudiantes para resolver una tarea, pero no los modifica, sólo los hace más eficaces.

En la segunda concepción del ordenador, éste actúa como un agente reestructurador del funcionamiento intelectual del sujeto, es decir, los cambios no son sólo cuantitativos (eficacia y rapidez) sino cualitativos. La herramienta informática reorganiza la forma de pensar, enfatizando o promoviendo actividades metacognitivas y/o heurísticas dejando de lado un modelo mecánico de manejo de contenidos.

También los autores señalan que hay que tener en cuenta tres aspectos cuando se trabaja con software específico, las denominan *actividades informáticas,* estos son:

- Las dificultades propias de la *lógica informática.* Es decir, el conocimiento por ejemplo del software que se utiliza, sintaxis, comandos, etc.
- Las que devienen del contenido matemático, es decir, lo conceptual, que no depende del ordenador.
- La interacción del sujeto con el software cuando debe interactuar entre el contenido y la herramienta.

Por su parte Molina Mora (2016) proponen una clasificación de actividades trabajando con software Mathematica en la asignatura Cálculo II.

- Actividades de introducción: son aquellas donde se usan conocimientos previos, pueden ser introductorias a un tema nuevo.
- Actividades de desarrollo de contenido: las consideran a las que realizan un vínculo directo con los contenidos y temas claves a estudiar. Incluyen visualización, interpretación, análisis entre otras características.
- Actividades de extensión o aplicación: aplicar y corregir errores de los contenidos vistos.

Barreiro, Leonian, Marino, Pochulu y Rodríguez (2017), sugieren que la incorporación de nuevas tecnologías en el proceso de enseñanza-aprendizaje, nos obliga a rever los objetivos que nos formulamos en las actividades que planteamos a los estudiantes. Ponen como ejemplo que el enunciado *graficar una función a partir de una expresión un poco más compleja que las habituales* (pp.61), hace un tiempo resultaba un objetivo en sí mismo, mientras que con el devenir de las TIC este objetivo cambia de estatus. Al usar la tecnología el estudiante introduce la expresión y con solo oprimir un botón la gráfica aparece. Por ello, los autores recomiendan el planteo de otros objetivos, como ser si usa una escala adecuada para realizar el gráfico, para que la imagen obtenida con el software sea clara y entendible, entre otros aspectos. También recomiendan que el uso de la tecnología sea *pertinente y significativo. Pertinente* está vinculado con el uso consciente de ella, no es necesario que en todas las clases estén presenten las TIC y *significativo* se refieren a que el concepto matemático que el estudiante aprende sea valioso. Por ejemplo, si sustituimos el uso del pizarrón por una presentación Power Point, sólo estaríamos haciendo un *cambio cosmético*, en palabras de los autores. Así establecen criterios para valorar justamente la *pertinencia y significatividad* del uso de TIC para resolver consignas matemáticas.

Los explicitamos tal como los autores los describen (Barreiro, et. al, 2017, pp. 70-71):

- Criterio 1: *Favorecer la búsqueda de pruebas matemáticas*
- Criterio 2: *Imprescindibilidad de las TIC*
- Criterio 3: *No perder de vista el objetivo matemático*
- Criterio 4: *Incluir distintos usos de TIC*
- Criterio 5: *Complementariedad*
- Criterio 6: *Libertad para apelar a las TIC*
- Criterio 7: *Libertad de selección de cuál recurso tecnológico utilizar.*

2.5 Nuevas definiciones elaboradas

Exponemos a continuación las definiciones que hemos elaborado basándonos en las posturas teóricas de Vinner (1983) y de Duval (1993).

2.5.1 Adaptación de las definiciones de imágenes mentales y conceptuales en relación con el uso de software matemático

Hemos adaptado las definiciones de imágenes mentales y conceptuales sobre conceptos matemáticos establecidos por Vinner (1983) para poder utilizarlas en nuestro trabajo.

2.5.1.1 Imagen mental sobre el concepto de asíntotas de funciones en relación con el uso de software matemático

Es el conjunto de ideas previas a la enseñanza, sobre el concepto de asíntotas de funciones que el alumno expresa en diferentes registros de representación (verbal, gráfico o algebraico) haciendo uso del software matemático.

2.5.1.2 Imagen conceptual sobre el concepto de asíntotas de funciones en relación con el uso de software matemático

Es el conjunto de propiedades asociadas a los distintos tipos de asíntotas que explicitan los alumnos en diferentes registros de representación (verbal, gráfico o algebraico) haciendo uso del software matemático.

2.5.2 Adaptación de las definiciones de registros de representación semiótica con el uso de software matemático

Entre los registros de representación definidos por Duval (1993), tenemos el verbal, el simbólico y el visual. Dado que en el registro simbólico prevalece el álgebra lo denominaremos algebraico y al registro visual lo llamaremos gráfico. De acuerdo con esto y las características del software Wolfram Mathematica, adaptamos las definiciones de registros de representación al contexto del trabajo del problema de la tesis de la siguiente manera:

2.5.2.1 Registro Verbal con uso de software Mathematica (RVSM)

Es cualquier expresión referida a cuestiones matemáticas o no, expresadas a través de palabras usando celdas de texto.

2.5.2.2 Registro Algebraico con uso de software Mathematica (RASM)

Es toda expresión referida a cálculos algebraicos expresada a través de comandos del software adecuados.

2.5.2.3 Registro Gráfico con uso de software Mathematica (RGSM)

Es toda expresión referida a gráficos matemáticos expresada a través de comandos del software que incluyen la expresión analítica de la función a graficar.

Con estos elementos teóricos retomamos el planteo inicial del trabajo y, en el siguiente capítulo, damos precisiones sobre el problema de investigación, objetivos y metodología desarrollada.

CAPÍTULO 3: METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN Y DISEÑO DE INSTRUMENTOS

3.1 Introducción

En este capítulo presentamos nuestra problemática a la luz de los elementos teóricos precisados en el marco teórico y definimos tanto el objetivo general como los objetivos particulares de la investigación realizada. Damos detalles del contexto de trabajo y, para los objetivos planteados, presentamos las decisiones metodológicas adoptadas. También detallamos y fundamentamos los instrumentos que diseñamos para la recolección de los datos requeridos y aquellos destinados al análisis de los datos.

3.2 Precisiones sobre el Problema de Investigación

3.2.1 Contexto de trabajo

Como hemos indicado desde el comienzo, situamos nuestro trabajo en la asignatura Análisis Matemático I del Departamento de Ingeniería e Investigaciones Tecnológicas de la Universidad Nacional de La Matanza. Esta asignatura tiene un régimen de cursado de tipo cuatrimestral con una carga semanal de 8 horas distribuidas en dos días. Para acreditar y/o promocionar la materia además de los dos parciales deben aprobar trabajos prácticos haciendo uso específico de software Mathematica, que es el que la Universidad tiene instalado en sus laboratorios. Este software tiene características singulares que condicionan el desarrollo de las actividades, por lo que dedicamos un apartado a su descripción.

La ubicación temporal de la experiencia es la semana número 4 de clases, luego de la enseñanza de la unidad 1 del programa analítico, relativa a funciones y durante el desarrollo de la unidad 2 denominada límite funcional. En la enseñanza incluimos generalidades y características de las principales funciones algebraicas y trascendentes, entre ellas, valor absoluto, funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas. A pesar de que todos estos temas se dictan en el curso de ingreso, los mismos se retoman y profundizan las cuatro primeras clases del dictado de la materia. Luego enseñamos límites funcionales incluyendo las variantes de las definiciones de límites finitos e infinitos, propiedades y teoremas.

Luego deberíamos enseñar el concepto de asíntotas y es allí donde realizamos nuestra experiencia, aproximadamente la clase número ocho de la cursada.

3.2.2 Características del software Wolfram Mathematica

Este software permite realizar cálculo simbólico, numérico, graficar en dos y tres dimensiones, realizar animaciones entre algunas de sus prestaciones. Una de sus características principales es que, en el mismo de lugar de trabajo se pueden combinar textos, imágenes, comandos y sus resultados sin necesidad de cambiar de pantalla, sector de pantalla o documento. A modo de ejemplo mostramos a continuación la elaboración de un documento en este software en el cual se combinan lo previamente explicado.

Función cuadrátrica: gráfico, calculo dominio e imagen usando el software

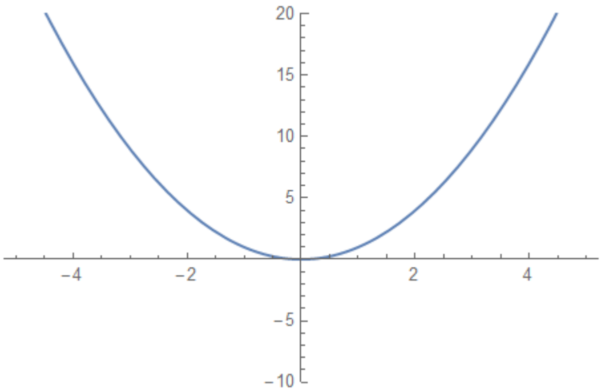
En primer lugar definimos la función:

In[1]:= `f[x_] := x`^{2}

Para graficar la función usamos el comando Plot de la siguiente manera:

In[3]:= `Plot[f[x], {x, -5, 5}, PlotRange → {-10, 20}]`

Out[3]=



Calculamos el dominio a través del comando:

In[7]:= `FunctionDomain[f[x], x]`

Out[7]= `True`

Este resultado implica que el dominio son todos los números reales; por lo que escribimos

$D = \mathbb{R}$

Ahora calculamos la imagen de la funciòn

In[9]:= `FunctionRange[f[x], x, y]`

Out[9]= $y \geq 0$

$I = \mathbb{R}_0^+$

Figura 1. Pantalla del software Mathematica: ejemplo

Aquí puede verse que los sectores del documento que no tienen ninguna indicación a su izquierda son los correspondientes a textos; aquellos que tienen la inscripción “In[ ]” indican que es un comando que ingresamos al software, y los que tienen “Out[ ]” son los resultados obtenidos. Cada una de estas secciones se denomina celdas y el software permite la posibilidad de seleccionar entre diferentes tipos de celdas. El mismo ofrece una paleta, llamada “Classroom Assistant”, a través de la cual ingresamos los comandos, símbolos, funciones, entre otras cosas:

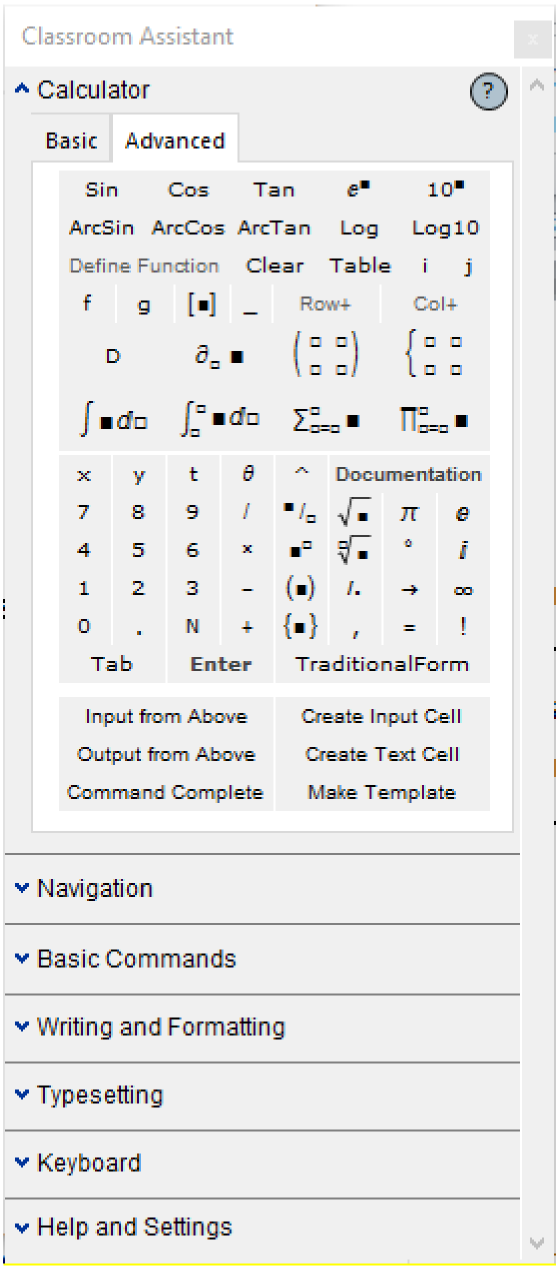
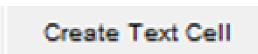


Figura 2. Paleta simbólica del software Mathematica

Si queremos ingresar un texto debemos indicarle esta condición a través del botón 

. Es necesario realizar esta acción sino el resultado obtenido no puede ser editado para configurar el tamaño de la letra, el estilo y todas las cuestiones relativas a edición de texto.

Otras de las características de realizar gráficos de funciones utilizando el software es que es necesario ingresar la expresión analítica de la misma para poder hacerlo. Esto difiere de los gráficos realizados en contexto de lápiz y papel, ya que, en esta opción, podemos realizar gráficos a mano alzada sin necesidad de conocer su expresión analítica.

También es preciso tener en cuenta el formato y sintaxis apropiados para ingresar los comandos para calcular límites, imágenes, dominio de funciones. Si estos no son ingresados correctamente no se obtienen los resultados esperados o es posible que veamos algún mensaje de error.

Todas estas características implican formas de trabajo diferentes a las que se generan en contexto de lápiz y papel, es preciso tener en cuenta los aspectos mencionados en las actividades de enseñanza como en las adaptaciones de las definiciones imágenes conceptuales, mentales y de registros de representación presentadas en el marco teórico.

3.2.3 Objetivos

Teniendo en cuenta el marco teórico explicitado en el capítulo anterior y el contexto de trabajo, consideramos los siguientes objetivos de trabajo:

3.2.3.1 Objetivo general

- Estudiar las imágenes conceptuales del concepto de asíntotas de funciones en relación con el uso de software Mathematica en clases de Análisis Matemático.

3.2.3.2 Objetivos particulares

- Detallar, las imágenes mentales y conceptuales de las asíntotas de funciones evidenciadas en clases con uso de software Mathematica.
- Explorar tipos de actividades matemáticas con uso del software Mathematica que contribuyan a modificar aquellas imágenes conceptuales sobre el concepto de las asíntotas de una función, que tengan algún grado de inexactitud.

- Especificar registros de representación usados por los estudiantes al manifestar las imágenes mentales y conceptuales sobre el concepto de asíntotas de funciones cuando usan el software Mathematica en la clase.

3.3 Aspectos metodológicos

El trabajo de investigación es de corte cualitativo e interpretativo, ya que se pretendió arribar a una comprensión profunda sobre las imágenes mentales, conceptuales y cuáles son los registros de representación utilizados por los estudiantes de Análisis Matemático I del DIIT de UNLaM.

3.3.1 Tipo de Proyecto

Es un proyecto de investigación pues, a la luz de la teoría sobre imágenes mentales y conceptuales y de los registros de representación, diseñamos instrumentos, analizamos producciones de los alumnos, realizamos entrevistas con el fin de recabar información sobre dichas imágenes de los alumnos sobre el concepto de asíntotas de funciones en relación con el uso de software matemático en clases de Análisis Matemático. Hemos elegido una metodología de tipo cualitativa (Sampieri, Fernández y Collado, 2004), pues nuestra postura fue de tipo integradora, dado que hemos revisado trabajos previos para poder elaborar el marco teórico de referencia, pero nos hemos desprendido de éstos ya que no versaban exactamente del tema seleccionado, aunque lo hemos tenido como referencia para hacer nuestro estudio.

3.3.2 Tipo de estudio

El tipo de estudio fue exploratorio pues examinamos imágenes mentales y conceptuales de los alumnos sobre el tema asíntotas de funciones en actividades con uso de software, en un momento dado, con el fin de presentar una visión general del tema en contextos mediados por la tecnología.

3.3.3 Período y lugar de desarrollo de la investigación

La investigación se realizó durante el año 2015 en el laboratorio de computación de la UNLaM.

3.3.4 Universo y muestra

El universo de estudio son los alumnos de Análisis Matemático I de carreras de Ingeniería del DIIT de la UNLaM. Las unidades de análisis son los alumnos de Análisis Matemático I del curso de la tesista. Al ser una investigación cualitativa se ha realizado un estudio de casos dado que se hizo un análisis minucioso de los trabajos de algunos alumnos (Blatter, 2008; Sampieri et al. , 2004) dentro de un contexto de aula real con uso de tecnología (Yin, 2009). El estudio de caso realizado es múltiple y colectivo (Stake, 2006), pues contribuye al cuerpo teórico sumando hallazgos sobre las imágenes conceptuales en particular sobre el concepto de asíntotas de funciones en relación con el uso de software matemático en clases de Análisis Matemático y porque en primera instancia, se evaluaron casos particulares de manera integral, para luego establecer tendencias y/o categorías.

3.3.5 Métodos

En este trabajo de investigación se utilizaron métodos empíricos pues a través de una serie de procedimientos prácticos diseñados por la tesista, se pretendió revelar y describir las imágenes mentales y conceptuales sobre el concepto de asíntotas de funciones y los distintos registros de representación utilizados, en relación con el uso de software Mathematica en clases de Análisis Matemático.

3.3.6 Selección de las variables

A pesar de no ser una investigación cuantitativa seleccionamos dos variables para su análisis: imágenes mentales e imágenes conceptuales sobre el concepto de asíntotas de funciones en relación con el uso de software matemático en clases de Análisis Matemático.

3.3.7 Instrumentos

3.3.7.1 Instrumentos para la recolección de datos

Los instrumentos para la recolección de datos empleados en este trabajo fueron un Test Diagnóstico Inicial (TDI) (Anexo 1) y Entrevistas Individuales (EI), implementados en dos etapas.

3.3.7.1.1 Presentación del Test Diagnóstico Inicial (TDI)

El TDI consistía en dos actividades, una previa a la enseñanza del concepto de asíntotas y otra posterior a la misma. El objetivo de la primera era obtener información sobre las imágenes mentales del concepto de asíntotas que los alumnos explicitan con uso de software y el de la segunda, recabar datos de las imágenes conceptuales vinculadas a la incorporación de la herramienta tecnológica en el tema de asíntotas a funciones. Fue diseñado para ser resuelto utilizando el software Mathematica mediante trabajo grupal.

3.3.7.1.2 Presentación de las entrevistas Individuales (EI)

La entrevista personal la diseñamos para dos alumnos, teniendo en cuenta el análisis de las actividades resueltas por éstos en el TDI. La selección de los entrevistados se hizo teniendo en cuenta los siguientes criterios:

- Un alumno de dos grupos diferentes correspondientes a la segunda actividad.
- Producciones con diversidad de imágenes conceptuales.

3.3.7.2 Instrumentos para el análisis de datos

Para realizar el análisis de las respuestas de los alumnos a las actividades del TDI diseñamos dos escalas de apreciación una para las imágenes mentales y otra para las conceptuales. Este tipo de escalas se recomiendan cuando se observa en forma directa los procedimientos, métodos o técnicas que emplean los alumnos cuando desarrollan una actividad (Ruiz, 2007). Son similares a las listas de cotejo, en cuanto a su estructura, pero permiten incorporar más variables en la observación de un evento, en nuestro caso es el análisis de las producciones de los estudiantes. Una vez hecha la elección de los aspectos a observar, las escalas de apreciación permiten describir el grado de intensidad del aspecto observado, a diferencia de las listas de cotejo que solo hacen referencia a la presencia o ausencia de una conducta. En ellas incluimos los aspectos a analizar en la evaluación de las producciones. Proponemos entonces: Escala de Apreciación de Imágenes Mentales con uso de Software (EAIMuS) (Anexo 2) y Escala de Apreciación de Imágenes Conceptuales con uso de Software (EAICuS) (Anexo 2).

3.3.7.2.1 Presentación de la Escala de Apreciación de Imágenes Mentales con uso de Software (EAIMuS)

Los aspectos incluidos en la EAIMuS son:

- **Descripción de la respuesta**: en este aspecto se describe la respuesta del alumno usando el software, incluyendo una captura de imagen de esta.
- **Imágenes mentales**: ítem en el que se representa la imagen que se ha podido apreciar en la respuesta.
- **Función usada**: aspecto en el que se resume la función utilizada para responder la actividad.
- **Registros de representación utilizados**: ítem en el cual se refiere a él o los registros de representación utilizados por los alumnos al responder.

3.3.7.2.2 Presentación de la Escala de Apreciación de **Imágenes Conceptuales con uso de Software (EAICuS)**

Los aspectos incluidos en la EAICuS son:

- **Descripción de la respuesta**: en este aspecto se describe la respuesta del alumno usando el software, incluyendo una captura de imagen de esta.
- **Imágenes conceptuales:** ítem en el que se describe la imagen conceptual que se ha podido apreciar en la respuesta.
- **Registros de representación utilizados:** ítem en el cual se refiere el o los registros de representación utilizados por los alumnos al responder.

3.3.7.3 Fundamentación de los diseños de los instrumentos para la recolección de datos

3.3.7.3.1 Fuentes teóricas de inspiración del TDI

Tomamos como fuente de inspiración el trabajo de Vinner (1983), quien a partir de una pregunta abierta acerca del concepto de función logra establecer cuatro categorías de las imágenes mentales que manifiestan los alumnos. Por este motivo la primera actividad del TDI, es una pregunta abierta que realizamos a los estudiantes antes de enseñar el tema, para ver de qué forma expresan las imágenes mentales sobre el concepto de asíntotas de funciones, cuando deben utilizar software Mathematica para responderla. Para la segunda parte, necesitábamos que las actividades se presenten en diferentes registros de representación ya que la variedad de estos favorece la comprensión de un concepto tal como lo expresa Duval (1993). En palabras del autor:

> El papel desempeñado por los signos, o más exactamente por los sistemas semióticos de representación, no es sólo para designar los objetos matemáticos o comunicarlos, sino también para trabajar sobre los objetos matemáticos y con ellos. A diferencia de las otras áreas del conocimiento científico, signos y la

transformación de representaciones semióticas están en el corazón de la actividad matemática. (Duval, 2006, pp.106).

Por tal motivo decidimos en la segunda de las actividades presentar los problemas en diferentes registros semióticos.

Por otra parte al hacer uso de tecnología nos basamos en una investigación propia (Scorzo, Favieri, Williner, 2014) donde proponemos actividades diseñadas con software, que ponen de manifiesto diferentes conflictos con los cuales se enfrenta el estudiante, como ser que una función puede tener al mismo tiempo asíntota horizontal y oblicua, o bien que las asíntotas pueden tener puntos de intersección con las funciones, o que las herramientas informáticas no siempre grafican las asíntotas, entre otras cuestiones. Colombano y Rodriguez (2010) diseñan y fundamentan actividades que ponen en evidencia contradicciones en los estudiantes cuando se basan en modelos intuitivos del concepto de límite. Argumentan que la elección didáctica del docente condiciona la imagen conceptual que el estudiante forma. Sostienen que, si por ejemplo se inicia una clase con exploraciones numéricas a través de una tabla, puede que el alumno asocie el concepto con la realización de cálculos que no siempre evidencian el límite en cuestión Teniendo en cuenta estos aspectos, diseñamos la segunda parte de nuestro TDI, posterior a la enseñanza, con dieciséis funciones con asíntotas, en diferentes registros semióticos, que pretenden presentar algún conflicto cognitivo de acuerdo con las características antes mencionadas.

3.3.7.3.2 Diseño del TDI y su fundamentación

El instrumento está compuesto por dos actividades abiertas, a partir de las cuales los alumnos podrían expresar libremente sus ideas sobre el tema que nos interesa investigar. La actividad número uno, previa a la enseñanza del concepto de rectas asíntotas a una función utilizando el software, apunta a obtener información sobre imágenes mentales.

La segunda, posterior a la enseñanza, tiene por finalidad adquirir datos sobre las imágenes conceptuales.

La primera actividad fue una pregunta de tipo abierta (González Zamora, 2002) que debían responder usando el software y sin consultar apuntes, libros ni sitios web, lo que se explicitó en la consigna.

ACTIVIDAD 1

¿Podrían explicar, haciendo uso del software, qué es para ustedes una recta ASÍNTOTA a una función? ¿Qué tipo de asíntotas conocen? En este ejercicio tienen la libertad de explicar con palabras sueltas, frases o párrafos, con gráficos, con expresiones con símbolos o números o cualquier otra forma que consideren apropiada para exponer sus ideas. Nos interesa saber cómo representan en sus cabezas las rectas asíntotas a una función y siempre usando el software. Nota: es importante que para responder a esta actividad no usen libros, apuntes, o sitios web, sólo expliciten en detalle lo que conocen ustedes.

Pretendemos conocer las imágenes mentales sobre el concepto de asíntotas de funciones en relación con el uso de software matemático respetando la definición que hemos elaborado. Tuvimos en cuenta antecedentes como los de Stewart, Lothar y Saleem (2007); Larson y Falvo (2011); Altman, Comparatore y Kurzrok (2002) y a experiencias como la de Rodriguez, Trillini y Murúa (2014) que ponen de manifiesto que las funciones homográficas, como un caso particular de las racionales, son utilizadas frecuentemente en la enseñanza media para evidenciar la existencia de asíntotas de tipo vertical y horizontal. De allí que consideramos a este tipo de funciones como “funciones prototipos”. La utilización de sólo esta clase de funciones podría contribuir a la generación de ideas erróneas como ser, todo número que anula el denominador denota la presencia de una asíntota vertical que pasa por dicho punto, o bien al conjunto imagen de una función nunca pertenece el número por el cual se traza la asíntota horizontal. Éstas suelen surgir de reglas asociadas con el estudio de ese tipo de funciones sin recurrir a las definiciones de límites.

En el curso de Matemática y Geometría, (Scorzo y Ocampo, 2014) de ingreso a la carrera de Ingeniería de nuestra Universidad, se presentan funciones como las logarítmicas y exponenciales cuyo comportamiento con respecto a asíntotas verticales y horizontales es diferente al anterior, ya que sólo lo son de un lateral para las verticales y para la tendencia hacia infinito positivo o negativo. En esta oportunidad, la enseñanza de este tipo de asíntotas se centra en analizar el comportamiento de la función a partir de tablas de valores, sin recurrir a la definición de límite. Nos interesa conocer si surgen imágenes conceptuales asociadas con la no identificación de estas diferencias.

Un estudio llevado a cabo con alumnos de Análisis Matemático I de la Universidad de la Matanza, (Scorzo et al., 2014) nos permitió detectar que los alumnos suelen tener dificultades en reconocer asíntotas oblicuas, y la posibilidad de intersección entre las rectas asíntotas y el gráfico de la función. Situación que podría estar favorecida por la pobre bibliografía utilizada en enseñanza media la cual, generalmente, hacen escasa referencia a las asíntotas oblicuas, y a la posibilidad de intersección con la función (Amster, 2014, Cortés, 1993; Pérez, Romero, 2015, Pezzatti, 2014)

Otra fuente de contenidos a la que suelen acudir los alumnos es Internet, en sitios web relacionados al tema se define asíntota como *una recta imaginaria formada por valores que una función nunca toma* (Cajón de ciencias, 2011-2015), o *rectas a las cuales la función se va acercando indefinidamente* (Vitutor, 2012), *recta a la que se aproxima continuamente la gráfica de tal función,* incluyendo una referencia histórica y remarcando a idea del “no encuentro” entre la curva y la asíntota (Wikipedia, 2014) o como *rectas a* *las cuales la función se acerca cada vez más, pero sin llegar a tocarlas y agregan que la función toca a la asíntota en el infinito* (Matemáticas-IES, 2006-2015). Otra de las concepciones que aparecen en los mismos sitios web mencionados anteriormente es que si una función tiene asíntota oblicua no tiene asíntota horizontal, si bien esto es verdadero en el tratamiento de las funciones racionales no lo es en otro tipo de funciones.

Por estas razones es que diseñamos la segunda actividad, posterior a la enseñanza, con dieciséis funciones con asíntotas, en diferentes registros semióticos, que pretenden presentar algún conflicto cognitivo de acuerdo con las características antes mencionadas. Pretendemos así poner en evidencia las imágenes conceptuales sobre asíntotas a funciones en relación con el uso de software matemático respetando la definición que hemos elaborado.

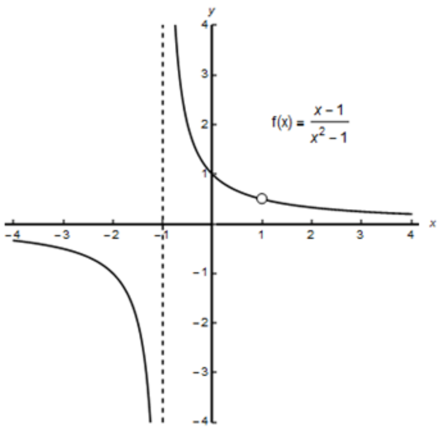
Se organizó en cuatro grupos designados con las letras A, B, C y D. En cada uno había 4 ejercicios con variedad de registros de representación: gráfico, algebraico, verbal y combinación de registro gráfico con algebraico. Cada propuesta fue diseñada pensando en algún conflicto cognitivo de acuerdo a características que evidenciamos luego de un exhaustivo análisis de artículos que versan sobre el tema (Kidron, 2011) (Rodriguez et al., 2014) (Yerushalmy, 1997) (Scorzo et al. , 2014) (Lasalvia,y Piquet, 2000) (Gazzola,Llanos, Otero, 2011) y justificamos la elección de las funciones a la luz del marco teórico de referencia. A continuación, presentamos los ejercicios de cada grupo, con enunciado, objetivos y justificación.

ACTIVIDAD 2

GRUPO A

¿Podrías determinar, haciendo uso del software, las ecuaciones de las asíntotas de las siguientes funciones que te mostramos a continuación? Para dar las respuestas puedes usar el software libremente es decir graficando, calculando, con palabras entre otras formas que se te ocurra.

Ejercicio 1



Objetivos del ejercicio:

- Reconocer a los ejes de abscisa como asíntotas
- Analizar si en todos los puntos que se anula el denominador existe AV.
- Escribir correctamente las ecuaciones de las asíntotas
- Observar diferencias entre el gráfico propuesto y el obtenido con el software.

Esta función racional pero no homográfica (función prototipo) la presentamos en un doble registro gráfico y algebraico. El registro gráfico facilita la visualización de la discontinuidad evitable en x=1 y, el registro algebraico permite determinar el dominio de la función y analizar los puntos en los cuales hay asíntotas verticales. El fin de este ejercicio es poner en evidencia si el alumno reconoce el eje de abscisas como asíntota horizontal y escribe correctamente su ecuación. También pretende revelar si el alumno asocia los valores que anulan el denominador como puntos por los que podrían pasar asíntotas verticales. Se suma a esto el uso del software, que tiene como característica no mostrar las discontinuidades evitables, es decir esos agujeros blancos no los realiza y si dibujan la gráfica pueden notar la diferencia con la que presentamos nosotros en donde ponemos en evidencia dicha discontinuidad.

Ejercicio 2

$$g(x)=\frac{x^3+1}{x^2-1}$$

Objetivos del ejercicio:

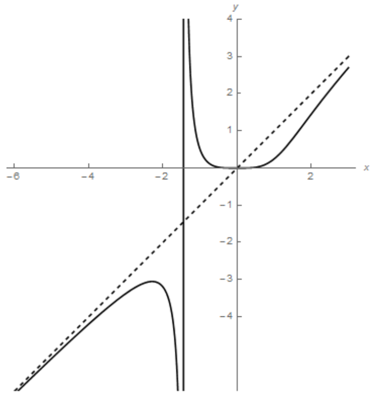
- Observar si realizan análisis desde el registro gráfico o analítico al usar el software.
- Determinar dominio de la función para iniciar el análisis.
- Calcular los límites para determinar la única AV y la AO que posee la función y no sólo dar respuesta a partir de lo que se observa en el gráfico que incurriría en errores.

Esta función racional la presentamos en registro algebraico con el fin de evaluar el comportamiento del alumno con el software, si determina el dominio, realiza la gráfica, reconoce que tiene asíntota oblicua. Ponemos el acento en esta última cuestión ya que, si solo observa el gráfico obtenido con el software no presenta la asíntota oblicua, para que ésta aparezca, es preciso calcularla e incorporarla en el comando para graficar, por esta razón se podría poner en duda la existencia de dicha asíntota. Por otro lado, existen dos valores que anulan el denominador y sólo en uno de ellos existe asíntota; pretendemos observar si calculan el límite verificando que no cumple la definición de asíntota vertical o si solo se quedan con la representación gráfica obtenida con el software.

Ejercicio 3

Responder V o F Justificando la respuesta. Si y=b es asíntota de f (x) entonces existe x=c perteneciente al dominio de la función tal que f(c) =b.
Objetivos del ejercicio: – Explorar diferentes posibilidades para f(x), que pueden transformar a la proposición en falsa o verdadera. – Reconocer a y=b como ecuación de una AH. – Observar si sólo recurren a ejemplos que ratifican la idea que una función no puede intersecar las asíntotas. Esta proposición a justificar su certeza o falsedad en registro es verbal, tiene por objetivo analizar si subyacen imágenes conceptual erróneas como las siguientes: la no existencia de puntos de intersección entre la función y las asíntotas, en este caso con la asíntota horizontal; y otra, si en el conjunto imagen de la función siempre está excluido el valor de la asíntota horizontal.

Ejercicio 4



Objetivos del ejercicio:

- Reconocer asíntotas, aunque no figuren punteadas (AV) o si existe intersección entre la asíntota y la función (AO).
- Escribir ecuaciones de las asíntotas sin contar con la expresión analítica de la función.

A través de esta función presentada en registro gráfico, pretendemos poner en evidencia varios aspectos, si los alumnos:

- Consideran a y=x como asíntota oblicua a pesar que existe un punto de intersección con la función.
- Son capaces de determinar la ecuación de dicha asíntota, aunque no cuenten con la expresión analítica de la función.
- Advierten la existencia de la asíntota vertical, aunque no esté graficada en línea punteada.
- Logran aproximar un valor para escribir la ecuación de dicha asíntota, ya que no es un número entero y los alumnos suelen asociar las ecuaciones de asíntotas verticales con números enteros.

GRUPO B

Ejercicio 5

$$h(x) = \ln(-x-3)$$

Objetivos del ejercicio:

– Reconocer AV en función prototípica, sólo por un lateral.

Esta una función prototipo con dos transformaciones, un desplazamiento horizontal y una reflexión vertical. De acuerdo con la experiencia docente de quien suscribe, los alumnos encuentran dificultades en reconocer este tipo de funciones, aunque hayan trabajados con funciones logarítmicas desde el curso de admisión a la carrera. La particularidad presentada en este caso es que la asíntota vertical x= -3 es sólo por izquierda y pensamos escenarios posibles de resolución usando el software que podrían devenir en imágenes conceptuales erróneas o diferentes a las que suelen ser frecuentes en clases tradicionales de tiza y pizarrón. Uno de ellos está relacionado con la utilización del software sólo para graficar pues, en el resultado obtenido la asíntota vertical no se hace evidente como sucede con los gráficos que tiene asíntotas verticales cuyos límites laterales son infinitos de diferentes signos. Otro escenario posible es que los alumnos pretendan graficar dicha asíntota, y esto requiere mayor conocimiento de comandos del software ya que para ello necesitarían recurrir a la gráfica de curvas paramétricas o comandos de recta que pase por dos puntos y dichos comandos no se explican durante la experiencia de clase. Pensando en escenarios más amplios que la simple obtención de gráficos, está el relacionado con el cálculo de límites. Por defecto el software sólo los calcula por derecha y en este caso en particular es preciso calcularlo por izquierda. Esta distinción debe estar incluida en el comando, aspecto que fue explicado, y pretendemos observar si lo hacen pues estaría indicando que están aplicando las definiciones de asíntotas.

Ejercicio 6

Las conclusiones de un estudio establecen que el número de individuos de una determinada población de una especie protegida viene dado, durante los próximos años, por la función:

$f(t) = \dfrac{7500t + 5000}{t + 1}$, siendo t el número de años transcurridos. Se pide:

a) Dominio e imagen bajo el contexto del problema. Tamaño actual de la población.

b) ¿Cómo evoluciona la población entre los años 4 y 9?

c) Si esta función fuese válida indefinidamente ¿se estabilizaría el tamaño de la población? Justificar la respuesta.

La asíntota vertical en el contexto del problema ¿tiene algún significado?

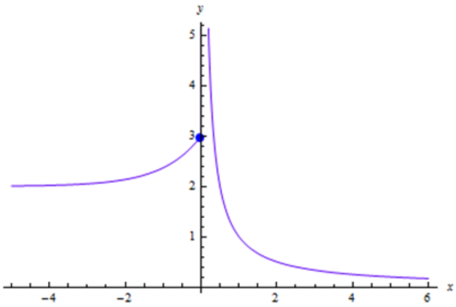
Objetivos del ejercicio:

- Identificar asíntotas en funciones que responden a un contexto.
- Trabajar con variables con otras denominaciones diferentes a las tradicionales.

Presentamos un problema en registro verbal y simbólico, con un modelo con prototipo de función homográfica y de variable independiente t, con la intención de saber si el alumno la reconoce y la analiza en el contexto del problema, reconociendo la validez de la asíntota horizontal sólo por derecha y la no pertinencia de la asíntota vertical. Creemos que este problema resuelto con el software nos aportaría información fundamental para identificar imágenes conceptuales de funciones con asíntotas contextualizadas en un problema, y el comportamiento del alumno al enfrentarse con una variable independiente diferente a “x”.

Ejercicio 7

$$f(x)=\begin{cases} e^{x}+2 & x\leq 0 \\ \dfrac{1}{x} & x>0 \end{cases}$$



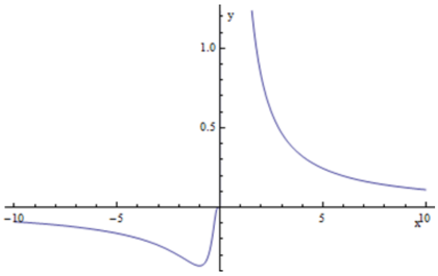
Objetivos del ejercicio:

– Estudiar la existencia de AV en puntos que pertenecen al dominio de la función.

En esta oportunidad presentamos una función en dos registros, algebraico y gráfico, con el fin de poner al alumno ante una situación no trivial, la existencia de una asíntota vertical en un punto perteneciente al dominio. La utilización del software en este tipo de funciones definidas por intervalos agiliza los cálculos de los límites laterales en x=0 y para más y menos infinito. Nos interesa observar el uso del software ante esta situación, si sólo responden a partir del gráfico presentado, si confirman las asíntotas a través del cálculo de límites, teniendo en cuenta los aspectos antes mencionados.

Ejercicio 8

Tener en cuenta que el dominio de esta función es el conjunto de todos los Reales



Objetivos del ejercicio:

- Reconocer AV de un solo lateral
- Expresar la ecuación x=0 como AV a pesar de que el gráfico no se aproxime al eje "y", ya que el dato del dominio contribuye a dar la respuesta correcta.

Esta función en registro gráfico tiene asíntota vertical x=0 solo por derecha y asíntota horizontal y=0 y este gráfico presenta características particulares: no puede precisarse si el punto x=0 pertenece o no al dominio, y si la asíntota vertical por derecha es en x=0 o no, ya que la distancia al eje de ordenadas no se muestra como infinitesimal. Las respuestas dadas por los alumnos utilizando el software en esta situación nos ayudarán a entender las imágenes conceptuales sobre asíntotas verticales y horizontales con utilización de software, contando solo con un gráfico. Si pretenden reproducirlo, deberán explorar alguna expresión analítica de una función que le permita reproducirlo o bien responder sólo a partir de lo que observa, teniendo en cuenta el dato del dominio.

GRUPO C

Ejercicio 9

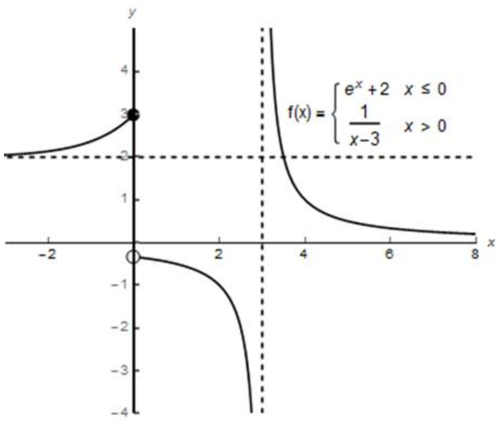
Responder V ó F justificando la respuesta

Si p(x) es un polinomio, entonces la función dada por $f(x)=\dfrac{p(x)}{x-2}$ posee una asíntota vertical cuya ecuación es x=2.

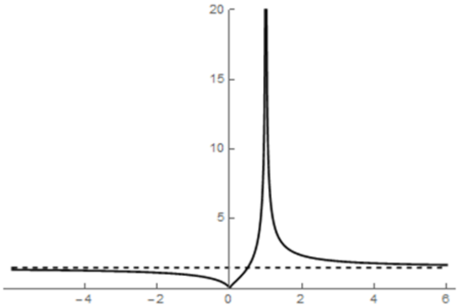
Objetivos del ejercicio:

- Explorar posibilidades para p(x) que permita romper con la idea que siempre que se anula un denominador para algún valor de x, existe AV en dicho valor.

A través de esta proposición pretendemos poner en evidencia la imagen conceptual errónea que en todo punto que anula el denominador de una función racional existe

una asíntota vertical. El no ofrecer expresión algebraica explicita para el polinomio p(x) tiene por objetivo analizar el comportamiento del alumno al utilizar el software, es decir ver qué tipo de ejemplos exploran para justificar su razonamiento al argumentar si la proposición es verdadera o falsa.
Ejercicio 10 
Objetivos del ejercicio: – Trabajar con funciones definidas por trozos que presentan dos AH – Observar el uso que realizan del software si trabajan en forma analítica, cuando plantean los límites para verificar las diferentes asíntotas. Este ejercicio está presentado en dos registros, algebraico y gráfico, pues la función presenta dos asíntotas horizontales diferentes, y=2 por el lado izquierdo, y=0 por el derecho, una de ellas con intersección con la curva y una asíntota vertical. El fin del mismo es observar la conducta de los alumnos al utilizar el software, si buscan las asíntotas horizontales utilizando límites para más y menos infinito, cómo trabajan con una función definida por intervalos, y si en esta actividad se perciben imágenes conceptuales nuevas, propias del uso del software, o persisten las imágenes que se presentan al trabajar con lápiz y papel.

Ejercicio 11



Objetivos del ejercicio:

- Reconocer AH que son atravesadas por la función.
- Poner en duda la existencia de AV, y suponer que se trata de un punto de tipo cúspide en dicho valor de x.

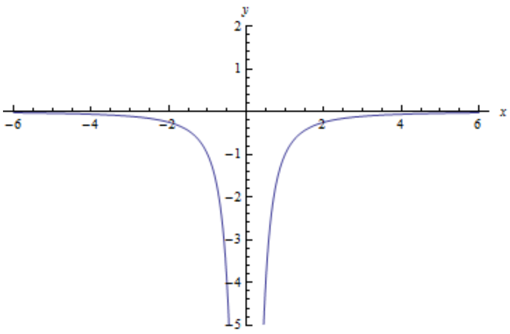
Esta función presentada en registro gráfico está pensada para poner en evidencia si existe o no la imagen conceptual errónea relacionada con la no intersección entre la asíntota y la curva, imagen resaltada en varios libros o páginas webs, como mencionamos previamente. Otro aspecto destacado de esta función es que la asíntota vertical no está graficada y ambas ramas se encuentran muy próximas, con el propósito de observar la interacción de los alumnos con el software ante esta situación, es decir pretendemos ver si buscan alguna expresión analítica que ejemplifique la función dada, o si bien responden solo a partir de lo observado, poniendo en duda la existencia de la AV

Ejercicio 12

$$g(x) = \sqrt{x.(x+3)} - x$$

Objetivos del ejercicio:

- Romper con la idea errónea que si una función tiene AH entonces no se analiza la existencia de AO.

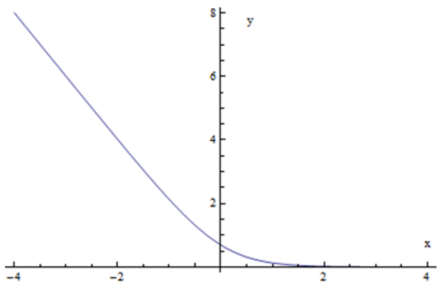
La función seleccionada en esta ocasión tiene un comportamiento distinto para más infinito y para menos infinito, por derecha presenta una asíntota horizontal y por izquierda una oblicua. Fue elegida para enfrentar a los alumnos a una imagen conceptual que prevalece en algunos libros y/o páginas web que sostiene que si una función tiene asíntota horizontal anula la posibilidad de existencia de asíntota oblicua. Al tener disponible el software nos interesa analizar qué acciones llevan a cabo los alumnos ante esta función; si sólo grafican, si analizan los límites correspondientes, si lo hacen de manera minuciosa, analizando para más y menos infinito o sólo se limitan a más infinito.
GRUPO D
Ejercicio 13 
Objetivos del ejercicio: – Reconocer AV donde de ambos lados se acerca a menos infinitos. – Reconocer al eje de abscisas como AH y al eje de ordenadas como AV. La función en registro gráfico tiene a los ejes cartesianos como asíntotas y en el caso de la vertical la tendencia de ambos lados del cero es a menos infinito. El objetivo es analizar si los alumnos son capaces de reconocer dichas asíntotas y escribir sus ecuaciones. También nos interesa estudiar lo realizado con el software por los alumnos, es decir ver si buscan un ejemplo de función en forma analítica con el mismo comportamiento que la dada en el gráfico o si sólo responden a partir de lo observado.

Ejercicio 14
$$f(x)=\frac{4x^2-100}{x-5}$$
Objetivos del ejercicio: – Analizar casos extremos donde la función coincide con la AO Esta función es una recta con una discontinuidad evitable en x=5. El foco de este ejercicio está puesto en analizar las imágenes conceptuales que surgirían al hacer uso del software, ya que, si sólo realiza la gráfica, la discontinuidad evitable no se evidencia, muestra una recta y se podría concluir entonces que la función no tiene AO y que su dominio son los reales. Por otro lado, la gráfica de la función coincide con su asíntota oblicua; a pesar de ser un caso extremo de asíntotas cumple con la definición. A través de este ejercicio pretendemos analizar si el alumno utiliza las definiciones de asíntotas o sólo se contenta con realizar los gráficos. Pensamos que la rapidez y facilidad de realizar visualizaciones con el software podrían influir en la determinación de las ecuaciones de las asíntotas.
Ejercicio 15
Determinar una función que tenga como asíntotas las siguientes rectas x=3, x=1, y=-4
Objetivos del ejercicio: – Explorar la búsqueda de funciones con el software y observar si salen de los ejemplos prototípicos de funciones racionales Este ejercicio en registro verbal fue seleccionado para saber cómo operan los alumnos con el software para cumplir con lo pedido en el enunciado. Pensamos que el software podría añadir una dificultad superior a la que se presenta si el contexto de trabajo fuera el lápiz y papel. Esto es porque, en lápiz y papel podrían esbozar

una gráfica que cumpla con las condiciones exigidas sin necesidad de pensar en la expresión algebraica de la función. Sin embargo, al utilizar el software es necesario buscar una fórmula de alguna función que tenga esas asíntotas. Esto nos permitiría determinar si la imagen conceptual que prevalece en la búsqueda es la de funciones racionales o surgen otras diferentes.

Ejercicio 16

$$p(x) = \ln(1 + e^{-2x})$$



Objetivos del ejercicio:

- Analizar una función, qué sin estar definida por trozos, posee AH y AO en forma simultánea.
- Observar si sólo responden por lo que observan en el gráfico o realizan cálculos de límites con el software.

En esta oportunidad la función se presenta en registro gráfico y algebraico y un comportamiento distinto para más infinito y para menos infinito, por derecha presenta una asíntota horizontal y por izquierda una oblicua. Con esta función ponemos a los alumnos ante la imagen conceptual relacionada con la imposibilidad de coexistencia de estos tipos de asíntotas. Al contar con la expresión algebraica de la función creemos que el comportamiento de los alumnos al usar el software sería diferente al caso similar presentado previamente que sólo estaba en registro gráfico.

Pretendemos ver la incidencia de los registros en el comportamiento de los alumnos con el software.

Tabla 1. Test Diagnóstico Inicial (TDI) Actividad 2

3.3.8 Diseño de EI y su fundamentación

Como mencionamos anteriormente en este apartado, hemos diseñado y llevado a la práctica unas entrevistas individuales. La idea de explorar tipos de actividades matemáticas con uso del software Mathematica que contribuyan a modificar aquellas imágenes conceptuales sobre el concepto de las asíntotas de una función, que tengan algún grado de inexactitud.

Se realizaron luego de aplicar el TDI y de realizar el análisis de las producciones de los estudiantes. En ella tuvimos en cuenta que asista un estudiante de cada grupo correspondiente a la actividad 2, es decir cuatro alumnos en total. Pero de esos solo seleccionamos dos entrevistas, porque muchas respuestas se repetían y además extendería demasiado el presente trabajo. Por estos motivos sólo analizamos dos entrevistas, en las cuales hacemos referencia a las categorías de imágenes mentales y conceptuales que proponemos luego de analizar las producciones de los estudiantes.

Además, tuvimos en cuenta la buena predisposición y disponibilidad horaria para asistir en el siguiente semestre de cursada, momento en el que ya no teníamos más vínculo con ellos.

3.3.8.1 Fundamentación de los diseños de los instrumentos para el análisis de los datos

3.3.8.1.1 Diseño del EAIMuS, EAICuS y su fundamentación

La elección de los aspectos a observar con las escalas de apreciación nos permitió describir el grado de intensidad de estos con sumo detalle, a diferencia de las listas de cotejo en las que solo hubiéramos hecho referencia a la presencia o ausencia de una conducta. Las diseñamos en forma de tabla para agilizar la lectura de las descripciones hechas.

3.3.9 Aspectos éticos

El TDI fue entregado en forma personal a cada grupo de la comisión, en el laboratorio de computación de la Universidad, explicando verbalmente su intención para que todos los alumnos conocieran su propósito. Los alumnos fueron informados que para ello era necesario observarlos con detenimiento, que no implicaba una evaluación académica, y que podríamos tomar nota de los comentarios que surgían mientras resolvían las actividades y han manifestaron su consentimiento. Por otra parte, se hizo lo propio con los estudiantes que fueron citados especialmente para realizar las entrevistas posteriores al análisis de las TDI actividades, se les pidió su consentimiento para usar sus respuestas en la presente tesis.

CAPÍTULO 4: ANÁLISIS DE DATOS Y RESULTADOS

4.1 Introducción

En este capítulo presentamos, en primer lugar, detalles de la implementación de las distintas instancias que constituyen el trabajo de campo. En segundo lugar, analizamos los datos recabados y presentamos los resultados obtenidos.

4.2 Trabajo de Campo

Como hemos señalado en el capítulo anterior, y con el fin de atender al objetivo de describir las imágenes mentales y conceptuales sobre las asíntotas de funciones evidenciadas en clases con uso de software matemático, obtuvimos datos mediante la aplicación del TDI, descripto previamente, a la totalidad de alumnos del curso 03 de Análisis Matemático I, del turno mañana.

Este trabajo de campo constó de tres etapas y durante su desarrollo estuvieron presentes tres docentes: quien suscribe, la ayudante de cátedra y la directora del presente trabajo de tesis. Describimos las tres etapas.

Primera etapa: dedicada a la organización de los grupos de trabajo una vez instalados en el laboratorio de acuerdo con la cantidad de computadoras disponibles que eran 20. Hubo grupos de dos, tres y hasta cuatro integrantes. Se les explicó cuál sería la modalidad de trabajo y que los datos recabados en el desarrollo de las distintas actividades que realizarían serían utilizados como insumos en la tesis de la profesora a cargo del curso. También se les comunicó que iríamos pasando por los grupos de trabajo tomando nota de lo actuado por ellos. Se les pidió que trabajen de manera natural, y que evitaran las consultas. Se les proporcionó el enlace al blog de trabajo en el cual podrían acceder a diferentes documentos y harían entrega de sus producciones: http://cort.as/doMo

Luego se dio una breve explicación de los comandos básicos del software, acompañada de un documento denominado *Explicación básica del software* disponible en blog de trabajo (Anexo 3). Se pautaron 45 minutos para desarrollar la Actividad 1 del TDI. A su finalización cada grupo entregaba sus producciones a través del enlace ya explicado.

Segunda etapa: se enfocó en las explicaciones sobre los tres tipos de asíntotas usando el pizarrón y los alumnos interactuando con las computadoras. A continuación, calcularon las asíntotas de la función $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

Este trabajo se realizó en una hora, los alumnos podían hacer preguntas mientras resolvían el ejemplo y la solución fue de manera conjunta dejando constancia en el pizarrón del proceso llevado a cabo por los estudiantes.

Tercera etapa: finalmente se trabajó con Actividad 2, de manera grupal como explicamos anteriormente resultando cinco equipos de trabajo por cada grupo. Esta etapa se realizó en dos horas.

4.2.1 Lugar de trabajo y material de apoyo

Se trabajó en el laboratorio de informática de la Universidad con acceso a internet para que los alumnos pudieran utilizar los materiales de apoyo del blog de trabajo. Los blogs son considerados herramientas de innovación en la enseñanza universitaria por su simplicidad de creación y posibilidad de desarrollar propuestas de aprendizaje tanto grupales como individuales de fácil acceso, favoreciendo la colaboración y participación de todos los implicados en la actividad a resolver (Salinas y Viticcioli, 2008).

4.2.1.1 Descripción del blog

El blog tiene como característica fundamental un sistema modular de organización de la información (Lara, 2005), esto permite secuenciar las actividades a desarrollar. Hemos organizado el mismo en dos módulos a cada uno de ellos los denominamos entradas, una para cada actividad del TDI.

4.2.1.1.1 Primera entrada del blog

Constaba de tres ítems, uno sobre el software a utilizar, otro sobre la actividad y el tercero relativo a la entrega de las resoluciones de la actividad. Los nombres de los ítems son: Documento ayuda uso de software, Actividad que tienen que resolver y Para entregar tus respuestas hace clic aquí debajo (Fig. 3).

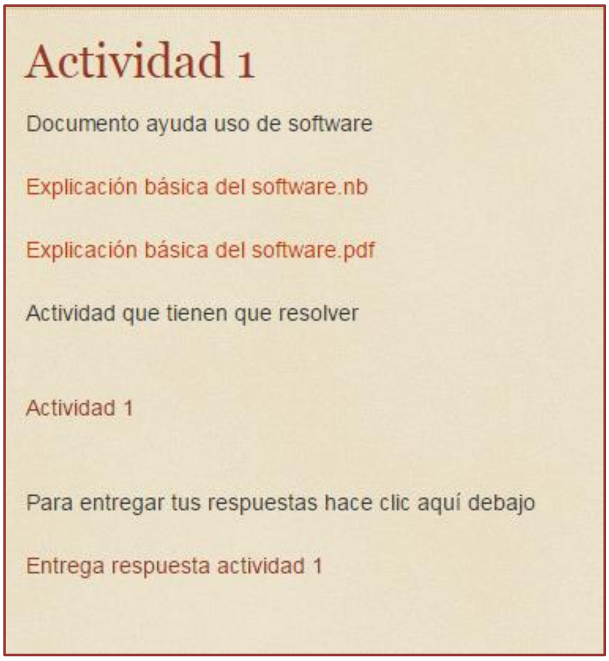


Figura 3.Primera entrada al Blog

El ítem relacionado con el software ofrecía enlace a la descarga de un archivo en el cual se explican los comandos básicos del software necesarios para trabajar el tema. En el mismo se explica cómo definir funciones, resolver ecuaciones e inecuaciones, calcular límites y graficar (Anexo 3). El mismo se encontraba disponible en dos formatos: en formato de documento portátil (PDF), de estándar abierto y oficial reconocido por la Organización Internacional para la Estandarización (ISO), que permite presentar e intercambiar documentos de forma fiable, independiente del software, el hardware o el sistema operativo (https://acrobat.adobe.com/mx/es/why-adobe/about-adobe-pdf.html). El otro formato presentado es el correspondiente al software Wolfram Mathematica utilizado en esta tesis. Ofrecimos estos documentos pues consideramos necesario que el estudiante tenga el acceso operativo, es decir el conocimiento básico del software a utilizar (Martinez, 2003) y seleccionamos dos formatos para que los alumnos puedan acceder al documento desde sus hogares.

El ítem relativo a la actividad contenía un enlace para descargar el archivo correspondiente a la misma.

El tercero ofrecía un enlace a un formulario online en el cual los alumnos podían entregar sus producciones indicando sus datos personales.

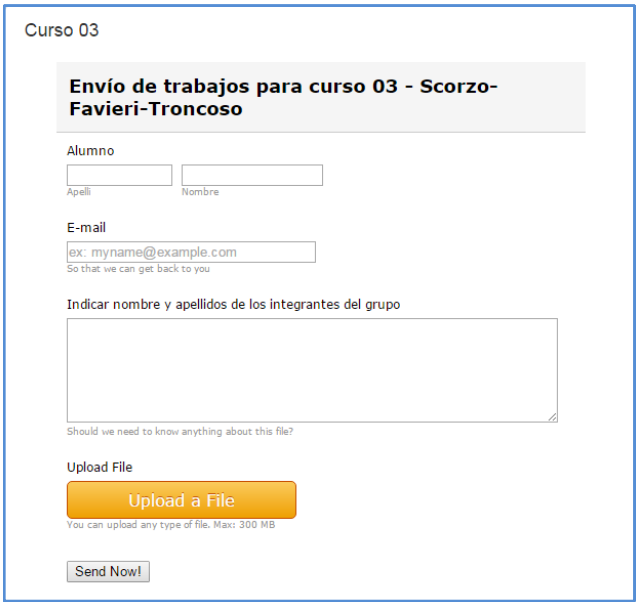


Figura 4.Vista del formulario para entregar las actividades

4.2.1.1.2 Segunda entrada del blog

Estaba relacionada con la actividad 2 y constaba de tres ítems, uno concerniente a explicaciones sobre asíntotas de funciones, otro sobre la actividad propiamente dicha y el tercero relativo a la entrega de las resoluciones de la actividad. Los nombres de los ítems son: Explicación teórica: distintos tipos de asíntotas, Actividad 2: grupos de trabajo, para entregar tus respuestas (Fig. 5)

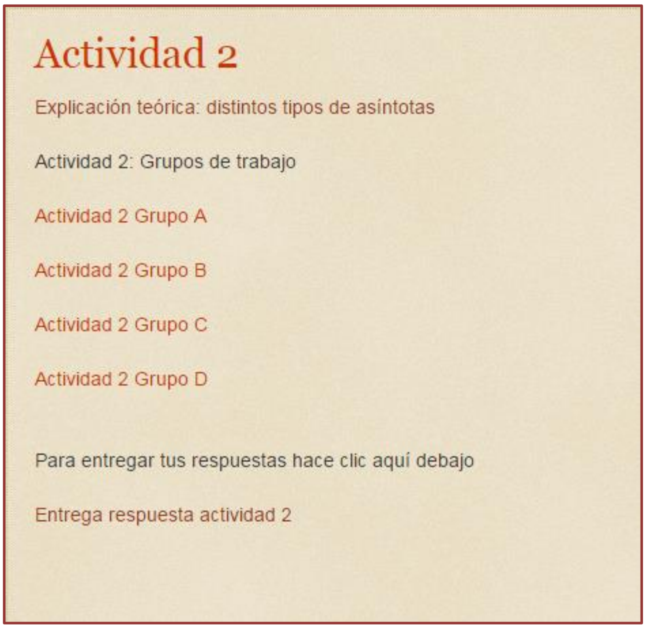


Figura 5. Segunda entrada al Blog

El ítem concerniente a explicaciones sobre asíntotas de funciones ofrecía un enlace a un archivo con las definiciones de asíntotas y los ejemplos de funciones que se usarían para tal fin. El segundo ítem brindaba enlaces a los enunciados de la actividad 2 divididos de acuerdo con la configuración ya explicada, en cuatro grupos de funciones presentadas en registro gráfico, verbal, algebraico y algebraico-gráfico. El tercer ítem se veía un enlace para la entrega de las producciones de los alumnos.

4.2.1.2 Métodos de recolección de la información

En la descripción del blog indicamos que en cada una de las entradas se ofrecía un enlace a un formulario para la entrega de las resoluciones de las actividades propuestas. A través de dichos formularios recolectamos la información en carpetas de Dropbox que es un servicio de alojamiento de archivos multiplataforma en la nube, que permite a los usuarios almacenar y sincronizar archivos en línea y entre ordenadores y compartir archivos y carpetas con otros usuarios y con tabletas y móviles (Houston y Ferdowsi, 2008-2016). Así logramos facilitar la gestión de la clase y la entrega de las producciones. Elegimos este servicio en línea pues ofrece facilidades para compartir archivos y está protegido por varias capas de seguridad. En la nube encontramos servicios que favorecen el trabajo colaborativo, en estos se permite almacenar documentación que puede ser modificada por otros usuarios que no necesariamente se encuentren conectados al mismo tiempo (Barrios y Casadei, 2014)

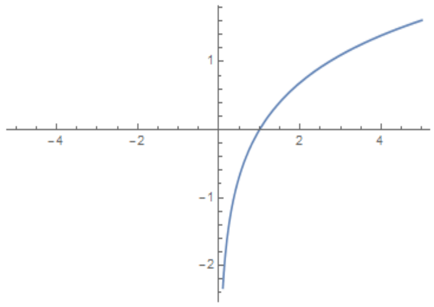
4.3 Análisis del TDI

4.3.1 Imágenes mentales

Recordemos la definición que hemos elaborado para el presente trabajo. *Imagen mental sobre el concepto* ***de asíntotas de funciones en relación con el uso de software matemático:*** Es el conjunto de ideas previas a la enseñanza, sobre el concepto de asíntotas de funciones que el alumno expresa en diferentes registros de representación (verbal, gráfico o algebraico) haciendo uso del software matemático. De acuerdo con ella analizamos las veinte producciones de los estudiantes sobre las ideas previas al concepto de asíntota utilizando el software. Finalizamos con una propuesta de clasificación de estas imágenes mentales.

4.3.2 Procedimiento de análisis: descripción y ejemplo

Para el análisis de las respuestas de los alumnos a las actividades del TDI utilizamos la EAIMuS descripta en el capítulo anterior. En ella volcamos, para cada grupo, las respuestas con imágenes de las resoluciones hechas con el software y nuestras primeras observaciones. Recién con ese insumo, llevamos adelante el análisis. Incluimos a continuación, a modo de ejemplo, el análisis de las producciones del grupo 1 y 5 minuciosamente detallado de este procedimiento. Luego, remitimos al lector al Anexo 4 para ver las tablas y aquí seguiremos con el análisis. A continuación, resumimos la información con respecto a las funciones y registros de representación usados, y las imágenes mentales detectadas a través de un análisis estadístico descriptivo.

Grupo 1	
Descripción	`Plot[Log[x], {x, -5, 5}]`  En esta funcion podemos ver como se acerca a 0 pero nunca lo toca, en este caso Log x, fue elejida para ejemplificar Asintonta, en este caso Asintota vertical en x=0. Los alumnos ejemplican el concepto mediante un gráfico de una función prototipo como es la función logarítmica. Manifiestan en forma verbal *vemos que se acerca a "0" pero no la toca*. Por otra parte observamos que explicitan que existe asíntota vertical "en x=0", es decir no consideran la expresión como ecuación de la asíntota vertical sino que la misma está en el valor de abscisa que indican. Tampoco hacen referencia a los otros tipos de asíntotas, es decir se limitan a AV que es la única en el ejemplo elegido.
Imágenes mentales	Recta a la cual la función se acerca pero no tiene intersección con la misma
Función usada	Prototipo: logarítmica
Registros utilizados	Gráfico

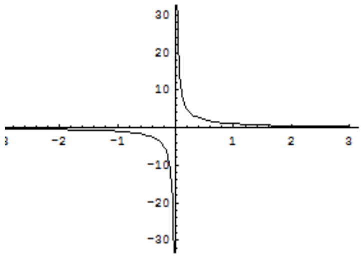
<table>
<tr><th colspan="2">Grupo 5</th></tr>
<tr><td>Descripción</td><td>
Una asíntota es una recta imaginaria que limita el dominio o la imagen de una función. Las funciones normalmente, cuando tienden a la asintota, se comportan de distintas maneras. Pueden acercarse infinitamente (a infinito en el caso de las verticales, o al valor de la recta en el caso de las oblicuas u horizontales) o atravesarlas.

Tipos de Asintotas

Asintota Horizontal Y Vertical

$f[x\_] := \frac{1}{x}$

```
Plot[f[x], {x, -3, 3}]
```



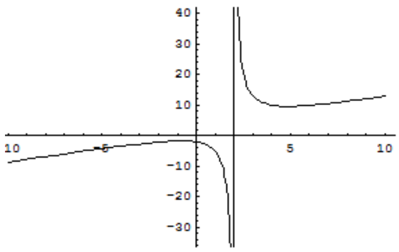
- Graphics -

En el grafico de f(x) podemos apreciar 2 tipos de asintotas. La asintota horizontal ubicada en la recta y = 0, y la asintota vertical ubicada en la eje Y.

Asintota Oblicua:

$g[x\_] := \left(\frac{x^2+4}{x-2}\right)$

```
Plot[g[x], {x, -10, 10}]
```



- Graphics -

Comienzan con explicaciones verbales, en las que está implícita el concepto de límite ya que dicen “a infinito en el caso de las verticales y al valor de la recta en el caso de las horizontales u oblicuas” Esta idea sin embargo no la reflejan en los ejemplos elegidos de funciones racionales ya que se limitan a definirlas con el software y graficarlas, sin calcular límite alguno.
</td></tr>
<tr><td>Imágenes mentales</td><td>-Recta imaginaria como límite del dominio e imagen de la función.

-Rectas a las cuales la función se acerca pero que también se puede atravesar.</td></tr>
<tr><td>Función usada</td><td>Prototipo: racionales</td></tr>
</table>

Registros utilizados	Verbal y gráfico

Tabla 2.Análisis Actividad 1, grupos 1 y 5

4.3.3 Resultados sobre imágenes mentales

Resumimos la información del análisis de las respuestas de los veinte grupos:

Funciones utilizadas				
Prototípicas				
Racionales	Logarítmicas	Exponenciales	Trigonométricas	Polinómicas
16	6	2	1	1

Registros utilizados		
Verbal	Gráfico	Algebraico
19	19	8

Imágenes mentales relacionadas con:	
Rectas imaginarias	3
Rectas que se acercan a la función	10
Puntos que no pertenecen al dominio o la imagen	6
Valores que la función no alcanza	6
Rectas punteadas	1
La idea de aproximación o tendencia	3
Rectas constantes, verticales, horizontales u oblicuas	2

Tabla 3.Resumen del análisis de la Actividad 1

4.3.4.1 Análisis de los resultados sobre imágenes mentales

Consideramos importante tener en cuenta que cuando se utiliza el software y se quiere realizar un gráfico, es necesario escribir una expresión algebraica que se identifique con el gráfico que se quiere mostrar. En estos casos donde solo expresan la fórmula de la función para que el software grafique, lo hemos considerado sólo registro gráfico. En cambio, si calcularon algún límite u otro tipo de cálculo, hemos considerado que se usó registro algebraico. Es importante aclarar esto porque de lo contrario debería coincidir la cantidad de veces que usó registro gráfico con algebraico.

Recordemos que Contreras de la Fuente y Ortega Carpio (2009) consideran que el ordenador puede ser un amplificador cognitivo o el responsable de un cambio cualitativo. Esta última opción está vinculada a la reorganización de las formas pensar, promoviendo actividades metacognitivas y/o heurísticas dejando de lado un modelo mecánico de manejo de contenidos. En nuestra experiencia, esto no se vio reflejado, ya que, a pesar de contar con un potente software, recurrieron a ejemplos conocidos, básicos, sin realizar exploración alguna. Estos prototipos asociados a funciones algebraicas racionales, logarítmicas y exponenciales son en general usados muy frecuentemente en las clases de la asignatura para calcular, por ejemplo, algunos límites indeterminados. Los últimos dos tipos de funciones se abordan en detalle en el curso de ingreso y se retoman también en la materia. Numerosos artículos hacen referencia al uso de este tipo de funciones en experiencias con software incluso en niveles de enseñanza previos al universitario y usando otros softwares como por ejemplo GeoGebra (Iturbe y Garelik, 2014; Llanos, Otero y Gazzola, 2014; Rodriguez, Trillini y Murúa, 2014; Benito, Quimbay Arias y Vásquez Bañol, 2017; García Cuéllar y Martínez Miraval, 2018; Martinez, 2018). Tampoco sirvió para realizar tareas de control, porque en algunos casos calculaban límites de manera incorrecta y no relacionaban lo expuesto en el registro algebraico con lo que se observaba en el registro gráfico.

Cuando al comienzo hicimos referencia a que solo considerábamos registro gráfico cuando sólo planteaban una “fórmula” para usar el comando Plot y graficarla, y no lo considerábamos registro algebraico, estábamos teniendo en cuenta la dificultad que presenta la herramienta informática: no grafica a mano alzada, solo lo hace a partir de una expresión algebraica. Quizá esto es lo que condicionó a los estudiantes a recurrir a ejemplos prototípicos, conocidos, estudiados habitualmente en clase y no explorar nuevos a pesar de contar con un potente software.

A continuación, proponemos una categorización de imágenes mentales mental sobre el concepto de asíntotas de funciones en relación con el uso de software matemático.

4.3.5.2 Imágenes mentales sobre el concepto de asíntotas de funciones en relación con el uso de software matemático a partir de los resultados del TDI

Luego del análisis minucioso de las producciones de los 20 grupos que trabajaron la primera actividad, hemos podido realizar una categorización, asociada a los registros de representación, de las imágenes mentales que mostramos a continuación.

Imagen Mental Categoría 1 (IMC1) Explicaciones verbales acerca de que es una asíntota (**RVSM)**
Dentro de esta categoría incluimos a todas aquellas argumentaciones verbales, expresadas con palabras, sobre la idea de asíntota a una función. Las frases más destacadas de ella son: – Rectas imaginarias – Rectas como valores numéricos que no pertenecen al dominio e imagen de la función. – Rectas como valores a los cuales la función se acerca, pero no alcanza. – Rectas paralelas a los ejes – Rectas como parte de la función pero que no la intercepta. – Recta a la cual la función se acerca, pero no tiene intersección con la misma.

– Recta a la cual la función se acerca y en algunos casos la función la puede atravesar.

– Rectas paralelas a los ejes a las cuales la función se acerca, pero nunca la toca.

– Rectas verticales, horizontales u oblicuas donde la función se acerca, pero no la corta.

– Rectas cuya distancia con la función tiende a cero.

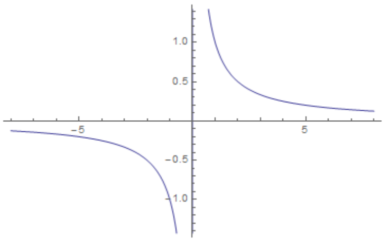
Imagen Mental Categoría 2 (IMC2)

Explicaciones a través de ejemplos gráficos usando funciones prototípicas: racionales, exponenciales, logarítmicas. (**RGSM** y **RASM**)

En esta categoría incluirnos las definiciones de funciones y gráficos hechos con el software y las conclusiones acerca de las asíntotas a las que arriban a partir de lo que visualizan en la gráfica. A modo de ejemplo:

Ejemplo 1 :

```
f[x_] := 1/x
Plot[f[x], {x, -8, 8}]
```



En el ejemplo anterior, existe asíntota vertical x = 0 y asíntota horizontal y = 0, es decir que la función se acerca a los ejes.

Imagen Mental Categoría 3 (IMC3)

Explicaciones a través de ejemplos con cálculos de límites de funciones prototípicas: racionales, logarítmicas y exponenciales. (**RGSM** y **RASM**)

En esta categoría agrupamos aquellas respuestas en las que se incorpora no solo la fórmula para graficar la función sino el cálculo de los límites con el software para determinar las asíntotas. Y a partir de lo hecho concluir acerca de cuáles son las asíntotas, ejemplo:

```
f[x_] := (2 x + 1)/(x - 1)

<< Algebra`InequalitySolve`
InequalitySolve[x - 1 ≠ 0, x]
x < 1 || x > 1
Limit[f[x], x → 1]
∞
X = 1 es AV
Limit[f[x], x → ∞]
2
X = 2 es AH
g1 := [f[x], {x, -5, 5}]
g2 := [x = 1, {x, -5, 5}]
g3 := [y = 2, {x, -5, 5}]
Show[g1, g2, g3]
```

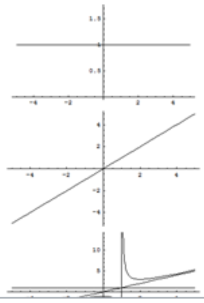


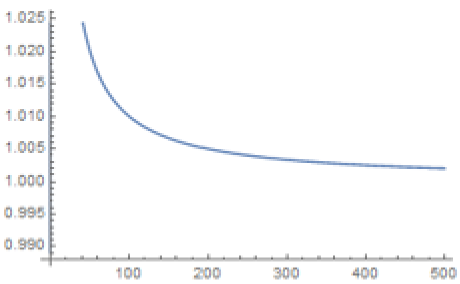
Imagen Mental Categoría 4 (IMC4)

Explicaciones a través de ejemplos con funciones no prototípicas. (**RGSM**)

Aquí agrupamos aquellas explicaciones en las que se incluyen funciones no prototípicas.

Acá solo se observaron dos funciones: $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ y $f(x) = \tan(x)$. Muestran los ejemplos, en forma gráfica, respondiendo en forma errónea en qué valores de la función tangente existen AV, como se observa en las siguientes imágenes:

```
Plot[e^(1/x), {x, -2, 500}]
```



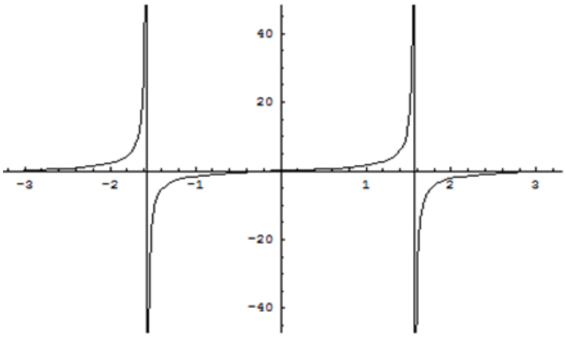
en este caso la asintota es horizontal en y=1

Una Asintota puede ser Vertical, Horizontal u Oblicua. Para las asintotas verticales y horizontales son los valores de "x" y de "y" respectivamente, que no tiene valor de "y" y de "x".

```
g[x_] := Tan[x]

g[x]

Plot[g[x], {x, π, -π}]
```




```
- Graphics -
```

Se observa en el grafico que la funcion Tangente de x, tiene asintotas Verticales en "π" y " -π".

Imagen Mental Categoría 5 (IMC5)

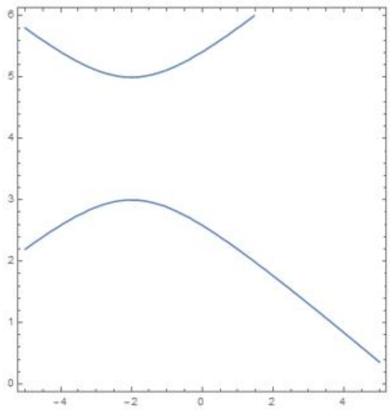
Explicaciones a través de relaciones no funcionales, expresadas en forma algebraica y gráfica. (**RGSM** y **RASM**)

Categoría relativa a ejemplos en los que se usan relaciones no funcionales.

Hubo un solo ejemplo de una relación no funcional: una hipérbola, en el que usaron el comando ContourPlot.

$$h[x\_] := \frac{(y-4)^2}{1} - \frac{(x+2)^2}{4} = 1$$

$$\text{ContourPlot}\left[\frac{(y-4)^2}{1} - \frac{(x+2)^2}{4} == 1, \{x, -5, 5\}, \{y, 0, 6\}\right]$$



esta funcion tiene asintotas oblicuas

Tabla 4. Categorías de Imágenes Mentales

Lupiáñez y Moreno (2001) introducen el concepto de *representaciones ejecutables* como las respuestas de una herramienta tecnológica y que tienen la cualidad de simular acciones cognitivas del usuario que las manipula. Ejemplifican esta noción con el uso de la calculadora, el estudiante interactúa con las representaciones que ella le ofrece a partir de su manipulación y le permite construir nuevos significados. En nuestro análisis para que el software realice un gráfico es necesario escribir una expresión analítica de la función a representar, es decir para que la gráfica sea una *representación ejecutable* es necesario recurrir al registro algebraico previamente. Los autores agregan también que esos objetos que aparecen en las pantallas no son concretos sino virtuales y tampoco pertenecen al lenguaje de la matemática formal y agregan "son instrumentos de conocimiento y no conocimiento en sí mismos" (pp. 295). En base a esto consideramos apropiado introducir el concepto de *representaciones ejecutables con uso de software Mathematica*, entendiendo por tales a aquellos objetos matemáticos virtuales de gráficos de funciones para los cuales es necesario recurrir al registro algebraico, es decir, es preciso escribir alguna expresión analítica de la función a representar utilizando el comando "Plot" y las opciones que este admite para que el gráfico se vea claro, nítido y elegante. Por ejemplo, la representación ejecutable de una parábola con uso de software Mathematica seria la siguiente:

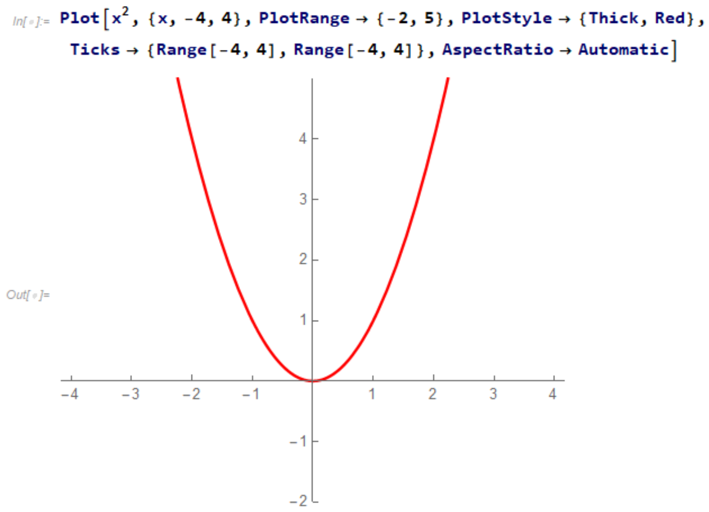


Figura 6.Ejemplo de representación ejecutable con software Mathematica

Por otra parte, observamos que en muchas producciones los alumnos, una vez que grafican la función, explican con palabras lo que visualizan en él, al respecto muchos autores señalan que los argumentos visuales adquieren mucha importancia en los procesos de aprendizaje cuando no se dispone de otras alternativas (Lasalvia, y Piquet, 2000). Esto lo advertimos en varios procedimientos realizados por los alumnos al explicitar su imagen mental de asíntota con el software. Lo hacían a través ejemplos con gráficos, para los que es preciso utilizar el comando Plot con alguna expresión algebraica. Y a esto acompañaban algunas descripciones sobre lo que visualizaban. Dado que hasta el momento no contaban con definiciones formales de asíntotas, observamos que en muchas explicaciones tratan de hacer referencia a esta idea, aunque de manera contradictoria. También consideramos que la necesidad de ingresar alguna expresión algebraica para obtener lo que llamamos *representaciones ejecutables con uso de software Mathematica*, podría contribuir a la elección de funciones prototipos para expresar sus imágenes mentales sobre el concepto de asíntota.

Por otra parte, Duval (2006), señala que el reconocimiento de diferentes registros de representación favorece el aprendizaje y dominio de un determinado concepto. A la capacidad de poder pasar de un registro a otro lo denomina *conversión.* Al utilizar el software Mathematica podríamos decir que la conversión es automática, ya que al ingresar el comando Plot (RASM) se obtiene un gráfico (RGSM). Sin embargo, analizando las respuestas de los alumnos encontramos que algunos contestaron que las asíntotas no se hacían visibles e intentaron graficarlas. Otros dijeron que estaban en los gráficos porque el software "une saltos infinitos". Algunos manifestaron que no podían graficarlas, es decir necesitaban saber el registro algebraico de la ecuación de las asíntotas y no contaban con elementos teóricos para determinarlos, especialmente en el caso de las asíntotas oblicuas. Con respecto a ellas, muchos alumnos las mencionaron, pero pocos pudieron ejemplificar. En el caso en que sí lo hicieron, no la graficaban dado que requieren del paso obligatorio por el registro algebraico.

Desde la perspectiva de Sosa et al. (2008), quienes realizan experiencias de aprendizaje incorporando software matemático, señalan que, en el proceso de *conversión*, el papel de la herramienta informática va más allá de una simple representación del objeto matemático que realiza ella misma, sino que es un recurso que permite reorganizar el pensamiento de los estudiantes respecto a los conceptos tratados. En nuestro caso algunos no se conformaron con lo que vieron, recurrieron a explicaciones verbales, cálculos de límites en algunos casos para hacer explícitas sus ideas mentales de asíntotas de funciones.

4.3.6 Imágenes conceptuales

Recordemos la definición que hemos elaborado para el presente trabajo: ***Imagen conceptual sobre el concepto de asíntotas de funciones en relación con el uso de software matemático:*** Es el conjunto de propiedades asociadas a los distintos tipos de asíntotas que explicitan los alumnos en diferentes registros de representación (verbal, gráfico o algebraico) haciendo uso del software matemático. De acuerdo con ella analizamos las producciones de los alumnos. Como finalización proponemos una clasificación de las imágenes conceptuales observadas.

4.3.6.1 Procedimiento de análisis: descripción y ejemplo

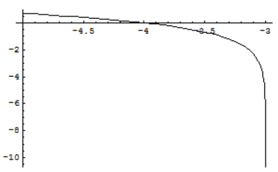
La Actividad 2 se diseñó en cuatro grupos: A, B, C, D, como hemos descripto anteriormente, en cada uno de ellos hay cuatro ejercicios presentados en diferentes registros de representación. Hemos distribuido cinco grupos de alumnos para que resuelvan cada uno de ellos, es decir cinco resolvieron el grupo A de actividades donde figuraban los ejercicios 1, 2 3 y 4, otros cinco resolvieron el grupo B, con los ejercicios 5, 6, 7, 8 y así sucesivamente. Sintetizamos en la siguiente tabla como quedaron distribuidas las actividades entre los 20 grupos participantes, los mismos números de grupo que analizamos en la Actividad 1.

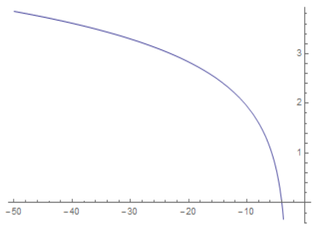
Grupos de ejercicios de la Actividad 2	Número de grupo que resolvieron los ejercicios de cada actividad
Grupo “A” Ejercicios 1-2-3-4	2-6-9-12-16
Grupo “B” Ejercicios 5-6-7-8	10-14-18-19-20
Grupo “C” Ejercicios 9-10-11-12	1-3-5-8-15
Grupo “D” Ejercicios 13-14-15-16	4-7-11-13-17

Tabla 5.Grupos de trabajo Actividad 2

Para el análisis de las respuestas de los alumnos a las actividades del TDI utilizamos la EAICuS descripta en el capítulo anterior. En ella volcamos, para cada grupo de trabajo, los ejercicios a resolver, las respuestas con imágenes de las resoluciones hechas con el software por cada grupo de trabajo y nuestras primeras observaciones. Recién con ese insumo, llevamos adelante el análisis. Incluimos a continuación, a modo de ejemplo, el análisis de dos ejercicios del grupo B de trabajo. Luego, remitimos al lector al Anexo 5 para ver las tablas con todos los demás grupos de trabajo y aquí seguiremos con el análisis. Recordamos el enunciado del ejercicio, en que registro se presentó, la producción de cada grupo y la descripción realizada, luego explicitaremos que imágenes conceptuales surgen del análisis, poniendo el énfasis en el uso de la herramienta informática y que registros de representación usan para explicitarlas.

<table>
<tr><th colspan="2">Grupo “B”
G10-G14-G18-G19-G20</th></tr>
<tr><td colspan="2">Ejercicio 5/ Registros de presentación: Algebraico

$h(x) = \ln(-x-3)$</td></tr>
<tr><th>Grupo 10</th><th>Grupo 14</th></tr>
<tr><td>Actividad 2
Ejercicio 5
<code>h[x_] := Log[-x - 3]</code>
<code>Reduce[-x - 3 == 0, x]</code>
<code>x == -3</code>
<code>Dominio R - {-3}</code>
Calculamos la ecuacion de la asintota Vertical
<code>Limit[h[x], x → -3]</code>
<code>-∞</code>
La ecuacion de la asintota vertical es en x=-3
Calculamos la ecuacion de la asintota Horizontal
<code>Limit[h[x], x → -∞]</code>
<code>∞</code>
No existe asintota vertical
Calculamos la ecuacion de la asintota Oblicua
<code>Limit[h[x]/x, x → -∞]</code>
<code>0</code>
No existe la ecuacion de la asintota oblicua porque m=0 y deberia ser distinto de 0
<code>Plot[h[x], {x, -5, -3}]</code>


<code>- Graphics -</code></td><td>Ejercicio 5)
<code>h[x_] := Log[-x - 3]</code>
<code>Plot[h[x], {x, -50, 0}]</code>


<code>Reduce[-x - 3 > 0, x]</code>
<code>x < -3</code>
El dominio va de (-∞;-3). La imagen son todos los reales
Asintotas Horizontales
<code>Limit[h[x], x → -∞]</code>
<code>∞</code>
<code>Limit[h[x], x → +∞]</code>
<code>∞</code>
h(x) no posee asintotas horizontales
Asintotas verticales
Buscamos asintotas en el punto de conflicto de la funcion, cuando se acerca a x=-3 por izquierda
<code>Limit[h[x], x → -3, Direction → +1]</code>
<code>-∞</code>
Asintotas oblicuas
<code>Limit[h[x]/x, x → ∞]</code>
<code>0</code>
ya que m es igual a 0, no existe asintota oblicua</td></tr>
</table>

Grupo 18	Grupo 19
Ejercicio 5	Ejercicio 5 :

Grupo 18

Ejercicio 5

```
h[x_] := Log[-x - 3]
Reduce[-x - 3 > 0, x]
x < -3
```

El dominio de la funcion es Dh: (-∞;-3)

```
Limit[h[x], x → -3, Direction → 1]
-∞
Limit[h[x], x → -3, Direction → -1]
-∞
```

La funcion tiene asintota vertical en x=-3

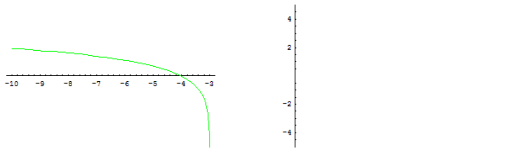
```
Limit[h[x], x → Infinity]
∞
```

La funcion NO tiene asintota horizontal

```
Limit[h[x] / x, x → Infinity]
0
```

La funcion NO tiene asintota oblicua

```
Plot[h[x], {x, -10, -3}, AxesOrigin → {0, 0}, PlotStyle → {Green}, PlotRange → {-5, 5}]
```



- Graphics -

Grupo 19

Ejercicio 5 :

```
h[x_] := Log[-x - 3]
```

Dominio :

```
Reduce[-x - 3 > 0, x]
x < -3
```

AH :

```
Limit[h[x], x → ∞]
∞
Limit[h[x], x → ∞, Direction → 1]
∞
```

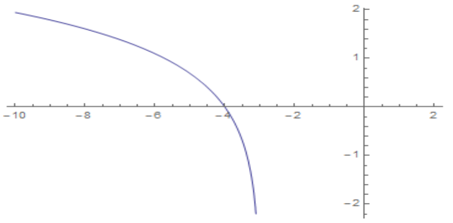
Por lo tanto, llegamos a la conclusión que no existe AH.

AV :

```
Limit[h[x], x → -3, Direction → 1]
-∞
```

Por lo tanto, llegamos a la conclusión que la función tiene AV : x = -3

```
Plot[h[x], {x, -10, 2}]
```

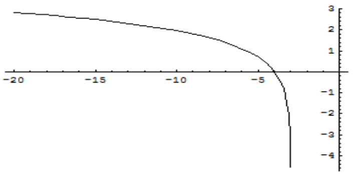


Grupo 20

Ejercicio 5

```
h[x_] := Log[-x - 3]

Plot[h[x], {x, -20, 0}]
Plot::plnr : h[x] is not a machine-size real number at x = -2.51377. More…
Plot::plnr : h[x] is not a machine-size real number at x = -2.90346. More…
Plot::plnr : h[x] is not a machine-size real number at x = -2.95839. More…
General::stop : Further output of Plot::plnr will be suppressed during this calculation. More…
```



- Graphics -

```
Reduce[-x - 3 > 0, x]
x < -3
```

Asíntota Vertical

```
Limit[h[x], x → -3]
-∞
```

Asíntota Horizontal

```
Limit[h[x], x → ∞]
∞
```

No tiene Asíntota Horizontal

$$\text{Limit}\left[\frac{h[x]}{x}, x \to \infty\right]$$

0

La función h[x] no tiene Asíntota Oblicua

Resultados
– Todos los grupos definen la función con el software con la misma letra que se presenta en el ejercicio, h(x) y la usan en el cálculo de los límites y en los gráficos. – Todos los grupos, salvo el G20, calculan el dominio de la función con el software – El grupo G10 lo hace de manera equivocada y el G19 lo calcula, pero no lo escribe simbólicamente. – Sólo dos grupos (G19 y G14) plantean correctamente los límites para hallar la AV que, de acuerdo con el dominio de la función, debe hacerse por el lateral izquierdo. – A pesar de la imposibilidad de coexistencia de AH y AO por tratarse de una función logarítmica, todos los grupos calcularon los límites correspondientes a las dos clases de asíntotas. – Un solo grupo, el G10, calcula las AH y AO fuera del dominio de la función. – El grupo G19 utiliza de manera incorrecta la sintaxis del software Mathematica para el cálculo de límite para x tendiendo a menos infinito. – Ningún grupo intentó graficar la AV a pesar que, en el gráfico dado por el software, la misma no se visualizaba. – Tres grupos utilizan valores inapropiados para la variable independiente al utilizar el comando Plot, lo que provoca que la respuesta del software incluya mensajes de advertencia en rojo. – De estos tres grupos sólo uno, el G18, advierte las advertencias y modifica apropiadamente los valores de la variable independiente.

Imágenes conceptuales evidenciadas
– Las respuestas del software al resolver la inecuación para determinar el dominio de la función sustituyen el lenguaje simbólico matemático. – Cálculos de límites con el software en entornos que no están incluidos en el dominio de la función por no tener en cuenta que por defecto los calcula por derecha. – - Cálculo de límites fuera del dominio de la función. – Cálculo de límites con el software para + ó - ∞ pensados como límites laterales y no como tendencias diferentes. – Cálculos de límites con el software para justificar la no existencia de AH y AO a pesar de tratarse de una función prototípica reconocida como logarítmica.
Registros utilizados Algebraico, verbal y gráfico
Ejercicio 6/Registros de presentación: Verbal Las conclusiones de un estudio establecen que el número de individuos de una determinada población de una especie protegida viene dado, durante los próximos años, por la función: $f(t) = \frac{7500t + 5000}{t+1}$, siendo t el número de años transcurridos. Se pide: a) Dominio e imagen bajo el contexto del problema. Tamaño actual de la población. b) ¿Cómo evoluciona la población entre los años 4 y 9? c) Si esta función fuese válida indefinidamente ¿se estabilizaría el tamaño de la población? Justificar la respuesta. d) La asíntota vertical en el contexto del problema ¿tiene algún significado?

Grupo 10

Ejercicio 6

$$f[t\_] := \frac{7500\ t + 5000}{t + 1}$$

Reduce[t+1==0,x]

$t == -1$

Dominio : ℛ-{-1}
En el contexto del problema el dominio sque se utiliza son los $ℛ^+$

```
f[0]
5000
```

El tamaño actual de la poblacion es de 5000

```
f[4]
7000
```

```
f[9]
7250
```

```
f[9] - f[4]
250
```

Del año 4 al 9 la poblacion solo aumenta 250 indivuos

```
Limit[f[t], t → +∞]
7500
```

La poblacion solo aumenta su tamaño hasta llegar a 7500 individuos. Despues de ese punto, no importa cuatos años pasen la cantidad va a seguir siendo la misma. Es decir se mantiene estable y constante.

Calculamos la Asintota Vertical

```
Limit[f[t], t → -1]
-∞
```

Esta asintota, en este problema, no tiene sentido ya que x=-1 no forma parte del Dominio de la funcion en contexto del ejercicio

Grupo 14

```
f[t_] := (7500 t + 5000)/(t + 1)
```

```
Reduce[t + 1 ≠ 0 && t ≥ 0, t]
```

t ≥ 0

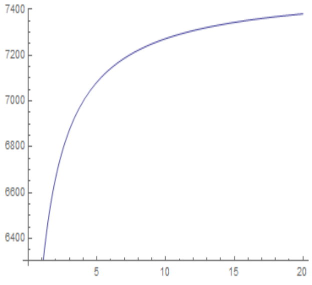
El dominio de la funcion es de todos los valores de t mayores o iguales a 0, ya que no existe tiempo negativo.

La imagen de la funcion es de [5000:7500) Segun el contexto del problema, ya que en 0 la imagen es 5000 y el tiempo final no está determinado pero tiende a valores cercanos a 7500.

```
f[0]
```

5000

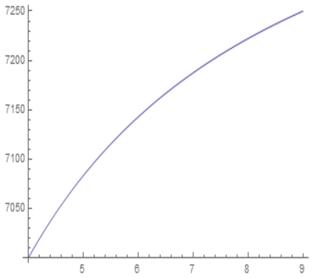
```
Plot[f[t], {t, 0, 20}]
```



b)

La poblacion crece en un numero de 250 especimenes.

```
Plot[f[t], {t, 4, 9}]
```



```
f[4]
```

7000

```
f[9]
```

7250

```
f[9] - f[4]
```

250

c)

Si, la poblacion se estabiliza en 7500 individuos. (Definida por la asintota horizontal de la funcion)

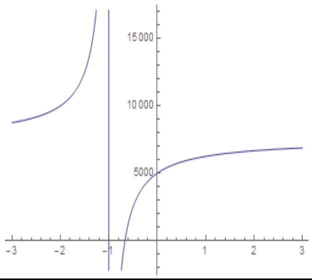
```
Limit[f[x], x → ∞]
```

7500

d)

La asintota vertical no era relevante para el problema planteado, ya que es en un valor negativo de t, el cual no esta incluido en la funcion f(t) de nuestro problema.

```
Plot[f[t], {t, -3, 3}]
```



Grupo 18

Ejercicio 6

```
f[t_] := (7500 t + 5000) / (t + 1)
```

```
Reduce[t + 1 == 0, t]
```

```
t == -1
```

El dominio de la funcion es: R-{-1}

```
Limit[f[t], t → -1, Direction → 1]
```

∞

```
Limit[f[t], t → -1, Direction → -1]
```

-∞

La funcion tiene asintota vertical en t=-1

```
Limit[f[t], t → Infinity]
```

7500

```
Limit[f[t], t → -Infinity]
```

7500

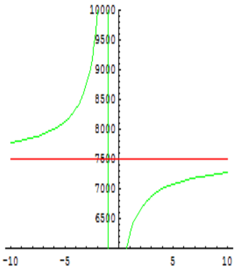
La funcion tiene asintota horizontal en y=7500

```
Limit[f[t] / t, t → Infinity]
```

0

La funcion NO tiene asintota oblicua

```
Plot[{f[t], 7500}, {t, -10, 10}, PlotRange → {6000, 10000}, PlotStyle → {Green, Red}]
```



- Graphics -

a) En el contexto del problema
   Dominio de la funcion: [0;+∞)
   Imagen de la funcion: [5000;7500)

b) Entre los años 4 y 9 es el momento en que la poblacion disminuye su tasa de crecimiento mas rapidamente.

c) La poblacion se acercara a 7500 pero nunca lo alcanzara, esto significa que la poblacion maxima sera de 7499(teniendo en cuenta que la poblacion debe ser un numero natural.

d) La asintota vertical no tiene ningun significado en el contexto del problema, ya que el tiempo no puede ser negativo y la asintota se encuentra en t=-1.

Grupo 19

Ejercicio 6

```
f[t_] := (7500 t + 5000)/(t + 1)
```

Dominio

```
Reduce[t + 1 ≠ 0 ⋀ t ≥ 0, t]
t ≥ 0
```

Df = [0 ; +∞)

```
Plot[f[t], {t, 0, 10}, AxesOrigin → {0, 0}]
```

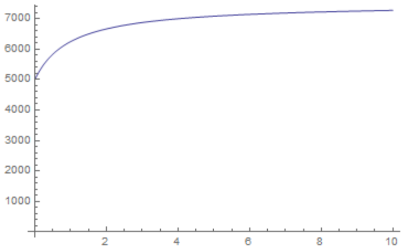


Imagen : [0 ; 7500]

b)

```
Limit[f[t], t → 4]
7000
```

```
Limit[f[t], t → 9, Direction → 1]
7250
```

```
V = 7250 - 7000

250
```

Respuesta : La evolicion de la poblacion de 250 personas durante los 5 años

c)

```
Limit[f[t], t → ∞]
7500
```

Respuesta : El tamaño de la poblacion se estabilizaria en 7500 personas

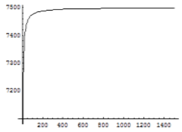
d) Respuesta : La asintota vertical no tiene sentido en el contexto del problema debido a que no existe el tiempo negativo.

Grupo 20

Ejercicio 6

```
f[t_] := (7500 t + 5000)/(t + 1)

Plot[f[t], {t, 0, 1500}]
```




```
- Graphics -
```

a) Dominio (0; ∞)

```
Reduce[t + 1 ≠ -1 ⋀ t > 0, t]
t > 0
```

La Imágen es (0 <= t < 7500)

```
Limit[f[t], t → ∞]

7500
```

Poblacion Actual

```
f[0]
5000
```

b) La población entre los 4 y 9 años crece 250 individuos.

```
f[4]
7000

f[9]
7250
```

c) El tamaño de la población se estabiliza acercándose, pero nunca llegando a 7500 individuos.

d) La función tiene Asíntota vertical en -1, sin embargo, bajo el contexto del problema, es ilógico hablar de tiempo negativo.

```
Limit[f[t], t → -1]
-∞
```

Resultados

- Todos los grupos definen la función con el software utilizando a "t" como variable independiente.
- Tres grupos determinan el dominio con el software de acuerdo con el contexto del problema, los otros dos no consideran $t \geq 0$.
- Todos los grupos, salvo el G20, explicitan el dominio usando palabras o bien intervalos.
- Sólo los grupos G14, G18 escriben el conjunto imagen correctamente.
- El grupo G19 realiza el grafico, pero escribe incorrectamente el conjunto imagen ([0;7500])
- El grupo G20 asocia el conjunto imagen con valores de la variable independiente.

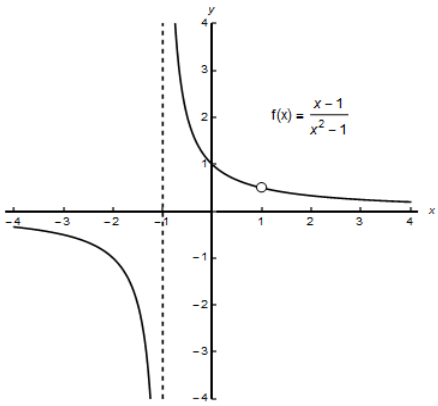
– Todos los grupos plantean el límite para hallar la asíntota vertical y concluyen que no tiene sentido en el contexto del problema por tratarse de un tiempo negativo. – Todos los grupos plantean correctamente el límite para hallar la asíntota horizontal, sólo para x tendiendo a más infinito. – Ningún grupo escribe la ecuación de la asíntota horizontal – Todos los grupos consideran el valor del límite como aquel donde se estabiliza la población. – Todos los grupos, salvo el G10, grafican la función. – De los grupos que grafican, tres de ellos lo hacen asignándole a la variable "t" un rango correspondencia con el contexto del problema. – Solamente el grupo G19 incorpora al comando Plot, la opción que permite visualizar la gráfica haciendo que el origen de coordenadas coincida con (0;0).
Imágenes conceptuales evidenciadas
-La herramienta informática sustituye el reconocimiento de funciones prototipos racionales (homográficas). -Definir funciones con el software usando variables contextualizadas en un problema. -Las respuestas del software al resolver la inecuación para determinar el dominio de la función sustituyen al lenguaje simbólico para explicitarlo. -Realizar gráficos con el software asignándole a la variable valores acordes con la contextualización de un problema. -Determinar asíntotas con el software usando definiciones asignándole significado en el contexto de un problema.
Registros utilizados
Algebraico, verbal y gráfico

Tabla 6. Análisis Actividad 2 Grupo B

4.3.6.2 Análisis de los resultados sobre imágenes conceptuales

Al analizar lo que cada grupo respondió en los ejercicios planteados, hemos podido agrupar resultados sobre cada uno de ellos que compilamos en la siguiente tabla:

Ejercicio 1/ Registros de presentación: gráfico y algebraico



Resultados

- Ningún grupo consideró que en aquellos valores que no pertenecen al dominio de la función existe AV ya que todos, de diferente manera, aplicaron la definición de asíntota vertical, calculando límites y concluyendo en consecuencia.
- Solo uno de los grupos no reconoció al eje de abscisas como asíntota horizontal y también un solo grupo realizó el grafico con el software, pero no los comparó.
- Ningún grupo escribe las ecuaciones de las asíntotas como rectas verticales u horizontales, sino que señalan que en tal punto existe asíntota.

Ejercicio 2/Registros de presentación: Algebraico

$$g(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$$

Resultados

- Teniendo en cuenta nuestra fundamentación teórica, si bien algunos grupos calcularon el dominio y lo explicitaron otros no lo hicieron.
- Cuatro de los cinco grupos ratificaron mediante el cálculo de límites que no existía AV en x=-1 y si en x=1 y las escriben de manera correcta.

- Tres grupos calcularon el límite para x tendiendo a -1 y todos los grupos lo hicieron para x tendiendo a 1.
- Ningún grupo analizó los límites laterales de acuerdo con el dominio de la función
- Todos los grupos determinaron la AO con límites solo para x tendiendo a +∞
- Ningún grupo graficó la AO, sólo la función
- Ningún grupo realizó observaciones o expresó algún comentario relacionado con la no visualización de la AO.
- Ningún grupo hizo referencia a la recta de trazo lleno que el software realiza frente a un salto infinito, como si se tratara de la AV.

Ejercicio 3/Registros de presentación: Verbal

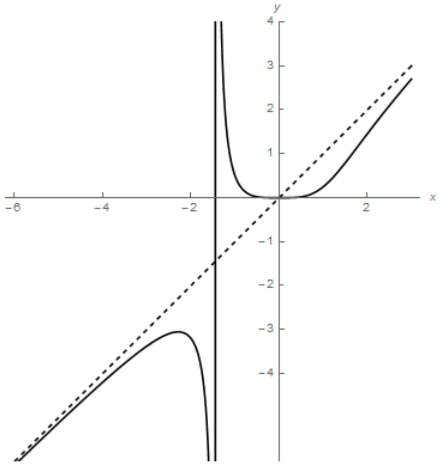
Responder V o F Justificando la respuesta.

Si y=b es asíntota de *f* (x) entonces existe x=c perteneciente al dominio de la función tal que f(c) =b.

Resultados

Cuatro de los cinco de los grupos concluye que no es posible la intersección entre la función y la AH, es decir consideran que la proposición es falsa. Para justificar recurren a ejemplos o utilizan la definición de asíntota.

Ejercicio 4/Registros de presentación: Gráfico

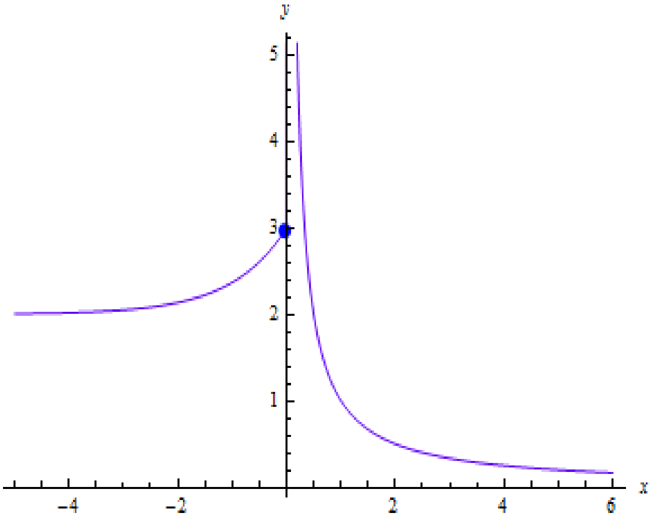


Resultados
– En todos los grupos se observó la persistencia de las imágenes mentales que identifican a las asíntotas como rectas que la función no atraviesa a pesar de haberles dado funciones donde esa situación no se cumple, sin embargo, es como si la conversión del registro gráfico al verbal hecha por los estudiantes no son equivalentes. – Ningún grupo usó el software para explicar las respuestas.
Ejercicio 5/ Registros de presentación: Algebraico $h(x) = \ln(-x-3)$
Resultados
– Como nos hemos planteado en la fundamentación de la elección de este ejercicio ningún grupo hace referencia a las transformaciones de la función prototipo: logarítmica. Necesitan calcular los límites para justificar que no existen AH ni AO, incluso contradiciendo el dominio de la función. – Ningún grupo intentó graficar la AV, tampoco realizan una observación al respecto. – Ningún grupo eligió valores para la variable independiente de acuerdo con el dominio de la función para utilizar en el comando Plot – Solo dos grupos calcularon el límite lateral izquierdo para x tendiendo a 3, acorde con el dominio de la función. – Los tres grupos que calcularon el límite lateral derecho y obtuvieron resultados no se cuestionaron si el mismo era correcto o no.
Ejercicio 6/Registros de presentación: Verbal

Las conclusiones de un estudio establecen que el número de individuos de una determinada población de una especie protegida viene dado, durante los próximos años, por la función: $f(t)=\dfrac{7500t+5000}{t+1}$, siendo t el número de años transcurridos. Se pide: a) Dominio e imagen bajo el contexto del problema. Tamaño actual de la población. b) ¿Cómo evoluciona la población entre los años 4 y 9? c) Si esta función fuese válida indefinidamente ¿se estabilizaría el tamaño de la población? Justificar la respuesta. La asíntota vertical en el contexto del problema ¿tiene algún significado?
Resultados – Todos los grupos trabajaron con la variable “t”, resolvieron inecuaciones y calcularon límites en el software Mathematica sin inconveniente. – Ningún grupo hizo referencia al modelo homográfico, resolvieron en el software sin considerar el tipo de función prototípica. – Todos los grupos calcularon los límites para hallar las asíntotas y establecieron su significado en el contexto del problema. – Todos los grupos graficaron usando el comando Plot con valores adecuados al contexto del problema para la variable independiente – Sólo un grupo hizo observaciones o comentarios con respecto a que el gráfico brindado por el software tenía con escalas diferentes en ambos ejes y la intersección de ambos no se correspondía con (0;0) e intentó remediarlo.

Ejercicio 7/Registros de presentación: Gráfico y Algebraico

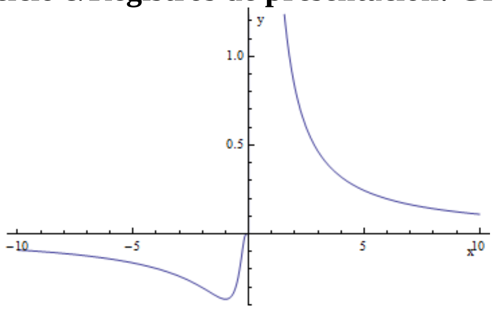
$$f(x) = \begin{cases} e^{x} + 2 & x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$$



Resultados

- Ningún grupo se cuestionó la existencia de AV a pesar de que el dominio de la función era el conjunto de los reales.
- Todos los grupos reconocieron las asíntotas con sus respectivas lateralidades
- Ningún grupo señaló diferencias entre el gráfico realizado por ellos y el que figura en el enunciado
- Ningún grupo respondió de acuerdo con el gráfico, sino como consecuencia de la aplicación de límites.

Ejercicio 8/Registros de presentación: Gráfico



Resultados

- Tal como anticipamos en la fundamentación de este ejercicio, el registro gráfico podría generar incertidumbre en los alumnos con respecto a las asíntotas, dada la imposibilidad de precisar los valores exactos y determinar las ecuaciones de las asíntotas. Esto se evidenció en todos los grupos y trataron de explicar con palabras lo observado pero ningún grupo intentó buscar una fórmula para la función representada.

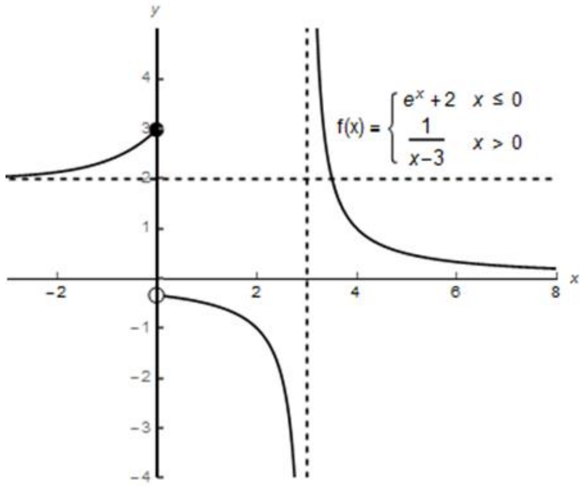
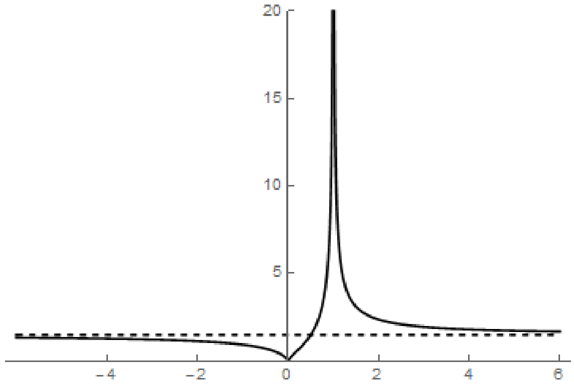
Ejercicio 9/ Registros de presentación: Verbal

Responder V o F justificando la respuesta

Si p(x) es un polinomio, entonces la función dada por $f(x) = \frac{p(x)}{x-2}$ posee una asíntota vertical cuya ecuación es x=2.

Resultados

- En todos los grupos se observó una persistencia de la imagen conceptual en la que un valor que anula el denominador es suficiente para determinar que el límite dará infinito y entonces la función tiene AV.
- Ningún grupo consideró la opción de que en el punto considerado existiera un cociente de infinitésimos.
- En la fundamentación del ejercicio nos habíamos planteado observar si los alumnos exploraban diferentes posibilidades para p(x) usando el software. Esta fue escasa, sólo tres grupos mostraron una función polinómica y los otros dos explicaron con palabras.
- Se observó un desaprovechamiento del software ya que fue usado como un procesador de texto y no como una herramienta con potencial simbólico y de exploración.

Ejercicio 10/Registros de presentación: Gráfico y Algebraico

Resultados
– De acuerdo con la fundamentación de este ejercicio, a pesar de presentar la función en registro gráfico y poder concluir acerca de las asíntotas, todos los grupos ratificaron lo observado a través del software calculando los límites respectivos.
Ejercicio 11/Registros de presentación: Gráfico

Resultados
– A pesar de que la función intercepta a la AH ningún grupo hizo referencia a ello, sino que explicaron con palabras el cálculo del límite que se debe hacer para determinar la AH. – Tal como nos planteamos en la fundamentación del ejercicio, la AV es la que produjo mayor incertidumbre en los alumnos, ya que ningún grupo la reconoció

como tal. Suponemos que al no estar graficada imaginaron un punto anguloso en lugar de la tendencia a + infinito de ambos laterales del punto a analizar.

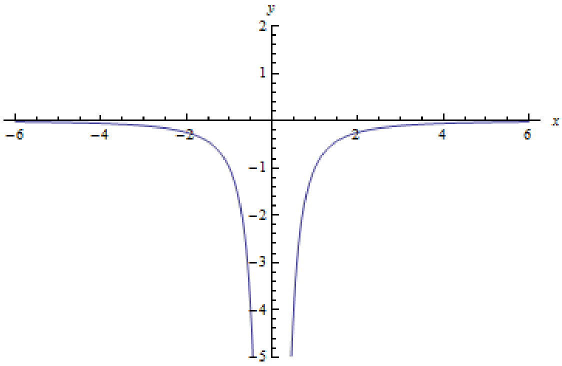
Ejercicio 12/Registros de presentación: Algebraico

$$g(x) = \sqrt{x.(x+3)} - x$$

Resultados

- Ningún grupo hace referencia a la existencia de AH y AO para la misma función. Podría estar relacionado a lo que suele decirse que la existencia de una anula la de la otra.
- Dos grupos (G1 y G15) no determinan la AO pues solo calculan el límite para + infinito. Podría deberse a que concluyen que la existencia de una anula la otra.

Ejercicio 13/ Registros de presentación: Gráfico



Resultados

- No hubo problema en reconocer los ejes cartesianos como asíntotas de la función. Todos las han reconocido.
- Solo un grupo (G17) pudo plantear una fórmula que representa una función similar a la dada.

Ejercicio 14/Registros de presentación: Algebraico

$$f(x) = \frac{4x^2 - 100}{x - 5}$$

Resultados
– En un solo grupo (G17), la imagen de la función impidió el análisis completo de la búsqueda de asíntotas aplicando definiciones y no concluyen en nada. – Todos los grupos determinan mediante cálculo de límites la ecuación de la AO. – Solo un grupo (G11) saca conclusiones erróneas ya que la función y la asíntota no son iguales se diferencian por la discontinuidad evitable, evidenciada en el cálculo del límite que realizaron para descartar la AV y sin embargo no se tuvo en cuenta en el análisis final y concluye que la AO y la función son idénticas. – De los tres grupos (G4, G11, G13) que calculan la AO y grafican la función, dos de ellos no hacen referencia a que la función y la AO son casi coincidentes salvo la discontinuidad evitable que presenta la función.
Ejercicio 15/Registros de presentación: Verbal
Determinar una función que tenga como asíntotas las siguientes rectas x=3, x=1, y=-4
Resultados
– La herramienta informática no contribuyó a la búsqueda de ejemplos no prototípicos como son las funciones racionales, ya que todos los grupos recurrieron a ese tipo de ejemplos. – Dos grupos (G11, G13) verifican calculando los límites respectivos las AV y AH. Uno de ellos no verifica nada (G17) y uno solo verifica las AV (G4)

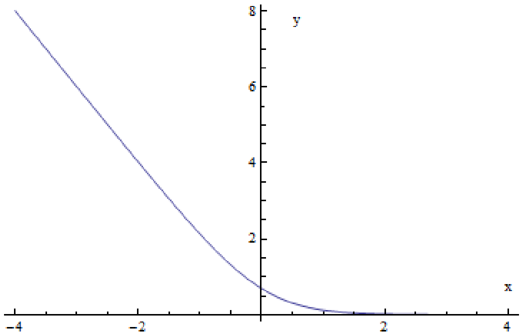
Ejercicio 16/Registros de presentación: Gráfico y Algebraico
$p(x) = \ln(1+e^{-2x})$ 
Resultados
– El software Mathematica no permitió determinar las AO en forma correcta. La presencia de la expresión algebraica facilitó la ratificación de la AH que observaban en el gráfico, (G4, G17, G11). – Solo un grupo (G13) no identificó ninguna asíntota, concluye el dominio son los reales entonces no tiene asíntotas. – Solo un grupo (G11) calcula la pendiente de la AO para x tendiendo a -∞, pero se equivoca al determinar la ordenada al origen porque no utilizan correctamente los vínculos al plantear el límite. – Dos grupos (G4, G17) calculan límites para x tendiendo a +∞ y verifican la AH, pero también uno de ellos (G4) la AO, sin comprender que del mismo lateral no pueden coexistir ambas asíntotas. – Por diferentes causas ningún grupo determina las dos asíntotas.

Tabla 7. Resultados de cada ejercicio Actividad 2

4.3.6.3 Imágenes conceptuales sobre el concepto de asíntotas de funciones en relación con el uso de software matemático a partir de los resultados del TDI

Luego del análisis minucioso de las producciones de los alumnos que resolvieron los 16 ejercicios que formaron parte de los cinco grupos de trabajo de la segunda actividad, y de la justificación teórica del ítem anterior hemos podido realizar una categorización de las *imágenes conceptuales con uso de software Mathematica* que mostramos en la siguiente tabla:

Imágenes Conceptuales Categoría 1(ICC1) **Imágenes conceptuales erróneas que surgen por no respetar la sintaxis o características del software Mathematica**
En esta categoría agrupamos aquellas imágenes relativas a el concepto de asíntotas que están influenciadas por no respetar la sintaxis del software sobre límites puntuales o al infinito o sobre las características de este. – La falta de precisión en la sintaxis correspondiente a límites puntuales influye en ideas o conclusiones erróneas sobre la existencia o no de asíntotas. – El no respecto de la sintaxis correspondiente a límites al infinito contribuye a pensar en asíntotas horizontales sólo para x tendiendo a más infinito. – Cálculos de límites con el software en entornos que no están incluidos en el dominio de la función por no tener en cuenta que por defecto los calcula por derecha para evidenciar asíntotas de un solo lateral.

– Cálculo de límites con el software para + ó - ∞ pensados como límites laterales, usando la opción “Direction” y no como tendencias diferentes, determina conclusiones erróneas en cálculos de AH y AO.
Imágenes Conceptuales Categoría 2 (ICC2) **Imágenes conceptuales erróneas que no pudieron modificarse a través de la exploración de funciones facilitada por el software Mathematica.**
En esta categoría se encuentras aquellas imágenes conceptuales erróneas que no se modificaron luego de haber tenido la oportunidad de realizar exploraciones con diferentes funciones utilizado el software. – Si un número anula el denominador, entonces la función presenta asíntota vertical en dicho valor. – Si un número no pertenece al dominio, entonces la función presenta asíntota vertical en dicho valor ya que el límite dará infinito. – Las asíntotas como “elementos” que cumplen ciertas definiciones explicitadas con palabras, pero no expresadas con las ecuaciones correspondientes. – Las asíntotas como rectas donde la función se aproxima sin tocarla. – La intersección entre la asíntota y la función debe ser vacía. – La falta de rigurosidad en el lenguaje simbólico matemático correspondiente a asíntotas en ejercicios dados en registro gráfico y luego ratificadas mediante cálculo de límites. – La falta de rigurosidad en el lenguaje simbólico matemático correspondiente a asíntotas en ejercicios dados en registro algebraico y luego ratificadas en forma gráfica.
Imágenes Conceptuales Categoría 3 (ICC3)

Imágenes conceptuales favorecidas por la incorporación del software Mathematica.
En este grupo juntamos aquellas imágenes conceptuales que el uso del software contribuyó a consolidar de manera positiva. – La posibilidad de existencia de asíntota horizontal y oblicua en funciones que no estén definidas por intervalos. – La existencia de asíntota vertical en funciones que involucran un cociente entre polinomios, siempre y cuando el valor que anula el denominador no sea raíz del numerador. – Confirmación de las asíntotas visualizadas en funciones definidas por intervalos a través del cálculo de límites – Determinación de asíntotas respetando las definiciones y asignándole significado en contextos de problemas. – Definición de funciones con el software usando variables contextualizadas de acuerdo con problemas permite descartar asíntotas que no responden a ese contexto. – Realización de gráficos asignándole a la variable valores acordes con la contextualización de los problemas permite visualizar asíntotas que tienen algún significado en el problema. – La posibilidad de existencia de puntos de intersección entre la asíntota horizontal con la función. – La facilidad y claridad de los gráficos obtenidos con el software permiten sacar conclusiones acerca de las asíntotas que luego se ratifican en forma algebraica.
Imágenes Conceptuales Categoría 4 (ICC4) **Imágenes conceptuales no favorecidas por la incorporación del software Mathematica.**

Agrupamos en esta categoría a las imágenes conceptuales desfavorables como consecuencia de la incorporación del software en el proceso de enseñanza aprendizaje.

- La necesidad de recurrir al registro algebraico para obtener gráficos de funciones desalienta la búsqueda de ejemplos con funciones no prototípicas que posean ciertas asíntotas.
- El registro gráfico (RGCS) anula el análisis algebraico de la búsqueda de asíntotas.
- La facilidad de cálculo de límites sustituye el concepto de coexistencia de asíntota horizontal y oblicua del mismo lateral.
- La facilidad de cálculo de límites genera cálculos innecesarios para justificar la no existencia de asíntota horizontal u oblicua en funciones logarítmicas.
- La facilidad de cálculo de límites origina cálculos fuera del dominio de la función influyendo en conclusiones equivocadas con respecto a las asíntotas verticales.
- La facilidad de los cálculos de los límites sustituye el análisis de la no coexistencia de asíntota horizontal y oblicua mismo lateral.
- Cálculo de límites con el software para + ó - ∞ pensados como límites laterales y no como tendencias diferentes determina sacar conclusiones equivocadas sobre AH y AO.
- Las respuestas del software al resolver la inecuación para determinar el dominio de la función sustituyen el lenguaje simbólico matemático para expresarlo y no se lo tiene en cuenta en la determinación de ciertas asíntotas.
- Las asíntotas como “elementos” que cumplen ciertas definiciones explicitadas con palabras, pero no expresadas con las ecuaciones correspondientes
- La facilidad de cálculo de límites sustituye el reconocimiento de funciones prototípicas racionales que poseen determinadas asíntotas y otras no.

Imágenes Conceptuales Categoría 5 (ICC5) **Imágenes conceptuales que demuestran falta de control o análisis de las respuestas**
Esta categoría se refiere a aquellas imágenes conceptuales que evidencian que las conclusiones realizadas por los alumnos carecen de análisis y control – El gráfico y el análisis algebraico realizados con el software son contradictorios en cuanto a la evidencia de existencia o no de asíntotas. – La falta de reconocimiento de asíntotas verticales de un sólo lateral, a pesar de haber realizado los cálculos de límites y el gráfico con el software. – Cálculo de límites fuera del dominio de la función determinan conclusiones equivocadas con respecto a la existencia de asíntotas laterales. – Registros gráficos (RGCS) inconsistentes con el registro algebraico (RACS) y verbal (RVCS) generan explicaciones contradictorias respecto a la existencia o no de asíntotas.
Imágenes Conceptuales Categoría 6 (ICC6) **Imágenes conceptuales que surgen a partir de representar al objeto matemático en un solo registro.**
En esta oportunidad expresamos a aquellas imágenes que surgen de la utilización de un solo registro de representación. – La ausencia del trazo punteado de la asíntota vertical provoca el no reconocimiento de esta.
Imágenes Conceptuales Categoría 7 (ICC7) **Imágenes conceptuales que describen un concepto sin aplicar su definición.**
Aquí agrupamos las imágenes que están relacionadas con conceptos, pero no respetan las definiciones formales.

– Explicaciones con palabras, haciendo referencia a los conceptos de las diferentes asíntotas, de acuerdo con lo visualizado en los gráficos.
Imágenes Conceptuales Categoría 8 (ICC8) **Imágenes conceptuales que muestran la tendencia a equiparar el trabajo con lápiz y papel al de un software específico.**
En esta categoría incluimos a aquellas imágenes que permiten ver que las formas de trabajo con el software son similares a las correspondientes a entorno de lápiz y papel – Cálculo de límites de funciones por intervalos resuelto como si se trabajara con lápiz y papel, es decir explicitando la rama para determinar asíntotas. – Cálculos de límite para la variable tendiendo a ∞ sin respetar la sintaxis adecuada y/o características propias del software, sino trabajando como si fuera en entorno de lápiz y papel determina conclusiones erróneas respecto a la existencia de asíntotas.
Imágenes Conceptuales Categoría 9 (ICC9) **Imágenes conceptuales que denotan que las respuestas del software sustituyen la expresión formal de un concepto o un análisis crítico de ellas.**
Reunimos aquí a las imágenes que evidencian que el alumno considera las respuestas del software como verdades absolutas, sin necesidad de análisis o de interpretación al lenguaje matemático simbólico apropiado. – Los resultados de los límites para calcular asíntotas oblicuas suplen la expresión algebraica de su ecuación. – Los resultados de los límites son suficientes para ratificar la asíntota vertical visualizada en forma punteada en el gráfico del enunciado y no es necesario escribir formalmente su ecuación.

– Los gráficos obtenidos son correctos, aunque no coincidan con el brindado en el enunciado del ejercicio donde se evidencian las asíntotas – Las respuestas obtenidas al resolver inecuaciones para determinar el dominio de funciones sustituyen al lenguaje simbólico para explicitarlo y esto evidencia errores en el cálculo de límites para determinar asíntotas.

Tabla 8. Categorías de las Imágenes Conceptuales

Algunos autores realizaron investigaciones aplicando el Mathematica como herramienta tecnológica y describen que los estudiantes quieren transcribir al software los conceptos como los aprenden en lápiz y papel, denominan a esta situación conflictos cognitivos (Contreras, Font, García Armenteros, Marcolini, Ortega y Sánchez, 2008). Esto lo evidenciamos en las actividades antes descriptas al resolver límites para la variable tendiendo a infinito sin percatarse que, por defecto, el software lo hace sólo para más infinito. Algo también evidenciado en los cálculos de límites puntuales (ICC1 y ICC8)

Otros autores sostienen que al representar un objeto matemático se debe tener en cuenta que dicha representación es una aproximación de este y que cuando se usa un software específico es éste el que impone las restricciones para hacer efectiva dicha representación (Contreras y Ortega, 2009). Esta postura nos ayuda a entender las razones por las cuales, cuando los alumnos tienen que explicitar una idea, dar ejemplos o contraejemplos en el software Mathematica, utilicen funciones prototípicas, ya que la restricción a la que hacen referencia los autores es, en este caso, la necesidad de usar el registro algebraico para obtener una representación en registro gráfico. También explica que, al realizar la gráfica de la función, si no se explicitan las ecuaciones de las asíntotas dentro del comando Plot, estas no se evidencian y el estudiante en algunos casos contradice conclusiones a las que llega en otro registro, por ejemplo, RASM (ICC9).

También señalan la existencia de dos metáforas referidas al uso de ordenadores en la enseñanza del cálculo una de ellas es considerarlo un amplificador cognitivo y la segunda es ser responsable de un cambio cualitativo. La primera hace referencia a que su incorporación en el proceso de aprendizaje lo hace más eficaz, ya que lo agiliza, permite rapidez en los cálculos, simplifica tediosos procedimientos algebraicos, aunque se sigan planteando los mismos objetivos didácticos como si trabajásemos con papel. En la segunda se refieren a que los ordenadores permiten organizar, estructurar de manera más reflexiva el pensamiento de los estudiantes, favoreciendo estrategias heurísticas y metacognitivas. Es decir, la facilidad de obtener los límites con el software contribuye a aplicar los conceptos de asíntotas y no que los estudiantes se concentren en la obtención algebraica de los mismos, olvidando el fin a lograr que es llegar a saber si la función presenta o no asíntotas. Por otra parte, la facilidad de operar en diferentes registros podría proporcionar al alumno un mayor control sobre sus respuestas y/o conclusiones. Pero el mismo podría no ser correcto, y generar imágenes conceptuales contradictorias (ICC3, ICC4 y ICC5).

Recordemos que D'Amore (2011) sostiene que la representación semiótica de un objeto o concepto no es absoluta, que se debe asociar con el registro de representación y éste a su vez depende del objeto a representar. Por ejemplo, la representación semiótica de dos líneas paralelas (││), puede asociarse a las barras de módulo al trabajar en registro algebraico o a la representación de rectas paralelas en el registro gráfico. Así también la representación semiótica de flecha (→), podría representar el símbolo lógico del condicional (Implica) en el registro algebraico y el registro gráfico puede representar un vector o una semirrecta.

Consideramos oportuno ampliar estos conceptos al contexto de software Mathematica de la siguiente manera: la representación semiótica de dos líneas paralelas (││), se relaciona con el símbolo lógico de la disyunción ($\vee$). Y la representación semiótica de flecha ($\rightarrow$), es un operador importante para el cálculo de límites. Incorporamos la representación semiótica de infinito (∞) que, en registro algebraico de lápiz y papel significa $+/- \infty$; y en entorno del software solo $+\infty$. Esto explica algunas de las ICC8 que ponen en evidencia el cálculo de límites sin tener en cuenta la especificidad del software y en algunos casos se sacan conclusiones equivocadas con respecto a la existencia de asíntotas horizontales y oblicuas en una misma función, o bien, verificar la coexistencia de ambas asíntotas de un mismo lateral, cuando esto no tiene sentido matemático.

Otros autores señalan que las acciones cognitivas de los humanos están mediadas por alguna herramienta que puede ser *simbólica o material* (Lupiáñez y Moreno, 2001). En nuestro caso, ejemplo de las primeras son los símbolos matemáticos, gráficos o expresiones verbales que se usan para hacer explicita alguna imagen conceptual de un objeto matemático. Y como ejemplo de las segundas, el software Mathematica. Los autores a su vez manifiestan que el conocimiento producido depende de estas dos herramientas y que las distintas *representaciones* de un concepto matemático son fundamentales para la comprensión de este. Cuando Lupiáñez y Moreno explicitan la idea de *representaciones* se refieren a símbolos, gráficos o expresiones verbales mediante los cuales se expresan los conceptos, e incluyen también las características y propiedades más relevantes del mismo (2001). Esto resultaría apropiado para justificar las categorías ICC6 y ICC7, ya que, al utilizar un solo registro para explicitar una imagen conceptual sobre asíntota, el análisis resulta incompleto.

También señalan que las actividades elaboradas con herramientas tecnológicas permiten obtener propiedades y relaciones matemáticas diferentes a las que se pueden observar cuando se trabaja con lápiz y papel. Las representaciones en forma escrita son *estáticas*, mientras que, cuando se trabaja con tecnología, los objetos matemáticos se transforman en *manipulables*, lo que generaría diferentes consecuencias diversas en la construcción de un conocimiento matemático. Esto nos ayuda a justificar las ICC9, ya que en esta categoría hay ejemplos en los que pueden verse que el alumno considera suficiente la respuesta del software para justificar sus resoluciones, o que las mismas no admiten ningún análisis.

CAPÍTULO 5: ANÁLISIS DE LAS ENTREVISTAS

5.1 Introducción

Tal como explicamos en el capítulo 3, luego de la implementación del TDI, elaboramos dos entrevistas a la luz del análisis de las actividades que realizaron los estudiantes. La finalidad era profundizar el análisis de las imágenes mentales y conceptuales en contexto de software. Para ello, seleccionamos las que evidenciamos en las producciones de los alumnos que iban a ser entrevistados, de acuerdo con las categorizaciones realizadas. Durante la entrevista intentamos analizar si dichas imágenes se modificaban o mantenían. Asimismo, pretendimos indagar los registros de representación usados en dichas imágenes y establecer con cuál de ellos se sentían más cómodos.

La organización de la entrevista se dividió en tres momentos que se explican a continuación:

1. *Sobre las imágenes mentales:* Momento dedicado a que el alumno reflexionara acerca de las respuestas elaboradas en la actividad 1. El fin era detectar en qué medida sostenían o modificaban las imágenes mentales que surgieron del análisis de dicha actividad.
2. *Sobre los registros de representación:* Espacio en el cual los alumnos ordenaban los ejercicios de la actividad 2 por niveles de dificultad, de acuerdo con su percepción, fundamentando su respuesta. El propósito fue determinar si el registro de representación en que se presentó el ejercicio está presente en la respuesta del alumno y conocer cuál es el preferido por el alumno.
3. *Sobre las imágenes conceptuales:* Instancia en la cual se presentaban actividades en diferentes registros de representación, elaboradas de acuerdo con las respuestas de los alumnos y con las imágenes conceptuales involucradas. El objetivo era

estudiar si modifican o no aquellas imágenes conceptuales con algún grado de inexactitud.

Mostramos a continuación las dos entrevistas realizadas.

5.2 Preámbulo a la entrevista

Las dos entrevistas realizadas las hemos empezado explicando al alumno lo siguiente:

Cómo ya sabes estoy realizando mi tesis de Maestría, y junto con tus compañeros fueron protagonistas de mi proyecto cuando realizamos el TDI en el laboratorio de informática sobre asíntotas de funciones. De acuerdo con el análisis que he realizado en dicho test necesito hacerte algunas preguntas para poder concluir mi trabajo y ver por otra parte que influencia tuvo la incorporación del software Mathematica en tu aprendizaje sobre el tema expuesto. Como hemos hecho a lo largo del desarrollo del test tomaré nota de este encuentro.

5.3 Entrevista 1

Ha trabajado en el grupo 5 al realizar las actividades del TDI y al resolver la Actividad 2 (Anexo 5) respondió a los problemas planteados en el Grupo C (Anexo 1).

5.3.1 Sobre las imágenes mentales

Como el objetivo era detectar en qué medida sostenían o modificaban las imágenes mentales que surgieron del análisis de las actividades mostramos:

- la respuesta del alumno a la actividad 1
- las imágenes mentales evidenciada en ella
- las preguntas de la entrevista con sus objetivos
- la respuesta del alumno
- el análisis de ella

<table>
<tr><td colspan="2">Respuesta del alumno a la actividad 1
Una asíntota es una recta imaginaria que limita el dominio o la imagen de una función. Las funciones normalmente, cuando tienden a la asíntota, se comportan de distintas maneras. Pueden acercarse infinitamente (a infinito en el caso de las verticales, o al valor de la recta en el caso de las oblicuas u horizontales) o atravesarlas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Imágenes mentales evidenciadas en las respuestas</td></tr>
<tr><td colspan="2">Explicaciones verbales acerca de que es una asíntota (IMC1)
(Registros involucrados: RVSM)</td></tr>
<tr><td>Pregunta 1</td><td>Objetivos de la pregunta</td></tr>
<tr><td>Quiero que vuelvas a leer la respuesta que elaboraste en esa oportunidad y respondas qué aspectos cambiarías de acuerdo con</td><td>Los objetivos de esta pregunta son:
Determinar si el alumno reflexiona acerca de la imagen mental de la recta asíntota</td></tr>
</table>

todo lo visto del tema y del uso del software.	como límite del dominio o de la imagen de una función. Observar si persiste la imagen mental que las funciones tienden a las asíntotas. Establecer si reflexiona sobre la referencia a la asíntota oblicua como un "valor". Entender el significado de la expresión utilizada en la respuesta: "*…atravesarlas*".
Respuesta del alumno: "Quisimos decir otra cosa, pero no teníamos los conceptos. Si por ejemplo calculo el límite para x→0 (lo escribe en una hoja) y me da ∞ entonces x=0 es AV. O bien calculo el límite para x→∞ (esta vez lo dice en forma verbal) y obtengo un número entonces por ahí pasa la AH." Agrega lo siguiente: "me cuesta explicar con palabras, las funciones tienden a valores, no a rectas". Luego retoma los ejemplos que plantearon y decide calcular los límites que antes había explicitado con palabras esta vez resolviéndolos mediante el software. Una vez que los calcula dice: "el software me permite ver las asíntotas, aunque no las dibuje, por eso pusimos imaginarias, aunque no sabíamos calcularlas, podíamos imaginarlas como la oblicua". Ahora que tengo el concepto puedo hallarla y muestra con el software como hacerlo. Respecto a la respuesta que dieron que "puede atravesarla" el alumno dice: "no se nos ocurrió un ejemplo, pero lo importante es que puede suceder" y señala el ejercicio de la actividad 2 (Ej 11) donde esto sucede.	
Análisis de la respuesta:	

Lupiáñez y Moreno (2001) aseguran que la construcción de un concepto matemático es un proceso en constante desarrollo. En la entrevista el estudiante reformuló su imagen mental, introduciendo definiciones que ejecutó con el software a través del cálculo de los límites. Los autores señalan que las representaciones del objeto matemático que muestra una herramienta tecnológica son ejecutables, es decir son simuladoras de acciones cognitivas, en este caso cuando el estudiante decide calcular los límites con el software para rectificar su idea de asíntotas porque le era difícil explicarlo con palabras como lo manifiesta en la entrevista, decide representar al objeto matemático a través del cálculo de los límites. Si bien primero lo escribe en un papel, inmediatamente recurre a la computadora para hacer efectivo el cálculo del límite y no quedarse sólo con la representación escrita sin que se ejecute. También en un momento dice "el software me permite ver las asíntotas aunque no las grafique", al respecto los autores señalan, las representaciones ejecutables que brindan las herramientas tecnológicas a diferencia de las representaciones estáticas que se realizan en lápiz y papel, en las cuales es imposible visualizar propiedades de los objetos matemáticos, lo que los convierten en reales, se pueden manipular y transformar (2001).	
Imágenes mentales evidenciadas en las respuestas	
Explicaciones a través de ejemplos gráficos usando funciones prototípicas: racionales, exponenciales, logarítmicas. **(IMC2)** (Registros involucrados: **RGSM** y **RASM**)	
Pregunta 2	**Objetivos de la pregunta**
Los ejemplos que brindaron fueron $f(x)=\frac{1}{x}$ y $g(x)=\frac{x^2+4}{x-2}$ ¿podrías	A pesar de contar con el software Mathematica que posibilita graficar todo tipo de funciones, los ejemplos planteado por el alumno involucraban funciones

darnos otro ejemplo para hacer referencia a asíntotas de funciones?	racionales, es decir funciones prototipos habitualmente usadas en clases de educación secundaria para ejemplificar asíntotas. Por lo tanto, nos planteamos: Analizar si luego de haber trabajado el concepto de asíntotas utilizando el software Mathematica, persiste la elección de funciones prototípicas.
Respuesta del alumno: “No teníamos idea de límites, por eso mostramos los gráficos, ahora calcularía los límites para responder” y explica cómo hacerlo. Cuando se le pide un ejemplo diferente recurre a $f(x) = e^x$.	
Análisis de la respuesta: El alumno recurre nuevamente a una función prototípica básica, no explora con el software Mathematica la posibilidad de recurrir a otro ejemplo a pesar del buen manejo que tiene del software. La incorporación de tecnología en la resolución de una actividad matemática puede ser analizada desde dos perspectivas diferentes, una que el software sea un medio de apoyo para el aprendizaje matemático mostrando a los estudiantes algún hecho matemático, y otra perspectiva, es que la herramienta tecnológica sea un medio para generar conocimiento matemático (Llinares, Salvador; Moreno, 2015). En este caso el estudiante no aprovechó la potencialidad del software y recurrió a un ejemplo conocido es decir “le muestra” algo que conoce, no genera un nuevo conocimiento.	

Tabla 9. Entrevista 1. Sobre las Imágenes Mentales

5.3.2 Sobre los registros de representación

El propósito fue determinar si el registro de representación en que se presentó el ejercicio está presente en la respuesta del alumno y conocer el registro de representación preferido por el estudiante. Por lo tanto, mostramos:

- las preguntas realizadas con sus objetivos
- la respuesta del alumno
- el análisis correspondiente

<table>
<tr><td>Pregunta 3</td><td>Objetivo de la pregunta</td></tr>
<tr><td>En la Actividad 2 te hemos planteado cuatro ejercicios, queremos saber cuál te resultó más complicado y cuál más sencillo de resolver y que expliques porqué.</td><td>A través de esta pregunta pretendemos: Determinar si el registro de representación en que se presentó el ejercicio está presente en la respuesta del alumno.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Respuesta del alumno:
“El ejercicio que tenía gráfico fue el que me resultó más sencillo, ya que pude ver las asíntotas. Pero también me generó dudas con respecto a la asíntota vertical y por dónde pasa la misma. Si hubiera vista una recta punteada sabría que existía AV, pero como no estaba creí que la función tenía una punta y no una asíntota”.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Análisis de la respuesta:
Si bien el software suele ser un medio facilitador para articular diferentes registros de representación (Caligaris, Rodríguez, y Laugero, 2015), en la respuesta del estudiante se observa que la gráfica presentada generó dudas. A pesar de ello, el alumno no intentó realizar cálculos que le permitieran eliminar las dudas evidenciadas en su respuesta acerca de la presencia de una asíntota vertical o un extremo en la función. Al disponer</td></tr>
</table>

de sólo una representación gráfica para identificar la existencia de asíntota vertical, y no lograr independizarse de ella, el sujeto confunde el objeto a identificar con la representación observada y no intenta cambiarla para eliminar sus dudas (Duval, 1998).	
Pregunta 4	**Objetivo de la pregunta**
De los registros de representación que usamos en la actividad 2: gráfico, algebraico y verbal. Con cual te sentís mejor trabajando. Explicar el por qué	Nuestra intención es: Conocer el registro de representación preferido por el alumno.
Respuesta del alumno: "El registro que me resultó más fácil fue el gráfico, porque pude observar las asíntotas, se ve claramente que la asíntota horizontal se encuentra en y=1 ya que el límite para x tendiendo a + o – infinito es 1". Y usando un lápiz explica, "para mí no hay asíntota vertical porque veo un punto cúspide", (lo dibuja) "y además no está la línea punteada que representa la asíntota vertical, las ramas se tocan".	
Análisis de la respuesta: Duval (2006) asegura que la conversión de un registro a otro es crucial en la comprensión de un concepto. Explicita que por un lado existe el concepto matemático formal y no semiótico y por otro las representaciones semióticas que eligen para comunicar dicho objeto. Cuando el alumno explica su respuesta, verbaliza el límite que debería calcular para determinar la asíntota horizontal y además toma un papel para graficar su idea, es decir comunica el objeto que él tiene en su mente. Para Duval (2006) el concepto es mental y la representación externa, lo que aparece en forma material. Se evidencia que al tomar el lápiz y graficar o bien verbalizar acerca de los límites el estudiante está representando su idea mental. El autor también señala que el uso de software permite exponer varias representaciones simultáneas de un objeto matemático	

sin embargo esto no resuelve el problema cognitivo del reconocimiento del objeto matemático representado, el estudiante insiste en la punta que observa en lugar de dos ramas que no se unen.

Tabla 10. Entrevista 1. Sobre los Registros de Representación

5.3.3 Sobre las imágenes conceptuales

El objetivo era estudiar si modifican o no aquellas imágenes conceptuales con algún grado de inexactitud. En consecuencia, exponemos:

- las imágenes conceptuales evidenciadas en las respuestas
- la pregunta realizada con sus objetivos
- respuesta del alumno
- análisis de ella
- las actividades propuestas
- la respuesta a la actividad
- el análisis de dicha respuesta

Imágenes conceptuales evidenciadas	
La facilidad de los cálculos de los límites sustituye el análisis de la coexistencia de asíntota horizontal y oblicua mismo lateral. (**ICC4**)	
Pregunta	**Objetivos de la pregunta**
Queremos que vuelvas a mirar la respuesta del ejercicio 12, en el cual has calculado el dominio de la función y planteaste una serie de límites para hallar las asíntotas, finalmente escribiste tus conclusiones. ¿Qué cosas	Los objetivos de esta pregunta son: Determinar si tiene sentido estudiar la coexistencia de asíntota horizontal y oblicua mismo lateral de acuerdo con los límites que planteados

<table>
<tr>
<td>cambiarías? ¿Qué observación harías del software?

En este ejercicio podemos apreciar que contiene una asintota horizontal en y = 3/2 por la derecha del 0. No tiene asíntota vertical, ya que ningun numero tiende a ∞. Ahora veremos si tiene asintotas oblicuas :

$\text{Limit}\left[\frac{g[x]}{x}, x \to \infty\right]$
0

$\text{Limit}\left[\frac{g[x]}{x}, x \to -\infty\right]$
-2

$\text{Limit}[g[x] + 2x, x \to -\infty]$
$-\frac{3}{2}$

$\text{Limit}\left[g[x] - \left(-2x - \frac{3}{2}\right), x \to -\infty\right]$
0

Así vemos que si hay una asíntota oblicua en y = $-2x - \frac{3}{2}$.</td>
<td>Ayudar a reflexionar acerca de la verificación realizada al calcular el límite para x tendiendo a infinito de la diferencia entre la función y la AO.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Respuesta del alumno:

“los calculamos porque con el software fue fácil, y además porque no teníamos claro el concepto que del mismo lado no podía existir AH y AO”. “Y también por eso verificamos usando la definición”</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Análisis de la respuesta:

Williner (2014), en su tesis de Maestría, realiza una experiencia con dos grupos de trabajo uno de ellos usando software Mathematica y otro trabajando en entorno lápiz y papel (grupo control). Sostiene que los estudiantes que trabajaron en el entorno computacional se pudieron concentrar mejor en los aspectos conceptuales y propiedades dado que el software solucionaba los cálculos algebraicos vinculados con el cálculo de límites, derivadas y raíces entre otros. Creemos que esto también se refleja en la respuesta dada por el estudiante en cuanto a verificar el concepto de asíntota oblicua al plantear el límite para x tendiendo a infinito de la diferencia entre la función y la ecuación de la asíntota para demostrar que es infinitésimo, es decir se concentró en la definición de esta. Esta verificación no es frecuente cuando se trabaja en entorno papel, incluso así lo pone de manifiesto el estudiante en la entrevista cuando dice: “…si no hubiera trabajado con el software esto no lo hubiera verificado”..</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th>Actividad propuesta</th><th>Objetivo de la actividad</th></tr>
<tr><td>En qué condiciones la siguiente frase es verdadera: “No hay AO ya que hay AH”.</td><td>Con esta actividad pretendemos:
Observar si persiste la idea de posibilidad de coexistencia de asíntota oblicua y asíntota horizontal del mismo lateral</td></tr>
<tr><td colspan="2">Respuesta del alumno:
“Si me dan la fórmula de la función, calculo el límite para x tendiendo a +∞ y -∞ si alguno de los dos me da un número, concluyo que hay AH de ese lado y por lo tanto no puede existir del mismo lado la AO. Igual como es fácil calcular los límites con el software no descarto que los calcularía para ratificar más mi respuesta.”</td></tr>
<tr><td colspan="2">Análisis de la respuesta:
Duval (2012), asegura que el primer nivel de comprensión de los estudiantes de un determinado concepto matemático se logra a través de la espontaneidad en la conversión y tratamiento que realiza de la representación del mismo, y que esto constituye el indicador más seguro de reconocimiento de dicho objeto, independientemente de cuál fue el registro utilizado para reconocerlo. Es decir, para el autor el análisis debe centrarse en las transformaciones de las representaciones y no en el registro utilizado. En nuestro caso observamos que el estudiante al disponer del software Mathematica, inmediatamente calcula los límites para asegurar o no la existencia de asíntota horizontal; es decir realiza una transformación dentro del mismo registro algebraico, operación conocida como tratamiento y si bien esta operación se hace efectiva a través del software, el estudiante debe plantear los límites en forma correcta para que ejecute la acción. Por otra parte, si bien entiende que la existencia de asíntota horizontal anula la existencia de asíntota oblicua del mismo lateral, él igual calcularía el límite para ratificar dicho concepto, ya que la presencia del software le facilita este proceso.</td></tr>
</table>

Las respuestas obtenidas al resolver inecuaciones para determinar el dominio de funciones sustituyen al lenguaje simbólico para explicitarlo y esto evidencia errores en el cálculo de límites para determinar asíntotas. **(ICC9)**

Pregunta	**Objetivos de la pregunta**

¿Por qué no escribieron cuál era el dominio de la función una vez que plantearon la inecuación para determinarlo?
 	
$g[x\_] := \sqrt{x\,(x+3)} - x$
 	
`Reduce[x (x + 3) ≥ 0, x]`
 	
`x ≤ -3 || x ≥ 0`
	La finalidad de la pregunta es:
	
	Examinar las razones del no uso del lenguaje simbólico para expresar el dominio de funciones.

Respuesta del alumno:

"El comando Reduce ya da la respuesta, no consideramos necesario escribir el dominio, ya que la salida del software consideramos que era suficiente". La docente le pregunta si cuando trabajan con lápiz y papel hacen lo mismo, es decir resuelven la inecuación y no expresan el dominio. El alumno entonces reconoce que no alcanza con la salida del software, sino que debe escribir el dominio. Se le solicitó que lo haga, entonces observó que necesitó recodificar la respuesta del software, ya que esas dos barras que aparecen tienen un significado y que se traducen en una conjunción es decir la unión de ambos intervalos. El estudiante verbaliza entonces cuál es el dominio de la función y luego lo escribe. La docente le explica la existencia de un comando que le permite determinar el dominio de la función:

```
FunctionDomain[f, x]
dominio de función
```

El estudiante entonces lo ejecuta y reconoce la importancia de definir la función con el software, además de reconocer cuál es la variable independiente. Cuando observa la respuesta:

```
FunctionDomain[g[x], x]
dominio de función

x ≤ -3 || x ≥ 0
```

El estudiante manifiesta "tampoco da los intervalos". Es decir, esperaba otro tipo de respuesta.

Análisis de la respuesta:

El no uso del lenguaje simbólico para expresar el dominio de la función refleja una carencia en la comprensión del campo numérico en el cual la expresión analítica se transforma en una función. El uso del software no puede opacar las condiciones de existencia y unicidad para que una relación sea función, ni la rigurosidad en el lenguaje simbólico; dado que de otra manera el software sólo sería una potente calculadora. Al respecto Villareal (2003) dice:

> Si la computadora simplemente se utiliza para hacer cuentas, será un suplemento, pero si se asume como una herramienta "para pensar con", será un reorganizador tanto de los procesos de pensamiento como de las relaciones entre los componentes del colectivo pensante integrado por seres humanos y dispositivos materiales. Esa reorganización producirá modificaciones en la organización de contenidos y en las actividades desarrolladas en clase (pp.119)

Otra evidencia de esto son las respuestas en las cuales los estudiantes calculan límites fuera del dominio de la función. En este caso calcular límite para x tendiendo a -3 por derecha carece de sentido, por eso se le preguntó al estudiante porque habían planteado los siguientes límites que son correctos:

```
Limit[g[x], x → 0]
0

Limit[g[x], x → -3, Direction → 1]
3
```

<table>
<tr><td colspan="2">En estos comandos puede que en cero plantearon límite por derecha, y en -3 lo hicieron por izquierda; es decir, que, a pesar de no expresar el dominio en forma simbólica, la imagen conceptual del mismo estuvo presente al plantear estos límites, ya que el estudiante respondió que los planteó en los entornos de definición del dominio. Es decir, el software Mathematica sustituyó la expresión simbólica del dominio, aunque el alumno lo tuvo presente. Sin embargo, esto no suele darse con frecuencia, por el contrario, el cálculo de límites por fuera del dominio es un error muy frecuente en el cual incurren los estudiantes.</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Si un número anula el denominador, entonces la función presenta asíntota vertical en dicho valor. (ICC2)</td></tr>
<tr><td>Pregunta</td><td>Objetivos de la pregunta</td></tr>
<tr><td>Queremos que vuelvas a mirar la respuesta que dieron al ejercicio 9. Allí sostienen que si un número anula el denominador entonces existe asíntota vertical que pasa por dicho número. Y explican esto usando el software como procesador de texto para justificar esa postura.
¿Estás de acuerdo con esta respuesta?</td><td>Esta pregunta está orientada a:
Examinar si persiste la imagen conceptual errónea acerca de que todo número que anula el denominador es suficiente para asegurar la existencia de asíntota vertical en dicho valor.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ejercicio 9:

VERDADERO. Al ser un polinomio P(x), su Dominio son todos los reales por lo tanto el único valor excluído de la función es 2 ya que el denominador tiene que ser distinto de 0. Entonces al calcular el límite de x tendiendo a 2, nos da infinito. Como podemos apreciar aplicando las propiedades de limites

$\lim_{x \to 2} f(x) = \infty$

$\lim_{x \to 2} \frac{P(x)}{x-2} = \infty$

$\frac{\lim x \to 2 \quad P(x)\, x \to 2}{\lim x \to 2 \quad x-2} = \infty \ \wedge \ x \neq 2$

Aqui podemos ver que el limite del denominador va a tender a 0, mientras que el numerador, considerando que no es el polinomio nulo, va a dar como resultado algun numero real 'a'. Consideramos que $\frac{a}{0}$ tendera hacia infinito.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Respuesta del alumno:</td></tr>
</table>

“Pusimos esa respuesta porque estábamos acostumbrados que en la escuela secundaria nos decían esto, lo quisimos formalizar usando límites, pero ahora no mantengo la respuesta, no tuvimos en cuenta cuando dimos la respuesta que si anulaba el numerador también la proposición era falsa”. La docente que entrevista le pide un ejemplo, el estudiante escribe: $\frac{x^2-4}{x-2}$
Análisis de la respuesta: Numerosos estudios versan acerca de la exploración de asíntotas en funciones racionales usando diferentes softwares entre ellos Gálvez (2014), Llanos, Otero y Gazzola, (2014), Rodríguez et al. (2014). La mayoría de estos dirigidos a estudiantes de escuela secundaria, donde el concepto de límite infinito para la variable tendiendo a un valor finito, no tiene lugar y se recurre a explicaciones como la que explicita el estudiante que si un número anula el denominador entonces por allí pasa una asíntota vertical. Esta imagen conceptual funciona como un obstáculo didáctico en el sentido expresado por Brousseau (2007) como aquellas dificultades relacionadas con ciertas metodologías o prácticas que se reiteran y se transforman en un obstáculo para la adquisición de un nuevo conocimiento. La herramienta informática en estos estudios es usada para explorar diferentes situaciones a partir de funciones definidas con parámetros y de acuerdo al valor que toma éste los estudiantes determinan la existencia o no de asíntotas. En ellos se concluye que la imagen conceptual que prevalece en los estudiantes coincide con la respuesta dada por nuestro estudiante. Sin embargo, en la entrevista, el alumno pudo revertirla ejemplificando en registro algebraico con un ejemplo adecuado de función racional. A pesar de ello no calcula los límites con el software, se queda con la idea de cómo el numerador y denominador se anulan en x=2, entonces no existe asíntota vertical. De esta manera el uso del software por parte del alumno

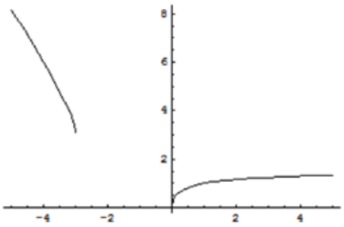
<table>
<tr><td colspan="2">se asemeja más a un procesador de texto que a una herramienta de cálculo simbólico matemático.</td></tr>
<tr><td colspan="2">La ausencia del trazo punteado de la asíntota vertical provoca el no reconocimiento de esta (ICC6).</td></tr>
<tr><td>Pregunta</td><td>Objetivos de la pregunta</td></tr>
<tr><td>Queremos que vuelvas a mirar la respuesta que dieron al ejercicio 11, y reflexiones algunas cuestiones que te plantearemos.

Ejercicio 11:
(Aproximamos gráficamente que la asíntota se encuentra en y =1)
Graficamente podemos apreciar, que en y = 1 hay una asíntota horizontal, donde si calc
tendiendo a +∞ y -∞ nos da 1, lo que quiere decir, que de ambos limites tienden a 1.
$\lim_{x \to +\infty} h(x) = 1$
$\lim_{x \to -\infty} h(x) = 1$</td><td>Con este enunciado procuramos:
Establecer si reconoce la asíntota vertical que no identificó en la resolución
Analizar si explora acerca de la intersección de la función con la asíntota horizontal.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Respuesta del alumno:
“No tuvimos dudas con la AH porque claramente se veía punteada. Pero no estábamos seguros de señalar la AV pues pensamos que había un punto de tipo cúspide”. Toma papel y lápiz y dibuja la AV en forma punteada y dice “si el grafico era así no tenía duda en señalar la AV. Quise buscar una fórmula para ejemplificar lo que veía en el gráfico porque no me daba seguridad, pero no lo logré” Usó h(x) como genérica para explicar la AH, desde lo conceptual, es decir con límites. Respecto a la intersección entre la AH y la función no lo consideró un problema, porque dice cumple la definición.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Análisis de la respuesta:
El registro gráfico no le resultó determinante al estudiante para distinguir asíntotas, necesitó del algebraico para ratificar la existencia de éstas. Por otra parte, el punteado en el trazado de las rectas favoreció la distinción de asíntotas. Y la ausencia de este provocó dudas respecto a su existencia. En este sentido Vinner (1989, citado en Hitt 2003), señala que en los</td></tr>
</table>

estudiantes universitarios hay una clara predisposición a las argumentaciones usando expresiones analíticas y no basándose en representaciones gráficas.	
La facilidad de cálculo de límites sustituye el concepto de no coexistencia de asíntota horizontal y oblicua del mismo lateral (**ICC4)**. La facilidad y claridad de los gráficos obtenidos con el software permiten sacar conclusiones acerca de las asíntotas que luego se ratifican en forma algebraica (**ICC3**) La posibilidad de existencia de asíntota horizontal y oblicua en funciones que no estén definidas por intervalos (**ICC3**)	
Pregunta	**Objetivos de la pregunta**
En la resolución del ejercicio 12, calcularon límites para determinar AH y AO. ¿Pueden coexistir para $+\infty$ ambas asíntotas? ¿Les resultó extraño que una función, que no está definida por tramos, tenga AH y AO al mismo tiempo?	Con esta pregunta intentamos: Ayudar al alumno a reflexionar acerca de la solución que realizada en el ejercicio.

Ejercicio 12:

```
g[x_] := √(x (x + 3)) - x
Reduce[x (x + 3) ≥ 0, x]
x ≤ -3 || x ≥ 0
Limit[g[x], x → -∞]
∞
Limit[g[x], x → +∞]
3/2
Limit[g[x], x → 0]
0
Limit[g[x], x → -3, Direction → 1]
3
Plot[g[x], {x, -5, 5}]
```



En este ejercicio podemos apreciar que contiene una asintota horizontal en y = 3/2 por la derecha del 0. No tiene asíntota vertical, ya que ningun numero tiende a ∞. Ahora veremos si tiene asintotas oblicuas :

```
Limit[g[x]/x, x → ∞]
0
Limit[g[x]/x, x → -∞]
-2
Limit[g[x] + 2 x, x → -∞]
-3/2
Limit[g[x] - (-2 x - 3/2), x → -∞]
0
```

Así vemos que si hay una asíntota oblicua en $y = -2x - \frac{3}{2}$.

Respuesta del alumno:

"Cuando vimos el gráfico y calculamos los límites para +- ∞, vimos que había AH por derecha, y nos pareció que por izquierda podía haber AO. Primero dudábamos, porque creíamos que no podía darse esta situación en una función que no está definida por trozos, al calcular los límites verificamos la existencia de la AO. Y para +∞ calculamos el límite para

determinar la pendiente de la oblicua “por las dudas”. Entendíamos que del mismo lado no se podían dar las dos asíntotas al mismo tiempo, pero preferimos “estar seguros”.
Análisis de la respuesta: Claramente en las respuestas del estudiante, el software Mathematica y el uso de registros variados (gráfico, algebraico y verbal), colaboraron en la mejora de imágenes conceptuales que se evidenciaron en el trabajo grupal. En la entrevista se pudo evidenciar las acciones y en las cuales el software cumplió una función determinante, ya que, a partir del gráfico, corrigieron posturas equivocadas.

Tabla 11.Entrevista 1. Sobre las Imágenes Conceptuales

5.4 Entrevista 2

Ha trabajado en el grupo 18 al realizar las actividades del TDI y al resolver la Actividad 2 (Anexo 5) respondió a los problemas planteados en el Grupo B (Anexo 1).

5.4.1 Sobre las imágenes mentales

Como el objetivo era detectar en qué medida sostenían o modificaban las imágenes mentales que surgieron del análisis de las actividades mostramos:

- la respuesta del alumno a la actividad 1
- las imágenes mentales evidenciada en ella
- las preguntas de la entrevista con sus objetivos
- los objetivos de cada una
- la respuesta del alumno
- el análisis de ella

<table>
<tr><td colspan="2">Respuesta del alumno a la actividad 1
Una asíntota es una recta a la cual la función tiende a acercarse. Las asíntotas pueden ser: Horizontales, Verticales y Oblicuas. En este ejemplo podemos ver 2 de ellas, y el ejemplo propuesto fue f(x)=1/x</td></tr>
<tr><td colspan="2">Imágenes mentales evidenciadas en las respuestas</td></tr>
<tr><td colspan="2">Explicaciones a través de ejemplos con cálculos de límites de funciones prototípicas: racionales, logarítmicas y exponenciales (IMC3)
(Registros involucrados: RGSM y RASM)</td></tr>
<tr><td>Pregunta 1</td><td>Objetivos de la pregunta</td></tr>
<tr><td>Quiero que vuelvas a leer la respuesta que elaboraste en esa oportunidad y respondas</td><td>Los objetivos de esta pregunta son:</td></tr>
</table>

qué aspectos cambiarías de acuerdo con todo lo visto del tema y del uso del software.	Determinar si el alumno reconoce alguna contradicción entre la escritura de una recta y un punto Analizar si el alumno modifica el planteo de los límites para x tendiendo a ∞ con el software ya que usan comando Limit con la opción Direction como si fueran límites laterales.
Respuesta del alumno: No logra escribir como ecuaciones las rectas correspondientes a las asíntotas, sigue respondiendo: "En x=0 hay AV, en y=0 hay AH". La docente le señala porque responde "en" y dice "son los puntos por donde pasan las rectas". Eso es correcto le señala la profesora, pero las asíntotas son rectas que tienen ecuaciones propias, frente a este comentario, el estudiante reacciona y ahí se da cuenta que debe expresar la ecuación sin decir "en". En cuanto al cálculo que realizó con el software para los límites tendiendo a infinito, usando Direction, se corrige y expresa que deberían haber usado + - ∞, porque no se trata de un límite lateral.	
Análisis de la respuesta: De manera similar a la primera entrevista el estudiante reformuló su imagen mental, introduciendo definiciones que ejecutó con el software a través del cálculo de los límites. Y las representaciones del objeto matemático mostradas con el software Mathematica adquieren la calidad de *ejecutables*, es decir funcionan como simuladoras de acciones cognitivas.	
Pregunta 2	**Objetivos de la pregunta**

Los ejemplos que brindaron fueron $f(x)=\frac{1}{x}$ ¿podrías darnos otro ejemplo para hacer referencia a asíntotas de funciones?	A pesar de contar con el software Mathematica que posibilita graficar todo tipo de funciones, los ejemplos planteado por el alumno involucraban funciones racionales, es decir funciones prototipos habitualmente usadas en clases de educación secundaria para ejemplificar asíntotas. Por lo tanto, nos planteamos: Analizar si luego de haber trabajado el concepto de asíntotas utilizando el software Mathematica, persiste la elección de funciones prototípicas.
Respuesta del alumno: El alumno en la entrevista propone dos ejemplos: $y=\frac{x^2-2}{x+1}$ $y=\ln(x+5)$ es decir sigue recurriendo a ejemplos prototípicos, incluso dice que el primero de ellos es diferente al anterior porque no es homográfica. A pesar de haber señalado a la primera como no homográfica, dice que tiene asíntota horizontal que pasa por 1. Después realiza la gráfica y rectifica la respuesta al verla. Sin embargo, en un primer momento, no calcula los límites como lo hizo cuando realizó la actividad, pero si lo hace luego de ver el grafico del software. Cuando explica el segundo ejemplo, dice que se trata de "una traslación de la función logarítmica", entonces la AV se traslada a -5. Así lo expresa y esta vez no realiza nada más con el software.	
Análisis de la respuesta:	

El alumno recurre nuevamente a dos funciones prototípicas básicas, no explora con el software la posibilidad de utilizar otros ejemplos, incluso las escribe en papel en un primer momento y luego la transcribe al software. Cuando señala las asíntotas de las funciones propuestas, no calcula los límites, sino que las verbaliza y cuando quiere verificar las asíntotas que predijo, sólo en el primer caso realiza gráfica y cambia su respuesta. El proceso de visualización en este caso permitió al estudiante revisar su respuesta, Zimmermann (1990, citado en Hitt,2003) afirma que el papel de la visualización en el aprendizaje del cálculo es fundamental para tener una primera aproximación a un concepto, es difícil imaginar éxito en el desarrollo de un curso de cálculo si no se enfatizan procesos de visualización y solo se enfatizan los procesos algebraicos en demasía. Por su parte Hitt señala:

> La visualización matemática tiene que ver con procesos de transformaciones mentales y producciones en papel, en pizarrón o en computadora, generadas de una lectura de enunciados matemáticos o de gráficas, promoviendo una interacción entre representaciones para una mejor comprensión de los conceptos matemáticos en juego (2003, pp.2)

Dikson (1989) señala que son pocos los estudiantes que entienden la conexión entre las expresiones matemáticas y su representación gráfica.

> Pocos alumnos son capaces de visualizar estas relaciones, salvo aquellos que estudian materias que manejan estos conceptos. Pero incluso cuando se manejan los conceptos con frecuencia, los métodos usuales de enseñanza no parecen ayudar a los alumnos a pasar con flexibilidad de un sistema de símbolos a otro (pp. 29)

Sin mencionar los registros de representación está señalando la dificultad existente en el proceso de conversión de un registro analítico en este caso a uno gráfico. Sin

embargo, en este caso la herramienta informática facilitó este proceso, la visualización de la gráfica de la función hizo rectificar la respuesta y no obstante con ello calculó los límites para asegurarse de lo que veía.

Tabla 12.Entrevista 2. Sobre Imágenes Mentales

5.4.2 Sobre los registros de representación

El propósito fue determinar si el registro de representación en que se presentó el ejercicio está presente en la respuesta del alumno y conocer el registro de representación preferido por el alumno. Por lo tanto, mostramos:

- las preguntas realizadas con sus objetivos
- la respuesta del alumno
- el análisis correspondiente

Pregunta 3	**Objetivo de la pregunta**
En la Actividad 2 te hemos planteado cuatro ejercicios, queremos saber cuál te resultó más complicado y cuál más sencillo de resolver y que expliques porqué.	A través de esta pregunta pretendemos: Determinar si el registro de representación en que se presentó el ejercicio está presente en la respuesta del alumno.
Respuesta del alumno: “Me resultó fácil el ejercicio del logaritmo porque es una función conocida y solo tenía una fórmula y nada más”.	
Análisis de la respuesta: El ejercicio dado en registro algebraico incluye la función prototípica logaritmo natural. (Ejercicio 5, TDI, Anexo 1). En las observaciones hechas al grupo de trabajo notamos una marcada identificación con el registro algebraico, frases como: “se puede suponer,	

<table>
<tr><td colspan="2">pero no afirmar su validez” cuando se les presentó una función solo en registro gráfico. Intentaron buscar una fórmula para hacer un gráfico como el brindado, pero no lo lograron. Incluso preguntaron varias veces si era suficiente con lo que se veía en él.</td></tr>
<tr><td>Pregunta 4</td><td>Objetivo de la pregunta</td></tr>
<tr><td>De los registros de representación que usamos en la actividad 2: gráfico, algebraico y verbal. Con cual te sentís mejor trabajando. Explicar el por qué</td><td>Nuestra intención es:
Conocer el registro de representación preferido por el alumno.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Respuesta del alumno:
“Me resulta más fácil cuando hay una fórmula, además los cálculos con el software me salen más fácil”</td></tr>
<tr><td colspan="2">Análisis de la respuesta:
Caligaris et al. (2015) manifiestan que los softwares matemáticos pueden ser un recurso didáctico facilitador de los procesos de aprendizaje, a su vez estas tecnologías constituyen también un medio apropiado para articular los distintos registros semióticos de un concepto en forma más sencilla. En la respuesta del estudiante se observa que se siente cómodo con la herramienta y reconoce que le facilita los cálculos.</td></tr>
</table>

Tabla 13. Entrevista 2. Sobre los Registros de Representación

5.4.3 Sobre las imágenes conceptuales

El objetivo era estudiar si modifican o no aquellas imágenes conceptuales con algún grado de inexactitud. En consecuencia, exponemos:

- las imágenes conceptuales evidenciadas en las respuestas
- la pregunta realizada con sus objetivos
- respuesta del alumno

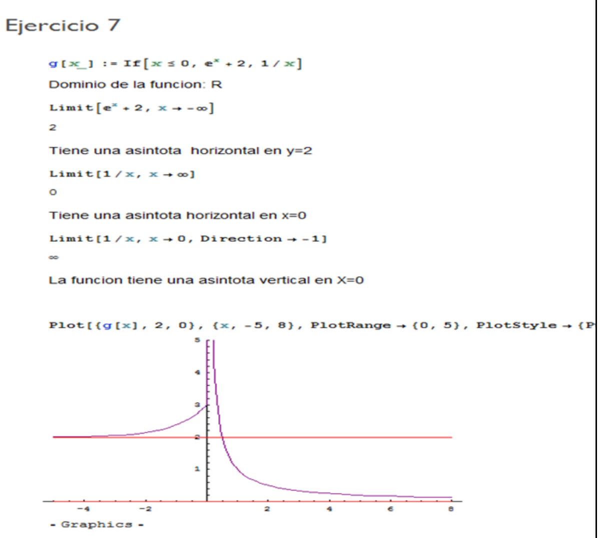
– análisis de ella

– las actividades propuestas

– la respuesta a la actividad

– el análisis de dicha respuesta

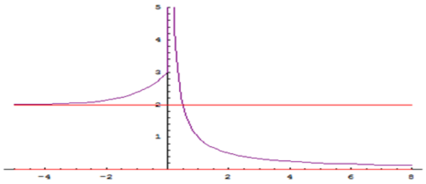
<table>
<tr><th colspan="2">Imágenes conceptuales evidenciadas</th></tr>
<tr><td colspan="2">– Cálculo de límites de funciones por intervalos resuelto como si se trabajara con lápiz y papel, es decir explicitando la rama para determinar asíntotas (ICC8)
– La facilidad y claridad de los gráficos obtenidos con el software permiten sacar conclusiones sobre asíntotas de funciones que luego se ratifican en forma algebraica (ICC3)</td></tr>
<tr><td>Pregunta</td><td>Objetivos de la pregunta</td></tr>
<tr><td>Queremos que vuelvas a mirar la respuesta del ejercicio 7, ¿Qué cosas cambiarías? ¿Qué observación harías del software?


Ejercicio 7
g[x_] := If[x ≤ 0, e^x + 2, 1 / x]
Dominio de la funcion: R
Limit[e^x + 2, x → -∞]
2
Tiene una asintota horizontal en y=2
Limit[1 / x, x → ∞]
0
Tiene una asintota horizontal en x=0
Limit[1 / x, x → 0, Direction → -1]
∞
La funcion tiene una asintota vertical en X=0
Plot[{g[x], 2, 0}, {x, -5, 8}, PlotRange → {0, 5}, PlotStyle → {P
- Graphics -</td><td>Determinar las razones por las cuales calcularon los límites eligiendo las ramas de las funciones.</td></tr>
</table>

Ejercicio 7

```
g[x_] := If[x ≤ 0, e^x + 2, 1 / x]
Dominio de la funcion: R
Limit[e^x + 2, x → -∞]
2
Tiene una asintota  horizontal en y=2
Limit[1 / x, x → ∞]
0
Tiene una asintota horizontal en x=0
Limit[1 / x, x → 0, Direction → -1]
∞
La funcion tiene una asintota vertical en X=0

Plot[{g[x], 2, 0}, {x, -5, 8}, PlotRange → {0, 5}, PlotStyle → {P
```



- Graphics -

Respuesta del alumno:

“Si no hubiera trabajado con el software, daba la respuesta solo por lo que observaba en el gráfico”. “Al mirar el gráfico me resultó fácil plantear los límites para verificar las asíntotas que se veían” “Si no tenía el gráfico, me hubiera resultado difícil plantear los límites como lo hice, eligiendo las ramas de acuerdo con lo que pude ver en él”.

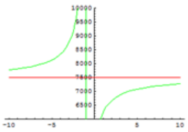
Análisis de la respuesta:

La combinación del registro gráfico con el analítico resultó para el alumno, la mejor forma de aplicar las definiciones de asíntotas explicadas. Sigue mostrando una fuerte tendencia a sentirse más seguro cuando verifica en forma analítica lo que observa en el gráfico. Vinner (1989, citado en Hitt 2003) explica a través de una experiencia de demostración del teorema del valor medio en forma algebraica o visual, como los estudiantes priorizan el pensamiento algorítmico sobre el visual, especialmente a nivel universitario. A pesar del uso no eficiente de los procesos algebraicos Vinner manifiesta que una buena articulación entre lo visual y algorítmico favorecería el aprendizaje de los conceptos matemáticos.

<table>
<tr><th>Actividad propuesta</th><th>Objetivo de la actividad</th></tr>
<tr><td>Asignar valor de verdad a la siguiente proposición:
Si el dominio de una función son todos los reales, entonces dicha función no tiene AV.</td><td>Con esta actividad pretendemos:
Observar si usan el ejercicio anterior como contraejemplo para justificar la falsedad de la proposición.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Respuesta del alumno:
“Es falsa, el ejemplo anterior sirve como contraejemplo”</td></tr>
<tr><td colspan="2">Análisis de la respuesta:
El alumno no manifestó ningún conflicto frente a la intersección existente entre la asíntota vertical y la función. Agregó además que esto se puede dar sin problema porque es una función por trozos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">La herramienta informática sustituye el reconocimiento de funciones prototipos racionales que poseen determinadas asíntotas y otras no. (ICC4)</td></tr>
<tr><td>Pregunta</td><td>Objetivos de la pregunta</td></tr>
<tr><td>Le preguntamos si en la resolución del ejercicio 6 reconocieron el modelo homográfico, y si lo hicieron porque calcularon AO.</td><td>La finalidad de la pregunta es:
Examinar si el alumno reconoce un modelo de función racional de tipo homográfico.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>
Ejercicio 6

f[t_] := (7500 t + 5000) / (t + 1)

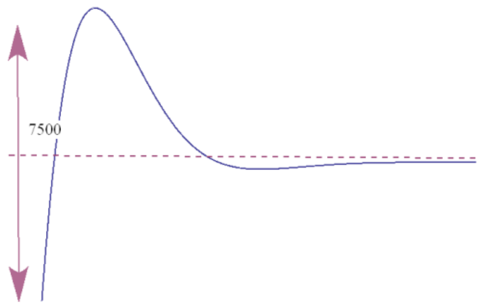
Reduce[t + 1 == 0, t]
t == -1
El dominio de la funcion es: R-{-1}
Limit[f[t], t → -1, Direction → 1]
∞
Limit[f[t], t → -1, Direction → -1]
-∞
La funcion tiene asintota vertical en t=-1
Limit[f[t], t → Infinity]
7500
Limit[f[t], t → -Infinity]
7500
La funcion tiene asintota horizontal en y=7500
Limit[f[t] / t, t → Infinity]
0
La funcion NO tiene asintota oblicua
Plot[{f[t], 7500}, {t, -10, 10}, PlotRange → {6000, 10000}, PlotStyle → {Green, Red}]


- Graphics -

a) En el contexto del problema
Dominio de la funcion: [0;+∞)
Imagen de la funcion: [5000;7500)
b) Entre los años 4 y 9 es el momento en que la poblacion disminuye su tasa de crecimiento mas rapidamente.
c) La poblacion se acercara a 7500 pero nunca lo alcanzara, esto significa que la poblacion maxima sera de 7499(teniendo en cue
d) La asintota vertical no tiene ningun significado en el contexto del problema, ya que el tiempo no puede ser negativo y la asintota s
</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">
Respuesta del alumno:
El estudiante manifiesta que reconoció el modelo homográfico pero que calculó la AO “por las dudas”
</td></tr>
<tr><td colspan="2">
Análisis de la respuesta:
En este caso el “por las dudas” del estudiante, se puede traducir, en que resulta sencillo el cálculo de límites usando el software, entonces lo hacemos. En palabras de Jonasen (2002)

Los computadores pueden apoyar más efectivamente el aprendizaje significativo y la construcción de conocimientos en la educación superior, como herramientas de amplificación cognitiva para reflexionar sobre lo que los estudiantes han aprendido y lo que saben (pp.12)
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Las asíntotas como rectas donde la función se aproxima sin tocarla (ICC2)</td></tr>
<tr><td>Pregunta</td><td>Objetivos de la pregunta</td></tr>
<tr><td>Queremos que vuelvas a mirar la respuesta del ejercicio 6. Allí afirman que la población se</td><td>Con esta pregunta procuramos:</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>acerca a 7500 pero no alcanza ese valor, queremos saber en qué se apoyaron para responder esto. Agregamos la siguiente pregunta:
Vuelve a mirar la respuesta dada en el ejercicio 6 de la actividad 2. Si una parte de la gráfica de la función hubiese sido la siguiente:

¿Hubieran cambiado algo en su respuesta

</td>
<td>Observar si la respuesta lo asocian al gráfico, al modelo o si creen que una función no puede atravesar a la AH.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Respuesta del alumno:
El estudiante dice que en el modelo analizado en el ejercicio la función no atraviesa a la asíntota horizontal, por eso respondieron que “no alcanza ese valor”. Respecto a la imagen que mostramos en nuestra pregunta dice: “no se me ocurre un modelo donde suceda lo que se ve, y si hubiéramos visto esta imagen no cambiaba la respuesta ya que si bien en algún momento alcanzó el valor de 7500, al estabilizarse la población no lo alcanza, ya que es el resultado del límite”</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Análisis de la respuesta:
La respuesta del estudiante no muestra problema con respecto al hecho que la función graficada en nuestra pregunta atraviesa la asíntota horizontal, solo aclara que se trata de un modelo distinto, e insiste en que el valor del límite cuando x tiende a +∞ es 7500 por eso “no lo alcanza”. Colombano y Rodriguez (2008) hacen referencia a uno de los modelos intuitivos</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">de límite como Cota: el valor de un límite es un número más allá del cual la función no puede pasar. Persiste esta imagen conceptual en su respuesta, a pesar de no llamarle la atención de la intersección entre la función y la asíntota horizontal de la función del gráfico.</td></tr>
<tr><td colspan="2">– El no respecto de la sintaxis correspondiente a límites al infinito contribuye a pensar en asíntotas horizontales sólo para x tendiendo a más infinito. (ICC1)
– La facilidad de cálculo de límites origina cálculos fuera del dominio de la función y determina conclusiones equivocadas con respecto a las asíntotas verticales. (ICC4)
– La facilidad de cálculo de límites genera cálculos innecesarios para justificar la no existencia de asíntota horizontal u oblicua en funciones logarítmicas. (ICC4)</td></tr>
<tr><td>Pregunta</td><td>Objetivos de la pregunta</td></tr>
<tr><td>Queremos que vuelvas a mirar la respuesta del ejercicio 5 que elaboraste y reflexiones acerca de los cálculos de los límites y el dominio de la función. Luego queremos que respondas porque calculaste límites para determinar AO si se trata de una función logarítmica.</td><td>Con esta pregunta procuramos que el alumno:
Advierta que calcula límites innecesarios, por hacerlo fuera del dominio de la función o por no reconocer que es una función logarítmica.</td></tr>
</table>

Ejercicio 5

```
h[x_] := Log[-x - 3]

Reduce[-x - 3 > 0, x]

x < -3
```

El dominio de la funcion es Dh: (-∞;-3)

```
Limit[h[x], x → -3, Direction → 1]

-∞

Limit[h[x], x → -3, Direction → -1]

-∞
```

La funcion tiene asintota vertical en x=-3

```
Limit[h[x], x → Infinity]

∞
```

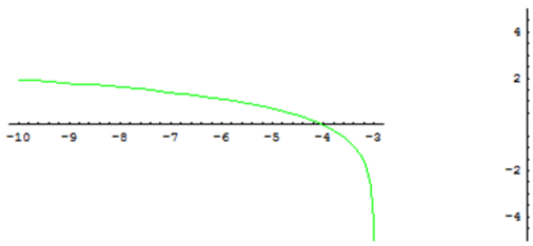
La funcion NO tiene asintota horizontal

```
Limit[h[x] / x, x → Infinity]

0
```

La funcion NO tiene asintota oblicua

```
Plot[h[x], {x, -10, -3}, AxesOrigin → {0, 0}, PlotSty
```




```
- Graphics -
```

Respuesta del alumno: "sólo tendría que haber calculado el límite para +∞, tanto para la AH como para la AO". Frente a esta respuesta la docente pregunta si era necesario calcular esos límites, ya que, por ser una función logarítmica, de antemano se sabe que no tiene ese tipo de asíntotas. Responde: "quise aplicar las definiciones y usar el software".

Acerca del límite para x tendiendo a -3, responde: "solo lo tenía que calcular por izquierda, ya que se ve que es una asíntota de un solo lado, a pesar de que el software no la muestra, quise graficarla con mis compañeros, pero no supimos hacerlo". La docente repregunta: si no hubieras graficado la función, ¿por qué solo se debe calcular el límite por izquierda? El estudiante no supo contestar a esta pregunta.

Análisis: el estudiante muestra una fuerte predisposición al registro algebraico, calcula límites sin sentido, pues lo hace en entornos reducidos fuera del dominio de la función. Fue el ejercicio que le resultó más sencillo, porque dijo en la entrevista "sólo tienen una fórmula", sin embargo, necesita graficar es decir *convertir* el registro algebraico al gráfico y muchas respuestas las corrige a partir de lo que visualiza en él. Si bien calculó el dominio de la función y escribió apropiadamente, no lo tiene en cuenta pues respondió las razones por las cuales tiene sentido calcular límite lateral por izquierda en x=-3 a partir de la visualización del gráfico. En este sentido Jonassen (2002) afirma que el uso de computadora como herramienta cognitiva sirve para visualizar, organizar, automatizar y suplantar técnicas del pensamiento. Existe también una correspondencia con lo hecho en el ejercicio 6 (modelo homográfico) donde también "por las dudas" calcula límites para determinar AO aunque sepa de antemano que las funciones logarítmicas básicas no poseen estas asíntotas.

Tabla 14.Entrevista 2. Sobre Imágenes Conceptuales

CAPÍTULO 6: CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

Comenzamos este estudio planteándonos interrogantes relativos a las imágenes mentales y conceptuales de los estudiantes de Análisis Matemático de la UNLaM sobre el concepto de asíntotas de funciones cuando usan software Mathematica en las clases, con que registros las manifestaban y sobre el tipo de actividades matemáticas con uso del software que podrían contribuir a modificar aquellas imágenes conceptuales que tengan algún grado de inexactitud.

Las diversas actividades realizadas durante el estudio apuntaron en esa dirección. La lectura de la bibliografía nos ayudó a entender las diferentes posturas teóricas sobre el tema y a detectar la no existencia de un instrumento de recolección de datos que estuviera relacionado con las imágenes mentales y conceptuales sobre asíntotas cuando en la enseñanza se incluye software como el Mathematica y se utilizan diversos registros de representación semiótica.

Otra consecuencia de esta lectura fue la selección de aspectos teóricos que nos ayudaron a enfocar el trabajo de investigación desde una postura cognitivista abarcando imágenes mentales y conceptuales, registros de representación semiótica y uso de tecnología en ámbitos académicos matemáticos.

La elección del marco teórico nos asistió en el diseño y justificación de un instrumento para la recolección de datos, el *Test de Diagnóstico Inicial* (TDI) y en la estructuración de las *Entrevistas Individuales* (EI). Destacamos que hemos podido crear dos instrumentos para el análisis de los trabajos de los estudiantes, la *Escala de Apreciación de Imágenes Mentales con uso de Software* (EAIMuS) y la *Escala de Apreciación de Imágenes Conceptuales con uso de Software* (EAICuS).

El aporte teórico de esta investigación se refleja en las definiciones elaboradas a partir de la teoría existente, la adaptación de las definiciones de *registros de representación en contexto de software matemático* (a partir de las establecidas por Duval (2006)), la de *imágenes mentales y conceptuales con uso de software matemático* (partiendo de las ideas de Tall y Vinner (1981)), el *concepto de representaciones ejecutables con uso de software Mathematica* (tomando como base lo dicho por Lupiáñez y Moreno (2001)) y la ampliación del concepto de D'Amore (2011) sobre la *asociación entre la representación semiótica de un objeto o concepto y el registro de representación al contexto de software Mathematica*.

Como resultado del análisis pormenorizado de las actividades de los estudiantes, hemos logrado clasificar las imágenes mentales sobre el concepto de asíntotas de funciones en relación con el uso de software Mathematica en cinco categorías:

- **Categoría 1 (IMC1):** explicaciones verbales acerca de que es una asíntota (Involucra RVSM)
- **Categoría 2 (IMC2):** explicaciones a través de ejemplos gráficos usando funciones prototípicas: racionales, exponenciales, logarítmicas. (Involucra RGSM y RASM)
- **Categoría 3 (IMC3)**: explicaciones a través de ejemplos con cálculos de límites de funciones prototípicas: racionales, logarítmicas y exponenciales. (Involucra RGSM y RASM)
- **Categoría 4 (IMC4)**: explicaciones a través de ejemplos con funciones no prototípicas. (Involucra RGSM)
- **Categoría 5 (IMC5):** explicaciones a través de relaciones no funcionales, expresadas en forma algebraica y gráfica. (Involucra RGSM y RASM)

Lo propio hemos hecho con las imágenes conceptuales sobre el concepto de asíntotas de funciones en relación con el uso de software Mathematica, en nueve categorías:

- **Categoría 1**: Imágenes conceptuales erróneas que surgen por no respetar la sintaxis o características del software Mathematica (**ICC1**)
- **Categoría 2:** Imágenes conceptuales erróneas que no pudieron modificarse a través de la exploración de funciones facilitada por el software Mathematica. **(ICC2)**
- **Categoría 3:** Imágenes conceptuales favorecidas por la incorporación del software Mathematica. **(ICC3)**
- **Categoría 4:** Imágenes conceptuales no favorecidas por la incorporación del software Mathematica. (**ICC4**)
- **Categoría 5:** Imágenes conceptuales que demuestran falta de control o análisis de las respuestas **(ICC5)**
- **Categoría 6:** Imágenes conceptuales que surgen a partir de representar al objeto matemático en un solo registro. (**ICC6)**
- **Categoría 7**: Imágenes conceptuales que describen un concepto sin aplicar su definición. (**ICC7)**
- **Categoría 8:** Imágenes conceptuales que muestran la tendencia a equiparar el trabajo con lápiz y papel al de un software específico. (**ICC8)**
- **Categoría 9:** Imágenes conceptuales que denotan que las respuestas del software sustituyen la expresión formal de un concepto o un análisis crítico de ellas. **(ICC9)**

Dentro de las imágenes conceptuales que más se reiteraron en los trabajos destacamos las relacionadas con la no escritura simbólica adecuada de las asíntotas verticales u horizontales, con el no análisis de las raíces del numerador y denominador en funciones racionales al determinar las asíntotas verticales y con la imposibilidad de intersección entre las asíntotas y el gráfico de la función.

El análisis realizado sobre los registros de representación nos ayuda a establecer que, la elección de funciones prototípicas por gran parte de los estudiantes podría deberse a necesidad de uso del registro algebraico (RASM) para la obtención del gráfico (RGSM) en el software Mathematica. Además, concluimos que el registro gráfico (RGSM) generó incertidumbre en los alumnos, dada la imposibilidad de precisar los valores exactos y determinar en consecuencia las ecuaciones de las asíntotas. Al no poder hacer la conversión al registro algebraico (RASM) optaron por hacerla al registro verbal (RVSM).

Las entrevistas nos permitieron una interacción cercana a los alumnos y la observación de mejoras en las imágenes conceptuales de las asíntotas de funciones, uso de diferentes registros y el dominio del software Mathematica.

Con respecto al uso de software Mathematica establecemos la dificultad que se presenta al traducir las expresiones sobre límite tendiendo a infinito del papel a la sintaxis del software. Por ejemplo, el cálculo de límites para variable infinita en papel se anota $\lim_{x\to\infty} f(x)=$ y esto para para el software es sólo $\lim_{x\to+\infty} f(x)=$.

Algo similar sucede al calcular el límite para variable finita en papel escribimos $\lim_{x\to a} f(x)=$ esta simbología significa límites cuando x tiende a “a” tanto por derecha como por izquierda. En cambio, cuando se ejecuta el comando

Limit [f[x],x→a] esto solo significa $\lim_{x\to a+} f(x)=$

Otra cuestión respecto al software se presenta al ejecutar el comando Plot, para graficar, en general consideran que deben aparecer las asíntotas junto con la función, sin haber expresado sus respectivas fórmulas.

Asimismo, es preciso tener en cuenta que la potencialidad de exploración que ofrece el software no se traslada de manera lineal a los alumnos. El docente es quien debe guiarlos en la exploración, proponiéndoles otros tipos de funciones para que no se afiancen las imágenes mentales que hemos podido detectar, vinculadas a la existencia sólo de asíntotas verticales y horizontales, o la no posibilidad de intersección entre las asíntotas y la función, y la tendencia a la elección de funciones prototípicas.

Con relación a la clase de actividades matemáticas con uso del software que podrían contribuir a modificar aquellas imágenes conceptuales sobre asíntotas de una función, que tengan algún grado de inexactitud, podemos decir que, de acuerdo con la experiencia realizada, éstas estuvieron estrechamente vinculadas a las producciones de los alumnos. Luego de ellas la imagen conceptual de imposibilidad de existencia de asíntota horizontal y oblicua para una misma función fue modificada. Es decir, consideramos que el uso del software tuvo una influencia positiva en el desarrollo de las imágenes conceptuales, ya que la facilidad de graficar que el mismo ofrece (RGSM), contribuyó a que se realizara un análisis más centrado en los conceptos, disminuyendo la posibilidad de adelantar conclusiones erróneas sobre las asíntotas, que suelen estar en el imaginario colectivo de los alumnos. En cambio, se ha observado una mayor resistencia a modificar las formas incorrectas de escritura en lenguaje simbólico de las ecuaciones de las asíntotas.

Creemos que es necesario intensificar el estudio sobre el diseño de actividades matemáticas con uso de software Mathematica. Las correspondientes a este trabajo fueron hechas en un contexto muy acotado, para ser usadas en las entrevistas y condicionas por las respuestas previas de los alumnos.

Sostenemos que este tópico es factible de un análisis mayor, replicando formas de trabajo, utilizando otros software o aplicaciones de celular y seguir respondiendo los interrogantes que aún faltan por responder y/o idear con respecto al uso de software matemático en clases universitarias.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Andreani,G., Marijan, G., Ortega, A. (2010). Los recursos tecnológicos para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en nivel superior. *III REPEM*, (págs. 454-463). La Pampa.

Altman, S., Comparatore, C., Kurzrok, L. (2002). *Funciones 2.* Buenos Aires: Longseller.

Amster, P. (2014). *Matemática 5 Activados.* CABA: Puerto de Palos.

Arce, M. y Ortega, T. (2013). Deficiencias en el trazado de gráficas de funciones en estudiantes de bachillerato. *PNA*, 8(2), 61-73.

Árcega, M., Rangel, R., Reyes, S., y Castillo, L. (2011). Límites y continuidad en un ambiente para aprendizaje con video digital y Winplot en la Universidad Autónoma de Nayarit. *Revista Fuente Año, 3*(8), 69-81.

Artigue, Michèle. (2004). Problemas y desafíos en educación matemática: ¿Qué nos ofrece hoy la didáctica de la matemática para afrontarlos? *Educación Matemática,16*(3), 5-28.

Bachelard, G. (2007). *La formación del espíritu científico*. (26 ed.). México: Siglo XXI

Barreiro,P., Leonian,P., Marino, T., Pochulu, M. y Rodríguez, M. (2017). Rodríguez (coord.) *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en Educación Matemática.* Buenos Aires: Universidad Nacional General Sarmiento.

Barrios, R. y Casadei, C. (2014). Promoviendo el iso de Google Drive como herramienta de trabajo colaborativo en la nube para estudiantes de ingeniería. *Revista de Tecnología de Información y Comunicación en Educación, 8*(1), 43-56.

Benito León, M. Á., Quimbay Arias, E., y Vásquez Bañol, L. F. (2017). Estrategia didáctica mediada por Geogebra y un aula virtual para el desarrollo de funciones exponenciales en contexto para estudiantes del grado 11 de la institución educativa Las Américas.

Blatter, J. (2008). Case Study. En Given(Ed.), *The Sage Encyclopedia of Qualitative Research Methods.* London: Sage Publications Ltd.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2000). El concepto de límite en la educación secundaria. En *El futuro del cálculo infinitesimal.* México: Grupo Editorial Iberoamérica. S.A.

Caligaris, M., Rodríguez, G., y Laugero, L. (2015). El papel de los registros semióticos en el aprendizaje de las transformaciones lineales.

Camacho, M. y González, S. (2001). Una aproximación numérica al cálculo de primitivas utilizando la TI-92. *Números,42*, 61-68.

Camacho, M. (2005). La enseñanza y el aprendizaje del Análisis Matemático haciendo uso de CAS. *Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM* (pp.97-110). Recuperado el 20 de Julio 2014 de http://funes.uniandes.edu.co/1327/1/Camacho2005Ensenanza_SEIEM_97.pdf

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques,19*(2), 221-266.

Ciencias, C. d. (2011-2015). *Cajón de ciencias*. Recuperado el 10 de mayo de 2015, de http://www.cajondeciencias.com/

CodesValcarce, M. y Sierra Vázquez, M. (2005). Entorno computacional y Educación matemática, una revisión del estado actual. Ponencia del IX Simposio SEIEM, Córdoba España. Recuperado el 17 de enero de 2011 de http://www.seiem.es/publicaciones/.../cd/grupos/.../codessierra.pdf.

Colombano, V., y Rodríguez, M. (2015). Propuesta para superar algunos modelos intuitivos no apropiados de límite funcional. *Revista De EducacióN MatemáTica, 0*. Recuperado de https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/10266

Colombano, V. y Rodriguez, M. (2008). *Un estudio inicial sobre modelos espontáneos de límite funcional a nivel superior*. Memorias II REPEM. La Pampa. Argentina. pp 190-198

Colombano, V., y Rodríguez, M. (2010). Propuesta para superar algunos modelos intuitivos no apropiados de límite funcional. *Revista de Educación Matemática*.

Contreras de la Fuente, Á., Font Moll, V., García Armenteros, M., Marcolini Bernardi, M., Ortega Carpio, M., y Sánchez Gómez, C. . (2008). Recuperado el 9 de Mayo de 2016, de http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/comunicacionesgrupos/GruposXII/DidMatDisCientifica/ContrerasFontGarciaLuque.pdf

Contreras A., Font V., García M., Luque L., Marcolini M., Ordoñez L., Ortega M., Sanchez C. (2005). Aplicación del programa “Mathematica®” a las prácticas de cálculo en el primer año universitario. Ponencia del IX Simposio SEIEM, Córdoba España. Recuperado el 20 de junio de 2009 de http://www.uco.es/~ma1mamaa/Simposio_Cordoba/16-Contreras,Font.pdf

Contreras de la Fuente, A. y Ortega Carpio, M. (2009). Fenómenos didácticos emergentes de las prácticas realizadas con el programa Mathematica. En González, M. J; González, M. T, Murillo, J (Eds.). Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XIII Simposio de la SEIEM. Santander.

Cornu, B. (1991). Limits. En Tall, D. *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers. Netherlands.

Cortés, G. (1993). *Matemática 5 Aula-Taller*. Buenos Aires: Stella.

D'Amore, B. (2011). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: Interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Revista Científica*, 150-164.

Deulofeu, J. (2007). Los sistemas de representación y el uso de CAS en el análisis matemático: réplica a la ponencia" La enseñanza y aprendizaje del análisis matemático haciendo uso de CAS (Computer Algebra System)" del profesor Matías Camacho.

Dickson, W. P. (1989). ¿ Software para hacer pensar? sobre la yuxtaposición de los sistemas simbólicos. *Comunicación, Lenguaje y Educación*, *1*(3-4), 23-38.

Duval, R. (2012). Lo esencial de los procesos cognitivos de comprensión en matemáticas: los registros de representación semiótica. *Resúmenes del VI Coloquio Internacional de Didáctica de las Matemáticas: avances y desafíos actuales. Lima. Pontificia Universidad Católica del Perú*, 14-17.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *9*(1), 143-168.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 6, 103-131.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Investigaciones en Matemática Educativa II (Editor Hitt, F.). Grupo Editorial Iberoamericana. Traducción de: Registres de représentation sémiotique et function nement cognitif de la pensé. Annales de Didactique et de SciencesCognitives, Vol. 5 (1993).

Duval, R. (1993) Registres de preséntations sémiotiques et fonction nement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives*, *5*, 37-65.

Engler A., Vrancken S., Hecklein M., Müller D. y Gregorini M. (2007). Análisis de una propuesta didáctica para la enseñanza de límite finito de variable finita. *Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática,11*, 113-132.

Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F., Rico, L. (2015) Razonamientos basados en el concepto de límite finito de una función en un punto. Enseñanza de las Ciencias, 33.2, pp. 211-229

Fuente, A.C.; Armentero, M.G.; Moll, V.F. (2012). Análisis de un Proceso de Estudio sobre la Enseñanza del Límite de una Función. *Bolema, Río Claro (SP), 26*, (42B), 667-690. Recuperado de http://www.scielo.br/pdf/bolema/v26n42b/13.pdf

Gálvez, E. A. (2014). *HASTA EL INFINITO Y MÁS ALLÁ Concepciones manifestadas por el alumnado de bachillerato respecto al concepto de asíntota horizontal. Estudio exploratorio.* (Tesis de Maestría, Universidad de Granada). Recuperado de http://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/TFM-EmilioAndresGarciaGalvez.pdf

Garbin, S. (2005). ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito?

La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. *Relime*, *8*(2), 169-193.

García Cuéllar, D. J., y Martínez Miraval, M. A. (2018). Estudio del proceso de génesis instrumental del artefacto simbólico función exponencial. *Transformación*, *14*(2), 252-261.

Gazzola, M. P., Llanos, V. C. y Otero, M. R. (2011). Funciones racionales en la secundaria:primeros resultados de una actividad de estudio y de investigación (AEI). *I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. II Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática* (págs. 494-500). Tandil: Facultad Ciencias Exactas UNCPBA.

Goldenberg, P. (2000). *Pensando y hablando de tecnología en la clase de matemática.*Recuperado el 10 de diciembre de 2010 de http://www.eduteka.org/tema_mes.php3

González Zamora, H. (2002). *Eduteka. Universidad ICESI.* Obtenido de http://www.eduteka.org/articulos/PruebasAbiertasCerradas.

Gray, E. & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A" proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for research in Mathematics Education*, 116-140.

Gutierrez, A. (1997). Fronteras en el uso de calculadoras gráficas. *Números*, *32*, 54-66.

Hitt, F. (2003). Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, X* (2), 213-223.

Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. In *XI Meeting of Middle-Higher Level Mathematics Teachers, Michoacan University San Nicolás de Hidalgo, Morelia (Mexico).*

Houston, D. y Ferdowsi, A. (2008-2016). *Dropbox*. Recuperado el 10 de mayo de 2015, de www.dropbox.com

Iturbe, A., y Garelik, C. (2014). Una propuesta de enseñanza de la función racional con el uso del software GEOGEBRA. Recuperado el 20 de enero de 2020 de http://redi.exactas.unlpam.edu.ar/xmlui/handle/2013/88

Jonassen, D. (2002). Computadores como herramientas de la mente. *Recuperado el, 5 de setiembre 2019 de* http://www.uh.cu/static/documents/RDA/Los%20computadores%20herramienta%20mente.pdf.

Kidron, I. E.-1. (2011). Constructing knowledge about the notion of limit in the definition of the horizontal asymptote. *International Journal of Science and Mathematics Education, 9*(6), 1261-1279.

Kidron, I. & Tall, D. (2014). *The roles of visualization and symbolism in the potential and actual infinity of the limit process.* Recuperado el 20 de Agosto de 2014 de http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2014c-kidron-potential-actual.pdf

Lara, T. (2005). Blogs para educar. Usos de los blogs en una pedagogía constructivista. *Telos: Cuadernos de comunicación e innovación*(65), 86-93.

Larson,R.y Falvo, D. (2011). *Precálculo* (Octava ed.). México: CENGAGE Learning.

Lasalvia, M. F.y Piquet, J. D. (2000). Construcción de gráficos de funciones: Continuidad y prototipos. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 3*(2), 207-230.

Llanos, V., Otero, M. y Gazzola, M. (2014). Las funciones racionales en el marco de un Recorrido de Estudio y de Investigación: el estudio de las asíntotas utilizando GeoGebra como soporte.

Llinares, Salvador; Moreno, M. (2015). *Perspectivas de estudiantes para profesores sobre el papel de la tecnología para apoyar el aprendizaje matemático de los estudiantes.* En Fernández, Ceneida; Molina, Marta; Planas, Núria (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIX (pp. 413-421). Alicante, España: Universidad de Alicante.

Lozano Rubiano, R. D. (2019). *Enseñanza de las funciones desde enfoques de representaciones y enfoque comunicacional (con uso de TIC) en cursos iniciales de matemáticas universitarias* (Tesis Maestría). Universidad del Valle. Santiago de Cali.

Lupiáñez, J. L.y Moreno, L. (2001). Tecnología y Representaciones Semióticas . En G. P., & R. L., *Iniciación en la investigación de la didáctica de la matemática.* Universidad de Granada.

Martinez, F. (2003). El profesorado ante las nuevas tecnologías. En J. Cabero, F. Martinez, & J. Salinas, *Medios y herramientas de comunicación para la enseñanza universitaria* (págs. 207-222). Panamá: Panamá: Sucesos Publicidad.

Matemáticas-IES. (2006-2015). *Matemáticas IES*. Recuperado el 10 de mayo de 2015, de http://matematicasies.com/

Martínez, M. T. (2018). Desarrollo del razonamiento covariacional en estudiantes de nivel medio superior. el caso de la función exponencial. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa*, *3*(1).

Mira López, M., Valls González, J., y Llinares Ciscar, S. (2013). Un experimento de enseñanza sobre el límite de una función. Factores determinantes en una trayectoria de aprendizaje. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática,36,* 89-107.

Molina Mora, J. A. (2016). Experiencia de la integración de las TICs para la enseñanza y aprendizaje del Cálculo II. *TE & ET*.

Noreña Gallego, R. (2013). *Funciones racionales en el desarrollo de pensamiento variacional.* (Tesis de Licenciatura.Universidad del Valle). Recuperado de: http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/6796/1/CD-0395392.pdf

Pérez, M.y Romero, G. (2015). *Carpeta de matemática III.* CABA: Santillana.

Pezzatti, L. (2014). *Matemática 4 Activados.* CABA: Puerto de Palos.

Pochulu, M., y Rodríguez, M. (2012). Educación matemática. *Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos, Los Polvorines, Universidad de Villa María y Universidad Nacional de Villa María*.

Popper, K. R. (1979). El desarrollo del conocimiento científico. México: Siglo XXI

Prieto, F.y Vicente, S. (2006). Análisis de registros semióticos en actividades de ingresantes a la facultad de ingeniería. *REPEM. Memorias, pp. 203-212.*

Queralt, T. (2000). Las matemáticas con tecnología entran. *Números,41*, 23-36.

Quispe Apaza, J. C., y Amusquivar Caballero, W. T. (2018). Estrategias de enseñanza del cálculo diferencial e integral en el nivel de pregrado de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Mayor de San Andrés empleando el software matemático. (Tesis de Maestría). Universidad Mayor de San Andrés. Bolivia.

Radillo, M., y González, L. (2014). Enseñanza del concepto de límite de una función mediante sus diversas representaciones semióticas, a nivel licenciatura.

Rawson D. (1999) Enseñanza de Cálculo II con Mathematica. Experiencias y metodologías utilizadas. Recuperado el 20 de Marzo de 2017 de *http://ing.unne.edu.ar/pub/at4/411com.pdf*

Rodriguez, M. L., Trillini M.y Murúa, R. (2014). Funciones racionales: Una propuesta didáctica con el aporte del software Geogebra. *V REPEM*, (págs. 33-40). La Pampa.

Rojas, P. (2012). Sistemas de representación y aprendizaje de las matemáticas. *Revista digital Matemática, Educación e Internet.* Recuperado el 10 de marzo de 2016, de http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/

Ruiz-Moreno, L. y del Rivero-Jiménez, S. (2019). Impacto de la matemática en el contexto de las ciencias con software matemático en ecuaciones diferenciales. *Científica*, *23*(1), pp. 13-21.

Ruiz, M. (2007). Instrumentos de evaluación de competencias. *Santiago: Universidad Tecnológica de Chile*.

Salinas, M. y Viticcioli, S. (2008). Innovar con Blogs en la Enseñanza Universitaria Presencial. *EDUTEC. Revista Electrónica de Tecnología Educativa, 27*.

Sampieri, R., Fernández, C. y Collado, P. (2004). *Metodología investigación.* México: Mc Graw Hill.

Scorzo, R., Favieri, A.y Williner, B. (2014). Análisis de una actividad sobre funciones racionales con uso de software matemático. *V Jornadas de Educación Matemática y II Jornadas sobre Investicación en Educación Matemática.* Santa Fe: UNL.

Scorzo, R. y Ocampo, G. (2014). Matemática. En G. Duek, & J. Piñeiro, *Ingeniería. Ingreso 2015* (págs. 211-333). San Justo: UNLaM.

Sierra, V., González, T., López C. (2000). Concepciones de los alumnos de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria sobre límite funcional y continuidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 3,* (1), 71-85.

Socas, M. (2007) Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde el Enfoque Lógico Semiótico. *Investigación en Educación Matemática, XI*, 19-52.

Sosa, L., Aparicio, E., y Tuyub, J. (2008). Diseño de actividades de matemáticas con el uso de tecnología.

Stake, R. (2006). *Multiple case study analysis.* New York, NY. EE. UU.: The Guilford Press.

Stewart, J.; Lothar, R.; Saleem, W. (2007). *Precálculo.Matemáticas para el cálculo* (Quinta ed.). México: Thomson.

Tall, D. & Bakar, M. (1992). Student's mental prototypesforfunctions and graphs. *Internacional Journal of MathematicalEducation in Science and Technology*,*23*(1), 39-50.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular references to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151-169.

Tall, D.(1989) New Cognitive Obstacles in a Technological Paradigm. Recuperado el 9 de Diciembre de 2017 de *http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1989b-cog-obst-nctm.pdf*. (1989).

Tall, D. & Thomas M. O. J. (1991), Encouraging Versatile Thinking in Algebra using the Computer, *Educational Studies in Mathematics*, 22 (2), 125–147.

Tall, D. (1995). Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. Actas del PME 19, Vol. 1, 161-175.

Tall, D. (2000). Technology and Versatile Thinking in Mathematics.

Tall, D. (2000). Cognitive development in advanced mathematics using technology. *Mathematics education research journal*, *12*(3), 196-218.

Tamayo, A. O. (2006). Representaciones Semióticas y Evolución Conceptual en la Enseñanza de las Ciencias y las Matemáticas. *Revista de Educación y Pedagogía*, *XVIII*(45), 37-49.

Trouche, L. (2005). Instrumental génesis, individual and social aspects. In *The didactical challenge of symbolic calculators* (pp. 197-230). Springer US.

Valdivé, C. y Garbin, S. (2008). Estudio de los esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la evolución histórica de el concepto de infinitesimal. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *11*(3), 413-450.

Villarreal, M. E. (2003). Pensamiento matemático, cálculo diferencial y computadoras. *Educación Matemática*. 15(1) 99-122. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40515105

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of funcion. *Math. Educ. SCI. Technol.*, 293-305.

Vitutor. (2012). *Vitutor*. Recuperado el 10 de mayo de 2015, de http://www.vitutor.com

Vrancken, S., Engler, A., Müller, D. (2008). Una propuesta para la introducción del concepto de derivada desde la variación. Análisis de los resultados. *Premisa, 10*(38), 36-46.

Wikipedia. (2014). Recuperado el 10 de mayo de 2015, de http://es.wikipedia.org/wiki/As%C3%ADntota

Williams, S. (1991). Models of limit held by college calculus students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(3), 219-236.

Williner, B. (2014). Habilidades matemáticas referidas el concepto de Derivada y uso de tecnología. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *8*(1).

Williner, B. (2014). Fortalezas y debilidades en el uso de la computadora en el aula de matemática de la universidad.

Williner, B. (2018). Situación de aprendizaje sobre conceptos involucrados en el estudio de funciones. *NÚMEROS, 99*.

Yerushalmy, M. (1997). Reaching the Unreachable: Technology and the Semantics of Asyntotes. . *Technology Internacional Journal of Computers for Mathematical Learning, 2*, 1-25.

Yin, R. (2009). *Case study research: Design and methods (ta Ed.).* Oaks, CA, EE.UU.: Sage

ANEXOS

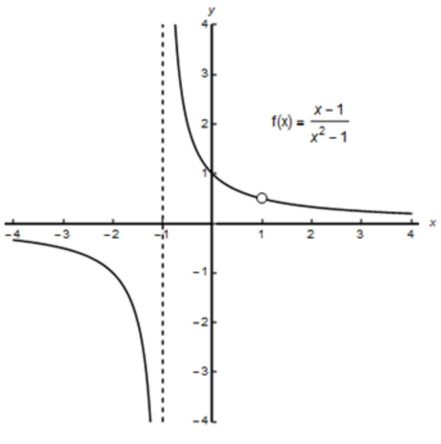
ANEXO 1: Test de Diagnóstico Inicial (TDI)

En este anexo se muestra el instrumento utilizado.

ACTIVIDAD 1

¿Podrían explicar, haciendo uso del software, qué es para ustedes una recta ASÍNTOTA a una función? ¿Qué tipo de asíntotas conocen? En este ejercicio tienen la libertad de explicar con palabras sueltas, frases o párrafos, con gráficos, con expresiones con símbolos o números o cualquier otra forma que consideren apropiada para exponer sus ideas. Nos interesa saber cómo representan en sus cabezas las rectas asíntotas a una función y siempre usando el software. Nota: es importante que para responder a esta actividad no usen libros, apuntes, o sitios web, sólo expliciten en detalle lo que conocen ustedes.

ACTIVIDAD 2

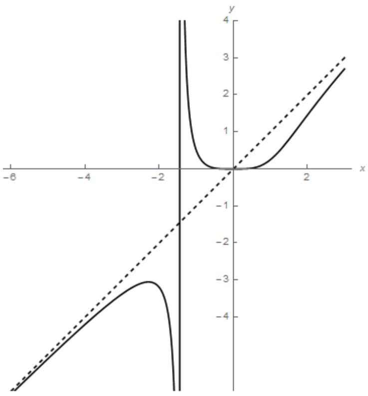
GRUPO A
¿Podrías determinar, haciendo uso del software, las ecuaciones de las asíntotas de las siguientes funciones que te mostramos a continuación? Para dar las respuestas puedes usar el software libremente es decir graficando, calculando, con palabras entre otras formas que se te ocurra.
Ejercicio 1 
Ejercicio 2 $g(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$

Ejercicio 3

Responder V o F Justificando la respuesta.

Si y=b es asíntota de f (x) entonces existe x=c perteneciente al dominio de la función tal que f(c) =b.

Ejercicio 4



GRUPO B

Ejercicio 5

$$h(x)=\ln(-x-3)$$

Ejercicio 6

Las conclusiones de un estudio establecen que el número de individuos de una determinada población de una especie protegida viene dado, durante los próximos años, por la función:

$f(t)=\dfrac{7500t+5000}{t+1}$, siendo t el número de años transcurridos. Se pide:

e) Dominio e imagen bajo el contexto del problema. Tamaño actual de la población.

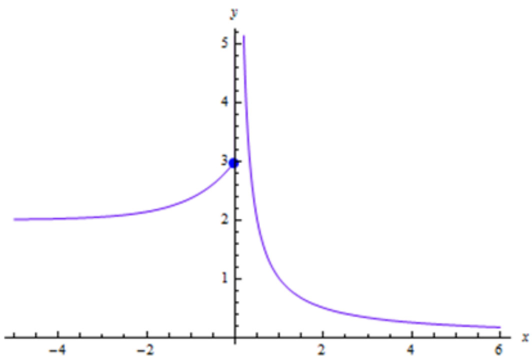
f) ¿Cómo evoluciona la población entre los años 4 y 9?

g) Si esta función fuese válida indefinidamente ¿se estabilizaría el tamaño de la población? Justificar la respuesta.

La asíntota vertical en el contexto del problema ¿tiene algún significado?

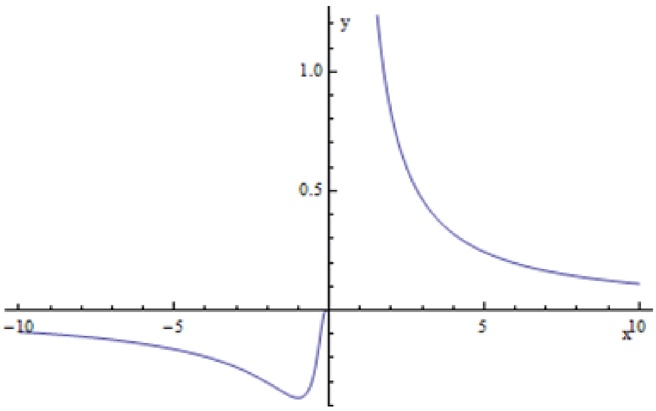
Ejercicio 7

$$f(x)=\begin{cases} e^{x}+2 & x\le 0 \\ \dfrac{1}{x} & x>0 \end{cases}$$



Ejercicio 8

Tener en cuenta que el dominio de esta función es el conjunto de todos los Reales



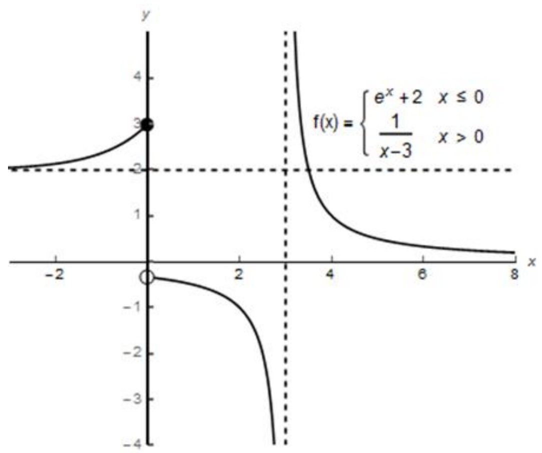
GRUPO C

Ejercicio 9

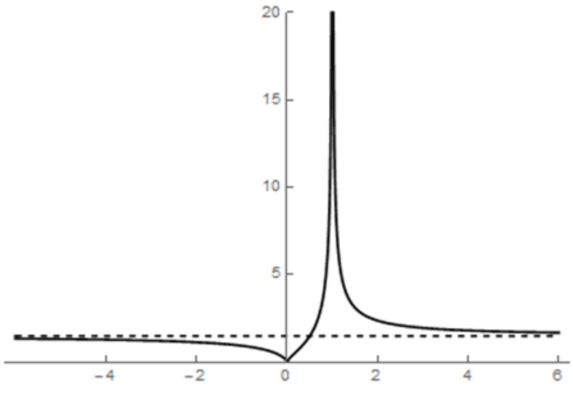
Responder Vo F justificando la respuesta

Si p(x) es un polinomio, entonces la función dada por $f(x) = \dfrac{p(x)}{x-2}$ posee una asíntota vertical cuya ecuación es x=2.

Ejercicio 10



Ejercicio 11

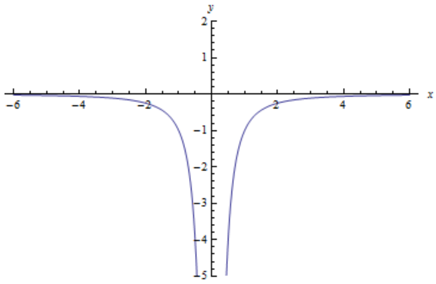


Ejercicio 12

$$g(x) = \sqrt{x.(x+3)} - x$$

GRUPO D

Ejercicio 13



Ejercicio 14

$$f(x) = \frac{4x^2 - 100}{x - 5}$$

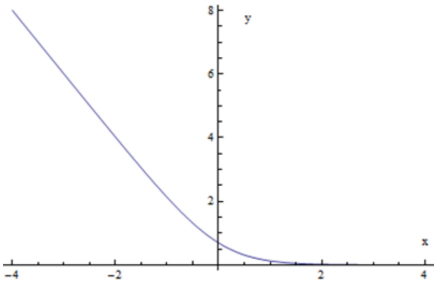
Ejercicio 15

Determinar una función que tenga como asíntotas las siguientes rectas x=3, x=1,

y=-4

Ejercicio 16

$$p(x) = \ln(1 + e^{-2x})$$



ANEXO 2: Escala de Apreciación (EAIMuS) y (EAICuS)

Mostramos a continuación los dos instrumentos de recolección de datos.

Escala de Apreciación de Imágenes Mentales usando Software (EAIMuS)

GRUPO DE TRABAJO	
Descripción	
Imágenes Mentales	
Funciones usadas	
Registros de representación utilizados	

Escala de Apreciación de Imágenes Conceptuales usando Software (EAICuS)

GRUPO DE ACTIVIDADES	
ENUNCIADO DEL EJERCICIO A RESOLVER	
PRODUCCIONES DE LOS EQUIPOS DE TRABAJO(Respuestas)	
Observaciones de cada ejercicio	
Imágenes conceptuales evidenciadas	
Registros de Representación utilizados	

ANEXO 3: Documentos de apoyo

En este anexo se encuentran los documentos de apoyo utilizados en la experiencia

-Definiciones de asíntotas

-Documento acerca del uso del Software Mathematica

-Definiciones de asíntotas

Rectas asíntotas a una función

ASÍNTOTA VERTICAL

$$x = a \text{ es asíntota vertical de } f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

Ejemplo

$$h(x) = \frac{x}{\ln(x)}$$

En este caso x=a es asíntota vertical de ambos lados. Qué variantes a esta definición habría que introducir cuando tenemos asíntotas verticales como la que presenta la siguiente función $p(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

ASÍNTOTA HORIZONTAL

$$y = b \text{ es asíntota horizontal de } f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \to \infty} f(x) = b$$

Aplicamos esta definición a los dos ejemplos anteriores

ASÍNTOTA OBLICUA

$$y = mx + b \text{ es asíntota oblicua de } f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \to \infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$

Podemos demostrar que para determinar m y b se calculan:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \quad b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - m.x)$$

Ejemplo: $f(x) = \frac{3x^2}{x - 3}$

-Documento acerca del uso del Software Mathematica

¿Cómo definimos una función?

Ejemplo f(x)=ln(x+4)

```
f[x_] := Log[x + 4]
```

Calculamos f(5) (Valor exacto) y valor aproximado

```
f[5]
Log[9]
f[5] // N
2.19722
```

Determinamos dominio para ello resolvemos una inecuación

Dominio (-4;+∞)

¿Cómo definimos una función por ramas?

Ejemplo $g(x)=\begin{cases} x+3 & x>8 \\ x^2 & x\leqslant 8 \end{cases}$

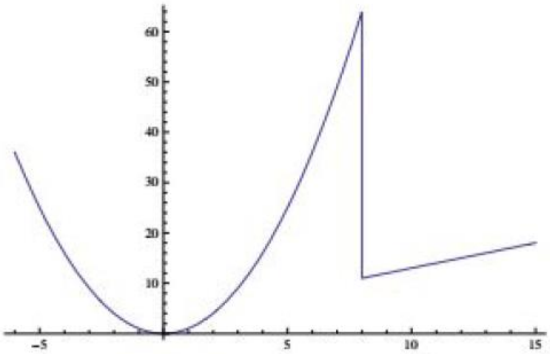
```
g[x_] := If[x > 8, x + 3, x^2]
```

Queremos saber si g(x) es continua en x=8 y si no lo es clasificar la discontinuidad

```
g[8]
64
Limit[g[x], x → 8]
11
Limit[g[x], x → 8, Direction → 1]
64
```

∄ lim g(x) ya que por derecha es 11 y por izquierda es 64.
Por lo tanto g(x) presenta una discontinuidad en x=8 de tipo esencial de salto finito.
Graficamos g(x)

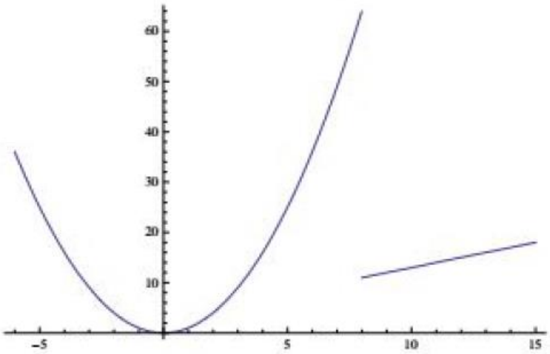
```
Plot[g[x], {x, -6, 15}]
```



¿Qué observan respecto al salto finito que presenta la función?

En las versiones nuevas se puede hacer:

```
Plot[g[x], {x, -6, 15}, Exclusions → {8}]
```



ANEXO 4: Análisis completo actividad 1

Anexo dedicado a análisis completo de la actividad 1 para todos los grupo de participaron de la experiencia. Para acceder al mismo es preciso abrir el CD que adjuntamos a la tesis.

ANEXO 5: Análisis completo actividad 2

Este anexo muestra en análisis completo de la actividad 2 para todos los grupo de participaron de la experiencia. Para acceder al mismo es preciso abrir el CD que adjuntamos a la tesis.

ANEXO 6: Publicaciones derivadas de esta investigación

Este anexo se refiere a las publicaciones que dieron origen al trabajo de tesis y a las derivadas de ella.

En esta sección escrita reportamos los títulos y los resúmenes. Los trabajos completos pueden leerse en el CD que adjuntamos a la tesis.

– **Publicación que inspiró el tema de la presente tesis:**

Scorzo, R., Favieri, A., Williner, B., **Análisis de una actividad sobre funciones racionales realizada con software matemático.** V Jornadas de Educación y II Jornadas de Investigación en Educación Matemática. 26 y 27 de junio de 2014. Universidad Nacional del Litoral. Santa Fe. ISBN 978-987-692-037-7

ANÁLISIS DE UNA ACTIVIDAD SOBRE FUNCIONES RACIONALES REALIZADA CON SOFTWARE MATEMÁTICO

Scorzo Roxana, Favieri Adriana, Williner Betina
Universidad Nacional de La Matanza
rscorzo@ing.unlam.edu.ar, afavieri@ing.unlam.edu.ar, bwilliner@ing.unlam.edu.ar

Propuesta de Enseñanza- Innovaciones en el uso de tecnologías aplicadas en el aula de matemática -Nivel Universitario

Resumen
Presentamos en este trabajo el análisis de una actividad sobre funciones racionales realizada con software matemático *"Mathematica®"*. Dicha actividad forma parte de un trabajo práctico de un taller de informática de la cátedra Análisis Matemático I, del Departamento de Ingeniería e Investigaciones Tecnológicas de la Universidad Nacional de la Matanza. Mostramos las ideas que tienen los alumnos sobre las raíces de funciones racionales y las intersecciones de la asíntota oblicua y la función, como así también el desempeño de los mismos al resolver la actividad con el software mencionado. Llegamos a la conclusión que la herramienta informática es poderosa y acelera los cálculos, pero deben tenerse especial cuidado en los conceptos matemáticos ya que, en definitiva, éstos guían la resolución de los ejercicios y/o problema.

- **Publicación donde se describe parte de la experiencia realizada para la presente tesis:**

Scorzo R. **Experiencia de aprendizaje de asíntotas de funciones con Mathematica** XX Encuentro Nacional y XII Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería (EMCI) del 17 al 19 de mayo de 2017, Santiago del Estero. ISBN 978-987-720-151-2

Experiencia de aprendizaje de asíntotas de funciones con Mathematica

Scorzo Roxana[1]
[1]Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional de La Matanza
Florencio Varela 1903, San Justo, Provincia de Buenos Aires, Argentina
rscorzo@unlam.edu.ar

Resumen. En este artículo describimos la organización de una experiencia de aprendizaje sobre asíntotas de funciones usando software Mathematica en un curso de Análisis Matemático I del Departamento de Ingeniería e Investigaciones Tecnológicas de la Universidad Nacional de La Matanza. La misma fue llevada a cabo en los laboratorios de informática de la universidad. Pondremos el acento en la gestión de la clase cuya organización responde a una característica frecuente en los cursos de primer año que es el gran número de alumnos y el poco tiempo para desarrollar los temas. Mostramos la organización del blog armado para llevar adelante la experiencia, la gestión de la clase, como recolectamos la información a través de la web, la justificación teórica de la organización de las actividades, explicitamos alguna de ellas y una breve reflexión final acerca de la experiencia.

Palabras Clave: Asíntotas, Software Mathematica, Herramientas web

– **Artículo en revista**

Articulo evaluado y aceptado (estado actual: en prensa), para ser publicado en la Revista Números en noviembre. Volumen 102 de 2019.

En el mismo se describe el Test de Diagnóstico Inicial usado en la tesis con la fundamentación respectiva

Test sobre imágenes mentales y conceptuales con uso de software sobre asíntotas de funciones

Roxana Scorzo (Universidad Nacional de La Matanza. Argentina)
Adriana Favieri (Universidad Nacional de La Matanza. Argentina)
Fecha de aceptación: A cumplimentar por el editor

Resumen En el presente artículo presentamos un Test, que aplicamos entre estudiantes de primer año, para determinar las imágenes mentales y conceptuales sobre rectas asíntotas de funciones cuando se trabaja con el software "Mathematica". Explicaremos cómo lo implementamos en un curso de Análisis Matemático I de carreras de ingeniería de la Universidad Nacional de La Matanza. Este test fue elaborado y se utilizó como insumo para una Tesis de Maestría sobre Enseñanza de las Ciencias Exactas. Explicitamos también la experiencia previa que inspiró esta actividad y los resultados que se obtuvieron en ella que impulsaron en parte el diseño del test que presentamos.

Palabras clave Asíntotas-Test-Software Mathematica-Imágenes mentales y conceptuales

ANEXO 7: Producciones de los alumnos

En este apartado se encuentran las resoluciones de los ejercicios del test realizadas por los alumnos durante la experiencia. Dado que todas ellas estaban en formato del software Mathematica, se han presentado en formato PDF para que pueden verse sin necesidad de tener el miso. Los trabajos completos pueden leerse en el CD que adjuntamos a la tesis.