Tesis de Maestría

Maestría en la Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales con orientación en Matemática

FRACCIONES
Dificultades a las que se enfrentan los alumnos de Ciclo Básico del Nivel Secundario
Caso: Escuela Técnica Nº 7 "Dr. Manuel Sadosky" San Luis

Especialista Ada María Balladore

Doctora Ana María Giunta

Directora de Tesis

Doctora Andrea Lavalle

Co Directora de Tesis

Facultad de Ingeniería

Universidad Nacional del Comahue

Febrero 2020

AGRADECIMIENTOS

A los docentes de la Maestría que han
enriquecido mis conocimientos

A mis asesoras por su gran
acompañamiento en el desarrollo de
la investigación

A mis colegas y autoridades de la
Escuela Técnica Nº 7
“Dr. Manuel Sadosky”
por brindarme todo su apoyo.

RESUMEN

Se investigó, a partir de los errores cometidos por los alumnos, cuáles son los significados más comunes de las fracciones que conocen y ante qué dificultades se enfrentan en la resolución de problemas y operaciones usando fracciones. Los resultados revelaron que la mayoría de los alumnos desconoce varios de los significados, que se encuentra en la transición del campo de los números enteros hacia los racionales y que el entendimiento de las fracciones sólo como partes de un todo no posibilita la comprensión adecuada del concepto. Por lo tanto surge la necesidad de diversificar la enseñanza más allá del significado "parte-todo" de práctica predominante ya que, si bien es útil para la manipulación de las fracciones en casos concretos, impediría, al surgir obstáculos en varias situaciones, la interrelación entre la comprensión simbólica y numérica de las fracciones.

Palabras claves: fracciones, significados, errores, dificultades

ABSTRACT

It was investigated, since the students ‘mistakes, which are the common meanings of the fractions they know and which are the difficulties that they have in order to afford a problem and its operations with fractions. The results reveal that the majority of the students unknown some of the results that are found in the transition of the integer numbers to rational and that the understanding of fractions just as a part of a whole it is no properly possible to understand the concept. For this reason, the necessity of diversify the teaching beyond the meaning "part-all" appeared, the predominant practice, since it is useful to manipulate the fractions in real cases prevent the obstacles in different situations, the interrelation between the symbolic and numerical understanding of fractions.

Keywords: fractions, meanings, errors, difficulties

ÍNDICE

CONTENIDO

LISTA DE GRÁFICAS

LISTA DE TABLAS

INTRODUCCIÓN

Respecto de la importancia de indagar sobre las dificultades que afrontan los alumnos durante el aprendizaje de las fracciones se mencionan palabras de Goutard (1964):

> Las fracciones no son algo que hay que saber, sino algo que hay que comprender, y no es posible comprenderlas antes de tener una suficiente experiencia con ellas… la clave del éxito en la iniciación al estudio de las fracciones es la variedad, el cambio, la diversidad de puntos de vista. (citada por González del Olmo, 2015, p.14)

Examinar las dificultades del aprendizaje de las fracciones en la escuela secundaria permite, para su prevención y superación, combinar estrategias generales y específicas a largo plazo con estrategias particulares e inmediatas; analizar los errores en que incurren los alumnos sirve para ayudar al docente a organizar dichas estrategias y así mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje insistiendo en aquellos aspectos que generan más dificultades y también contribuye a una mejor preparación ante las instancias de corrección. A partir de esta base se favorece la comprensión de la relación entre las fracciones, los decimales y los porcentajes, propiciando así el acercamiento a la comprensión de la proporcionalidad.

La presente investigación se realiza en el ciclo básico de la modalidad "Técnico en Informática Profesional y Personal" de la Escuela Técnica Nº 7 "Dr. Juan Manuel Sadosky", de la ciudad de San Luis, con estudiantes de 1° a 3° año.

Por otro lado, el programa de 3º año (Anexo 9) que se acuerda en función del Diseño Curricular de la provincia, de los Núcleos de Aprendizaje Prioritarios y de los lineamientos propios de la escuela, establece que hay que introducir los números irracionales por lo que es muy importante que, previamente, los estudiantes terminen de construir el concepto de fracción primero y luego el de número racional.

La investigación que se propone se centra en el alumno y no en el docente y con ella se pretende indagar sobre dificultades y errores relacionados con la comprensión del significado del concepto de fracción y se procura reconocer las dificultades y errores relacionados con la estructura aditiva y multiplicativa de las fracciones. Se pretende responder las siguientes preguntas:

- ¿conocen los alumnos diferentes significados de una fracción?
- ¿qué dificultades enfrentan para su comprensión?
- ¿qué dificultades enfrentan en la resolución de operaciones?

Responder estas preguntas, en el contexto delimitado para la investigación, conduce al logro de los siguientes objetivos específicos:

- Indagar sobre el conocimiento de los diferentes significados del concepto de fracción de acuerdo al año que cursan.
- Categorizar los errores en que incurren los alumnos al enfrentarse a la resolución de ejercicios y/o problemas con fracciones adecuados a la currícula de la Escuela (Anexos 7, 8 y 9).
- Reconocer en los errores encontrados las posibles dificultades a las que se enfrentan los alumnos en la resolución de ejercicios y/o problemas con fracciones.
- Aportar con sugerencias generales, para los docentes de Matemática, tendientes a producir una mejora en el tratamiento de los errores de acuerdo a la discusión de los resultados y a las conclusiones obtenidas.

La currícula de la Escuela donde se desarrolla la investigación establece que los números negativos sean enseñados en 2º año por lo cual, a los fines de comparar resultados, se trabaja sólo con fracciones positivas.

En este contexto el estudio se organiza en cinco capítulos y nueve anexos en los cuales se presentan:

Capítulo 1: los aportes teóricos y los antecedentes sobre el problema.

Capítulo 2: el marco teórico que guió el estudio.

Capítulo 3: la descripción del diseño metodológico.

Capítulo 4: un análisis cualitativo - descriptivo de la información obtenida durante la experiencia.

Capítulo 5: las conclusiones y recomendaciones.

Anexo 1: la presentación de los cuestionarios a los alumnos.

Anexo 2: el cuestionario sobre los significados de las fracciones para 1º año.

Anexo 3: el cuestionario sobre los significados de las fracciones para 2º año.

Anexo 4: el cuestionario sobre los significados de las fracciones para 3º año.

Anexo 5: el cuestionario sobre operaciones entre fracciones para 1º año.

Anexo 6: el cuestionario sobre operaciones entre fracciones para 2º y 3º año.

Anexos 7, 8 y 9: los programas de matemática del Ciclo Básico de la Escuela Técnica Nº 7 “Dr. Manuel Sadosky”.

CAPÍTULO 1

ESTADO DEL ARTE

En este capítulo se realiza una revisión bibliográfica sobre los errores más comunes que cometen los alumnos y su importancia durante los procesos de enseñanza y aprendizaje; también sobre las dificultades, tanto que pueden ocasionar dichos errores, como las que se enfrentan durante la enseñanza de los distintos significados de las fracciones.

1.1. ¿POR QUÉ EL ESTUDIO DE ERRORES?

Respecto de la importancia de considerar los errores se menciona:

> En el ámbito de la educación matemática los errores aparecen permanentemente en las producciones de los alumnos: las dificultades de distinta naturaleza que se generan en el proceso de aprendizaje se conectan y refuerzan en redes complejas que obstaculizan el aprendizaje, y estos obstáculos se manifiestan en la práctica en forma de respuestas equivocadas. (Del Puerto, Minnaard y Seminara, 2004,p.51)

Como en cualquier actividad humana los errores no pueden soslayarse ni evitarse durante la adquisición de conocimientos; el conocimiento humano es falible y desde Sócrates a la actualidad es una preocupación el conocimiento erróneo; por las condiciones que lo hacen posible y por las funciones que puede desempeñar en el dominio y avance de la ciencia ha ocupado parte importante de las reflexiones de filósofos de la ciencia y epistemólogos.

La reflexión de Popper se refiere al conocimiento en general y, de un modo más explícito, al conocimiento en las ciencias experimentales y por lo tanto se puede amoldar a la Matemática. Popper (1979) admite el error como parte constituyente de la adquisición del conocimiento y su pregunta fundamental al respecto es "¿Cómo podemos detectar y eliminar el error?"

Por otra parte, Bachelard (1988), planteó la noción de obstáculo epistemológico como explicación para esa aparición inevitable de errores. Esta noción de obstáculo epistemológico es retomada posteriormente por Brousseau para la Didáctica de la Matemática. Estas ideas se complementan con los planteamientos constructivistas cuyos pilares principales son:

- Todo conocimiento es construido. El conocimiento matemático es construido, al menos en parte, a través de un proceso de abstracción reflexiva.
- Existen estructuras cognitivas que se activan en los procesos de construcción.
- Las estructuras cognitivas están en desarrollo continuo. La actividad con propósito induce la transformación de las estructuras existentes.
- Reconocer el constructivismo como una posición cognitiva conduce a adoptar el constructivismo metodológico;

por lo cual en el proceso usual de construcción de los conocimientos matemáticos van a aparecer errores de forma sistemática y, por lo tanto, el proceso de construcción deberá incluir su diagnóstico, detección, corrección y superación mediante actividades que promuevan el ejercicio de la crítica sobre las propias producciones. (Rico, 1995, p. 73).

Por su parte Lakatos (1978) ofrece una metodología basada en los principios de la falsabilidad para la construcción del conocimiento matemático.

Respecto a la reflexión actual sobre los errores en los estudios sobre aprendizaje de la matemática se mencionan palabras de Brousseau, Davis y Werner (1986):

> Los estudiantes piensan frecuentemente acerca de sus tareas matemáticas de un modo muy original, bastante diferente de lo que esperan sus profesores. Cuando esta vía de pensamiento original se muestra inesperadamente útil, admiramos su poder y decimos que el estudiante ha tenido una comprensión inusual; pero cuando, por el contrario, este modo personal de pensamiento omite algo que es esencial, decimos usualmente que el estudiante ha cometido un error.

> De hecho, ambos casos tienen mucho en común, en particular el dato de que las ideas en la mente del alumno no son las que el profesor espera (p.205)

Abrate R.S.; Pochulu M.D. y Vargas J.M. (2006) sostienen que durante cualquier proceso de enseñanza se pueden generar errores y no por azar y que, independientemente de las causas que los originan, se mantienen en el tiempo y se apoyan en preconceptos erróneos. Por lo tanto, partiendo de la aplicación de un modelo constructivista de enseñanza de la Matemática, detectando los errores y preconceptos erróneos del alumno se pueden identificar las áreas que mayor dificultad presentan y, descubriendo patrones en los errores que cometen, se pueden revelar errores sistemáticos que permitan determinar concepciones inadecuadas.

Se considera que los errores pueden emplearse como instrumento de motivación y no como situaciones para “castigar”; pueden ser superados y aceptados como una instancia cuya aparición es útil porque permite que los alumnos lleguen a una comprensión más completa de los contenidos matemáticos; la información que proveen los errores es muy rica e importante ya que pone en evidencia los esquemas cognitivos que el alumno está poniendo en juego; el docente debe plantear actividades que enfrenten a los alumnos con la contradicción proveniente del error y los fuerce a participar activamente en la solución de sus conflictos para que puedan ser superados y así eliminar sus falsos conceptos para que éstos no vuelvan a aparecer. Esto genera en la clase discusiones y debates que son de un gran valor para crecer a través de sus propias interacciones.

En cuanto a la presente investigación se asume la definición de error, en el aprendizaje de la Matemática, que expresa: “Hablamos de error cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar”. (Godino, Batanero y Font, 2003).

También se debe tener en cuenta que los conceptos y procesos matemáticos deben respetar las etapas de desarrollo que se dan en los sistemas de representación cognitivos; deben tener un desarrollo progresivo asegurando que los objetos matemáticos del sistema antiguo de signos no presenten dificultades y al respecto se mencionan palabras de Freudenthal, (1993):

> Por regla general los números naturales se enfocan desde varias perspectivas y cuando llega el turno de las fracciones se supone que los alumnos están lo suficientemente avanzados como para quedarse satisfechos con un único enfoque desde la realidad y este supuesto erróneo es la razón por la que las fracciones funcionan mucho peor que los números naturales y por la que mucha gente nunca aprende las fracciones (p.134)

Se plantean algunas conclusiones relativas a los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática que surgen a partir de las reflexiones anteriores y que fundamentan este estudio:

- Los errores pueden contribuir positivamente en el proceso de aprendizaje.
- Los errores no aparecen por azar sino que surgen en un marco conceptual consistente basado sobre conocimientos adquiridos previamente.
- Es necesario que cualquier metodología de enseñanza prevea los errores y los considere en el proceso de aprendizaje.
- Todo proceso de instrucción es potencialmente generador de errores, debidos a diferentes causas, algunos de los cuales se presentan inevitablemente.

1.2. DIFICULTADES QUE GENERAN ERRORES

Respecto de las dificultades que se presentan durante los procesos de enseñanza y aprendizaje en todos los niveles educativos y que, potencialmente son generadoras de errores, se menciona la clasificación de Di Blasi Regner y Otros (2003):

- Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos.
- Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático.
- Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza.
- Dificultades asociadas al desarrollo cognitivo de los alumnos.
- Dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales.

1.3. CLASIFICACIÓN DE LOS ERRORES

Radatz (1980) realiza una clasificación de errores a partir del procesamiento de la información y establece cinco categorías generales:

- Errores debidos a dificultades de lenguaje.

  Señala que el aprendizaje de los conceptos, símbolos y vocabulario matemáticos es para muchos alumnos un problema similar al aprendizaje de una lengua extrajera. Una falta de comprensión semántica de los textos matemáticos es fuente de errores; por ello, la resolución de problemas verbales está especialmente abierta a errores de traducción desde un esquema semántico en el lenguaje natural a un esquema más formal en el lenguaje matemático.

- Errores debidos a dificultades para obtener información espacial.

  Aunque se trata de un campo de estudio cuyo desarrollo se está iniciando, es cierto que las diferencias individuales en la capacidad para pensar mediante imágenes espaciales o visuales es una fuente de dificultades para muchos jóvenes y niños en la realización de tareas matemáticas. Algunas representaciones icónicas de situaciones matemáticas pueden suponer dificultades en el procesamiento de la información; el análisis y síntesis perceptivos implican una demanda considerable para algunos alumnos, presentando dificultades y produciendo errores.

- ❖ Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.

  En este tipo de errores se incluyen todas las deficiencias de conocimiento sobre contenidos y procedimientos específicos para la realización de una tarea matemática. Estas deficiencias incluyen la ignorancia de los algoritmos, conocimiento inadecuado de hechos básicos, procedimientos incorrectos en la aplicación de técnicas y dominio insuficiente de símbolos y conceptos necesarios.

- ❖ Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento.

  La experiencia sobre problemas similares anteriores puede producir una rigidez en el modo habitual de pensamiento y una falta de flexibilidad para codificar y decodificar nueva información. En estos casos los alumnos desarrollan operaciones cognitivas, que continúan empleando aún cuando las condiciones fundamentales de la tarea matemática en cuestión se hayan modificado. Persisten en la mente algunos aspectos del contenido o del proceso de solución, inhibiendo el procesamiento de nueva información.

- ❖ Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes. Este tipo de errores surgen con frecuencia por aplicar con éxito reglas o estrategias similares en áreas de contenidos diferentes.

Movshovitz-Hadar, Zaslavksy e Inbar (1987) hacen una clasificación empírica de los errores sobre la base de un análisis constructivo de las soluciones de los alumnos realizada por expertos y determinan seis categorías descriptivas para clasificar los errores encontrados:

- ❖ Datos mal utilizados. Se incluyen aquí aquellos errores que se han producido por alguna discrepancia entre los datos que aparecen en una cuestión y el tratamiento que le ha dado el alumno. Dentro de este apartado se encuentran los casos en los que: se añaden datos extraños; se olvida algún dato necesario para la solución; se contesta a algo que no es necesario; se asigna a una parte de la información un significado inconsistente con el enunciado; se utilizan los valores numéricos de una variable para otra distinta, o bien, se hace una lectura incorrecta del enunciado.

- Interpretación incorrecta del lenguaje. Se incluyen en este caso los errores debidos a una traducción incorrecta de hechos matemáticos descriptos en un lenguaje simbólico a otro lenguaje simbólico distinto.
- Inferencias no válidas lógicamente. Esta categoría incluye aquellos errores que se producen por falacias de razonamiento, y no se deben al contenido específico.
- Teoremas o definiciones deformados. Se incluyen aquí aquellos errores que se producen por deformación de un principio, regla o definición identificable.
- Falta de verificación en la solución.
- Errores técnicos. Se incluyen en esta categoría los errores de cálculo, errores al tomar datos de una tabla, errores en la manipulación de símbolos algebraicos y otros derivados de la ejecución de algoritmos básicos.

La categorización tanto de Radatz (1980) como de Movshovitz-Hadar *et al* (1987) está fundamentada más en el conocimiento matemático que en el procesamiento de la información.

Llinares Ciscar y Sánchez García (1997) identifican cuatro tipos de errores teniendo en cuenta las causas que provocan los errores:

- los que aparecen de forma aleatoria por descuido o distracción
- los debidos a que el alumno ignora la respuesta y presenta un resultado al azar

- ❖ los causados por defectos en la comprensión de un concepto
- ❖ los debidos a la aplicación sistemática de procedimientos erróneos.

Si bien se han realizado numerosas investigaciones para categorizar los errores y lograr un sistema basado en la tipificación de los obstáculos, es decir en función de argumentos básicamente epistemológicos, las mismas han sido sólo descriptivas (sin que por ello tengan menor valía). (Rico 1995, p.84)

1.4. LOS ERRORES Y LOS PROCESOS DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE

El problema que plantea la enseñanza de las fracciones ha sido abordado por matemáticos, desde Klein hasta Freudenthal, y por psicólogos, en particular Piaget y Davydov (Streefland, 1993).

No se pretende realizar un análisis exhaustivo de los antecedentes sino presentar algunas ideas generales en torno al tema central de estudio y rescatar aquellos aspectos relevantes, que prevalecen en distintos trabajos empíricos sobre errores en la enseñanza y aprendizaje de las fracciones, con la intención de efectuar algunas reflexiones que pudieran ser útiles para la comprensión de las preguntas que dirigen la investigación.

En la mayoría de la revisión bibliográfica se reconoce que el aprendizaje de las fracciones es una de las áreas de mayor fracaso de los alumnos; se hace referencia al saber institucional con que deben contar los maestros para la primera enseñanza del concepto de fracción como así también a los errores didácticos en que incurren y conllevan a que los alumnos del Nivel Secundario aún deban enfrentarse a los mismos.

Pruzzo (2012) realza la importancia de analizar los errores que cometen los alumnos de 1º año del Nivel Secundario como medio para comprender su pensamiento matemático y sostiene que para que el alumno alcance una comprensión amplia del concepto de fracción se deben trabajar todas las interpretaciones del mismo introduciendo en cada una otras construcciones conceptuales.

Rico (1995), siguiendo las reflexiones de filósofos de la ciencia y epistemólogos como Popper, Bachelard, Russell y Lakatos, señala que los errores pueden contribuir positivamente en el proceso de aprendizaje y que no aparecen por azar sino que surgen en un marco conceptual consistente basado sobre conocimientos adquiridos previamente.

Franchi y Hernández (2004) sostienen que los errores son evidencia de las dificultades a las que se enfrentan los alumnos en los procesos de enseñanza y aprendizaje por lo que es importante reflexionar acerca de su significado y origen.

Las investigaciones citadas destacan la necesidad de que a los alumnos, para que logren la construcción del concepto de fracción, se les debe proporcionar secuencias didácticas que abarquen sus distintos significados teniendo en cuenta las dificultades a las que se enfrentan y analizar los errores que cometen como parte de la comprensión de su pensamiento matemático. Las dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático surgen de la naturaleza lógica de la matemática. Si bien a Nivel Secundario se consideran poco adecuadas las demostraciones formales es necesario no abandonar el pensamiento lógico. La incapacidad de argumentar lógicamente genera dificultades en la comprensión de los conceptos matemáticos. Sin embargo tampoco se deben descartar los métodos informales como los intuitivos, las conjeturas, los contraejemplos y ejemplos que permiten desarrollar la capacidad para seguir un argumento lógico; lo que se debe descartar son las actividades rutinarias y memorísticas.

1.5. LA ENSEÑANZA DE LAS FRACCIONES

Hay numerosos trabajos realizados sobre la enseñanza de distintos significados de las fracciones (Fandiño, 2015; Flores García, 2011; Freudenthal, 1983; Llinares Ciscar *et al*, 1997; Pruzzo, 2012 entre otros) y sobre la necesidad de mejorar el conocimiento de los docentes sobre fracciones y cómo enseñarlas (Fazio y Siegler, 2011) pero no son terminantes respecto a los errores cometidos por los alumnos inherentes a las dificultades que enfrentan durante los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Fandiño (2015) manifiesta que el paso del conocimiento académico al alumno es resultado de un largo y delicado camino que tiene tres etapas desde el conocimiento a ser enseñado pasando por el conocimiento que en realidad se enseñó y terminando en el conocimiento aprendido. Las dos primeras etapas corresponden a la transposición didáctica y son de gran importancia ya que es el momento en el cual resaltan el profesionalismo y la creatividad del docente. El conocimiento de los números racionales no puede ser simplemente transferido al alumno de cualquier nivel dado que no cuenta con la capacidad cognitiva necesaria para construirlo.

Streefland (1993) hace hincapié en la importancia de cómo adquieren los alumnos comprensión del significado de las fracciones. Su investigación, con un enfoque realista, tiene como objetivo mostrar que la realidad puede ser usada tanto para representar mentalmente la matemática como para su aplicación.

Soto (2015) presenta en su trabajo la idea de analizar la *práctica matemática* (D'Amore y Godino, 2007) del concepto de fracción haciendo comparaciones con los problemas que dieron lugar al mismo a lo largo de la historia de la matemática.

Respecto al primer significado del concepto de fracción Merzbach y Boyer (2011) expresan que la historia matemática evidencia que los egipcios comenzaron a usar el concepto de fracción ante el problema de reparticiones equitativas.

Llinares Ciscar *et al* (1997) presentan el problema de los diferentes significados de las fracciones y consideran que los docentes deben tener en cuenta las dificultades a las que se enfrentan los alumnos para comprender las fracciones desde la relación parte-todo para luego repartir, manejar las razones y proporciones y desarrollar el esquema de proporcionalidad.

Respecto de las dificultades que se presentan en la enseñanza y aprendizaje de las fracciones se menciona:

> Están relacionados con diferentes tipos de situaciones (situaciones de medida, con el significado de parte de un todo, o como parte de un conjunto de objetos, de reparto utilizadas como cociente, como índice comparativo usadas como razón, y como un operador). Y, además, pueden representarse de varias maneras: 3/4, fracciones; 75/100, fracciones decimales; 0.75, expresiones decimales; 75%, porcentajes. (Chamorro, Belmonte Gómez, Llinares, Ruiz Higueras y Vecino Rubio, 2003, p. 188).

Perera y Valdemoros (2007) también señalan que la fracción es uno de los conceptos que mayores dificultades presenta al momento de su enseñanza y aprendizaje; reconocen la necesidad de que los alumnos construyan dicho conocimiento abarcando todos sus significados.

Respecto a los diferentes significados Kieren (1980) señala que el alumno interpreta de distinta manera la fracción como parte-todo y como cociente.

Gallardo (2008) afirma que el conocimiento de que la fracción manifiesta distintos significados se reporta desde investigaciones sistemáticas (Kieren, 1976, 1988, 1993; Behr, Harel, Post & Lesh, 1992; Gairín, 1998; Escolano & Gairín, 2005).

Fandiño (2015) destaca catorce significados para la noción de fracción. Sin embargo se considera que un exceso de significados de un concepto puede confundir al alumno.

Ríos García (2007) entiende que es comprensible que una diversidad de significados produzca en los alumnos obstáculos para la comprensión del concepto de fracción, lo cual lleva a que se produzcan dificultades para aprender y errores en el aprendizaje de conceptos relacionados con las fracciones.

Martínez y Lascano (2001) consideran importantes, respecto del significado de la fracción como relación parte-todo:

a) los siete atributos que fueron propuestos por Piaget, Inhelder y Szeminska (1960, citados en Llinares y Sánchez, 1997):

- Un todo está compuesto por elementos separables. Una región o superficie es vista como divisible.
- La separación se puede realizar en un número determinado de partes. El "todo" se puede dividir en el número de partes pedido.
- Las subdivisiones cubren el todo; ya que algunos niños cuando se les pedía dividir un pastel entre tres muñecos, cortaban tres trozos e ignoraban el resto.
- El número de partes no coincide con el número de cortes.
- Los trozos (partes) son iguales. Las partes tienen que ser del mismo tamaño ("iguales").
- Las partes también se pueden considerar como totalidad (un octavo de un todo se puede obtener dividiendo los cuartos en mitades).
- El "todo" se conserva. (p.80).

b) otros tres atributos propuestos por Payne (1976):

- Manejar el control simbólico de las fracciones, es decir, los símbolos relacionados a las fracciones.
- Considerar las relaciones parte-todo en contextos continuos y discretos.
- Trabajar con fracciones mayores que la unidad y reconocer subdivisiones equivalentes (por ejemplo, notar que un tercio es equivalente a dos sextos, a tres novenos, etc.)

Los antecedentes revisados muestran la importancia del estudio de los errores para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje, en particular, con las fracciones. Sienta las bases para que, en esta investigación, se puedan detectar tipos de errores e identificar las causas que llevan a los alumnos a cometerlos.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

A continuación se exponen los aportes teóricos en los cuales se basa el proceso de investigación. Se trata de definir, con más claridad, conceptos ya existentes.

2.1. CONCEPTO DE FRACCIÓN Y SUS SIGNIFICADOS

Se acuerda con Dickson (1984) en que debe existir un equilibrio entre el significado de las fracciones en contextos concretos prácticos (situaciones problemáticas) y en situaciones más abstractas (cálculo sin contexto: carácter algebraico).

Es importante que, previo al manejo de las operaciones con fracciones, se logre una base conceptual a partir de situaciones concretas y, por lo tanto, en lo relativo a las fracciones y algunos de sus significados se espera que los alumnos que egresan del Nivel Primario hayan alcanzado aprendizajes conceptuales significativos para poder seguir avanzando en la construcción del número racional a través de otros significados más complejos y así evitar posibles limitaciones conceptuales.

Sin embargo, cuando se propone ampliar al conjunto numérico de los racionales, se evidencian dificultades de comprensión principalmente en lo referente al concepto de fracción y al manejo procedimental de las operaciones de los racionales positivos. La mayoría de los alumnos no cuentan con los conceptos básicos para acceder al conjunto de los números racionales. Se debe tener en cuenta que los varios significados de la fracción y el proceso de aprendizaje son a largo plazo; los distintos significados deben agregarse en forma secuencial a lo largo de los años.

Freudenthal (1983) establece que “Las fracciones son el recurso fenomenológico del número racional, una fuente que nunca se seca. Es la palabra con la que entra el número racional y está relacionada con romper: fractura.” (Pág.134)

Como es de interés conocer cuáles son los significados de la fracción que comprenden los alumnos, la investigación se basa en el enfoque fenomenológico del concepto de fracción según el cual los objetos matemáticos disponen familias de fenómenos en la medida en que permiten clasificarlos en función de sus regularidades. Como la fenomenología de un objeto matemático es la descripción del objeto en relación con los fenómenos de los cuales emerge o a los cuales subyace (qué fenómenos puede organizar el objeto, a cuáles se extiende, cómo actúa sobre ellos, qué poder nos confiere sobre esos fenómenos) el enfoque fenomenológico del concepto de fracción requiere atender a la diversidad de significados que admiten las fracciones de acuerdo al contexto en que se las use.

A partir de esta idea podemos realizar acciones que producen resultados como la relación entre las partes y el todo fraccionado; la medida; la razón en la comparación entre cantidades y el resultado de la operación.

Estas acciones y sus resultados determinan distintos significados para las fracciones.

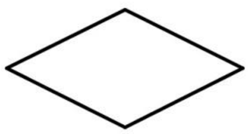
Teniendo en cuenta los trabajos de Behr, Lesh, Post y Silver (1983); Dickson, Brown y Gibson (1984) se trabajará con los siguientes significados:

- La relación parte-todo.
  - Representaciones en contextos continuos (medible) y discretos (contable).
  - La fracción como representante de un punto de la recta numérica.
- El reparto equitativo. (Las fracciones como resultado de una división).
- La fracción como razón.
- La fracción como operador.

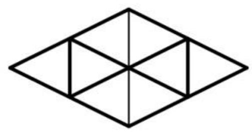
En las siguientes secciones se describen los significados señalados que se pueden asociar a la idea de fracción, caracterizándolos en sus rasgos más relevantes.

2.1.1. LA RELACIÓN PARTE-TODO

Generalmente se introduce el concepto de fracción presentando una situación donde un "todo" (continuo o discreto) se divide en partes "iguales" (equivalentes como cantidad de superficie o cantidad de objetos). En este caso la fracción indica la relación que hay entre una cantidad de partes y la cantidad total de partes o "todo". El "todo" recibe el nombre de unidad pero las partes también se pueden considerar como un todo. El todo en cuestión puede ser de naturaleza continua (cuando es "medible" y es el privilegiado en las aulas) o de naturaleza discreta (cuando es "contable"). En este caso se entiende a la fracción como "fracción de un objeto" y su manejo correcto depende de la habilidad de dividir el objeto en partes "iguales" lo cual se suele transformar en una dificultad si el objeto es, por ejemplo:

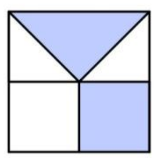


y debo dividirlo en 8 partes iguales:



2.1.1.1. CUANDO EL TODO ES CONTINUO

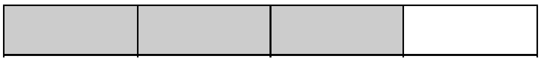
El significado parte-todo en contextos continuos (donde la representación usa diagramas circulares o rectangulares, sólo en dos dimensiones) es el más simple de introducir pero tiene asociadas dificultades que hay que tener en cuenta. Se trabaja, en general, con un todo continuo que es una región donde la dimensión medible es su superficie y la fracción indica una subregión de la unidad. Sin embargo no se aclara qué se está midiendo; no se habla de partes congruentes (dando una interpretación relativa a la extensión, al área) sino de partes iguales y por lo tanto la siguiente representación no correspondería a $\frac{2}{4}$:



Por muy simple que resulte su aplicación presenta dificultades que deberían ser tenidas en cuenta:

1) Para obtener información espacial en casos donde:

- ❖ deben reconocer similitud de figuras como:



$\frac{3}{4}$

$\frac{3}{4}$ (aunque no esté subdividida)

- ❖ deben reconocer el todo, que siempre se conserva, como cuando se pide reconstruir la unidad

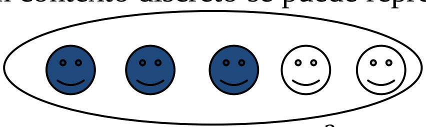
2) Al enfrentarse con las llamadas fracciones impropias.

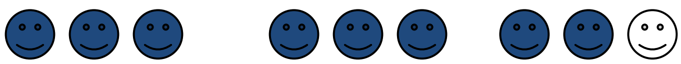
¿Esta representación corresponde a $\frac{5}{3}$ o a $\frac{5}{6}$?

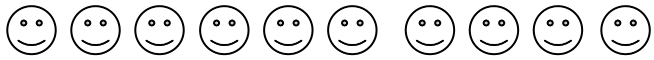
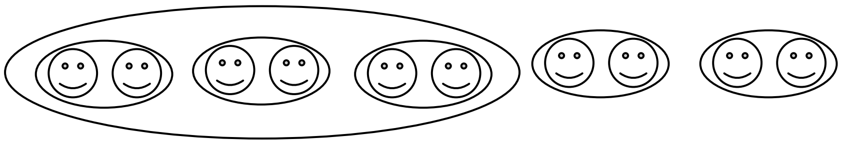
2.1.1.2. CUANDO EL TODO ES DISCRETO

Cuando el todo es discreto (conjunto contable de objetos) la fracción es un subconjunto del mismo o el subconjunto que resulta también puede estar formado por varios objetos. En este caso también se enfrenta una importante dificultad en el caso de las fracciones impropias.

En un contexto discreto se puede representar el todo de diferentes maneras:

- ❖  el todo es el conjunto total de las cinco caritas y lo sombreado representa $\frac{3}{5}$
- ❖  el todo es el conjunto de las tres caritas entonces

 representa a $2\frac{2}{3}$

❖  puede dar lugar a que la fracción $\frac{3}{5}$ se represente: 

Y algunas dificultades, por ejemplo, si tenemos  no es posible representar $\frac{3}{5}$.

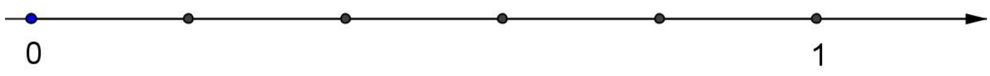
Comprender la fracción con este significado (ya sea en contexto continuo o discreto) permite naturalmente acceder a los significados de razón, proporción y porcentaje.

2.1.2. LA FRACCIÓN COMO REPRESENTANTE DE UN PUNTO DE LA RECTA NUMÉRICA

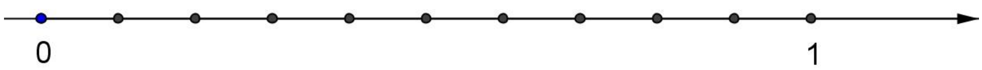
Este significado es importante porque se realiza la asociación de un punto de la recta a una fracción y viceversa y no a una figura o a un conjunto de objetos; permite que la fracción sea pensada como la representación de un número. Si una fracción es una representación de un número y éste es identificable con un punto de la recta numérica entonces la fracción es un representante de dicho punto (es erróneo identificarla con él).

Presenta serias dificultades de aprendizaje (que la recta deba ser dividida en segmentos congruentes que representan una unidad):

❖ Ubicar, por ejemplo, la fracción $\frac{3}{5}$ usando la siguiente representación puede resultar sencilla:



Pero aparece una dificultad si la representación es:



- Son muchos los alumnos que atribuyen significados equivalentes a la línea de fracción y la coma decimal: consideran, por ejemplo, que a $\frac{5}{3}$ y a 5,3 le corresponden el mismo punto en la recta numérica.

Sin embargo hay que destacar sus ventajas:

- permite introducir el concepto de densidad en el conjunto de números racionales
- hace que las fracciones impropias tengan más sentido y puedan relacionarse con el cociente y el resto de la división entre numerador y denominador
- se relaciona con el uso de escalas
- permite la comprensión del significado de la fracción como medida. La medida del objeto surge del proceso iterativo de contar el número de unidades, o subunidades, que se han utilizado para "cubrir" el objeto (identificada una unidad de medida la misma admite subdivisiones "iguales"; la unidad debe ser invariante bajo las subdivisiones). Al considerar las fracciones con el significado de medida, se proporciona el contexto natural para la "suma" (unión de dos medidas) y para la introducción de los decimales (notación decimal). (Kieren, 1980).
- se puede usar para introducir el concepto de equivalencia: la misma parte de la unidad recibe nombres diferentes en función del número de divisiones.

2.1.3. LA FRACCIÓN COMO DIVISIÓN

Con este significado la fracción se considera desde dos enfoques:

- Ver la fracción como una división indicada estableciendo su equivalencia con el cociente de dicha división con una acción de reparto equitativo.
- Ver la fracción como elemento de una estructura algebraica

Esta compleja dualidad del significado sugiere que su presentación debe ser posterior a los significados enumerados anteriormente. Sin embargo las investigaciones muestran diferentes posturas respecto a cuál es el significado que da lugar a los otros:

- (Kieren, 1980) considera que la relación parte-todo sirve de base para la construcción de los otros significados: medida, cociente, operador multiplicativo y razón; en el caso de la fracción como división se refiere a una situación de reparto.
- (Streefland, 1984) centra el desarrollo de las secuencias de enseñanza de la fracción alrededor de esta interpretación, y enfatiza el hecho de que la fracción resultado aparece a partir de un proceso de diferenciar, dividir, abreviar, representar, simbolizar mediante la verbalización de tales procesos.
- Behr *et al*. (1983) señala que la estructura cognitiva implicada en resolver una tarea con cantidades discretas es diferente a la empleada en una tarea con cantidades continuas por lo que propone que el significado cociente (reparto) se lo puede plantear según se utilicen contextos discretos o continuos (área, longitud).
- Obando Zapata, G., Vanegas Vasco, M.D. y Vásquez Lasprilla, N.L. (2006) sostienen que la fracción como cociente indicado es el resultado de dividir uno o varios objetos entre un número de personas o partes y que también se puede definir como el valor numérico de la fracción a/b. En este caso, la fracción es el resultado de una situación de reparto donde se busca conocer el tamaño de cada una de las partes resultantes al distribuir ***a*** unidades en ***b*** partes iguales. "De esta manera, cuando la fracción es interpretada como el resultado de una división, esta fracción tendrá un significado y no será un símbolo muerto, sin sentido para quien lo utiliza".

2.1.3.1. LA FRACCIÓN COMO DIVISIÓN INDICADA (REPARTO EQUITATIVO)

Que ante la siguiente situación: "6 amigos van a repartirse 5 chocolates. ¿Cómo deben hacer el reparto si todos quieren comer la misma cantidad?" la respuesta de los alumnos haya sido "es imposible" manifiesta la dificultad de comprender que el resultado de dividir dos números naturales se puede expresar de manera exacta mediante una fracción; no pueden relacionar el proceso de dividir con el significado parte-todo que es la descripción de una situación. Otra dificultad puede presentarse cuando, al pretender dividir numerador menor que denominador, el alumno manifieste que no se puede realizar porque está en un contexto de números naturales.

2.1.3.2. LA FRACCIÓN COMO ELEMENTO DE UNA ESTRUCTURA ALGEBRAICA

La fracción se concibe como un elemento de la forma $\frac{a}{b}$ con a, b números naturales que representa la solución de la ecuación $bx = a$. Este significado no está vinculado a un pensamiento natural del alumno al desarrollarse de forma deductiva las operaciones y propiedades (Kieren, 1976) por lo que se sugiere introducir su planteamiento en 3º año; no se tiene en cuenta en esta investigación dado que se quiere comparar el desempeño de los alumnos de los tres años del ciclo básico.

2.1.4. LA FRACCIÓN COMO RAZÓN

La fracción como razón es la comparación numérica entre dos conjuntos o dos medidas (de igual o diferente magnitud). Las razones pueden ser comparaciones parte-parte en un conjunto (magnitud discreta) o comparaciones parte-todo (magnitud continua y discreta). Este significado permite:

- abstraerse del todo o unidad ya que cualquiera de los términos de la comparación puede funcionar como unidad o como todo.

- comparar cantidades de magnitudes diferentes mientras que en la interpretación parte-todo, en un contexto de medida, sólo permite comparar cantidades del mismo tipo.
- relacionar fracciones con proporciones y porcentajes

La dificultad que aparece es que con la fracción se relacionan números naturales y con la razón se relacionan magnitudes (números reales cualesquiera).

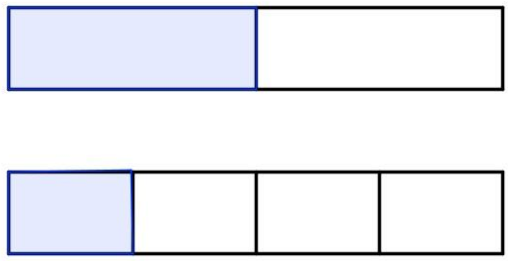
2.1.5. LA FRACCIÓN COMO OPERADOR

En este caso la fracción actúa sobre un conjunto discreto, una cantidad de cierta magnitud o un número. Este significado plantea algunas dificultades dependiendo del enfoque con que se trate.

Al igual que en el caso del significado parte-todo, el presentar la fracción como operador sólo `para casos continuos, puede inducir a los alumnos a errores como ignorar el todo de referencia como muestra el siguiente ejemplo:

Marisa y Ana salieron a comprar regalos para el cumpleaños de su amiga Susana. Marisa gastó la mitad del dinero que llevaba y Ana la cuarta parte de su dinero. ¿Quién gastó más? ¿Por qué? (Hart, 1981, citado por Llinares *et al*, p.78).

Puede que los alumnos visualicen la situación sin advertir la necesidad de conocer cuánto es el total del dinero que tenían Marisa y Ana, influenciados por las representaciones usuales, igualando dichos totales y respondiendo que Marisa gastó más:



Pero también en casos discretos este significado puede llevar a errores. Se analizan los posibles errores con el siguiente ejemplo:

En un estante hay quince libros. Santiago retira $\frac{2}{5}$ de los libros. ¿Cuántos libros retiró Santiago?

La respuesta es 6 libros ya que se debe fraccionar el conjunto de quince libros en cinco subconjuntos (denominador) de tres libros cada uno y tomar dos de esos subconjuntos (numerador).

Puede que algunos alumnos no interpreten el denominador en términos de subconjuntos sino como elementos, fraccionen el conjunto de quince libros en subconjuntos de cinco elementos y tomen dos de esos subconjuntos siendo la respuesta, en este caso, 10 libros.

Puede que algunos alumnos no interpreten el numerador en términos de subconjuntos sino como elementos, fraccionen correctamente el conjunto de quince libros en cinco subconjuntos de tres y tomen dos elementos de uno de esos subconjuntos siendo la respuesta, en este caso, 2 libros.

Algunos alumnos cometerán los dos errores simultáneamente dado que es una situación que lo permite.

Se acuerda con Llinares Ciscar *et al*, (1997) que bajo este significado la fracción tiene un papel de transformador: "algo que actúa sobre una situación (estado) y la modifica". Se concibe a la fracción como una sucesión de multiplicaciones y divisiones o a la inversa. Por ejemplo:

- en un contexto discreto:

ESTADO - UNIDAD (SITUACIÓN)	OPERADOR $\frac{2}{3}$	ESTADO FINAL
36 niños	(Dividir por 3 y multiplicar por 2)	24 niños

TABLA 1

- en un contexto continuo:

ESTADO - UNIDAD (SITUACIÓN)	OPERADOR $\frac{2}{3}$	ESTADO FINAL
Segmento de longitud dada	(Dividir por 3 y multiplicar por 2)	Segmento de longitud igual a $\frac{2}{3}$ del original

TABLA 2

Si se conviene en realizar primero la división y luego la multiplicación, este significado se identifica con el significado parte-todo pero puede actuar primero la multiplicación y luego la división. En ambos casos la fracción se utiliza para describir una acción a realizar y para describir un estado de cosas y de esta manera el significado como operador permite introducir de dos formas la equivalencia de fracciones:

- equivalencia de operadores. Por ejemplo:

Estado	Operador	Estado
12	$\times\frac{2}{3}$	8
12	$\times\frac{4}{6}$	8
12	$\times\frac{8}{12}$	8

TABLA 3

- equivalencia de estados. Por ejemplo:

Estado	Operador	Estado
12	$\times\frac{2}{3}$	8
15	$\times\frac{2}{3}$	10
24	$\times\frac{2}{3}$	16

TABLA 4

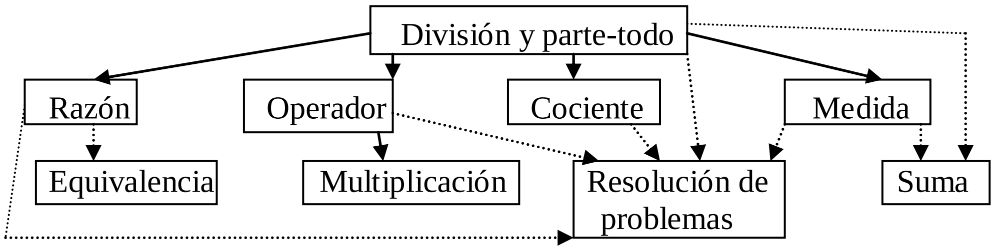
comparando el estado inicial y final en el sentido de razón permite introducir la noción de proporción.

2.2. LA INTERRELACIÓN ENTRE LOS DISTINTOS SIGNIFICADOS

Llinares Ciscar *et al* (1997) señalan que el ser "hábil" con los distintos significados de la fracción permite el dominio de diferentes estructuras cognitivas, es decir, el dominio de esquemas de pensamiento subyacentes a las acciones necesarias para desarrollar tareas que implican la idea de número racional en cualquiera de sus significados lo cual condiciona las secuencias de enseñanza de acuerdo a la edad de desarrollo de los alumnos.

No es posible ignorar las relaciones existentes, en algunos casos de manera natural, entre los distintos significados de la fracción. Al presentar cada significado a trabajar se expusieron algunas de ellas. Por ejemplo desde la relación parte-todo en contextos discretos se puede concluir con la idea de operador o de razón (porcentaje); la utilización de escalas muestra una relación directa entre la fracción como operador y como medida.

Respecto a estas relaciones se menciona el siguiente diagrama (Behr *et al*, 1983):



donde los autores señalan con flechas continuas las relaciones ya establecidas y con líneas punteadas las relaciones que se conjeturan. Posteriores investigaciones confirman la cercanía de un significado a otro cuando los contextos son más abstractos y se trabaja algebraicamente con números y ecuaciones llegando a pasar de un significado a otro sin impedimentos conceptuales.

2.2.1. PAPEL DESTACADO DE LA RELACIÓN PARTE-TODO

Llinares *et al* (1997) asumen lo expuesto por Ellerbruch y Payne (1978) y sostienen que la relación parte-todo es el significado más simple y natural en contextos continuos para introducir el concepto de fracción. Además consideran que es un buen modelo para comprender la suma de fracciones. Esta naturalidad se ve reflejada también en la enseñanza. Pero esta noción se debe complementar con otros significados a lo largo de la enseñanza, caso contrario pueden aparecer limitaciones conceptuales como las señaladas en la sección 2.1, de manera que se vaya reconceptualizando el significado inicial.

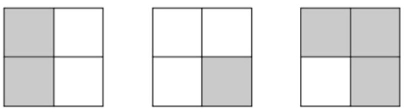
2.3. SIGNIFICADOS DE LA FRACCIÓN Y OPERACIONES

Llinares Ciscar *et al* (1997) señala que algunos significados anteriormente analizados pueden conducir de una manera natural a la comprensión de determinadas operaciones entre fracciones ya que los algoritmos son fácilmente olvidados por carecer de sentido para los alumnos. Por otro lado es necesaria también la conexión entre la resolución de problemas y los algoritmos.

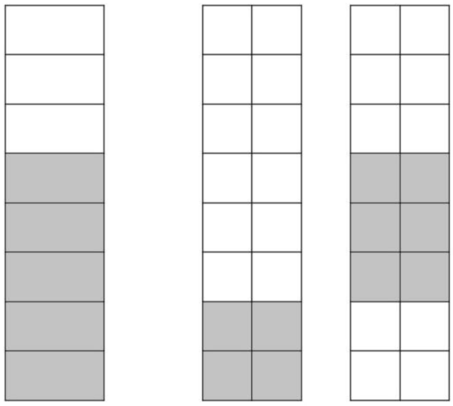
Con el significado parte-todo la suma y resta encuentran una interpretación más natural; en la sección 2.1.2 se señala que al considerar las fracciones con el significado de medida, se proporciona el contexto natural para la “suma” (unión de dos medidas).

Ejemplos:

- usando parte-todo

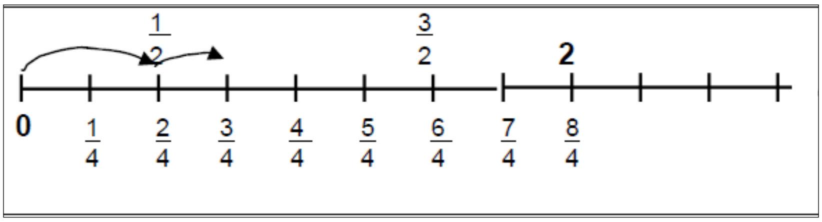


$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$



$$\frac{5}{8} \quad - \quad \frac{4}{16} \quad = \quad \frac{6}{16}$$

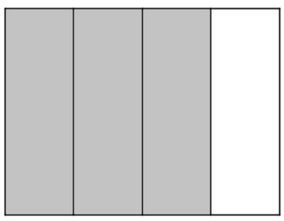
- usando la recta numérica



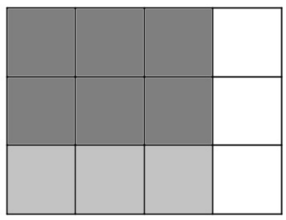
La multiplicación y la división están vinculadas con el significado “operador”.

Por ejemplo:

Elige los $\frac{2}{3}$ de la parte sombreada. ¿Cuánto has elegido del total?



$$\frac{3}{4}$$



$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$$

Teniendo en cuenta esta relativa familiaridad entre algunas interpretaciones y algunas operaciones, es posible prever dificultades en relación a la comprensión de algunas operaciones en función de qué significado de las fracciones se haya potenciado durante la enseñanza.

2.4. DIFICULTADES PARA EL APRENDIZAJE DE LA FRACCIÓN

De la agrupación realizada por Di Blasi Regner y Otros (2003) esta investigación se enfoca en dos aspectos asociados a la propia matemática:

- la complejidad de los objetos matemáticos que se pone de manifiesto debido a que la comunicación de los objetos matemáticos, principalmente de forma escrita, se realiza a través de los signos matemáticos con la ayuda del lenguaje habitual que favorece la interpretación de estos signos. Durante esta comunicación surgen diferentes conflictos asociados a la comprensión y comunicación de los objetos matemáticos.
- los procesos de pensamiento matemático que se ponen de manifiesto debido a la naturaleza lógica de la matemática y en las rupturas que se dan necesariamente en relación con los modos de pensamiento matemático. La incapacidad para seguir un argumento lógico es una de las causas que genera mayor dificultad en el aprendizaje.

2.5. LOS ERRORES Y LA FRACCIÓN

A los fines de esta investigación se selecciona la propuesta por Radatz:

Tipo de error según la causa	**Descripción**	**Ejemplo ilustrativo**
1. Dificultades del lenguaje	Errores derivados del mal uso de los símbolos y términos matemáticos, debido a una falta de comprensión semántica del lenguaje matemático.	Dar una respuesta diferente a la pedida: *Ana tiene siete lápices de los cuales tres son de color rojo y cuatro de color azul. ¿Qué fracción del total de lápices son de color azul?* Rta: $\frac{3}{7}$

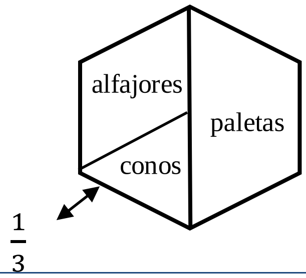
2. Dificultades para obtener información espacial	Errores provenientes de la producción de representaciones icónicas (imágenes espaciales).	
3. Aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos	Errores originados por deficiencias en el manejo de conceptos, contenidos y procedimientos para la realización de una tarea matemática. Estas deficiencias incluyen la ignorancia de los algoritmos, conocimiento inadecuado de hechos básicos, procedimientos incorrectos en la aplicación de técnicas y dominio insuficiente de símbolos y conceptos necesarios	$3 \times \frac{1}{2} - \frac{3}{5} = \frac{3}{6} - \frac{3}{5}$
4.Asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento	Son errores que en general son causados por la incapacidad del pensamiento para ser flexible, es decir, para adaptarse a situaciones nuevas.	$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{6}{8}$
5. Aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.	Errores producidos cuando se aplican reglas o estrategias similares en contenidos diferentes.	Buscar el común denominador para realizar multiplicaciones entre fracciones

TABLA 5

En este marco se busca facilitar la labor docente resaltando las dificultades de comprensión durante la enseñanza y aprendizaje de los contenidos matemáticos correspondientes y los errores de los alumnos como dato más revelador sobre las dificultades, tanto en los aspectos conceptuales como en los procedimentales.

CAPÍTULO 3

DISEÑO METODOLÓGICO

A continuación se describe el procedimiento para llevar la investigación a la práctica justificando la elección de métodos y técnicas. Incluye tipo de diseño; hipótesis y variables con sus definiciones operacionales; población; instrumento con los criterios de validez y de confiabilidad y procedimiento.

3.1. TIPO DE DISEÑO

El presente estudio se realiza usando un diseño explicativo empleándose el procedimiento de cuestionarios en los cuales se plantean diversas situaciones problema sobre los significados de las fracciones y cálculos de operaciones a fin de establecer cuáles son los significados que conocen y los errores que cometen. Para tal efecto se utilizan los métodos cuantitativo y cualitativo; aunque el estudio es principalmente cuantitativo se requiere del análisis cualitativo como apoyo para lograr una mejor comprensión de los datos cuantitativos dado que se pretende detectar los factores que influyen en la aparición de los errores. Para analizar la información se emplean procedimientos estadísticos. (Hernández Sampieri, R.; Fernández Collado, C. y Baptista, L. M. , 2010)

Dentro de las corrientes epistemológicas que sobresalen desde un inicio de la historia se sostiene que el método cuantitativo tiene un fundamento epistemológico positivo lógico, mientras que en el cualitativo su marco es fenomenológico.

Las etapas del proyecto de investigación son:

- elaboración e implementación de una prueba diagnóstica
- análisis de resultados
- elaboración de recomendaciones de enseñanza

3.2. HIPÓTESIS

- La mayoría de los alumnos de la población en estudio desconocen algunos de significados de la fracción.
- La comprensión se fundamenta esencialmente en el significado parte-todo de la fracción.
- La categorización de los errores cometidos por los alumnos permite reconocer las dificultades a las que se enfrentan en la resolución de problemas y ejercicios de fracciones.
- Los alumnos tienen dificultades para resolver ejercicios/problemas usando fracciones

3.3. VARIABLES

3.3.1. OPERACIONALIZACIÓN DE LAS VARIABLES

Para poder verificar el cumplimiento de los objetivos, las variables que los formulan se operacionalizaron de la siguiente manera:

Variable	Dimensiones	Indicadores
Significados de las fracciones	Relación parte-todo en contextos continuos	Interpreta una situación problemática, enunciada en lenguaje coloquial, de la fracción en su significado "parte-todo continuo" proporcionando una explicación simbólica y gráfica.
	Relación parte-todo en contextos discretos	Interpreta una situación problemática, enunciada en lenguaje coloquial, de la fracción en su significado "parte-todo discreto" proporcionando una explicación simbólica y gráfica.
	Fracciones como puntos sobre la recta numérica	Interpreta una representación gráfica lineal que transmite el significado de la fracción como "medida" y traduce a representación simbólica.
	División indicada	Interpreta una situación problemática, enunciada en lenguaje coloquial, de la fracción en su significado como "cociente" y explica el reparto usando símbolos y

		gráficos.
	Fracciones como razones	Interpreta una situación problemática, enunciada en lenguaje coloquial, de la fracción en su significado como “razón” y explica usando símbolos y/o gráficos.
	Fracciones como operadores	Identifica la fracción en su significado como “operador” y lo utiliza para la solución de una situación problemática.

Variable	**Dimensiones**	**Indicadores**
Errores que aparecen en la resolución de problemas y operaciones	Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.	1. Presenta un conocimiento inadecuado de conceptos y propiedades matemáticos.
		2. Extrapola procedimientos de los números naturales a las fracciones
		3. Interpreta y usa inadecuadamente una definición matemática asociada al concepto de fracción.
		4. Utiliza inadecuadamente los algoritmos.
		5. Ignora definiciones y procedimientos básicos.
	Errores debidos a dificultades para obtener información espacial.	6. Al plantearse una figura geométrica para su análisis, plantea la necesidad de que sea una figura estándar.
	Errores debidos a dificultades de lenguaje	7. Toma mal un dato de una figura geométrica en la solución de un problema.
		8. Da una respuesta diferente o plantea una respuesta adicional a la que se le pide en un problema aritmético.
	Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento	9. Realiza interacciones incorrectas entre elementos singulares; usa conceptos u operaciones que interfieren unos con otros.
	Errores debidos a la aplicación de reglas y estrategias irrelevantes	10. Utiliza estrategias de resolución de problemas en un momento determinado y lo aplica a situaciones donde no es pertinente
	Errores debidos a la ausencia de conocimientos previos	11. Sin respuesta a las situaciones planteadas

TABLA 6

3.4. DESCRIPCIÓN DE LA POBLACIÓN

La población en estudio está constituida por los alumnos del Ciclo Básico de la Escuela Técnica Nº 7 "Dr. Manuel Sadosky" de la ciudad de San Luis. Esta escuela, de la cual es Directora la Profesora Patricia Chiarani, es de gestión estatal con dos turnos y doble jornada; está situada en las cercanías de la zona céntrica donde predominan las familias de nivel socio-económico medio bajo y se gestiona de acuerdo al Diseño Curricular del Gobierno de la Provincia de San Luis para las escuelas técnicas que, entre otros puntos, establece:

1. Identificación del título profesional y características generales.

Sector/es de actividad socio productiva: Informática (Apoyo al usuario)

Denominación del perfil profesional: informática profesional y personal

Familia profesional: Informática

Denominación del título: Técnico en Informática Profesional y Personal

Nivel y ámbito de la trayectoria formativa: nivel medio de la modalidad de la Educación Técnico Profesional.

2. Tiempo de duración del diseño curricular: *Siete (7) años, en cumplimiento con lo requerido por la normativa provincial en concordancia con la nacional vigente.*

Una de las especificaciones del mencionado Diseño Curricular es la formación personal e integral del alumno durante siete años para que el Técnico en Informática Profesional y Personal esté capacitado para asistir al usuario de productos y servicios informáticos brindándole servicios de instalación, capacitación, sistematización, mantenimiento primario, resolución de problemas derivados de la operatoria, y apoyo a la contratación de productos o servicios informáticos, desarrollando las actividades descriptas en su perfil profesional y pudiendo actuar de nexo entre el especialista o experto en el tema, producto o servicio y el usuario final.

El estudio se realiza con los alumnos de ambos turnos de 1º a 3º año y cuyas edades oscilan entre 12 y 16 años.

La matrícula de la escuela, al realizarse la investigación en 2018, es de 241 alumnos distribuidos de la siguiente manera (Fuente: Equipo Directivo):

TURNO	1º AÑO	2º AÑO	3º AÑO
MAÑANA	49	45	44
TARDE	39	43	21

TABLA 7

La población en estudio varió debido a los alumnos ausentes en los distintos cursos ya que las pruebas se tomaron en diferentes días. Esta situación se había anticipado como posible obstáculo en el proyecto. Otro obstáculo fue que un 3º año no tuvo docente en Matemáticas el año anterior por lo que se evaluó como 2º año. Como la intención del estudio es determinar cuáles son los significados de las fracciones que los alumnos han construido y las dificultades que enfrentan induciéndolos a errores, tanto para resolver problemas como para resolver operaciones básicas, no se tienen en cuenta ni la metodología de trabajo ni los tipos de actividades desarrolladas por cada docente frente al aula.

3.5. INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS

Se recolecta la información necesaria para determinar los conocimientos que poseen los alumnos, qué estrategias implementan y las dificultades a las que se enfrentan de las cuales derivarán los errores que cometen al resolver problemas basados en los significados de las fracciones y operaciones entre fracciones. Los instrumentos diseñados y aplicados son pruebas diagnóstico con situaciones matemáticas potencialmente generadoras de error que involucran contenidos conceptuales que se suponen ya abordados por los alumnos y orientadas a:

- reconocer la presencia de los errores más significativos y de las distintas interpretaciones de la fracción
- la resolución de operaciones en forma justificada
- identificar las posibles dificultades asociadas a ellos.

Los instrumentos aplicados son los siguientes:

- Prueba de comprensión de los significados de la fracción.
- Prueba de operaciones básicas con fracciones

3.6. PROCEDIMIENTO DE RECOLECCIÓN DE DATOS

La recolección de la información se realiza con la aplicación de las pruebas en forma individual en el aula durante dos clases de aproximadamente 120 minutos cada una. Si bien cada prueba incluye explicaciones detalladas, ver ANEXO 1, al inicio se explican las intenciones de la misma y se invita a leer las instrucciones antes de comenzar con la resolución de las actividades. Se solicita a los alumnos escribir cada respuesta acompañada del desarrollo realizado para obtener la misma.

3.7. DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE LOS INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS

Se trata de que los instrumentos de medición registren datos observables que permitan descubrir los procesos cognitivos involucrados respecto a la variable de interés. Se solicita no borrar los errores o equivocaciones para tener indicios sobre los procesos realizados en busca de la solución. Se requiere colocar la edad para observar si hay mucha disparidad en cada año. Cada prueba fue diseñada de manera sencilla para su mejor comprensión y teniendo en cuenta la población hacia la cual va dirigida.

La prueba de comprensión de las interpretaciones de la fracción consta de problemas diferentes para los alumnos de cada año. Estos problemas se basan en los siguientes cinco significados de la fracción: “parte-todo continuo”; “parte-todo discreto”; “como puntos sobre la recta numérica"; "división indicada"; "razón" y "operador". La prueba para los alumnos de 1º año se refiere sólo a los primeros cinco significados ya que en el Diseño Curricular de las Escuelas Primarias de la Provincia de San Luis no se incluyen más interpretaciones sobre el número fraccionario. Esta prueba consta de preguntas de respuesta a desarrollar o de respuesta abierta que requieren que el alumno elija, diseñe y comunique un procedimiento de resolución por lo que involucran la puesta en juego de capacidades vinculadas con la producción y la comunicación de información matemática, explicando, argumentando, desarrollando un procedimiento de resolución, etc. En 3º año se incorporó una actividad cerrada para evaluar capacidades relacionadas, fundamentalmente, con el análisis de datos; pudiendo reconocerlos, componerlos y relacionarlos a partir de una selección de contenidos relevantes.

La prueba de operaciones con fracciones para 1º año consta de cinco operaciones básicas entre fracciones mientras que para 2º y 3º año se incorporaron cinco operaciones combinadas. No se pretendía evaluar la situación con las operaciones de potenciación y radicación ya que las dificultades surgen en primera instancia con las operaciones básicas.

3.7.1. PROCESO DE ELABORACIÓN DE LOS INSTRUMENTOS

El proceso de construcción de la prueba de comprensión de los significados de la fracción se inicia con la investigación de los mismos y se prefiere el documento "Las fracciones: diferentes interpretaciones" de Linares C. y Sánchez G. (1997) como base. De los significados de la fracción allí mencionados se seleccionan aquéllos que se ajustan a los programas de la Escuela, lo cual será fundamentado en el Capitulo 5. Dichos programas son consensuados de acuerdo a los lineamientos de la Escuela y teniendo como guía los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios, Ciclo Básico Educación Secundaria, 1° y 2°/2° y 3° Años y el Diseño Curricular de la provincia.

Posteriormente se determinan las actuaciones esperadas, es decir, qué saberes relacionados con la comprensión de los cinco significados de la fracción seleccionados (la fracción como parte-todo, cociente, medida, razón y operador) deberían mostrar los alumnos. Luego se establecen las preguntas para cada caso.

Estas pruebas tienen como propósito aportar información sobre saberes previos, capacidades específicas, niveles de conceptualización, así como sobre errores, confusiones, ausencia de conocimientos básicos respecto de las fracciones. La elaboración de un instrumento que cumpla con este propósito requiere considerar aspectos que al mismo tiempo son variados e interdependientes entre sí. No sólo los objetivos de esta investigación, sino también las características del grupo, los contenidos seleccionados que se evalúan y aún la experiencia previa que los alumnos muestren a la hora de manejarse con el instrumento, incidirán en la respuesta.

Los resultados de este proceso son las "Pruebas de comprensión de los significados de la fracción" presentadas en los Anexos 2, 3 y 4 y las "Pruebas de resolución de operaciones entre fracciones" presentadas en los Anexos 5 y 6.

3.7.2. OBJETIVOS DE LAS SITUACIONES PLANTEADAS EN LA PRUEBA SOBRE LOS SIGNIFICADOS

Las situaciones planteadas han tenido en cuenta otras investigaciones y el marco teórico referencial sobre las dificultades y errores que pueden presentarse.

- **PARTE-TODO EN CONTEXTOS CONTINUOS Y DISCRETOS**

  Se pretende que los alumnos identifiquen el "todo" o "unidad":

  - y las diferentes divisiones "iguales" que pueden realizar.
  - para reconstruirlo a partir de una de sus partes.

- **DIVISIÓN INDICADA EN CONTEXTOS CONTINUOS Y DISCRETOS**

  Se pretende indagar sobre:

- las representaciones más utilizadas para las fracciones
- el concepto de fracciones equivalentes (diferentes interpretaciones en el contexto discreto)

La operación de división indicada $\frac{a}{b}$ también puede ser efectuada sólo que no produce el efecto operatorio que producía la fracción que la originó. (Fandiño, 2015). Por ejemplo, $\frac{3}{5}$ puede indicar una fracción con el significado parte-todo, una división indicada (reparto equitativo) o el cociente 0,6 al realizar la división. Es decir que la misma escritura $\frac{3}{5}$ puede indicar al alumno interpretaciones muy diferentes. Hay que tener en cuenta que el cociente puede no ser un número decimal exacto y sume otra dificultad al proceso de aprendizaje; razón por la cual no se incorpora a los cuestionarios.

- **FRACCIONES COMO PUNTOS SOBRE LA RECTA NUMÉRICA**

Se pretende indagar sobre la relación de la fracción con la "medida" que surge del proceso iterativo de contar el número de unidades, o subunidades, que se han utilizado para "cubrir" el objeto; que los alumnos identifiquen, también con este significado, que la fracción a/b surge de dividir la unidad de medida en b partes iguales y de tomar a de ellas hasta completar la cantidad exacta deseada.

En este caso la fracción es vista como un valor-punto sobre la recta orientada, mucho más cercana a ser un número racional que una fracción. (Fandiño, 2015). Por ejemplo, al escribir $\frac{3}{4} < \frac{6}{7}$, no se está pensando que al tomar los $\frac{3}{4}$ de la misma unidad-todo se obtiene menos que si se toman los $\frac{6}{7}$ sino que se están trabajando las fracciones como números racionales y, en este caso, la fracción indica una distancia relativa (dependiendo de la unidad de medida) entre el origen y el punto-fracción. La comparación de fracciones no se incluye en los cuestionarios por que el significado central es como punto de una recta orientada y, una vez lograda su comprensión, se puede avanzar hacia conceptos más abstractos como números racionales.

- **RAZÓN EN CONTEXTOS CONTINUOS Y DISCRETOS**

  Se pretende que los alumnos comparen cantidades o conjuntos de unidades.

- **OPERADOR**

  Se pretende que los alumnos identifiquen la operación a realizar y que la fracción actúa sobre la "unidad" modificándola.

3.7.3. OBJETIVOS DE LAS SITUACIONES PLANTEADAS EN LA PRUEBA SOBRE LAS OPERACIONES

Se considera que un alumno debe adquirir conceptos y herramientas matemáticos elementales para poder resolver situaciones problemáticas de su entorno cotidiano o del entorno de las ciencias; como también las habilidades de razonamiento para que sea capaz de resolver problemas en forma creativa sin limitarse a aplicar algoritmos y procedimientos rutinarios. Las operaciones básicas son conocimientos fundamentales que deben aprenderse de manera correcta tanto para la comprensión de temas posteriores como para la aplicación en otras áreas y en la vida cotidiana. El alumno debe apropiarse tanto del concepto como del procedimiento para resolver de manera comprensible y correcta cada una de las operaciones básicas aritméticas: suma, resta, multiplicación y división. Por tal motivo, en 1º año, sólo se pretende indagar sobre las operaciones básicas y en 2º y 3º año se agregan algunas situaciones para aplicar propiedades de las mismas.

3.7.3.1. 1º AÑO

1) $\frac{2}{7}+\frac{11}{7}$ *2)* $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$ *3)* $\frac{5}{6}-\frac{1}{5}$ *4)* $\frac{3}{5}\times\frac{4}{7}$ *5)* $\frac{4}{7}\div\frac{5}{6}$ Se pretende que los alumnos identifiquen las situaciones de suma con iguales y diferentes denominadores; indagar sobre su conocimiento del común denominador, el algoritmo de la suma y las definiciones de la multiplicación y división. No se pidió simplificar para no agregar posibles elementos distractores en este nivel.

3.7.3.2. 2º y 3º AÑO

1) $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$ *2)* $1-\frac{3}{5}+\frac{1}{2}$ Se priorizó, en estos niveles, posibles situaciones con diferentes denominadores y se incluyeron números naturales. Se pretendía indagar sobre su conocimiento del común denominador y del algoritmo de la suma.
3) $\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}$ *4)* $\frac{7}{8}\div\frac{5}{4}$ Se pretendía indagar sobre el conocimiento de las definiciones de la multiplicación y división.
5) $3-2\times\frac{3}{5}$ *6)* $3\times\frac{1}{2}-\frac{3}{5}$ *7)* $\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$ *8)* $\frac{2}{3}\times\left(1+\frac{2}{5}\right)$ *9)* $\frac{1}{2}\div\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)$ Con estas operaciones combinadas se introducen números naturales jugando con la jerarquía de las operaciones (significado del uso de paréntesis) y su relación con la multiplicación con una fracción para conocer el grado de comprensión de las mismas.
10) $\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{6}\right)\div\left(\frac{1}{6}+\frac{2+5}{2+2}\right)$ Se pretendía observar cómo se desenvuelven en el caso de $\frac{2+5}{2+2}$
En todas las operaciones se pide simplificar.

3.7.4. CRITERIOS DE VALIDEZ Y DE CONFIABILIDAD DE LOS INSTRUMENTOS

Los cuestionarios diseñados se someten a un proceso de validación empírica para probar la fiabilidad; la cual se centra en conocer el grado en que un procedimiento concreto de traducción de un concepto en variable produciría los mismos resultados en pruebas repetidas con la misma técnica o con técnicas parecidas (Ruiz, 2014).

La aplicación de la prueba piloto de los cuestionarios permite identificar:

- Tipos de preguntas más adecuados.
- Si el enunciado era correcto y comprensible y si las preguntas tenían la extensión adecuada.
- Si era correcta la categorización de las respuestas.
- Si existían resistencias psicológicas o rechazo hacia algunas preguntas.
- Si el ordenamiento interno era lógico
- Si la duración estaba dentro de lo aceptable por los alumnos.

Se realiza la prueba piloto aplicando los cuestionarios diseñados a cinco alumnos por curso que dieron su consentimiento y cuya participación fue voluntaria y anónima.

Al analizar los resultados de la aplicación piloto, se encuentran ciertos elementos de mejora que permiten agilizar su versión definitiva y contribuir a la comprensión tanto formal como conceptual del mismo. Fruto de este proceso, se introducen los cambios de contenido (lenguaje utilizado, se cierran ítems, se cambia el orden de alguna de las preguntas, etc.). El resultado de todo este proceso es la elaboración definitiva de los cuestionarios. Los resultados de la aplicación piloto de los cuestionarios no son, en ningún momento, de orden diagnóstico sino metodológico.

Por otro lado los instrumentos tienen validez de contenido ya que engloban una muestra representativa de las conductas y conocimientos que se pretenden medir respaldada por otros estudios e investigaciones que ofrecen garantías de medir lo que se desea medir.

De esta manera se confeccionaron los instrumentos que tienen que ver con los elementos que se utilizan para la obtención de la información relacionada con el objeto de estudio. Se emplearon cuestionarios cuyos reactivos provienen directamente de la operacionalización de las variables y se definieron sus características, validez y confiabilidad.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Se presentan los datos obtenidos y la información y el análisis derivados de los mismos. Como se realiza un análisis estadístico se incluyen las representaciones a través de gráficos.

Las preguntas abiertas se codifican una vez que se conocen todas las respuestas de los participantes a los cuales se les aplicaron. Con la codificación de preguntas abiertas se obtienen categorías que representan los resultados finales. El procedimiento consiste en encontrar y dar nombre a los patrones generales de respuesta (respuestas similares o comunes), listar estos patrones y después asignar un valor numérico a cada patrón. Así, un patrón constituyó una categoría de respuesta.

4.1. CODIFICACIÓN DE LAS RESPUESTAS PARA LOS SIGNIFICADOS DE LA FRACCIÓN

Las respuestas de cada actividad de la prueba sobre los significados de la fracción se codifican teniendo en cuenta cinco categorías de respuesta posible:

- Correcta: código 1
- Incorrecta con error a destacar: código 2
- Incorrecta: código 3
- Dato perdido: código 4
- Sin respuesta: código 5

La categoría 2 queda determinada ya que, en el momento de corregir las pruebas, fue importante considerar algunos datos que cada tipo de respuesta podía ofrecer en relación con los errores de los alumnos. En algunas actividades no se usó el código 4 que se incorpora con el fin de identificar respuestas que se presentaron de manera aislada o casual y de las que no fue posible establecer el patrón de error; estos errores eventuales se deben a deficiencias en la construcción de conocimientos previos y son causados por aprendizajes incorrectos o inadecuados de hechos, destrezas y conceptos previos que interfieren en un adecuado procesamiento de la información.

4.2. CODIFICACIÓN DE LAS RESPUESTAS PARA LAS OPERACIONES ENTRE FRACCIONES

Las respuestas de las actividades de la prueba sobre operaciones entre fracciones se codifican teniendo en cuenta doce categorías de respuesta posible:

- Correcta: código 1
- Error en el común denominador: código 2
- Error en el algoritmo de la suma (mal numeradores): código 3
- Error en el algoritmo de la multiplicación (fracciones equivalentes con el mismo denominador: arrastra el algoritmo de la suma): código 4
- Error en el algoritmo de la división: código 5
- Error en la jerarquía de las operaciones: código 6
- Correcta pero no simplifica o hay simplificación incompleta: código 7
- Error entre entero y fracción: código 8
- Suma denominadores (extrapolación del cálculo de los naturales a las fracciones): código 9
- Sin respuesta: código 10
- Incorrecto (no identificable el error por falta de procedimiento): código 11
- Desconoce la propiedad conmutativa: código 12

Es de esperar que los alumnos tengan conocimientos sobre los contenidos planteados en las distintas actividades ya que son los establecidos en los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios por lo que se considera como error la ausencia de respuesta.

4.3. RESUMEN Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Para analizar los trabajos de los alumnos se parte de las sugerencias de Giordan (1996) sobre el rastreo de las concepciones de los alumnos. Señala al respecto que muchas veces se oscurece su evaluación porque se plantean situaciones vistas en el aula que provocan respuestas memorizadas al margen de la comprensión, pero apenas se cambia la situación al solicitárseles gráficos, esquemas o dibujos, afloran los modos de pensar de los alumnos.

Por lo cual se pidió, en la mayoría de los casos, que grafiquen la situación problemática.

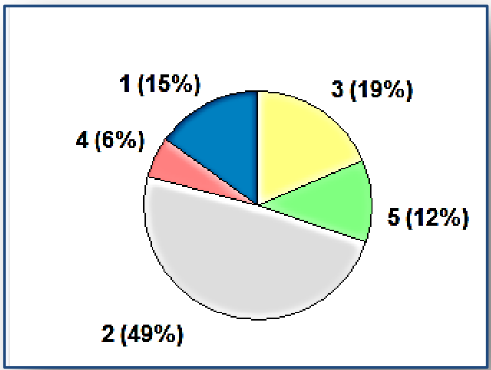
En cuanto a la edad de cada curso se observa un valor medio adecuado sin valores extremos.

4.3.1. PRUEBA SOBRE LOS SIGNIFICADOS DE LA FRACCIÓN

4.3.1.1. PRIMER AÑO

ACTIVIDAD 1 (86 alumnos evaluados)

Resultados Actividad 1



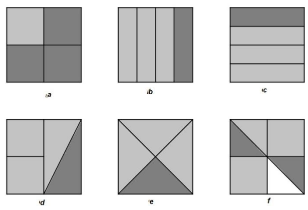
Gráfica 1. Análisis estadístico pregunta 1. C1.

1º año

1) La bandera que representará en los intercolegiales a los estudiantes de primer año debe cumplir con los siguientes requisitos:

- *La bandera debe tener forma de cuadrado*
- *La bandera debe tener únicamente 2 colores*
- *Uno de los colores sólo debe cubrir la cuarta parte de la bandera*

*Observa los siguientes diseños e indica __**todos**__ los posibles que cumplan con los requisitos anteriores.*



El mayor porcentaje, 49%, corresponde a las respuestas que no consideraron todas las posibilidades y es atribuible a deficiencias en la capacidad para pensar mediante imágenes espaciales o visuales que llevan al alumno a interpretaciones incorrectas de información o hechos matemáticos.

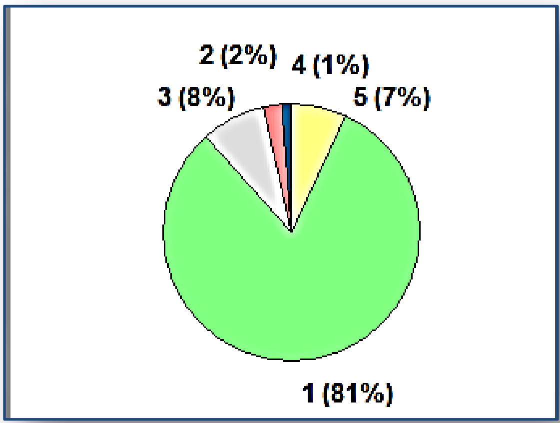
Respecto a los errores debidos a dificultades para obtener información espacial Duval (1998) plantea que las representaciones semióticas utilizadas normalmente en Matemática no se generan de manera aislada, sino que pertenecen a sistemas de representación que tienen su propia estructura interna, sus propias limitaciones de funcionamiento y de significado, y que pueden ser caracterizadas en función de las actividades cognitivas que permiten desarrollar. Estas actividades cognitivas condicionan la estructura misma del sistema de representación y la transforman en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial. Las dificultades para convertir una representación en otra pueden interpretarse como resultado de una conceptualización deficiente del objeto bajo estudio.

En este caso no fueron capaces de reconocer distintas particiones iguales de la unidad.

El alto porcentaje de respuestas incorrectas, 19%, se debe a que respondieron como correcta la última opción lo cual puede deberse a una falta de interpretación del lenguaje.

ACTIVIDAD 2 (86 alumnos evaluados)

Resultados Actividad 2



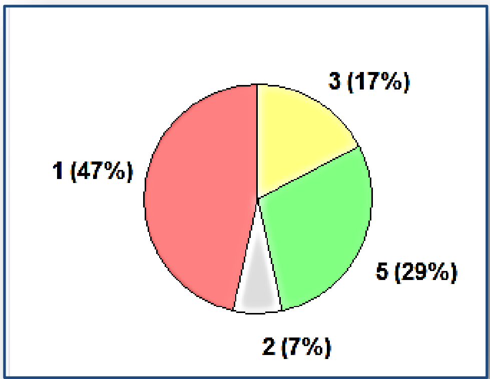
2) La siguiente gráfica representa el "todo" con cinco bolitas. ¿Cuál es la fracción representada por las tres bolitas grises?

Gráfica 2. Análisis estadístico pregunta 2. C1.1º año

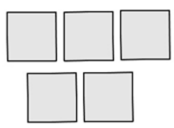
Se observa que en contextos discretos con solución no surgen dificultades en la mayoría. Pero hay errores por asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento que se ven reflejados en el porcentaje de respuestas incorrectas del tipo $\frac{3}{3}$ (consideran el todo al conjunto de objetos pintados); $\frac{3}{2}$ y $\frac{2}{3}$ (8%) o $\frac{5}{3}$ (2%) (error en parte-todo).

ACTIVIDAD 3 (86 alumnos evaluados)

Resultados Actividad 3



3) Si hay 5 tortas de chocolate como las que se muestran y se tienen que repartir en partes iguales entre cuatro niños, ¿cuánto le tocará a cada uno? Grafica cómo lo harías en el cuadriculado de la derecha.

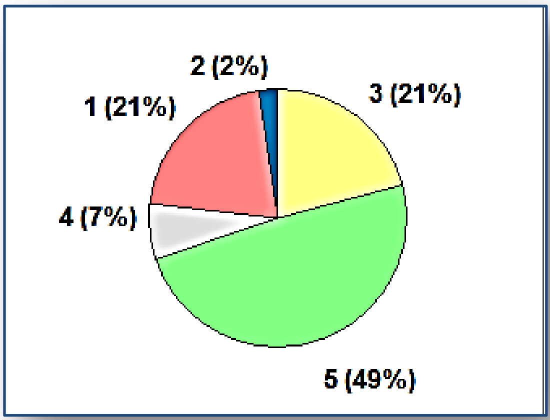


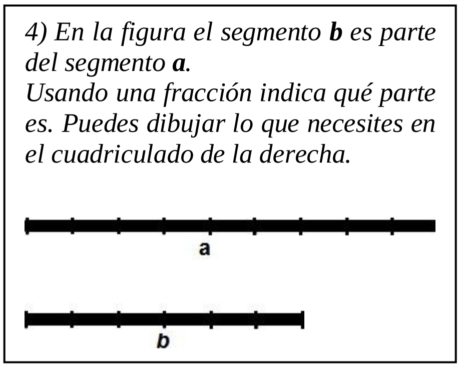
Gráfica 3. Análisis estadístico pregunta 3. C1.1º año

Sólo un 7% tiene problemas para particionar la última torta por lo que se observa que los alumnos pueden establecer la relación entre la cantidad de tortas y el número de personas pero que algunos todavía no han construido el concepto de fracción centrado en las relaciones "parte-todo" lo cual evidencia un conocimiento inadecuado de conceptos y propiedades matemáticos. Se les pidió graficar para evitar respuestas muy dispares.

ACTIVIDAD 4 (86 alumnos evaluados)

Resultados Actividad 4



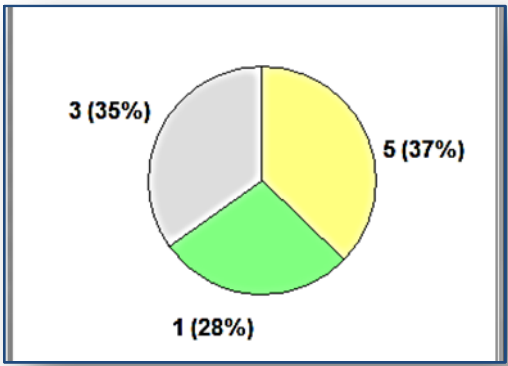


Gráfica 4. Análisis estadístico pregunta 4.C1.1º año

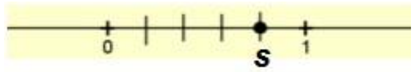
El 49% que no responden y el 21% incorrecto (algunos cuentan los extremos de los segmentos) sugieren que este significado, debido a que es primer año, no se trabaja en el Nivel Primario. El 21 % correcto resolvió la actividad intuitivamente por división mientras que el 2% presenta, nuevamente, error en parte-todo al expresar, por ejemplo, $\frac{9}{6}$

ACTIVIDAD 5 (86 alumnos evaluados)

Resultados Actividad 5



*5) ¿Cuál es la fracción que representa al punto **S** en la siguiente recta numérica?:*



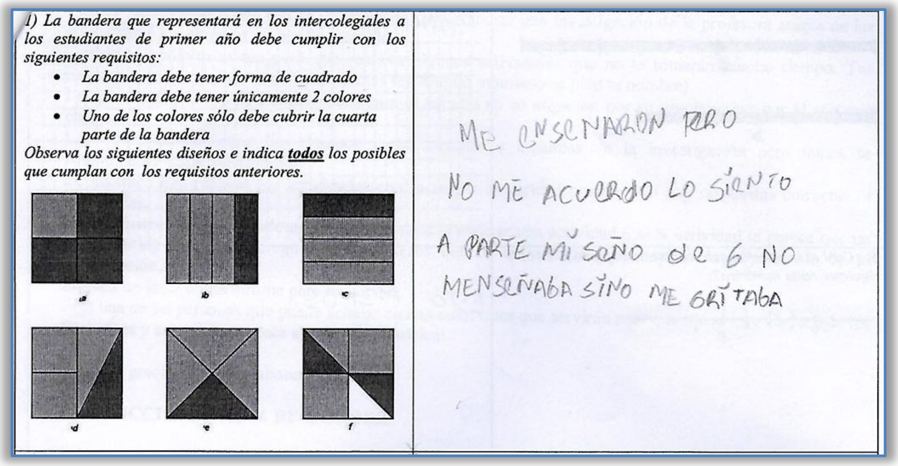
Gráfica 5. Análisis estadístico pregunta 5.C1.1º año

El mayor porcentaje se divide entre los que respondieron incorrectamente, de los cuales se intuye que cuentan las subdivisiones y no los segmentos desconociendo los roles de denominador y numerador, y los que no responden. De este hecho surge que este significado tampoco es trabajado en el Nivel Primario.

EJEMPLOS REPRESENTATIVOS DE LOS ERRORES OBSERVADOS

- ❖ **Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos**

Situaciones que escapan a lo esperado:



1) La bandera que representará en los intercolegiales a los estudiantes de primer año debe cumplir con los siguientes requisitos:

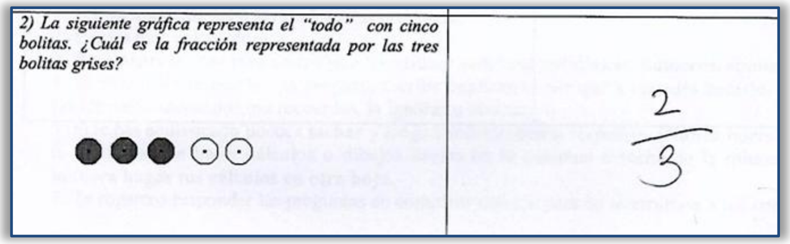
- *La bandera debe tener forma de cuadrado*
- *La bandera debe tener únicamente 2 colores*
- *Uno de los colores sólo debe cubrir la cuarta parte de la bandera*

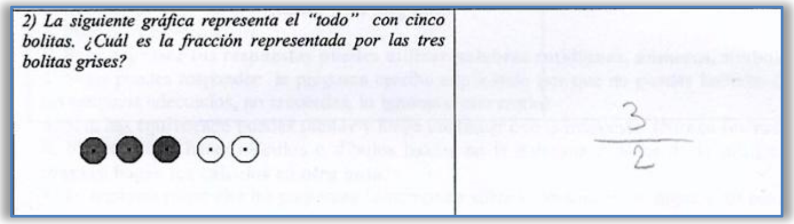
Observa los siguientes diseños e indica __todos__ los posibles que cumplan con los requisitos anteriores.

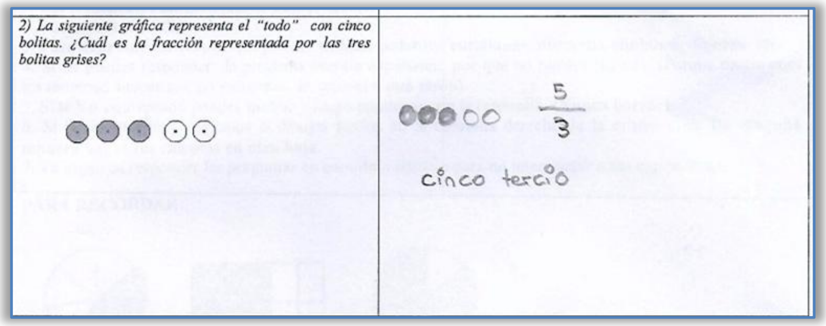
a b c d e f

ME ENSEÑARON PERO
NO ME ACUERDO LO SIENTO
A PARTE MI SEÑO DE 6 NO
MENSEÑABA SINO ME GRITABA

Es inadecuado el conocimiento de numerador, denominador y relación parte-todo:

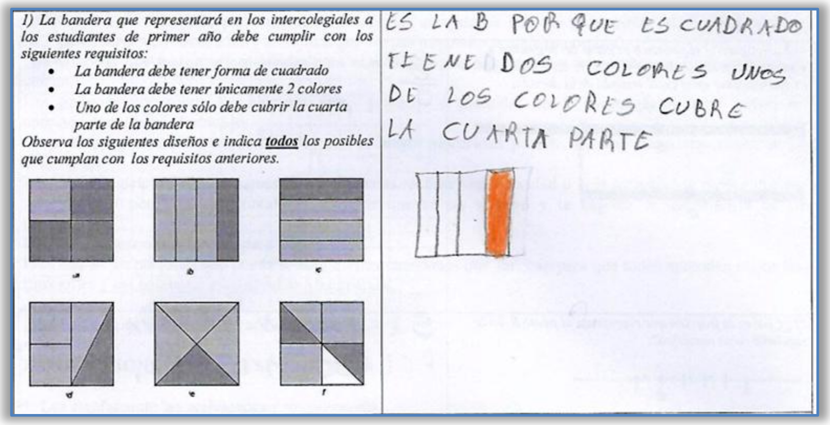


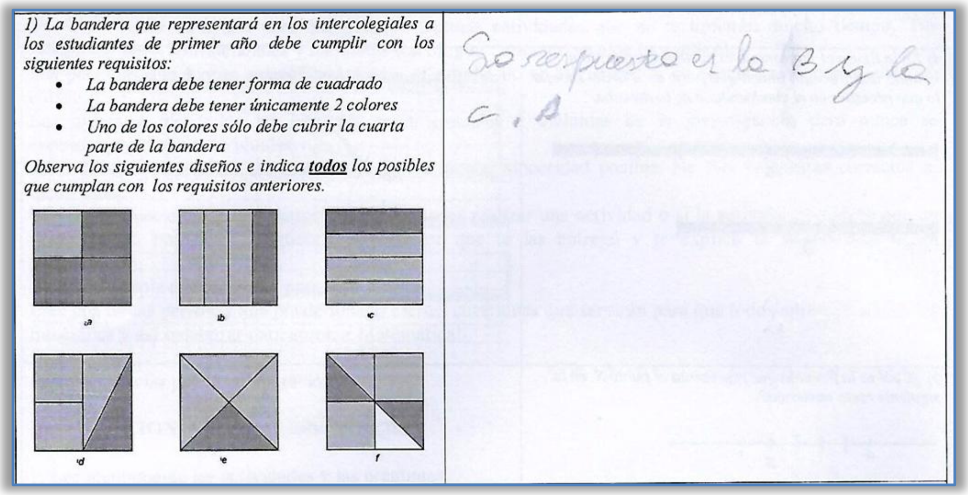




❖ **Errores debidos a dificultades para obtener información espacial**

Analizan sólo el caso que usan comúnmente o no pueden detectar otro tipo de particiones (necesitan una figura estándar):





1) La bandera que representará en los intercolegiales a los estudiantes de primer año debe cumplir con los siguientes requisitos:

- La bandera debe tener forma de cuadrado
- La bandera debe tener únicamente 2 colores
- Uno de los colores sólo debe cubrir la cuarta parte de la bandera

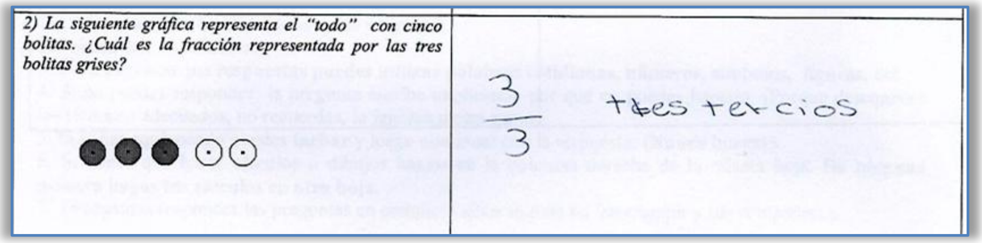
Observa los siguientes diseños e indica <u>todos</u> los posibles que cumplan con los requisitos anteriores.

So respuesta es la B y la C, A

- **Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento**

La carencia de aprendizajes de hechos, destrezas y conceptos previos inhiben totalmente el procesamiento de la información.

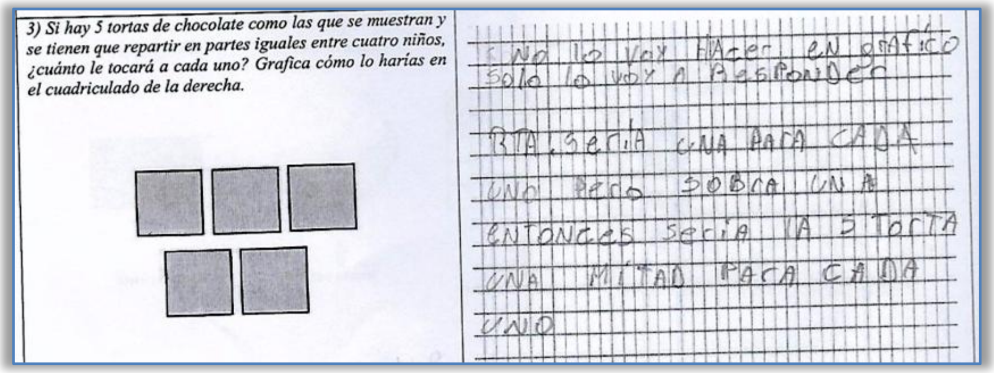
De acuerdo a lo señalado en la sección **2.1.1.2.,** en un contexto discreto se puede distorsionar el "todo":



2) La siguiente gráfica representa el "todo" con cinco bolitas. ¿Cuál es la fracción representada por las tres bolitas grises?

$\frac{3}{3}$ tres tercios

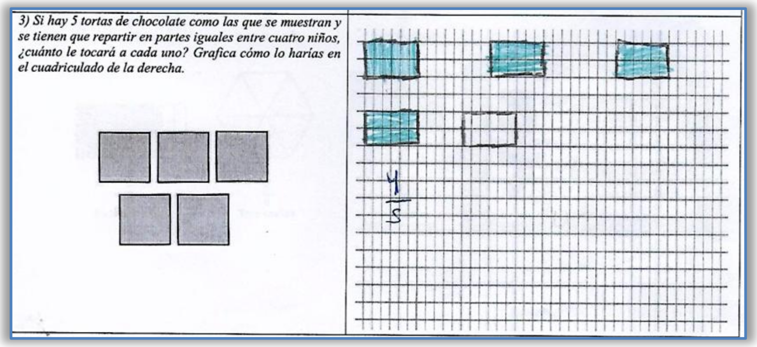
No logran percibir una partición para la última torta:



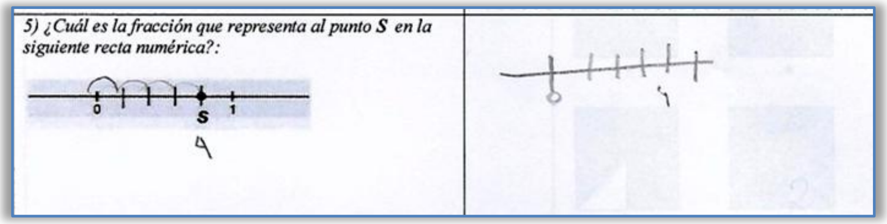
3) Si hay 5 tortas de chocolate como las que se muestran y se tienen que repartir en partes iguales entre cuatro niños, ¿cuánto le tocará a cada uno? Grafica cómo lo harías en el cuadriculado de la derecha.

NO LO VOY HACER EN GRÁFICO SOLO LO VOY A RESPONDER

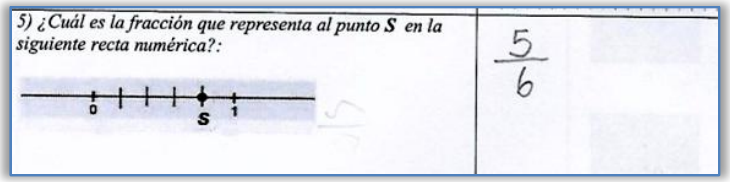
RTA: SERÍA UNA PARA CADA UNO PERO SOBRA UNA ENTONCES SERÍA LA 5 TORTA UNA MITAD PARA CADA UNO



Realizan asociaciones incorrectas con los números naturales:

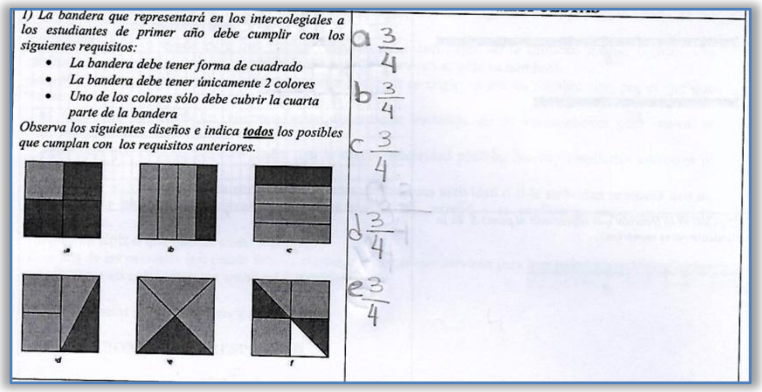


Procesan mal la información debido a razonamientos incorrectos (cuentan los extremos de las subdivisiones:



- **Errores debidos a dificultades en el lenguaje**

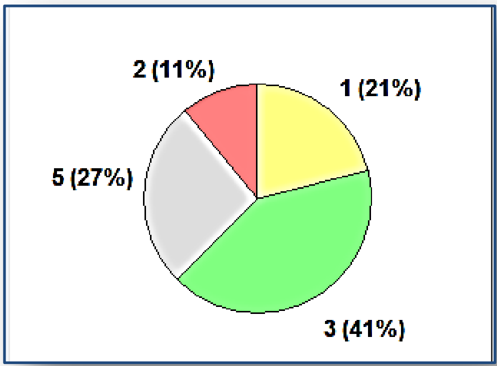
Da una respuesta diferente a la solicitada:



4.3.1.2. SEGUNDO AÑO

ACTIVIDAD 1 (109 alumnos evaluados)

Resultados Actividad 1



1) Andrés estaba comiendo una pizza (como la que se muestra) por partes: en el almuerzo comió ½ de la pizza, más tarde ¼ y a la noche 1/8. ¿Se comió completa la pizza? Realiza una gráfica indicando qué parte de la pizza se comió.

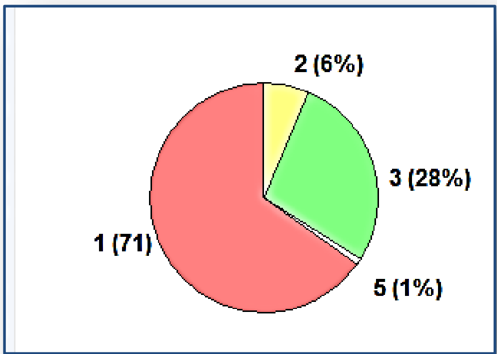
Gráfica 6. Análisis estadístico pregunta 1.C1. 2º año

Se observan dificultades para identificar el todo y las partes ya que las partes deben ser subdivididas en otras partes. Un 11% tiene problemas cuando tiene que dividir en octavos. Dentro del 27 % con faltas de respuestas se incluyen aquellos casos en los que iniciaron una división en ocho partes iguales pero no pudieron concluir la actividad.

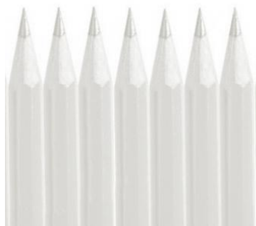
El error ha consistido en no poder pensar un todo (la unidad) dividido en ocho partes, del que se sacan algunas partes que deben pensarse equivalentes a la partición inicial (41%).

ACTIVIDAD 2 (109 alumnos evaluados)

Resultados Actividad 2



2) Ana tiene siete lápices como los de la figura. Pinta tres lápices de color rojo y cuatro de color azul, ¿qué fracción del total de lápices son de color azul?

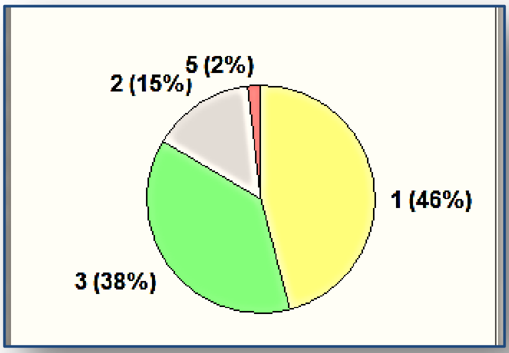


Gráfica 7. Análisis estadístico pregunta 2. C1.2º año

El 6% incluye los casos en que no se reconoce el todo y las partes ya que intercambian numerador con denominador. El 28% tiene dificultades para identificar una razón (significado que sigue sin ser trabajado durante primer año quizás porque no esté contemplado dentro del programa).

ACTIVIDAD 3 (109 alumnos evaluados)

Resultados Actividad 3



Gráfica 8. Análisis estadístico pregunta 3. C1.2º año

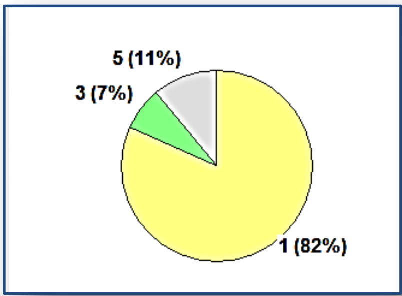
En esta actividad se esperaban dos posibles enfoques para la respuesta:

- si el todo son las ocho caritas
- si el todo son caritas embolsadas de a dos

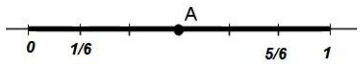
Ambas respuestas se considerarían correctas pero la interpretación fue única: el todo son las ocho caritas lo cual evidencia una práctica escasa del significado parte-todo en un contexto discreto. Sigue siendo alto el porcentaje (15%) en el cual intercambian numerador y denominador mientras que el 38% evidencia errores debidos a aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos (tiene dificultades con las particiones y el todo).

ACTIVIDAD 4 (109 alumnos evaluados)

Resultados Actividad 4



*4) ¿Cuál es la fracción que representa al punto **A** en la siguiente recta numérica?:*

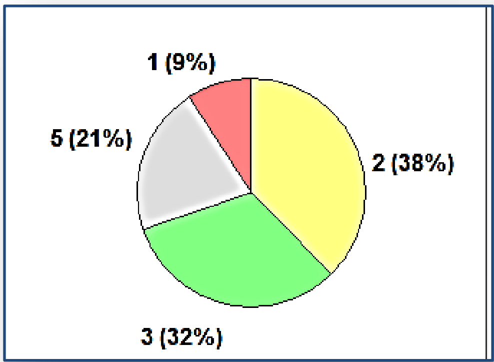


Gráfica 9. Análisis estadístico pregunta 4. C1.2º año

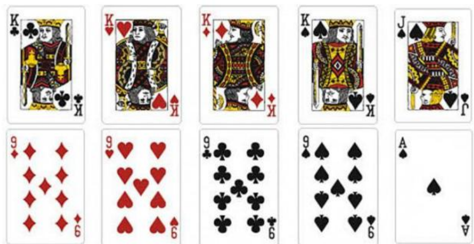
El porcentaje (11%) que desconoce la actividad evidencia que este significado no se trabajó lo suficiente durante 1º año.

ACTIVIDAD 5 (109 alumnos evaluados)

Resultados Actividad 5



Gráfica 10. Análisis estadístico pregunta 5. C1. 2º año



5)
Dadas las 10 cartas anteriores:

a) ¿Cuántas cartas son $\frac{1}{10}$ *?*

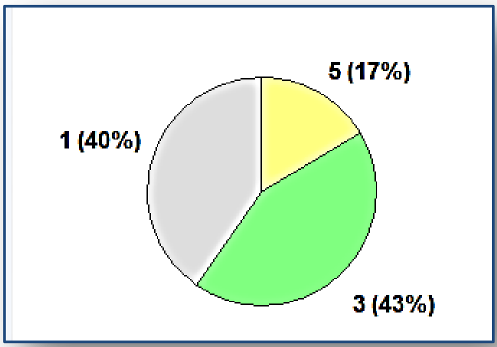
b) ¿Cuántas cartas son $\frac{1}{2}$*?*

c) Reparte, sin importar cuáles, las 10 cartas anteriores entre las 5 personas de la derecha. ¿Qué fracción de las cartas le corresponde a cada uno

En situaciones de reparto en contextos discretos no relacionan la fracción con una cantidad; el 38% no contestó los ítems a) y b) y el 32% contestó incorrectamente.

ACTIVIDAD 6 (109 alumnos evaluados)

Resultados Actividad 6



6) En la pastelería de don José se hornean 250 pasteles en el día, de los cuales 3/10 son de membrillo. ¿Cuántos pasteles de membrillo se hornean en el día?

Gráfica 11. Análisis estadístico pregunta 6. C1.2º año

Se desconoce el significado de fracción como operador ya que:

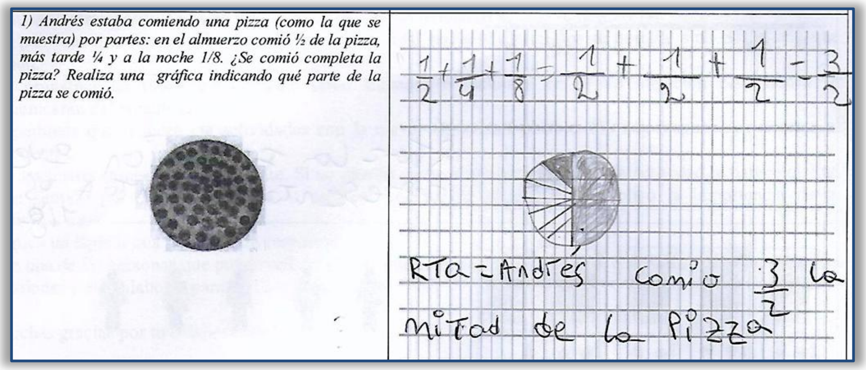
- no hacen uso de las operaciones correspondientes sino que separan en 10 bloques y llegan a la respuesta correcta contando.
- un 43% contestó incorrectamente realizando razonamientos erróneos $\left(\frac{250}{3} = 83\right)$.

Sin embargo la resolución de esta actividad sugiere que hubo comprensión del problema y de la fracción como razón en un 40%.

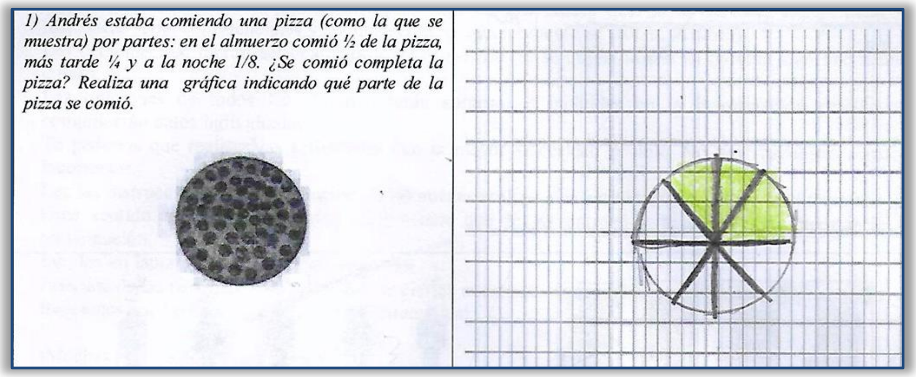
EJEMPLOS REPRESENTATIVOS DE LOS ERRORES OBSERVADOS

- **Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos**

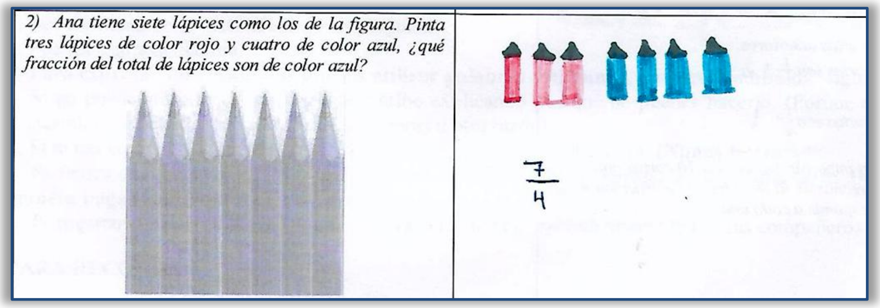
  Utilizan inadecuadamente un algoritmo:



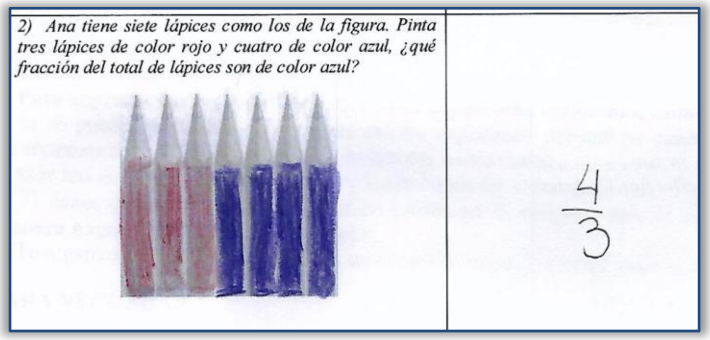
Ignoran el concepto de fracciones equivalentes:

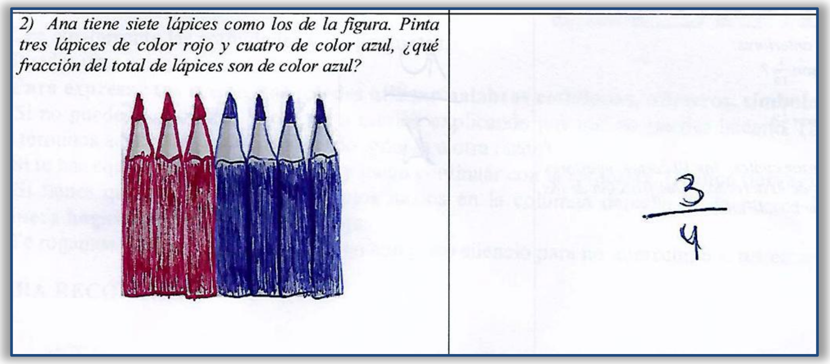


Ignoran significado de numerador y denominador:

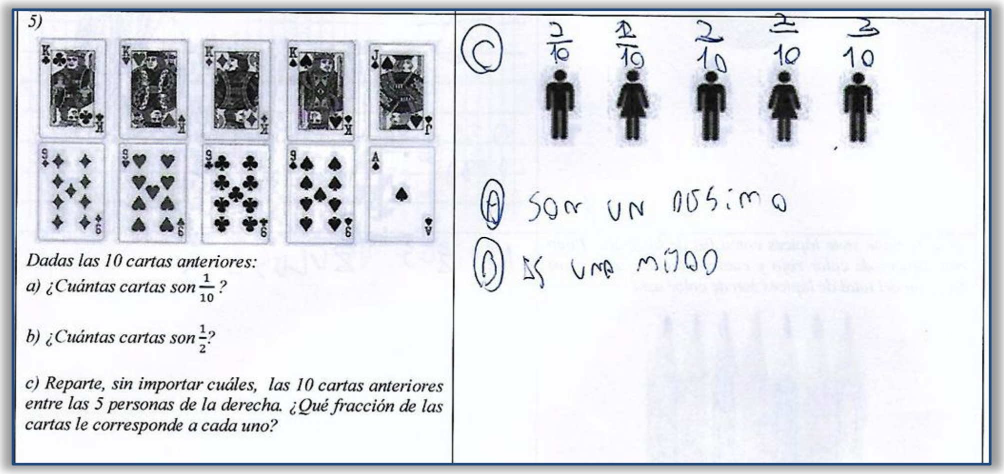


Ignoran el significado de la fracción como razón (o bien el todo si se piensa el significado parte-todo en contexto discreto):



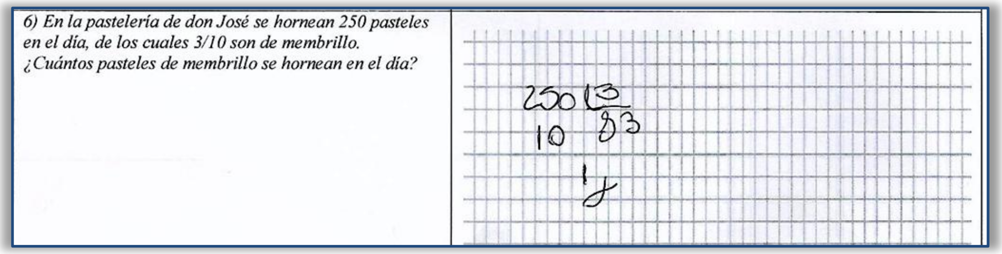


Ignoran el significado de fracción como operador:



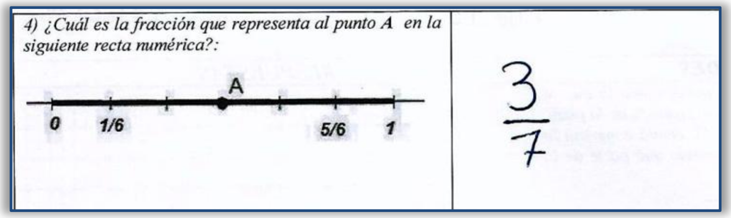
❖ Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes

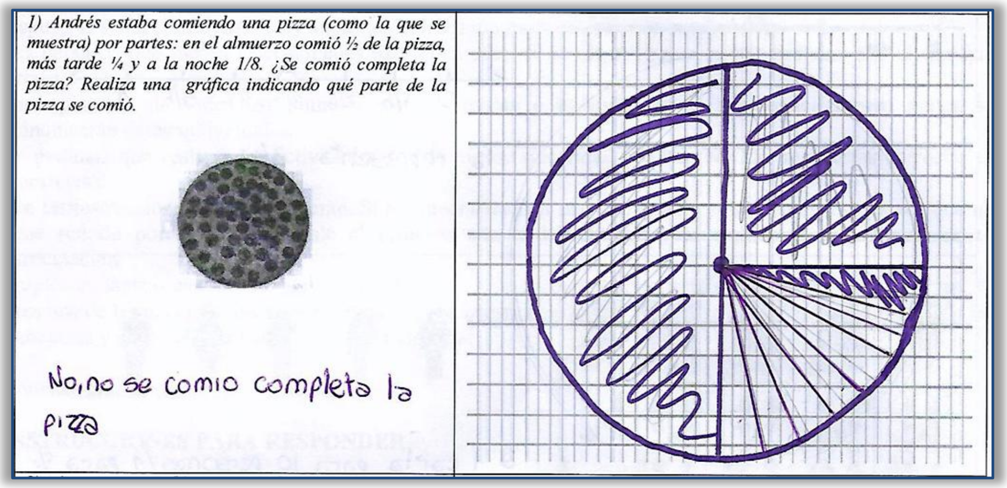
Desconocen el significado de la fracción como cociente (la relación entre cociente, resto y fracción) por lo que se aplica a situaciones donde no es pertinente:



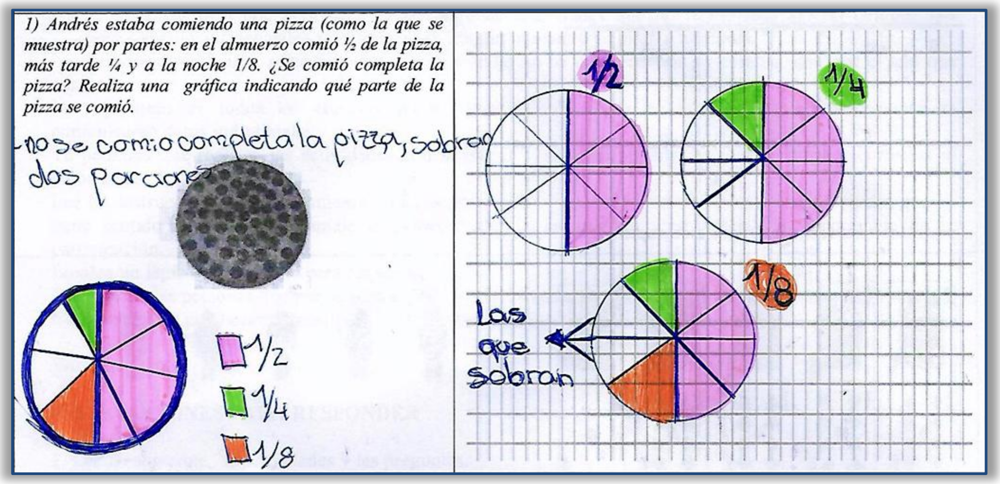
❖ Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento

Procesan mal la información debido a razonamientos incorrectos:



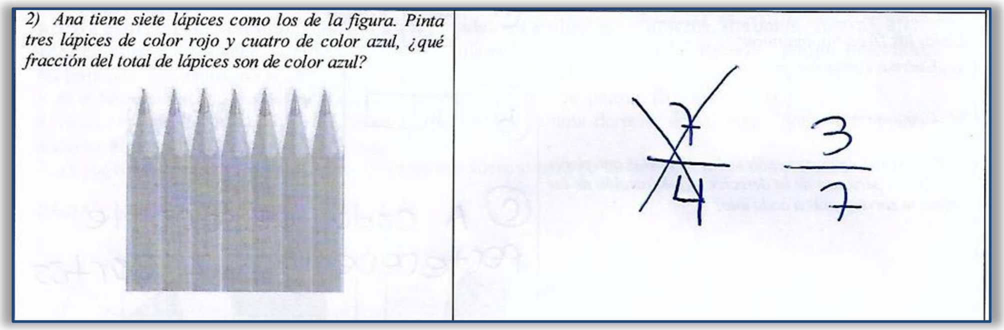


Realizan razonamientos incorrectos:



❖ Errores debidos a dificultades en el lenguaje

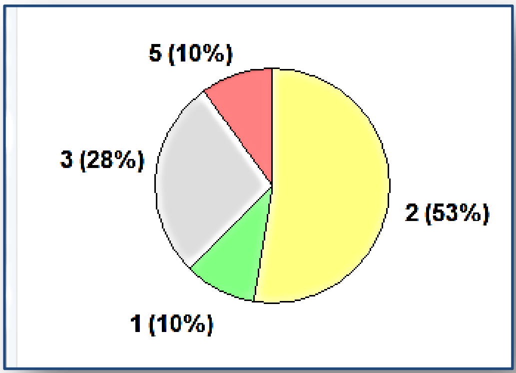
Da una respuesta diferente:



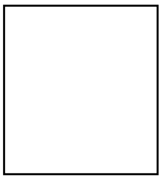
4.3.1.3. TERCER AÑO

ACTIVIDAD 1-a (40 alumnos evaluados)

Resultados Actividad 1-a



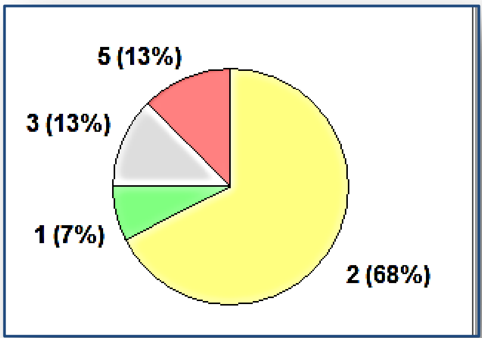
1) Utiliza la cuadrícula de la derecha para completar a la unidad si:
a) El cuadrado es un tercio de la unidad:



Gráfica 12. Análisis estadístico pregunta 1a. C1.3º año

ACTIVIDAD 1-b (40 alumnos evaluados)

Resultados Actividad 1-b



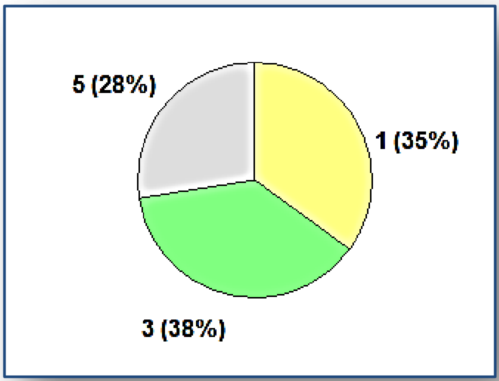
b) El rectángulo es dos cuartos de la unidad:

Gráfica 13. Análisis estadístico pregunta 1.b. C1.3º año

No pueden reconocer el todo, que siempre se conserva, cuando se pide reconstruir la unidad (53%) lo cual se agrava al tratarse de una figura no convencional (68%). El dominio del significado parte-todo requiere algunas habilidades como la capacidad de dividir un todo en partes, reconocer el todo, realizar divisiones “iguales”, reconocer las partes del todo entre otras. Esta falencia en alumnos de Nivel Secundario permite comprender las dificultades a las que se enfrentan dado que, desde el Nivel Primario, no han adquirido una base sólida a partir de la cual ampliar sus conocimientos.

ACTIVIDAD 2 (40 alumnos evaluados)

Resultados Actividad 2



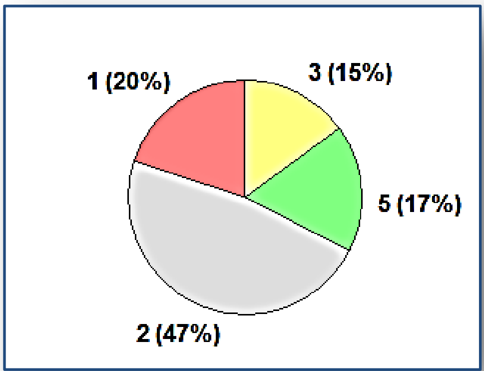
2) En clase de artística los alumnos están haciendo collares, la profesora les dijo que 4 perlas representaban las 2/5 partes de las perlas para elaborarlos. ¿Cuántas perlas deben comprar?

Gráfica 14. Análisis estadístico pregunta 2. C1.3º año

Que el 38% no logre relacionar fracción con cantidad y el 28% no tenga respuesta evidencia que no se avanzó en la comprensión del significado de la fracción desde 2º año: plantean operaciones del tipo $4 \times \frac{2}{5} = \frac{8}{20}$; $4 \times \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$ no sólo incorrectas sino que demuestran un mal procesamiento de la información e ignoran las respuestas incoherentes.

ACTIVIDAD 3 (40 alumnos evaluados)

Resultados Actividad 3



3) En la reunión familiar de Lucia hay 11 personas. Compran tres pizzas y Lucia las debe repartir de manera que cada uno coma la misma cantidad. Dibuja la forma en cómo repartiría las tres pizzas.

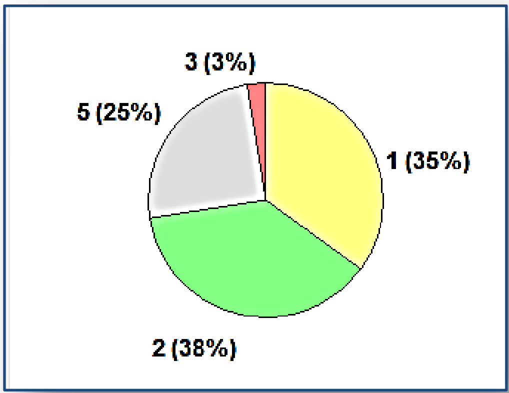
Gráfica 15. Análisis estadístico pregunta 3. C1.3º año

Se observa que algunos alumnos incluyeron a Lucía dentro de las 11 personas y otros lo plantearon considerando 12 personas; esto demuestra un correcto análisis del problema (se consideraron ambas situaciones).

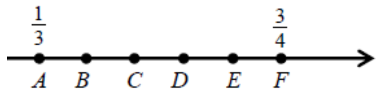
El alto porcentaje (47%) con errores importantes evidencia que todavía no se ha realizado la construcción del concepto de fracción y aún más la relación parte-todo dado que en la partición que realizan no se evidencia el concepto de partición equitativa por lo cual realiza partición diferentes.

ACTIVIDAD 4 (40 alumnos evaluados)

Resultados Actividad 4



4) Los puntos de A a F se encuentran a la misma distancia uno del otro sobre la recta numérica. El punto A representa el número $\frac{1}{3}$ y el punto F el número $\frac{3}{4}$



Entonces la fracción que representa al punto E es:

a) $\frac{5}{12}$ *b)* $\frac{2}{3}$ *c)* $\frac{4}{12}$ *d)* $\frac{5}{3}$

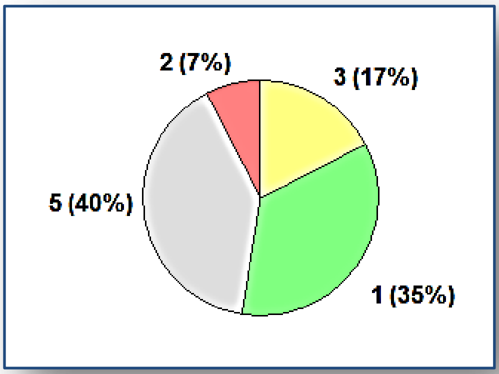
Gráfica 16. Análisis estadístico pregunta 4. C1.3º año

Algunos alumnos propusieron estrategias dentro del campo de la matemática intuitiva, es decir, con base en el contexto intentaron aplicar un procedimiento que los llevara a la solución adecuada y no se basaron en el uso de operaciones y reglas simbólicas.

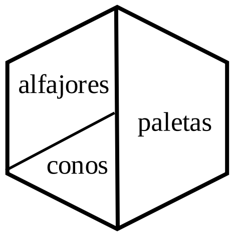
El 38% no tuvo en cuenta la necesidad de usar fracciones equivalentes en relación al significado de unidades congruentes sobre la recta numérica y cometió el error de extrapolar procedimientos de los números naturales a las fracciones para contestar $\frac{5}{3}$ lo cual hace evidente que tampoco se trabajan conceptos fundamentales que diferencian ambos conjuntos numéricos como es la densidad en las fracciones.

ACTIVIDAD 5 (40 alumnos evaluados)

Resultados Actividad 5



5) El siguiente diagrama representa las preferencias de un grupo de alumnos con relación a los helados. En base a la información dada, ¿qué fracción de alumnos prefiere paletas?, ¿qué fracción de alumnos prefiere alfajores?

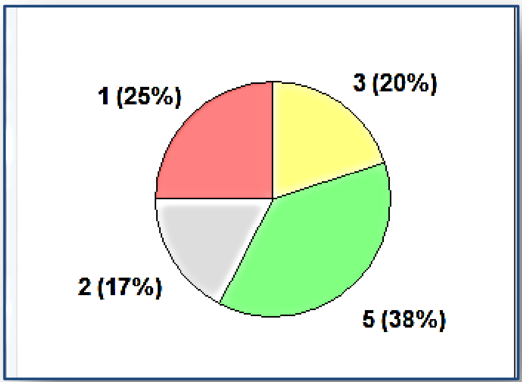


Gráfica 17. Análisis estadístico pregunta 5. C1.3º año

En este caso también se observan errores debidos a dificultades para obtener información espacial ya que los alumnos se dejan llevar por lo visual y no realizan la partición en forma correcta. El 40% sin respuesta expresa que otra vez la falta de dominio del significado parte-todo.

ACTIVIDAD 6 (40 alumnos evaluados)

Resultados Actividad 6



6) Amelia ha gastado 3/8 de sus ahorros en la compra de un celular que le ha costado $ 6501. ¿Cuánto dinero tenía ahorrado?

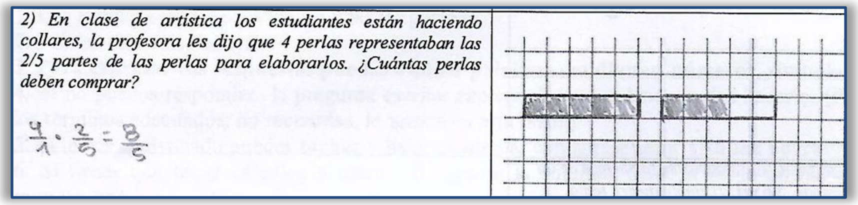
Gráfica 18. Análisis estadístico pregunta 6. C1.3º año

En este problema se visualiza cómo el alumno (17%) solo recurre a la división con 8 como estrategia de solución y no verifica si la respuesta obtenida es válida o no y si a partir de esta encuentra la solución al problema planteado mientras que el 20% recurre a multiplicar por 3. El 38% sin respuesta indica que todavía no se conoce el significado como operador.

EJEMPLOS REPRESENTATIVOS DE LOS ERRORES OBSERVADOS

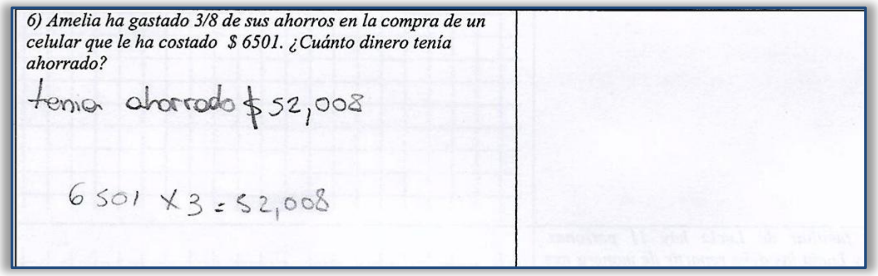
❖ **Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos**

Desconocen la relación entre fracción y cantidad:



2) En clase de artística los estudiantes están haciendo collares, la profesora les dijo que 4 perlas representaban las 2/5 partes de las perlas para elaborarlos. ¿Cuántas perlas deben comprar?

$\frac{4}{1} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$

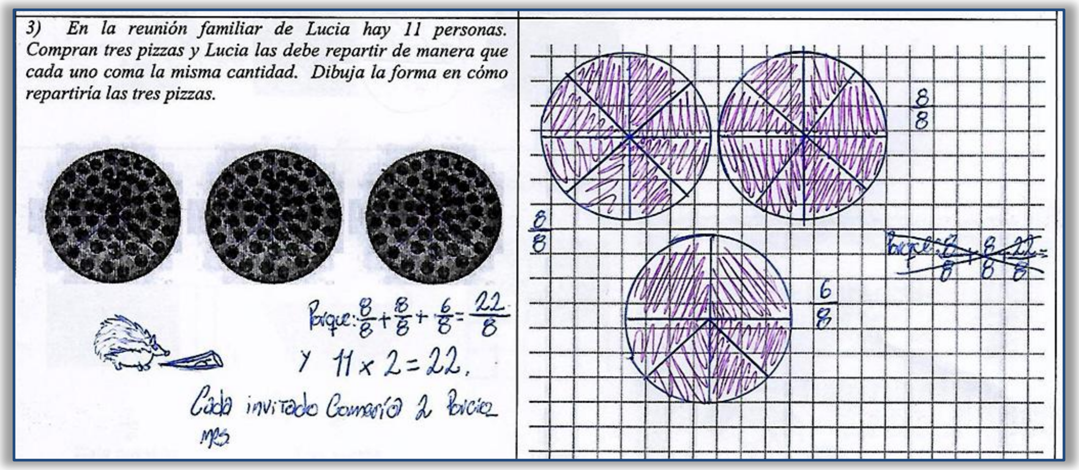


6) Amelia ha gastado 3/8 de sus ahorros en la compra de un celular que le ha costado $ 6501. ¿Cuánto dinero tenía ahorrado?

tenia ahorrado $52,008

6501 x 3 = 52,008

No respetan particiones iguales (“iguales”):



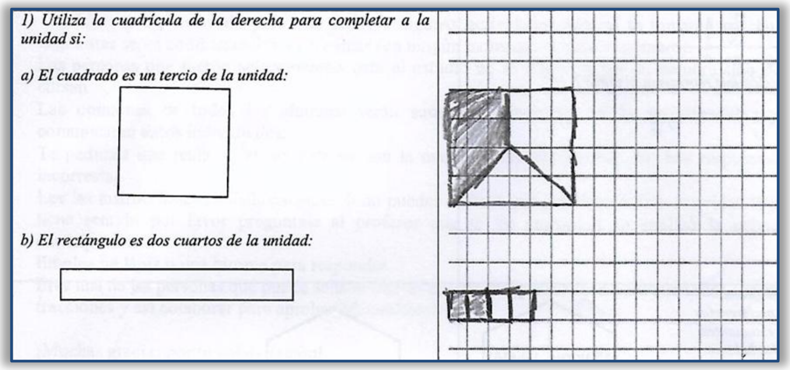
3) En la reunión familiar de Lucia hay 11 personas. Compran tres pizzas y Lucia las debe repartir de manera que cada uno coma la misma cantidad. Dibuja la forma en cómo repartiría las tres pizzas.

Porque: $\frac{8}{8} + \frac{8}{8} + \frac{6}{8} = \frac{22}{8}$

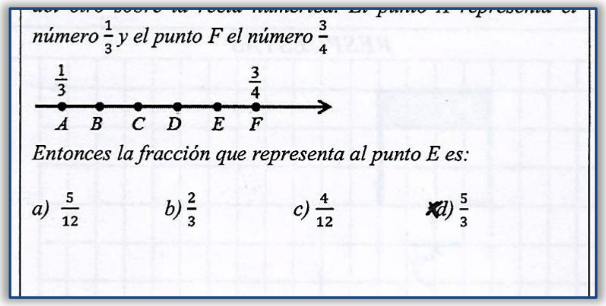
y 11 x 2 = 22.

Cada invitado Comerío 2 Porciones

No reconocen la unidad, el “todo”:

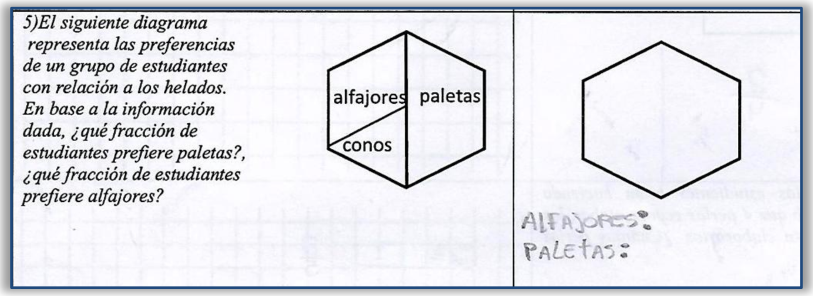


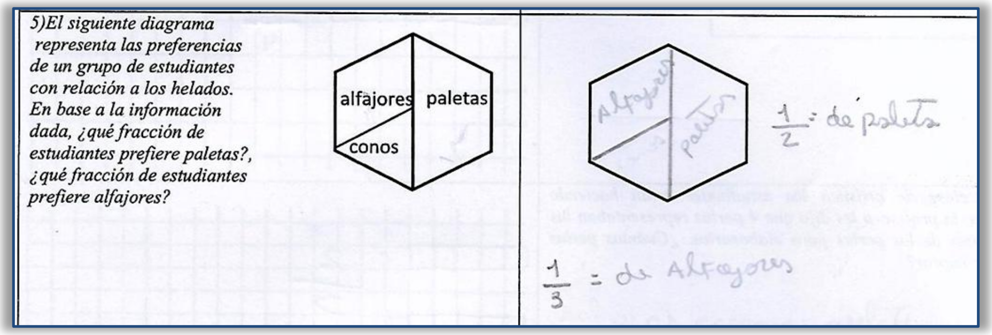
Extrapolan procedimientos de los números naturales a las fracciones:



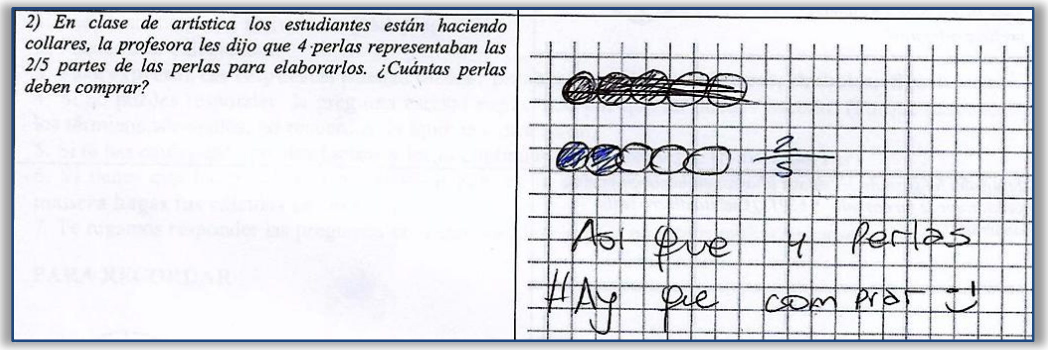
❖ Errores debidos a dificultades para obtener información espacial

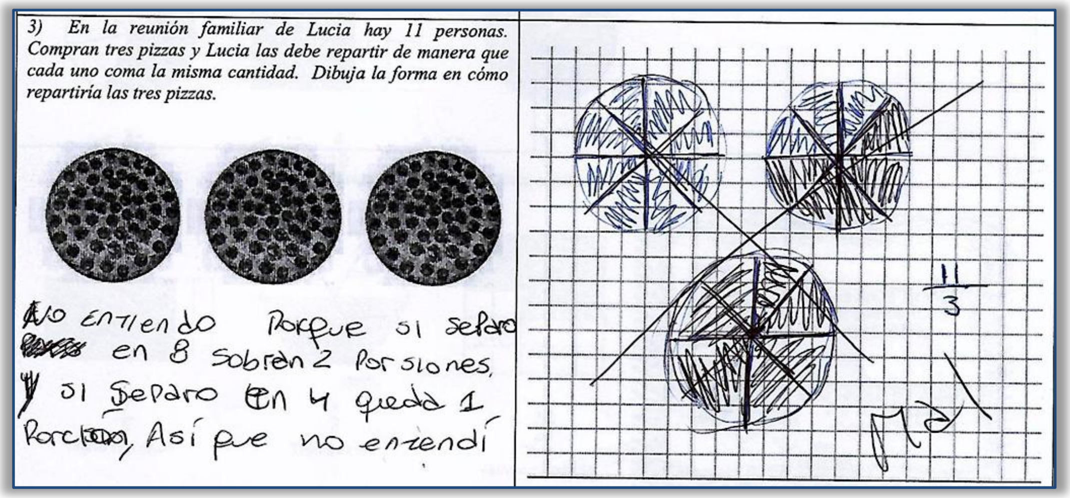
No obtienen datos u obtienen datos erróneos de información espacial:





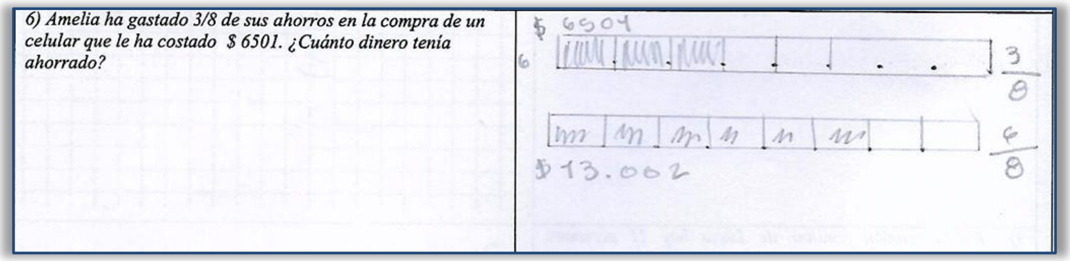
❖ **Errores debidos a dificultades en el lenguaje**



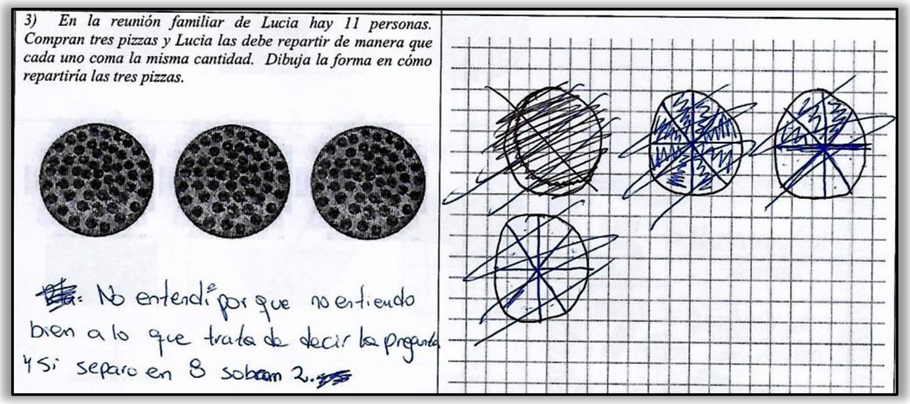


❖ **Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento**

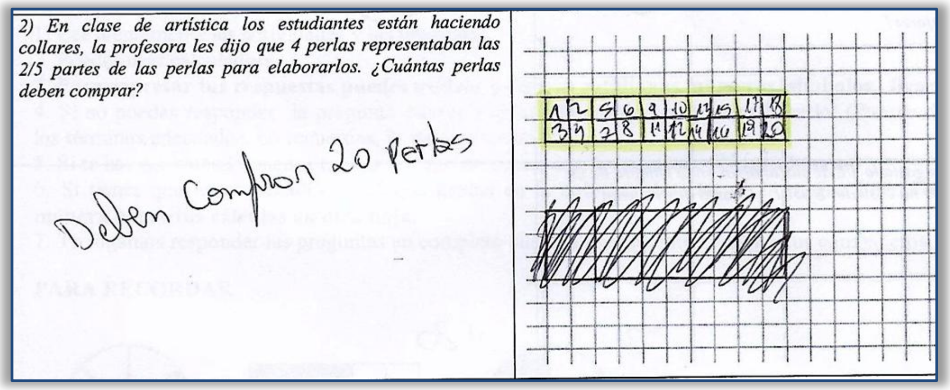
Recurren a estrategias conocidas pero no pueden llegar a la respuesta:



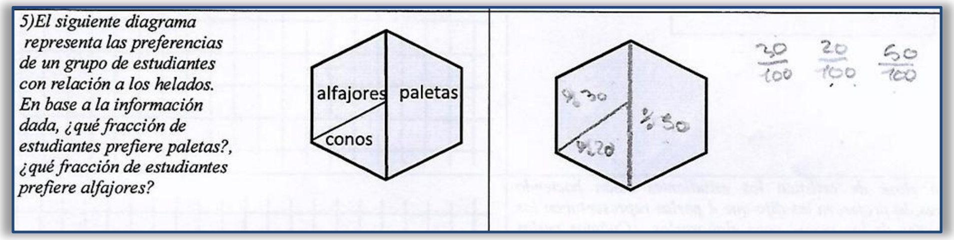
No consideran que puede haber cantidades diferentes de subdivisiones en cada unidad:



No hay relación entre las partes, el todo y una cantidad:



Recurren a otro significado de la fracción en forma incorrecta:



4.3.2. PRUEBA CON OPERACIONES ENTRE FRACCIONES

En esta escuela el área de matemática considera que es apresurado introducir el uso de calculadoras en el ciclo básico dado que se quiere potenciar el proceso natural de razonamiento del alumno y se considera que deben desarrollar sus habilidades de cálculo de forma independiente a cualquier herramienta tecnológica. Al respecto, Dickson, Brown y Gibson (1984) expresan que:

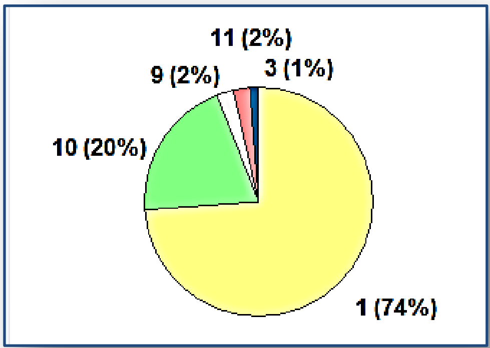
> Parece verosímil que los procedimientos computacionales para la manipulación de fracciones son, pues, introducidos bastante

prematuramente y antes de haberlos cimentado suficientemente en situaciones concretas (...) Como proponen J. S. Brown y Van Lehn parece verosímil que la mayoría de los alumnos olviden parte de los procedimientos que les han enseñado y tratan de “repararlos”. Dado que en muchos casos apenas si existe una comprensión conceptual que oriente y sirva de ayuda, las “reparaciones” suelen contener pasos incoherentes con la estructura matemática y, por tanto, provocan errores. (p.307)

4.3.2.1. PRIMER AÑO

ACTIVIDAD 1 (84 alumnos evaluados)

Resultados Actividad 1



1) $\frac{2}{7}+\frac{11}{7}$

Gráfica 19. Análisis estadístico pregunta 1. C2.1º año

El 20% sin respuesta afirma que los alumnos no han interiorizado el concepto de fracción y que no se aprovecha el significado parte-todo para introducir la operación de suma con igual denominador. Se observan algunos errores de aplicación de procedimientos mecánicos buscando un común denominador.

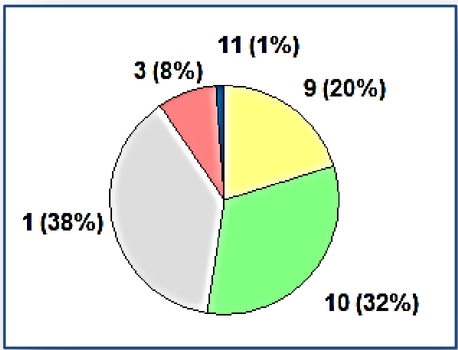
❖ Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento

1) $\frac{2}{7}+\frac{11}{7}$	$\frac{2}{7}+\frac{11}{7}=\frac{49}{49}+\frac{77}{49}=\frac{126}{49}$

1) $\frac{2}{7}+\frac{11}{7}$ $\frac{7\times 2}{7\times 7}+\frac{7\times 11}{7\times 7}=\frac{14+77}{49}=91$	

ACTIVIDADES 2 y 3 (84 alumnos evaluados)

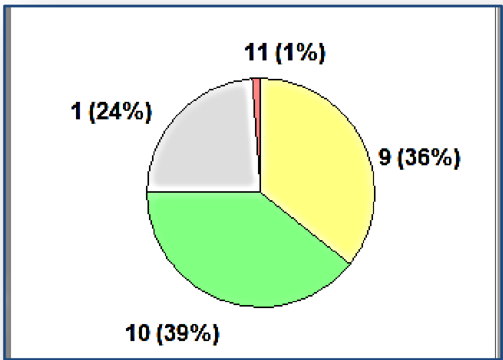
Resultados Actividad 2



2) $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$

Gráfica 20. Análisis estadístico pregunta 2. C2.1º año

Resultados Actividad 3

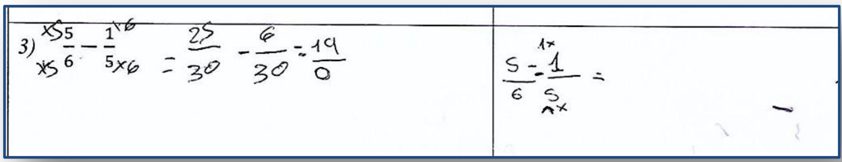


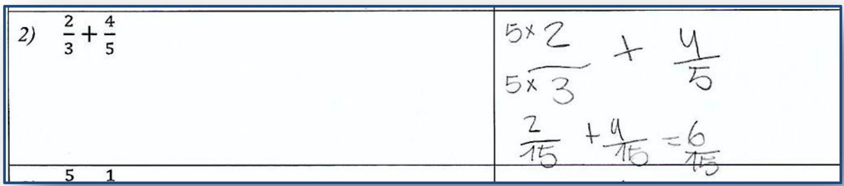
3) $\frac{5}{6}-\frac{1}{5}$

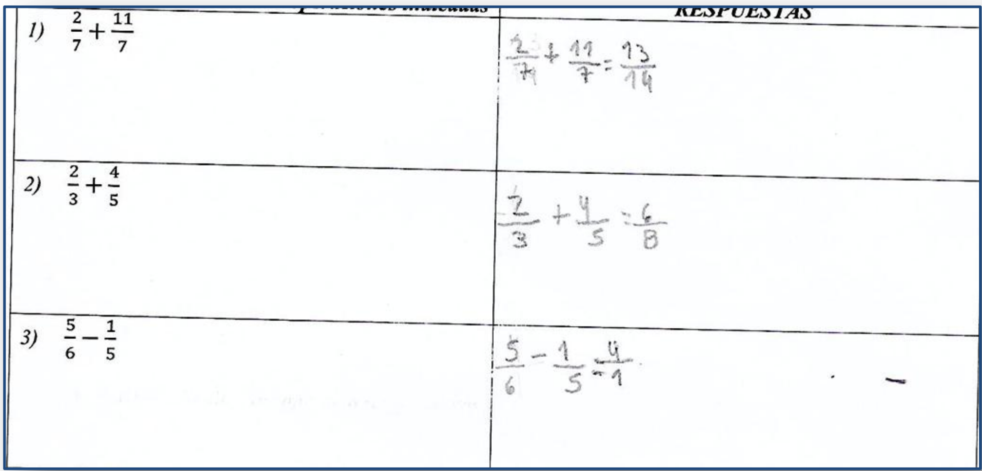
Gráfica 21. Análisis estadístico pregunta 3. C2.1º año

A pesar de que, básicamente la dificultad es la misma (encontrar fracciones equivalentes para realizar la operación indicada), es mayor el porcentaje sin respuesta en el caso de la resta, 39% contra 32%. Comienza a manifestarse la dificultad de comprender el símbolo de la fracción como un único número y no como un par de números naturales que no están relacionados entre sí. Así el 36% opera por separado denominadores y numeradores en la resta y el 20% en la suma al que se le debe agregar un 8% que no aplica correctamente el algoritmo de la suma (no han adquirido el concepto de fracciones equivalentes y realizan procedimientos memorísticos).

- ❖ **Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos**

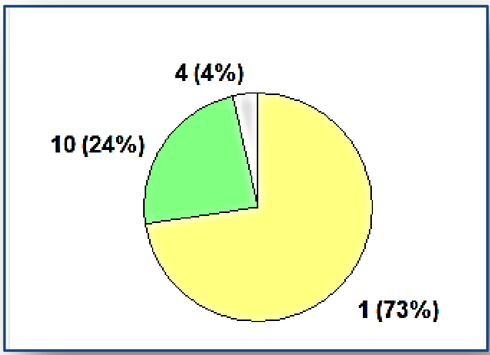






ACTIVIDADES 4 y 5 (84 alumnos evaluados)

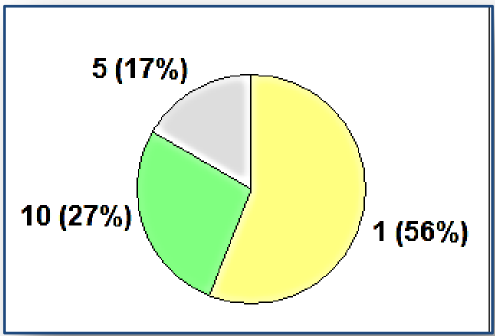
Resultados Actividad 4



4) $\frac{3}{5} \times \frac{4}{7}$

Gráfica 22. Análisis estadístico pregunta 4. C2.1º año

Resultados Actividad 5



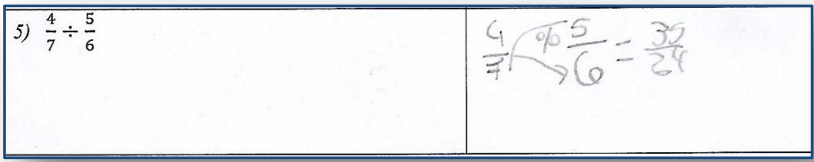
5) $\frac{4}{7} \div \frac{5}{6}$

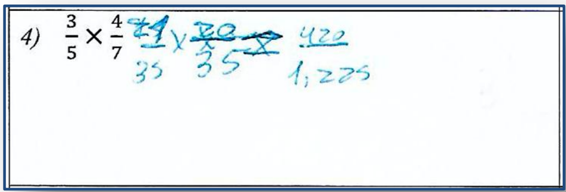
Gráfica 23. Análisis estadístico pregunta 5. C2.1º año

En la multiplicación comienza a surgir el error de buscar fracciones equivalentes al igual que en la suma. Esta dificultad, que nace de la falta de comprensión de la definición de la multiplicación entre fracciones y es manifestada por un 4%, debe ser tenida en cuenta al igual que el 24% sin respuesta para evitar complicaciones futuras.

En cuanto a la división se constata el hecho de que los procedimientos memorísticos no permiten comprensión ya que un 17% comete errores y un 27% no puede responder.

- **Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos**

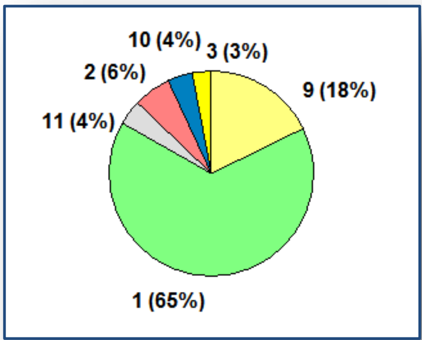




4.3.2.2. SEGUNDO AÑO

ACTIVIDADES 1 y 2 (101 alumnos evaluados)

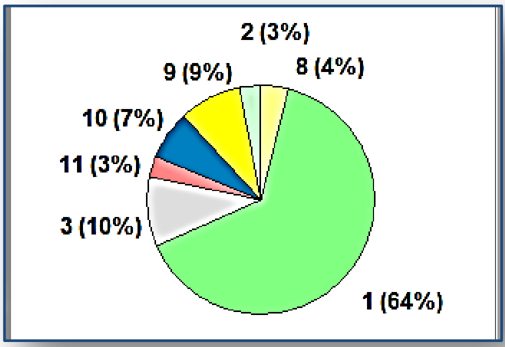
Resultados Actividad 1



1)	$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$

Gráfica 24. Análisis estadístico pregunta 1. C2.2º año

Resultados Actividad 2



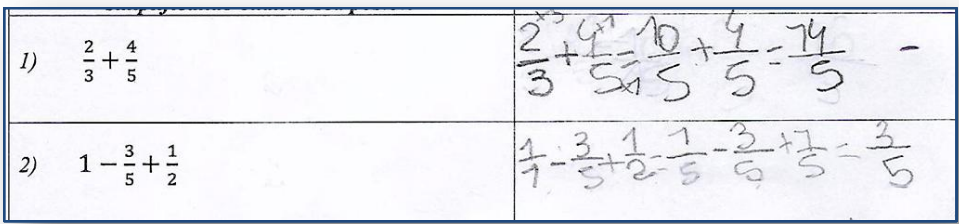
2) $1 - \frac{3}{5} + \frac{1}{2}$

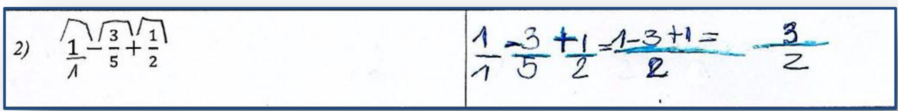
Gráfica 25. Análisis estadístico pregunta 2.C2. 2º año

Al sumar dos fracciones la situación sugiere que se mejoró la comprensión del "común denominador" pero hay un 18% que sigue sumando denominadores y numeradores por separado, un 6% que lo calcula mal y un 3% que comete error con los numeradores.

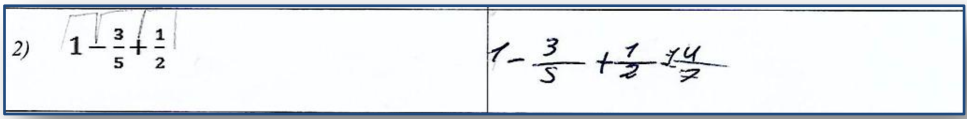
Al combinar un número natural con las fracciones se manifiesta en un 4% la dificultad para pensar el número natural en términos de una fracción.

- **Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos**



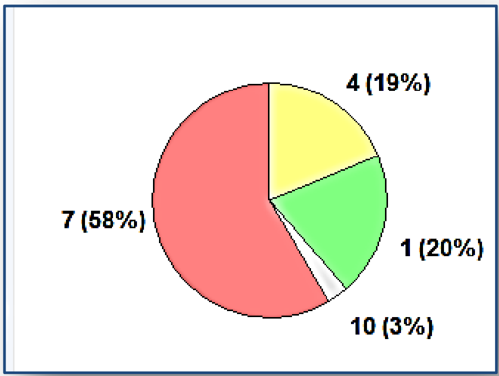


❖ **Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento**



ACTIVIDADES 3 y 4 (101 alumnos evaluados)

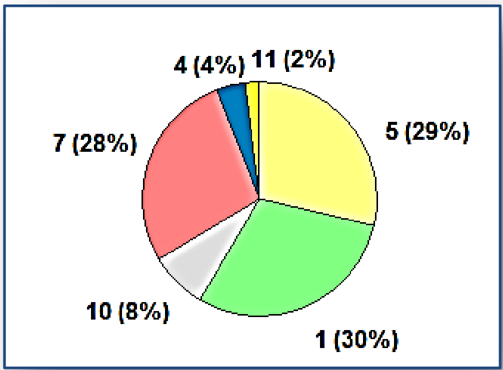
Resultados Actividad 3



3) $\frac{4}{6} \times \frac{3}{5}$

Gráfica 26. Análisis estadístico pregunta 3.C2. 2º año

Resultados Actividad 4



4) $\frac{7}{8} \div \frac{5}{4}$

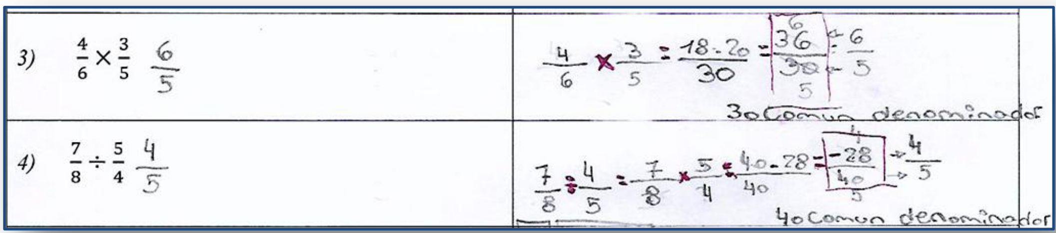
Gráfica 27. Análisis estadístico pregunta 4.C2. 2º año

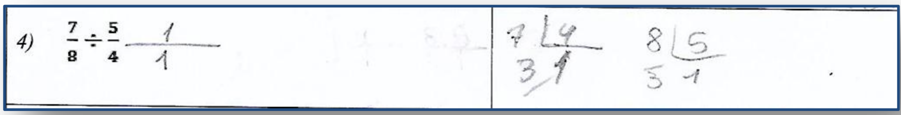
Si bien se solicitó simplificar comienzan a manifestarse los casos (58% y 28% con operaciones correctas) en los cuales la simplificación no se realizó o fue incompleta; esto puede deberse a desconocimiento, conocimiento inadecuado o falta de atención ante la consigna. González del Olmo (2015) señala que, cuando aparecen simplificaciones incompletas, se debe a lagunas en los conocimientos previos y, en este caso, estos errores están relacionados con la comparación de fracciones, es decir, con las fracciones equivalentes.

Los errores cometidos en la multiplicación entre fracciones (19%) manifiestan dificultades conceptuales respecto a la misma que se agrava cuando hay que multiplicar un natural por una fracción. Este error puede atribuirse a una falta de relación entre los números naturales y su representación como fracción.

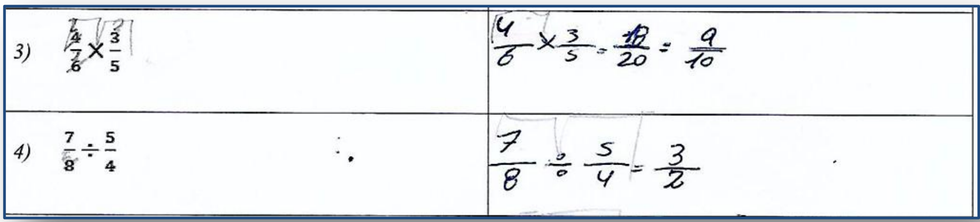
En relación con este error entran en conflicto con la definición de la división (29%) y no recuerdan cómo corresponde operar en cada caso. La enseñanza de la división debería obviar "la multiplicación cruzada", usar correctamente la definición que surge de la multiplicación (los alumnos terminan dividiendo "cruzado") y así mejoraría la comprensión de cada uno de los procedimientos. El 4% aplica bien la definición de la división pero arrastra dificultades con la multiplicación.

- **Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento**



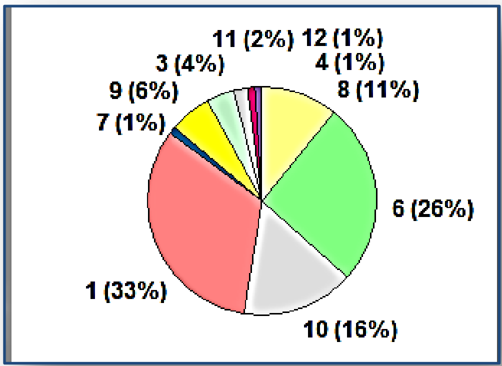


❖ **Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos**



ACTIVIDADES 5 - 6 - 7 - 8 - 9 y 10 (101 alumnos evaluados)

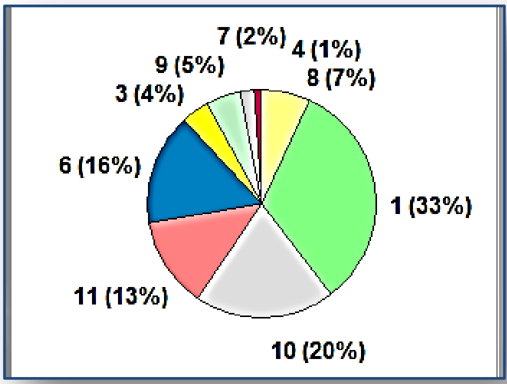
Resultados Actividad 5



5) $3 - 2 \times \frac{3}{5}$

Gráfica 28. Análisis estadístico pregunta 5.C2. 2º año

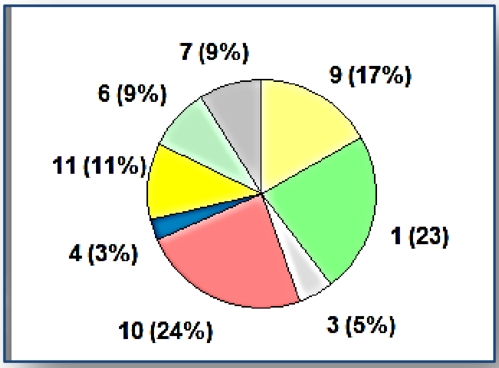
Resultados Actividad 6



6) $3 \times \frac{1}{2} - \frac{3}{5}$

Gráfica 29. Análisis estadístico pregunta 6.C2. 2º año

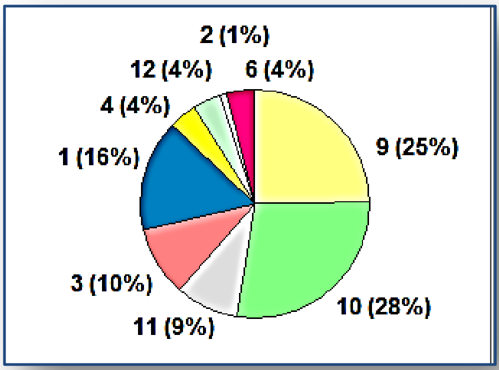
Resultados Actividad 7



7) $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3}$

Gráfica 30. Análisis estadístico pregunta 7.C2. 2º año

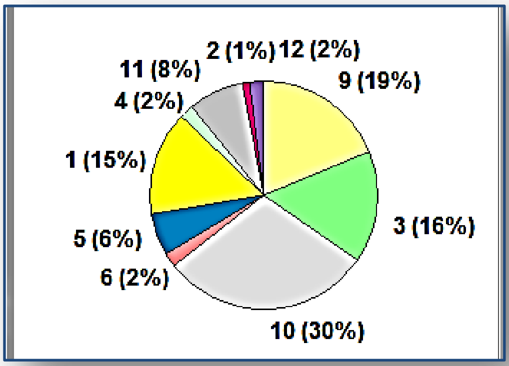
Resultados Actividad 8



8) $\frac{2}{3} \times \left(1 + \frac{2}{5}\right)$

Gráfica 31. Análisis estadístico pregunta 2.C2. 2º año

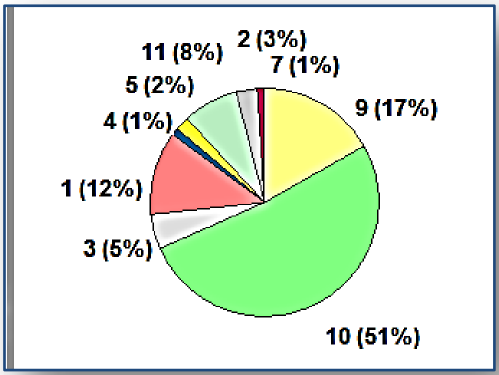
Resultados Actividad 9



9) $\frac{1}{2} \div \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right)$

Gráfica 32. Análisis estadístico pregunta 9.C2. 2º año

Resultados Actividad 10



10) $\left(\frac{2}{3} + \frac{5}{6}\right) \div \left(\frac{1}{6} + \frac{2+5}{2+2}\right)$

Gráfica 33. Análisis estadístico pregunta 10.C2. 2º año

Al trabajar con operaciones combinadas son muy altos los porcentajes de actividades sin respuesta que se van incrementando a medida que se requiere aplicar otros conocimientos (16%, 20%, 24%, 28%, 30%, 51%) lo cual evidencia carencias en los conocimientos previos de los alumnos.

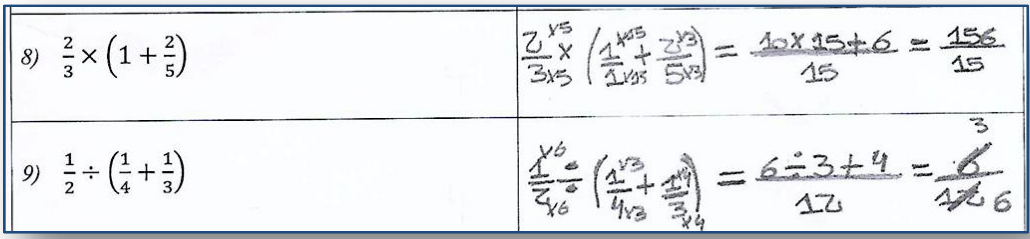
Estas actividades se caracterizan por evidenciar errores en común. Todas presentan error en el algoritmo suma con un bajo porcentaje (4%, 5%) salvo en las actividades 8 (10%) y 9 (16%); la suma de denominadores y numeradores por separado tiene baja incidencia en las actividades 5 (6%) y 6 (5%), en las cuales es alto el porcentaje de error en la jerarquía de las operaciones (26%, 16%), y se incrementa en el resto de las actividades

(17%, 25%, 19%) mientras que disminuye el porcentaje de error en la jerarquía de las operaciones (9%, 4%, 2%, 0%) sobre todo en las actividades donde está determinada por paréntesis; determinar el común denominador presenta bajos porcentajes de error en las actividades 8, 9 y 10 (1%, 1%, 3%) al igual que el error en el algoritmo de la división contribuye con sólo 6% y 2%. Aunque son bajos los porcentajes (1%, 4%, 2%), surgió el error de falta de conocimiento de la propiedad conmutativa en la multiplicación y la división en las actividades 1, 8 y 9. Vuelve a surgir el error en la multiplicación aunque en menores porcentajes (1%, 1%, 3%, 4%, 2% y 1%). En las actividades 5 y 6 se hace presente el error al operar natural y fracción en un 11% y 7% respectivamente. En algunas de las actividades 5, 6, 7 y 10 la falta de simplificación surge porque no trabajan usando el mínimo común múltiplo y en otras quizás por falta de atención a la consigna o por no tener afianzado el motivo por el cual se realiza (1%, 2%, 9%, 1%).

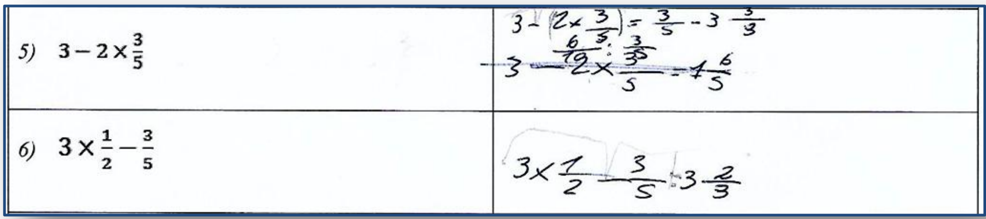
Los porcentajes de actividades erróneas y sin procedimiento que no permiten categorizar el error (2%, 13%, 11%, 9%, 8%, 8%) también pueden ser debidos a carencias en los conocimientos previos de los alumnos.

Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento

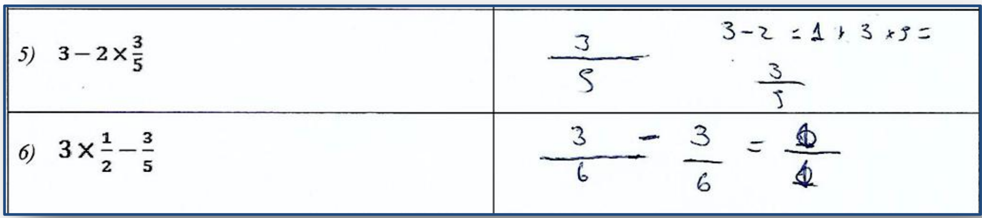
5) $3 - 2 \times \frac{3}{5}$	$\frac{3}{1\times5} - \frac{2}{1\times5} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$
6) $3 \times \frac{1}{2} - \frac{3}{5}$	$\frac{3^{\times10}}{1^{\times10}} \times \frac{1^{\times5}}{2\times5} - \frac{3^{\times2}}{5\times2} = \frac{30\times5-6}{5} = \frac{144}{5}$
7) $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3}$	$\frac{2^{\times2}}{3\times2} \times \frac{1^{\times3}}{2\times3} + \frac{2^{\times2}}{3\times2} = \frac{4\times3+4}{6} = \frac{\cancel{16}^{8}}{\cancel{6}_{3}}$



8) $\frac{2}{3}\times\left(1+\frac{2}{5}\right)$	$\frac{2^{\times5}}{3_{\times5}}\times\left(\frac{1^{\times15}}{1_{\times15}}+\frac{2^{\times3}}{5_{\times3}}\right)=\frac{10\times15+6}{15}=\frac{156}{15}$
9) $\frac{1}{2}\div\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)$	$\frac{1^{\times6}}{2_{\times6}}\div\left(\frac{1^{\times3}}{4_{\times3}}+\frac{1^{\times4}}{3_{\times4}}\right)=\frac{6\div3+4}{12}=\frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{12}_{6}}$

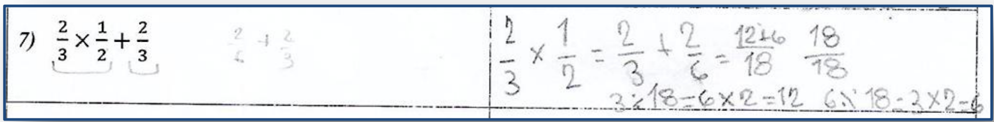


5) $3-2\times\frac{3}{5}$	$3-\left(2\times\frac{3}{5}\right)=\frac{3}{5}-3\,\frac{3}{3}$ $\cancel{3-2\times\frac{3}{5}=1\frac{6}{5}}$
6) $3\times\frac{1}{2}-\frac{3}{5}$	$3\times\frac{1}{2}-\frac{3}{5}=3\,\frac{2}{3}$

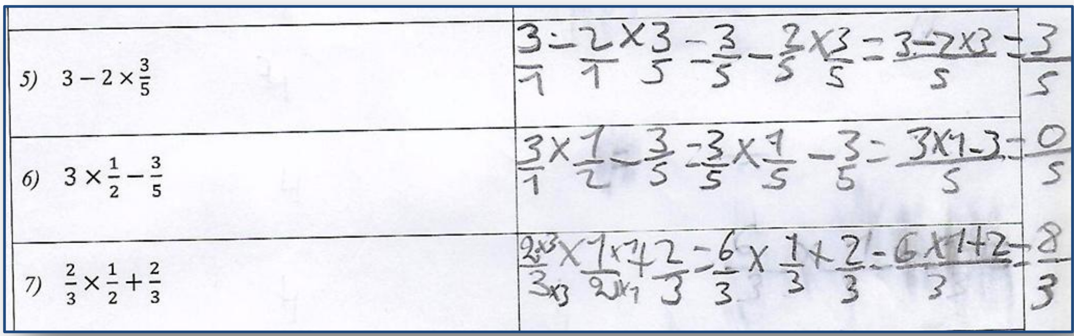


5) $3-2\times\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$ $\quad 3-2=1+3\times3=$ $\frac{3}{5}$
6) $3\times\frac{1}{2}-\frac{3}{5}$	$\frac{3}{6}-\frac{3}{6}=\frac{0}{0}$

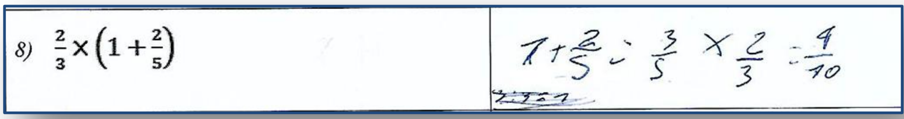
- **Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos**

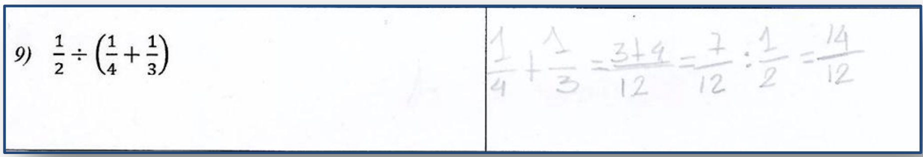


7) $\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{3}+\frac{2}{6}=\frac{12+6}{18}\;\frac{18}{18}$ $3:18=6\times2=12\quad 6:18=3\times2=6$



5) $3-2\times\frac{3}{5}$	$\frac{3}{1}-\frac{2}{1}\times\frac{3}{5}-\frac{3}{5}-\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{3-2\times3}{5}=\frac{3}{5}$
6) $3\times\frac{1}{2}-\frac{3}{5}$	$\frac{3}{1}\times\frac{1}{2}-\frac{3}{5}=\frac{3}{5}\times\frac{1}{5}-\frac{3}{5}=\frac{3\times1-3}{5}=\frac{0}{5}$
7) $\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$	$\frac{2^{\times3}}{3_{\times3}}\times\frac{1^{\times1}}{2_{\times1}}+\frac{2}{3}=\frac{6}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{6\times1+2}{3}=\frac{8}{3}$

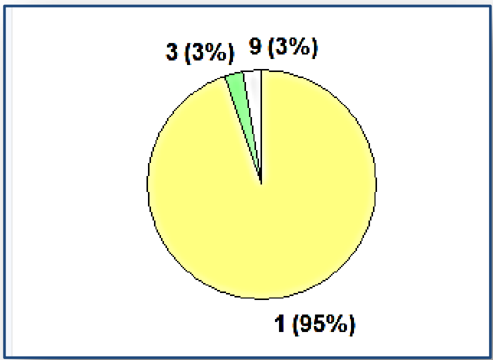




4.3.2.3. TERCER AÑO

ACTIVIDADES 1 y 2 (38 alumnos evaluados)

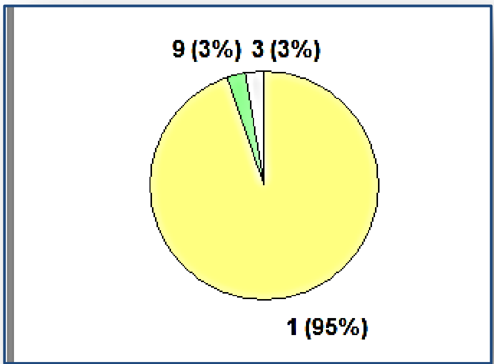
Resultados Actividad 1



1) $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$

Gráfica 34. Análisis estadístico pregunta 1.C2. 3º año

Resultados Actividad 2



2) $1-\frac{3}{5}+\frac{1}{2}$

Gráfica 35. Análisis estadístico pregunta 2.C2. 3º año

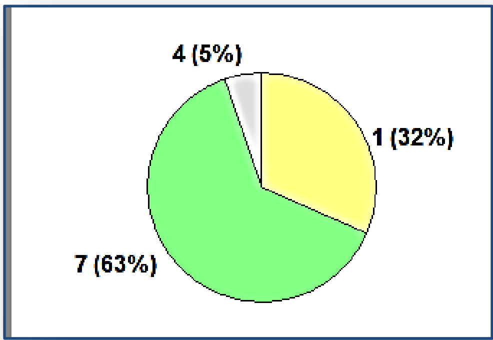
Se observa que los alumnos pudieron superar algunas dificultades que tenían sobre las fracciones. Esto revela que la transición de los números naturales hacia las fracciones es un proceso lento.

- ❖ **Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos**

1) $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{7}{8}$
2) $1-\frac{3}{5}+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{1}-\frac{3}{5}=\frac{-2}{-4}+\frac{1}{2}=\frac{-1}{-2}$

ACTIVIDAD 3 (38 alumnos evaluados)

Resultados Actividad 3



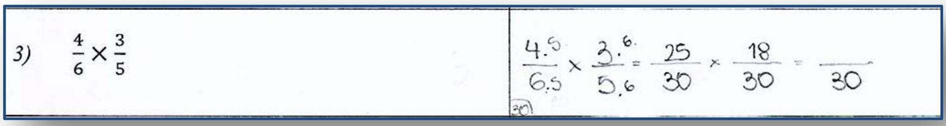
3) $\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}$

Gráfica 36. Análisis estadístico pregunta 3.C2. 3º año

El mayor porcentaje (63%) se debe a falta de simplificación o de simplificación incompleta, lo cual indica falta de comprensión de la simplificación. Solamente un 5% de los alumnos no consiguieron realizar esta actividad correctamente con errores en el algoritmo de la multiplicación.

- ❖ **Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento**

Calculan el común denominador igualando los denominadores de las fracciones para posteriormente multiplicar los numeradores:

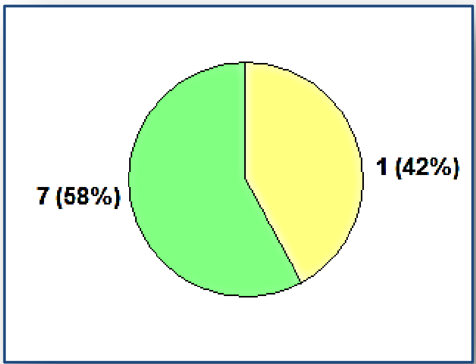


- **Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos**

  No simplifican o hay simplificación incompleta:

ACTIVIDAD 4 (38 alumnos evaluados)

Resultados Actividad 4



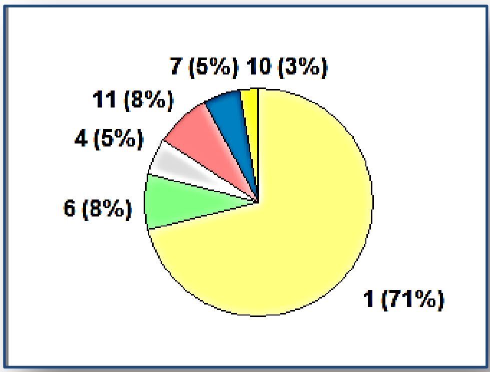
4) $\frac{7}{8} \div \frac{5}{4}$

Gráfica 37. Análisis estadístico pregunta 4.C2. 3º año

El 58% de los alumnos no simplificaron o lo hicieron de forma incompleta. Que continúe manifestándose esta realidad en 3º año sugiere que simplificar sigue siendo una operación que debe ser fortalecida con fundamentos conceptuales. En la mayoría de los casos se aplicó correctamente la definición de división usando la multiplicación; lo que sugiere que el 5% incorrecto en la actividad 3 superó sus dificultades al realizar un proceso cognitivo más completo.

ACTIVIDAD 5 (38 alumnos evaluados)

Resultados Actividad 5

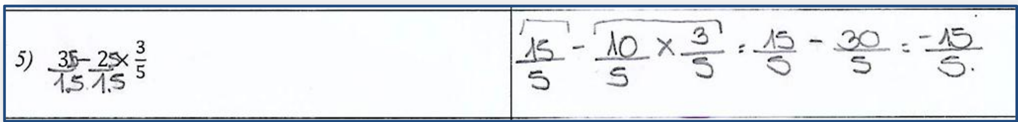


5) $3 - 2 \times \frac{3}{5}$

Gráfica 38. Análisis estadístico pregunta 5.C2. 3º año

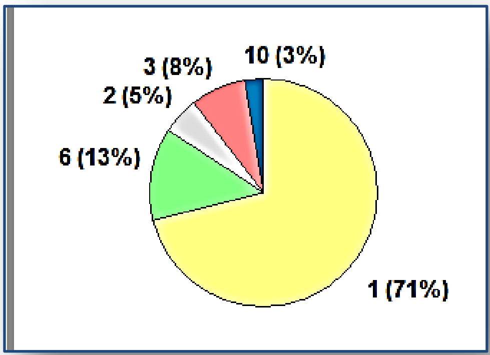
Contrariamente a lo esperado es alto el porcentaje de resultados correctos (71%). Es bajo el porcentaje de error respecto a la jerarquía de las operaciones (8%); este error aparece también en contextos de resolución de ecuaciones lineales con una incógnita (Castellanos y Moreno, 1997). Vuelve a evidenciarse el 5% con errores en el algoritmo de la multiplicación. El 5% con falta de simplificación surge porque no trabajan usando el mínimo común múltiplo.

❖ **Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento**



ACTIVIDADES 6 y 7 (38 alumnos evaluados)

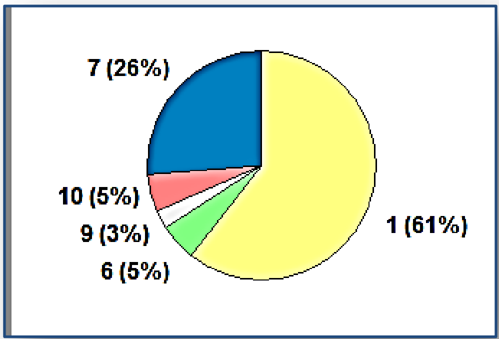
Resultados Actividad 6



$$6)\quad 3 \times \frac{1}{2} - \frac{3}{5}$$

Gráfica 39. Análisis estadístico pregunta 6.C2. 3º año

Resultados Actividad 7

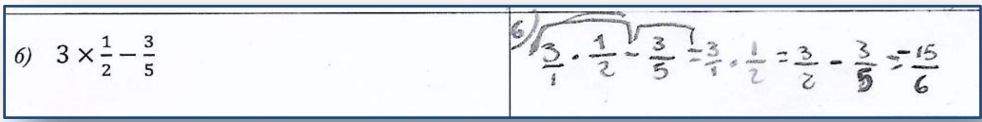


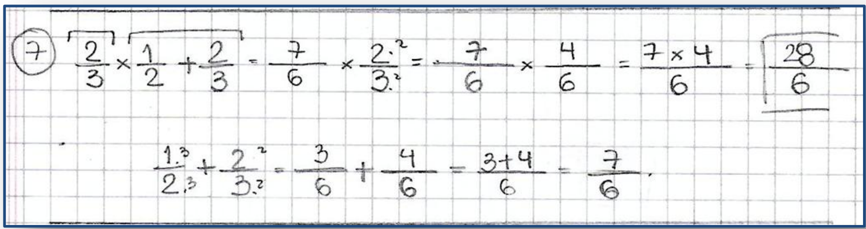
$$7)\quad \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3}$$

Gráfica 40. Análisis estadístico pregunta 7.C2. 3º año

Con altos porcentajes de respuestas correctas (71% y 61%), en la actividad 6 no surge la falta de simplificación porque no se puede realizar pero si vuelve a aparecer en la actividad 7 (26%). En cuanto a errores en la jerarquía de operaciones se manifiesta más (13%) cuando está involucrado un número natural; en cambio en operaciones con sólo fracciones el porcentaje es menor (5%). Siguen manifestándose problemas para determinar el común denominador (5%) y en el algoritmo de la suma (8%) en la actividad 6 mientras que en la actividad 7 un 3% sigue sumando denominadores.

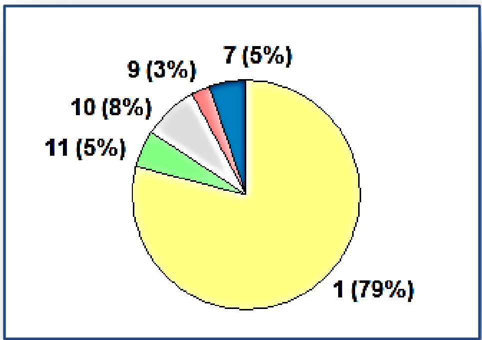
❖ Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos





ACTIVIDADES 8 - 9 y 10 (38 alumnos evaluados)

Resultados Actividad 8

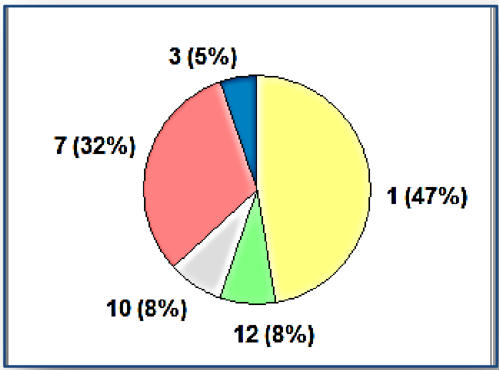


8) $\frac{2}{3} \times \left(1 + \frac{2}{5}\right)$

Gráfica 41. Análisis estadístico pregunta 8.C2. 3º año

Con un alto porcentaje de resultados correctos (79%), el 5% con falta de simplificación surge porque no trabajan usando el mínimo común múltiplo, el 3% continúa sumando denominadores, el 8% no responde y un 5% erróneo no permite clasificar el error por falta de procedimiento.

Resultados Actividad 9

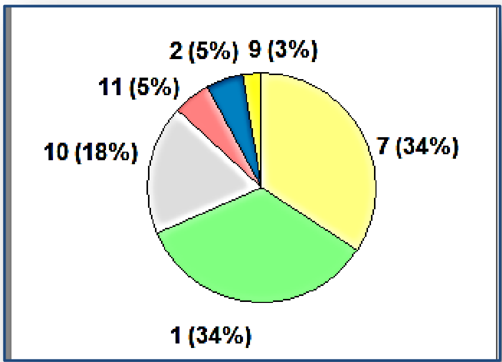


9) $\frac{1}{2} \div \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right)$

Gráfica 42. Análisis estadístico pregunta 9.C2. 3º año

Con un buen porcentaje de resultados correctos (47%), el 32% tiene problemas para simplificar, el 5% continúa aplicando mal el algoritmo de la suma, el 8% no responde y un 8% erróneo evidencia desconocimiento de la propiedad conmutativa de la división ya que cambian el orden entre dividendo y divisor.

Resultados Actividad 10



10) $\left(\frac{2}{3} + \frac{5}{6}\right) \div \left(\frac{1}{6} + \frac{2+5}{2+2}\right)$

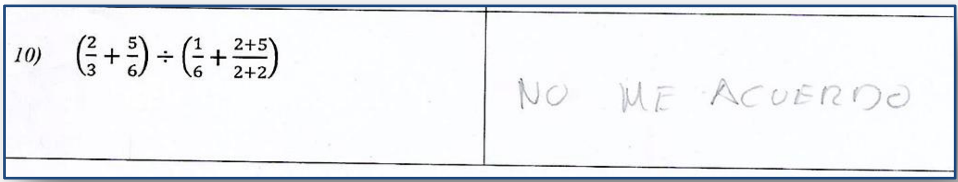
Gráfica 43. Análisis estadístico pregunta 10.C2. 3º año

Disminuyó el porcentaje de resultados correctos (34%), quizás porque hay más procedimientos que realizar, el 34% tiene problemas para simplificar, el 2% continúa sin saber obtener el común denominador mientras que el 3% suma denominadores, el

18% no responde y un 5% erróneo no permite clasificar el error por falta de procedimiento.

En las tres actividades no surgen errores respecto a la jerarquía de las operaciones dado que la misma está determinada por los paréntesis. La actividad 10 se incluyó para saber cómo actuaban frente a $\frac{2+5}{2+2}$ ya que tienden a separar el denominador; sin embargo no fue error recurrente pero tuvo un alto porcentaje (18%) sin respuesta.

- **Errores debidos a la ausencia de conocimientos previos**



10) $\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{6}\right) \div \left(\frac{1}{6}+\frac{2+5}{2+2}\right)$	NO ME ACUERDO

Conclusiones generales en torno a los errores y dificultades

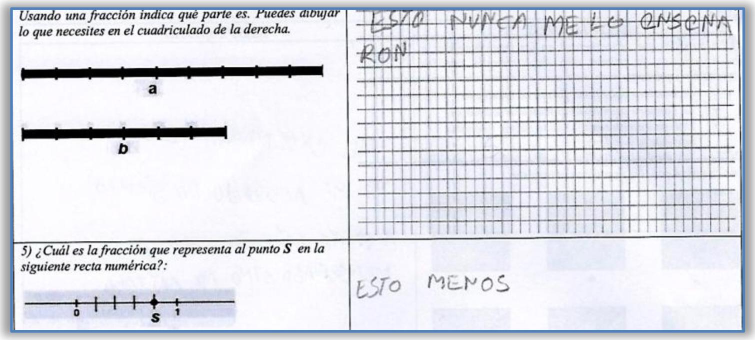
Prueba sobre los significados de la fracción

1º AÑO

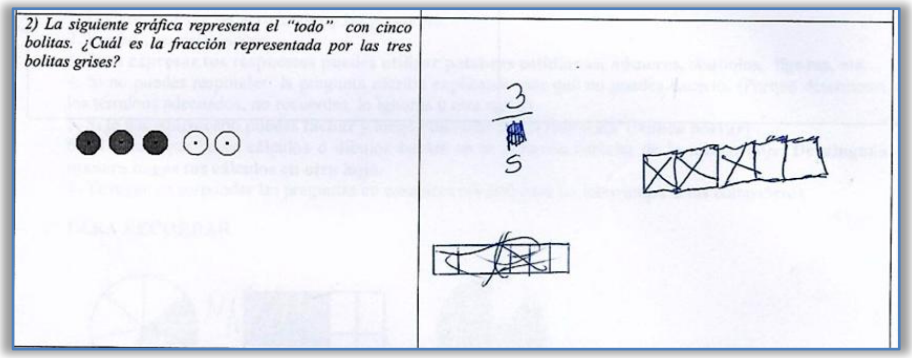
Los alumnos fueron evaluados en base a los conocimientos previos adquiridos en el Nivel Primario. La mayoría de los errores cometidos se debieron a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos ya que todavía no logran relacionar las partes "iguales" del todo con los conceptos de numerador y denominador.

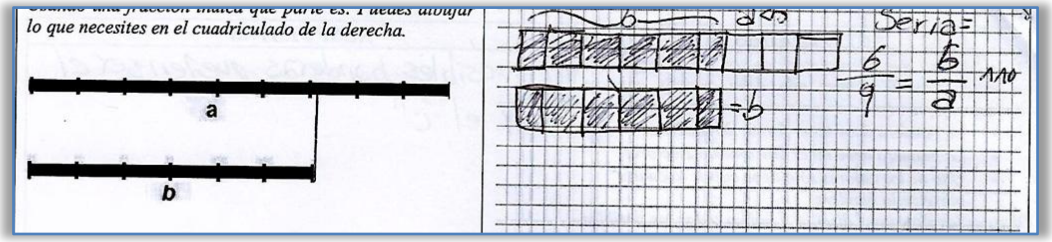
También manifiestan dificultades para obtener información espacial referida a particionar el todo en partes "iguales".

En las actividades donde se trabajan los significados división indicada, recta numérica y razón es muy alto el porcentaje de errores debidos a la ausencia de conocimientos previos (actividades sin respuesta).



En varias actividades el razonamiento se basa en un esquema análogo pero en relación al significado parte-todo contexto continuo. Ya se señaló que es el significado de mayor relevancia en la enseñanza y las desventajas que ocasiona priorizar su uso en desmedro de otros significados.



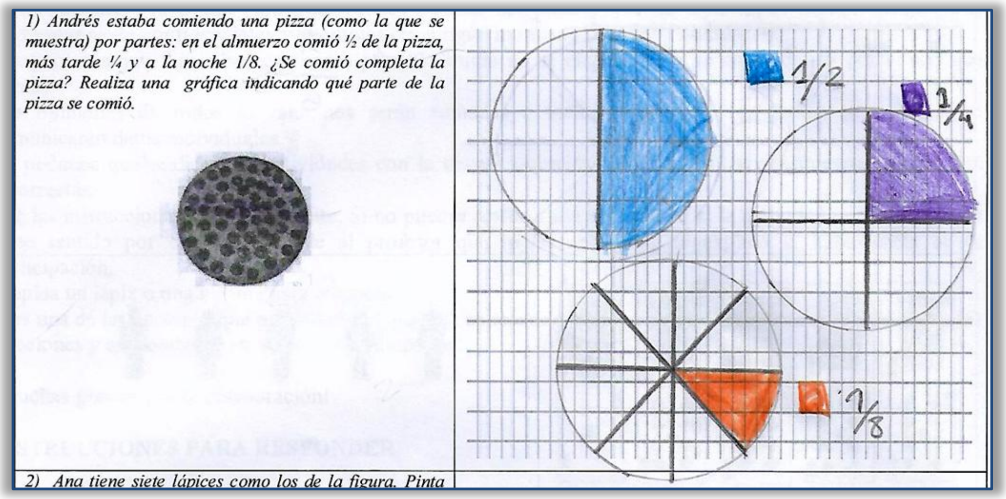


2º AÑO

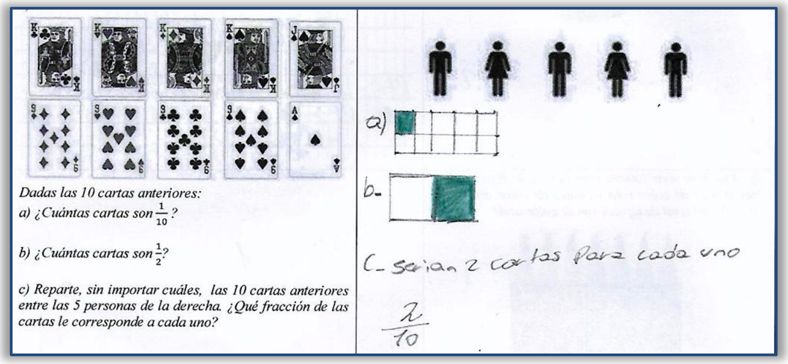
Los alumnos fueron evaluados luego de, se supone durante 1º año, haber tenido un mayor contacto con las fracciones y sus significados.

Se observan errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos; no hubo, desde la resolución de problemas, mayor comprensión del concepto de fracción (numerador, denominador y de las funciones de cada uno).

Tampoco mejoró la identificación de las partes equitativas en los problemas referidos al significado parte-todo continuo; a pesar de ser el significado que más uso se le da los alumnos identifican situaciones con el significado parte-todo en contexto continuo y sin embargo no logran una respuesta; presentan serias dificultades para relacionar subdivisiones (fracciones equivalentes).

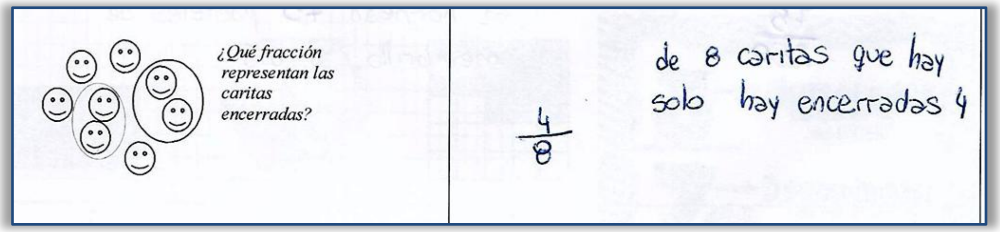


Es alto el porcentaje de actividades sin respuesta en lo que se refiere al significado reparto en contextos discretos.

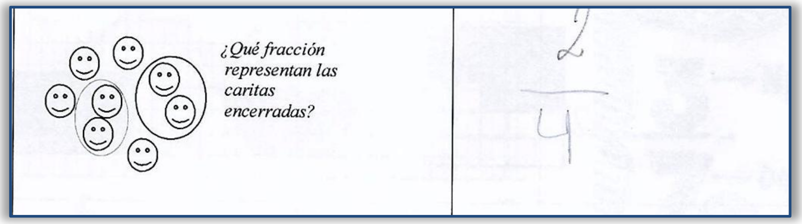


Se confirman las diversas situaciones tratadas en la sección **2.1.1.2.** respecto al significado parte-todo en contextos discretos que evidencian su escaso o nulo tratamiento durante la enseñanza:

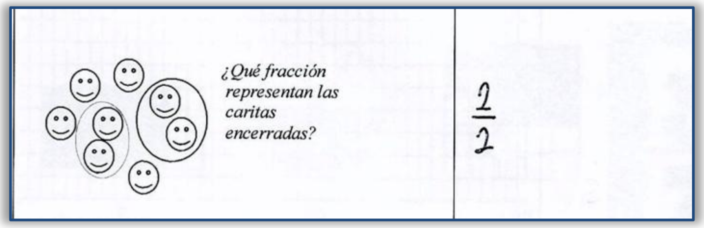
El todo son las 8 caritas:

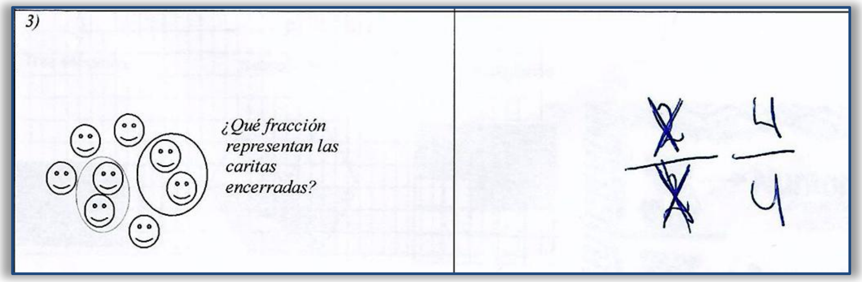


Sugiere que el todo son caritas embolsadas de a dos:



Sugiere que el todo son las dos bolsas de dos caritas cada una:





La hipótesis es que en el 1º año del Nivel Secundario no se tratan los significados de la fracción y se introducen directamente los procedimientos algebraicos usando métodos memorísticos para los algoritmos; no se explotan las situaciones problema para mayor comprensión del lenguaje matemático usando los significados de la fracción para conducir al alumno hacia las operaciones de acuerdo a los aportes teóricos señalados.

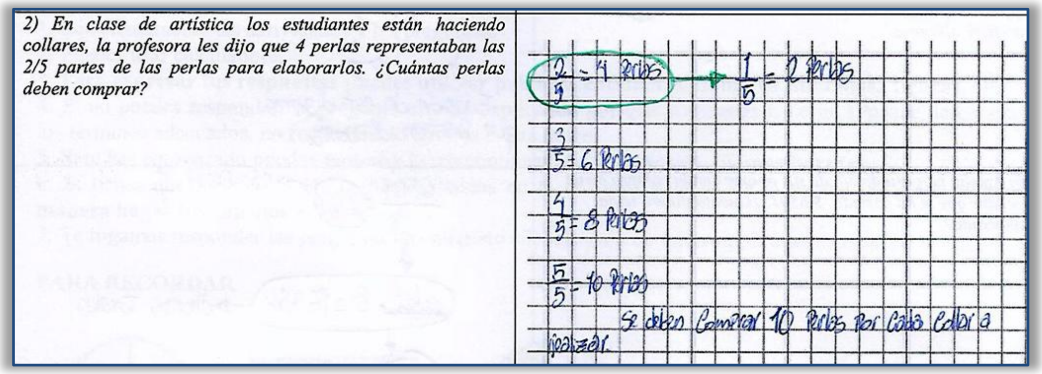
La presencia de errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes pone en evidencia que no se han incorporado varios significados de la fracción (por ejemplo, desconocen la fracción como cociente y como operador). Sin embargo ya surge el conocimiento de la fracción en la recta numérica y como razón en forma intuitiva.

3º AÑO

Los errores más frecuentes provinieron de dificultades para obtener información espacial (lograr particionar el todo en partes “iguales” en figuras no tradicionales) y debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.

En 2º año no se ha detectado la necesidad de reforzar o incluir significados de la fracción ya que no logran reconstruir el todo a partir de una parte, no usan el concepto de fracción de una cantidad ni el concepto de densidad en los números racionales (extrapolan procedimientos de los números naturales a las fracciones para su ubicación en la recta numérica). Una justificación para los últimos casos, analizando los programas, es que durante 3º año se trabajan más significados. Sigue sin ser incorporado el significado como operador siendo que es muy importante para lograr la comprensión de otros conceptos como la proporcionalidad.

Es muy alto el porcentaje de error (continúa desde 1º año) referido al concepto de partición equitativa.


2) En clase de artística los estudiantes están haciendo collares, la profesora les dijo que 4 perlas representaban las 2/5 partes de las perlas para elaborarlos. ¿Cuántas perlas deben comprar?

$\frac{2}{5}$ = 4 Perlas → $\frac{1}{5}$ = 2 Perlas

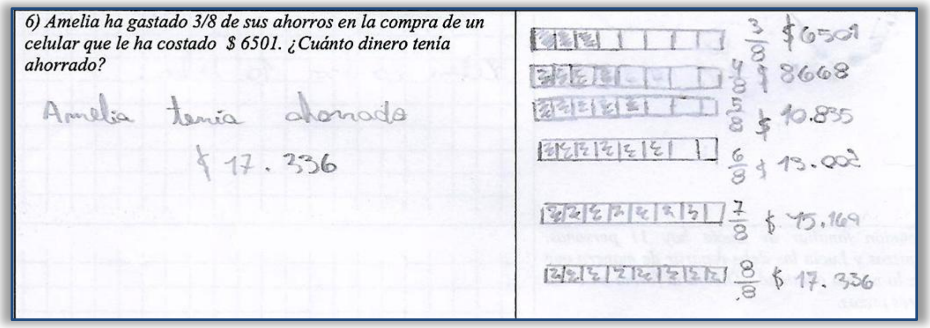
$\frac{3}{5}$ = 6 Perlas

$\frac{4}{5}$ = 8 Perlas

$\frac{5}{5}$ = 10 Perlas

Se deben Comprar 10 Perlas Por Cada Collar a realizar

Recurren a estrategias conocidas pudiendo llegar a la respuesta pero lo cual indica el desconocimiento más avanzado de significados y operaciones con fracciones:



Prueba sobre operaciones entre fracciones

Considerando los errores globales cometidos en las pruebas, se observa que prevalecieron aquellos que se deben a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento. Asimismo, la ausencia de respuestas tuvo una incidencia importante, en algunas actividades evidenciando dificultades a partir de errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.

En mayor o menor grado los tres cursos presentan errores en la suma de fracciones. Dickson *et al*. (1984) sostienen que sumar por separado los numeradores y los denominadores de una fracción es un error frecuente cuya causa podría encontrarse en la manera en la que se representan las fracciones (significado parte-todo) en sus primeros años de estudio.

Mientras que para Llinares Ciscar *et al*, (1997) puede deberse a que los alumnos ya conocen la multiplicación y realicen los mismos procedimientos. Abrate *et al*., (2006) detectaron errores en el algoritmo suma de las fracciones principalmente al combinar sumas y multiplicaciones. En cuanto al común denominador incorrecto puede deberse a la falta de comprensión de las fracciones equivalentes y de su justificación en operaciones de sumas y restas; también presentan serias dificultades si pretenden calcular el mínimo común múltiplo usando el algoritmo ya que no pueden justificarlo por lo que rápidamente lo olvidan.

1º AÑO

Probablemente debido a la presentación de algoritmos sin fundamento comienza a emerger, en la multiplicación, el error de buscar fracciones equivalentes al igual que en la suma y en la división es evidente que no recuerdan el procedimiento incorporado memorísticamente. No se analizó, en este año, la simplificación.

2º AÑO

Globalmente es bajo el porcentaje de actividades resueltas correctamente.

La simplificación de fracciones es una dificultad muy particular (con altos porcentajes) que se evidencia a partir de 2º año y continúa en 3º año. La falta de simplificación o simplificación incompleta es uno de los errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos; no se comprende su necesidad, ni su fundamento teórico para realizarla ni que el resultado que se espera obtener debe ser equivalente a la fracción inicial.

Siguen presentes los errores al multiplicar y dividir; su porcentaje es mayor en las operaciones que involucran naturales y fracciones (errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos). Se incrementa el porcentaje de actividades sin respuesta a partir de las operaciones combinadas, las cuales dan lugar también a la evidencia del desconocimiento de propiedades de las operaciones como la conmutatividad y de la jerarquía de las operaciones.

Analizando los programas se vislumbra que podría deberse a que las operaciones entre fracciones enseñadas y aprendidas en 1º año se reducen a las operaciones básicas.

3º AÑO

Globalmente aumentó el porcentaje de actividades resueltas correctamente respecto al año anterior. Los porcentajes de errores se han reducido salvo en el caso de la simplificación. Se mantiene la aparición de los errores observados en 2º año debido a la ausencia de conocimientos previos que inhibió el procesamiento de la información, por ejemplo, la jerarquía de las operaciones. Se advierte un mayor desarrollo de los procedimientos para resolver operaciones pero sin fundamentos teóricos.

En resumen

Al terminar el ciclo básico, siguen prevaleciendo la mayoría de las dificultades referidas a la complejidad de los objetos matemáticos y a los procesos de pensamiento matemático debido al, en su mayoría, poco tratamiento de diferentes significados de la fracción a partir de situaciones problemáticas y, se presume, de la presentación de algoritmos en forma memorística sin justificación (la cual podría surgir de significados de la fracción).

Es evidente que es necesaria la práctica a partir de situaciones problemáticas que permitan alcanzar la comprensión del lenguaje matemático a través de la interpretación exacta de sus signos y así superar los conflictos asociados a la comprensión y comunicación de los objetos matemáticos.

También emerge de este trabajo la necesidad de fomentar la capacidad de seguir un argumento lógico sin abandonar los métodos intuitivos evitando los métodos rutinarios.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

A continuación se fundamentan las actividades seleccionadas en los cuestionarios para, posteriormente, interpretar los resultados obtenidos a partir del marco teórico que sustenta el estudio y de las hipótesis planteadas.

Un currículo escolar trata de establecer de manera razonada y para cada etapa educativa, qué enseñar y cómo hacerlo; es decir: ¿Qué enseñar?, ¿Cuándo enseñar?, ¿Cómo enseñar?, y ¿Qué, cómo y cuándo evaluar? basándose en directrices y documentos oficiales. En este sentido las directrices curriculares oficiales en la provincia de San Luis referidas a Escuelas Técnicas Profesional y de Oficios con orientación en Informática, sólo se limitan a establecer:

7. TRAYECTORIA FORMATIVA: TÉCNICO EN INFORMÁTICA PROFESIONAL Y PERSONAL

- *Campo de Formación Científico-Tecnológica:*

  Este campo otorga sostén a los conocimientos, habilidades, destrezas, valores y actitudes propios del campo profesional en cuestión. Comprende, integra y profundiza los contenidos disciplinares imprescindibles que están a la base de la práctica profesional del técnico, resguardan la perspectiva crítica y ética, e introducen a la comprensión de los aspectos específicos de la formación técnico profesional.

Luego se detallan los contenidos para cada año junto a la carga horaria. Por ejemplo para 1º año:

MATEMÁTICA

(120 horas reloj anuales – 5 horas cátedras semanales)

Números y operaciones: los números naturales. Los números enteros y sus operaciones, números negativos, usos, la recta y los números enteros, valor absoluto, números opuestos, orden en Z, adición y sustracción de números enteros, suma algebraica. Multiplicación y división en Z, operaciones combinadas, potenciación, propiedad distributiva, producto y cociente de potencia de igual base, radicación, propiedades. Divisibilidad de los números enteros: algoritmo de Euclides, múltiplos y divisores, número primo, múltiplo común menor, divisor común mayor. Elementos de geometría. Mediciones: figuras geométricas, los cuerpos y sus áreas, figuras geométricas, cuadrado, rectángulo, círculo, perímetro y área, poliedros, cuerpos que rotan, relación entre perímetro, área, volumen, desarrollo de áreas laterales y total, área y volumen de la esfera, S.I.M.E.L.A., unidades de área y volumen más usuales, equivalencias. Geometría: representaciones gráficas, las coordenadas cartesianas, posiciones relativas de la recta en el plano, paralelismo y perpendicularidad. Figuras geométricas: triángulo, circunferencia inscripta y circunscripta, círculo, sector, elementos, propiedades, construcción con regla y compás, ángulos. Noción de distancia. Interpretación, representación y tratamiento de la información: estadística, nociones elementales, reconocimiento, recolección, registro y análisis de datos, tablas, gráficas de barras horizontales y verticales, perfiles, gráficos circulares, histogramas, pictogramas. Lenguaje gráfico y algebraico, lenguaje coloquial, gráfico y simbólico, expresiones algebraicas, ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Por otro lado los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios, en cuanto a las fraccioones, sólo hacen referencia a:

Durante el Ciclo Básico de la Educación Secundaria, la escuela ofrecerá situaciones de enseñanza que promuevan en los alumnos y alumnas:
El reconocimiento y uso de los números racionales, de sus propiedades y de sus distintas representaciones en función de la situación planteada. El uso y explicitación de las operaciones en distintos campos numéricos en la resolución de problemas. El uso y explicitación de las jerarquías y propiedades de las operaciones en la resolución de problemas de cálculo.

Y especifican para cada año del ciclo básico:

PRIMERO / SEGUNDO AÑO

EN RELACIÓN CON EL NÚMERO Y LAS OPERACIONES

- *El reconocimiento y uso de los números racionales en situaciones problemáticas que requieran: interpretar, registrar, comunicar y comparar números enteros en diferentes contextos: como número relativo (temperaturas, nivel del mar) y a partir de la resta de dos naturales (juegos de cartas, pérdidas y ganancias); comparar números enteros y hallar distancias entre ellos representándolos en la recta numérica; interpretar el número racional como cociente; usar diferentes representaciones de un número racional (expresiones fraccionarias y decimales, notación científica, punto de la recta numérica, etc.), argumentando sobre su equivalencia y eligiendo la representación más adecuada en función del problema a resolver; analizar diferencias y* *similitudes entre las propiedades de los números enteros (Z) y los racionales (Q) (orden, discretitud y densidad).*

SEGUNDO / TERCER AÑO

EN RELACIÓN CON EL NÚMERO Y LAS OPERACIONES

- *El reconocimiento y uso de números racionales y de las operaciones y sus propiedades en situaciones problemáticas que requieran: usar y analizar estrategias de cálculo con números racionales (Q), seleccionando el tipo de cálculo y la forma de expresar los números involucrados, evaluando la razonabilidad del resultado e incluyendo su encuadramiento; analizar las operaciones en Q y sus propiedades como extensión de las elaboradas para los números enteros.*

Cabe aclarar que la Escuela elegida para desarrollar la investigación es donde desempeño funciones; motivó este hecho poder brindar posibles soluciones a la problemática que afecta a todos mis colegas: falta de comprensión de la fracción para su aplicación en problemas y errores en sus operaciones. Al ser una escuela en formación, se adaptan los programas anualmente de acuerdo a las necesidades impuestas por los avances tecnológicos y los nuevos lineamientos nacionales y provinciales que atañen a la formación técnica de los alumnos. Los directivos detallan qué matemáticas necesitan conocer los alumnos, qué deben hacer los profesores para conseguir que sus alumnos desarrollen sus conocimientos matemáticos y cuál debe ser el contexto en el que tenga lugar los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En este contexto es que son consensuados los programas (Anexos 7, 8 y 9) respetando los lineamientos propios de la institución y de manera que haya un hilo conductor entre los contenidos ya que se sostiene que "un aprendizaje es significativo cuando los contenidos son relacionados de modo no arbitrario y sustancial (no al pie de la letra) con lo que el alumno ya sabe".

Los objetivos, criterios de evaluación, detalle de las acciones educativas específicas que se deben realizar en el aula para el logro de los objetivos son exigidos en la planificación de los profesores de cada año.

La realidad de la Escuela y el marco teórico que sustenta la investigación determinaron las actividades de los cuestionarios.

5.1. CONCLUSIONES

La investigación se centró en reconocer los errores, de acuerdo a las conclusiones publicadas por los autores de los trabajos consultados sobre el tema, y las dificultades (enfocadas en las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos y a los procesos de pensamiento matemático) que presentan los alumnos al enfrentarse con operaciones entre fracciones y también en descubrir qué significados de las fracciones comprenden. Respecto a los objetivos del trabajo se concluye:

- Primer objetivo, "Indagar sobre el conocimiento de los diferentes significados del concepto de fracción de acuerdo al año que cursan"; se sustentan las hipótesis de que la mayoría de los alumnos de la población en estudio desconocen algunos de significados de la fracción y que la comprensión se fundamenta esencialmente en el significado parte-todo de la fracción. Sólo en los alumnos de 2º año se manifiesta haber incorporado, aunque en forma intuitiva, el conocimiento de la fracción en la recta numérica y como razón. Durante los tres años del Ciclo Básico no se logran superar las dificultades respecto al significado de partición equitativa y se encontró que la comprensión de los significados de la fracción no progresa conforme se avanza en el cursado.
- segundo y tercer objetivo, "Categorizar los errores en que incurren los alumnos al enfrentarse a la resolución de ejercicios y/o problemas con fracciones

adecuados a la currícula de la Escuela (Anexos 7, 8 y 9)" se puede reconocer la necesidad e importancia de realizar esta categorización la cual permitió "Reconocer en los errores encontrados las posibles dificultades a las que se enfrentan los alumnos en la resolución de ejercicios y/o problemas con fracciones". Los resultados obtenidos sustentan las hipótesis de que la categorización de los errores cometidos por los alumnos permite reconocer las dificultades a las que se enfrentan en la resolución de problemas y ejercicios de fracciones y que los alumnos tienen dificultades para resolver ejercicios/problemas usando fracciones ya que:

- La comprensión de los significados de la fracción positiva es intuitiva, parcial y sustentada fundamentalmente en el significado parte-todo como resultado de las secuencias didácticas más comunes. El aprendizaje de las fracciones es complejo y está íntimamente relacionado con sus significados.
- Para realizar correctamente las operaciones básicas con fracciones o bien, desconocen u olvidan el algoritmo dado que existe el obstáculo epistemológico de la persistencia de los algoritmos de operaciones básicas del conjunto de los números naturales, o se produce una superposición de algoritmos propios de las operaciones con fracciones. Se percibe que la capacidad de manejar algoritmos, de las operaciones básicas con fracciones, tiende a mejorar conforme se pasa de un curso inferior a otro inmediato superior.

❖ cuarto objetivo, "Aportar con sugerencias generales, para los docentes de Matemática, tendientes a producir una mejora en el tratamiento de los errores de acuerdo a la discusión de los resultados y a las conclusiones obtenidas" se logra enteramente.

Los resultados obtenidos, con actividades en apariencia simple pero que implican una comprensión profunda de las situaciones en lo referido a los significados de las fracciones, muestran que los alumnos del ciclo básico de la Escuela Técnica Nº 7 "Dr. Manuel Sadosky" presentan, en general, las siguientes características:

- falta de comprensión semántica de los problemas; dificultad en el manejo del lenguaje matemático que conduce a errores debido a las diferencias entre el lenguaje natural y el matemático.
- no trabajan con variedad de representaciones espaciales que impliquen particiones "iguales" (figuras no estándar) señalando dificultad para realizar un análisis y síntesis perceptivos.
- un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos; que exteriorizan la dificultad en el manejo de algoritmos, en la aplicación de técnicas y dominio insuficiente de símbolos y conceptos necesarios.
- el significado parte-todo en contextos continuos surge permanentemente como recurso en la solución del problema y se evidencian muchas dificultades porque no hay una identificación del todo o de sus partes "iguales" y de las relaciones entre el todo y sus partes.
- desarrollan algoritmos en forma mecánica sin fundamentos teóricos.
- no pueden pasar de una fracción a la unidad que la generó.
- siguen manejando la linealidad propia de los números naturales y buscan aplicarla con las fracciones.

En cuanto a la comprensión del problema, de acuerdo con los resultados, se puede afirmar que existe una necesidad de encontrar los datos cuantitativos con los cuales hacer cualquier operación matemática, de tal manera que si no se encuentra explícito, se asume que no se comprende el problema.

La abstracción propia de la matemática permite prever dificultades de aprendizaje, que son manifestadas por igual en las actividades realizadas, y analizar los contenidos matemáticos nos permite identificar las variables a tener en cuenta para su enseñanza. Algunos de los errores encontrados no son producto de falta de conocimiento sino de aplicarlo indebidamente. El origen de errores recurrentes en la mayoría de los alumnos debe buscarse en los conocimientos necesarios para realizar la actividad; al desconocer varios de los significados de las fracciones se pierde la posibilidad de generar la construcción y el desarrollo de nuevos conceptos y operaciones.

Cabe aclarar que la categorización de cada uno de los errores adquiere sentido en el contexto particular de su extracción; si tomamos el mismo error de manera aislada podría llevarnos a situarlo en categorías diferentes.

Por lo expuesto es indispensable una secuencia de conceptos que lleve a los alumnos a comprender mejor la transición de los números naturales a las fracciones; es necesario que las ideas de partición, equivalencia y la formación de la unidad sean revisadas para que los alumnos puedan transitar hacia las ideas de medida, cociente, razón y operador; también es importante diversificar los soportes de representación y las diferentes representaciones de un mismo concepto matemático.

Los errores son persistentes y difíciles de erradicar y tienden a reaparecer en el tiempo. Si bien algunos errores han sido superados durante el ciclo básico es importante que se visibilicen y traten para que permitan la adquisición correcta de los conocimientos. Es importante tener en cuenta que los contenidos que se abordan en el Nivel Secundario no son triviales y requieren de mucho tiempo para su apropiación y consolidación originando en los alumnos dificultades en su aprendizaje.

Del análisis realizado de los errores registrados en las producciones de los alumnos, se infiere que gran parte de las equivocaciones cometidas son debidas a estrategias de enseñanza inadecuadas, a lo que hay que agregar que los alumnos no están acostumbrados a leer consignas, volver a realizar la lectura de un problema, reflexionar sobre lo realizado, buscar datos relevantes, preguntas o una estrategia de resolución: les interesa la inmediatez de la respuesta.

El análisis de los resultados obtenidos confirma las hipótesis del trabajo ya que revela una estrecha relación con lo que ocurre en la realidad.

5.2. RECOMENDACIONES PARA LA ENSEÑANZA

Las fracciones son un importante escalón para el aprendizaje de la matemática avanzada y también son utilizadas comúnmente en la vida cotidiana. Sin embargo, muchos alumnos siguen luchando con las fracciones aún después de años de instrucción.

Las conclusiones obtenidas en este estudio, analizadas con el respaldo teórico de investigaciones sobre el tema, permiten realizar recomendaciones tendientes a fortalecer la enseñanza de fracciones para incrementar la cantidad de alumnos que las comprendan y así puedan resolver correctamente problemas y operaciones.

Se recomienda que los procesos de enseñanza y aprendizaje se basen en un modelo constructivista que permita que los alumnos adquieran el conocimiento conceptual de las fracciones más allá de reglas memorísticas y ejercicios repetitivos.

Los recursos para lograr este objetivo son diversos:

- ❖ El campo de la Historia de la Matemática provee suficiente elementos para enriquecer el trabajo del aula. Conocer la Historia de la Matemática permite al docente acercarse a la evolución de los conceptos matemáticos, facilita entender por qué se presentan algunas dificultades conceptuales en las aulas y brinda contextos para planear clases más amenas. Los conocimientos matemáticos de los docentes de Matemática a nivel de Educación Secundaria deben ser profundos para poder impactar en la calidad de la educación impartida. El desarrollo del conocimiento científico ha estado acompañado de errores según puede constatarse al revisar su evolución histórica y la revisión bibliográfica llevada a cabo muestra que gran parte de los errores que cometen los alumnos en Matemática se remontan a obstáculos epistemológicos que los propios matemáticos enfrentaron y superaron a través de siglos de historia. Al respecto, Godino, Batanero y Font (2003) expresan:

> Por otro lado, la historia de las matemáticas muestra que las definiciones, propiedades y teoremas enunciados por matemáticos famosos también son falibles y están sujetos a evolución. De manera análoga, el aprendizaje y la enseñanza deben tener en cuenta que es natural que los alumnos tengan dificultades y cometan errores en su proceso de aprendizaje y que se puede aprender de los propios errores. (p. 16).

Los pitagóricos relacionaron la Música y las Matemáticas. Si se fija uno de los extremos de una cuerda tensa y se hace vibrar emitirá un sonido de un tono. Si se hace vibrar la mitad de la cuerda, el tono aumentará un octavo. Si vibran los dos tercios de la cuerda, el tono estará por encima del que produjo la cuerda entera. Así la octava, la quinta y la cuarta fueron consideradas superiores a otros intervalos musicales. (Collette, 1986).

- Permitir que el error aparezca en la clase ya que un camino posible para su corrección es intentando que los alumnos sean los que perciban los errores.

Para las teorías constructivistas, el error es la señal del grado y del modo de acercamiento al conocimiento que logró el alumno. El error sistemático, ese que se repite, es propio del proceso de construcción del conocimiento, y el momento cuando se produce es el mejor para provocar la reflexión del alumno, corregir la equivocación y lograr un aprendizaje significativo.

- ❖ El empleo de situaciones problema como centro de la actividad matemática permite no sólo la posibilidad de introducir nuevos temas o explorar ideas previas, sino también el desarrollo del razonamiento. En este sentido, los problemas permiten la movilización del pensamiento y por consiguiente no presentan de manera explícita, el procedimiento a seguir, lo que demanda en el alumno, no solo el reconocimiento de las operaciones que debe hacer para resolverlo, sino que le exige la comprensión de la situación. Entendemos como una situación problema, diferente a un ejercicio que se realiza en forma mecánica, que debe ser detonadora de la actividad cognitiva y para que esto suceda debe involucrar implícitamente los conceptos que se van a aprender pero a la vez debe ser accesible al alumno y le debe permitir utilizar conocimientos anteriores.

Problema
Se dispone de 4 pasteles y se le quiere dar a cada niño 3/5 de pastel. ¿A cuántos niños se les dará pastel? ¿Cuánto sobra?

La resolución puede hacerse de dos maneras:

i) 4 = 20/5 | 3/5
2/5 6

ii) 4 : 3/5 = 20/3 = 6 + 2/3

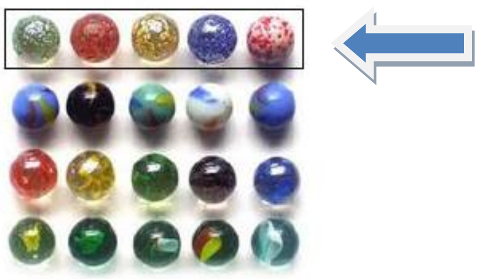
Cada operación genera una respuesta que no son iguales:
i) Se da pastel a 6 niños y sobran 2/5
ii) Se da pastel a 6 niños y sobran 3/5

Buscar explicaciones para resolver esta discrepancia en las soluciones Identificar los conceptos matemáticos que se utilizan en el problema y estudiar sus propiedades, hasta llegar a interpretar el problema y las soluciones, así como las operaciones realizadas.

(Flores, P., Lupiáñez, J.L., Berenguer, L., Marín, A. y Molina, M., 2011)

- ❖ Plantear situaciones con la mayoría de los significados mencionados en este estudio resaltando, sobre el significado parte-todo, que se realice en contextos continuos usando no sólo medidas de superficies con figuras tradicionales sino también de capacidad y de peso y en contextos discretos.

- "Repartir tres barras de chocolate entre cinco amigos de forma equitativa"
- "Tenemos una cinta de 22 cm. Hay que repartirla entre 4 alumnos ¿cuánto le toca a cada uno?"
- Tres amigos entran a un restaurante y piden dos pizzas que reparten entre ellos. ¿Cuánto le toca a cada uno? Poco después llega otro amigo. ¿Cuánto debe convidarle cada uno para que los cuatro tengan la misma cantidad? (SEP, 2001, p.82)
- Situación con material discreto



$\frac{1}{4}$

❖ Presentar situaciones en las que los números naturales se muestren ineficaces para que los alumnos no trasladen sus significados a las fracciones; situaciones que sugieran la necesidad de construir un nuevo sistema de representación.

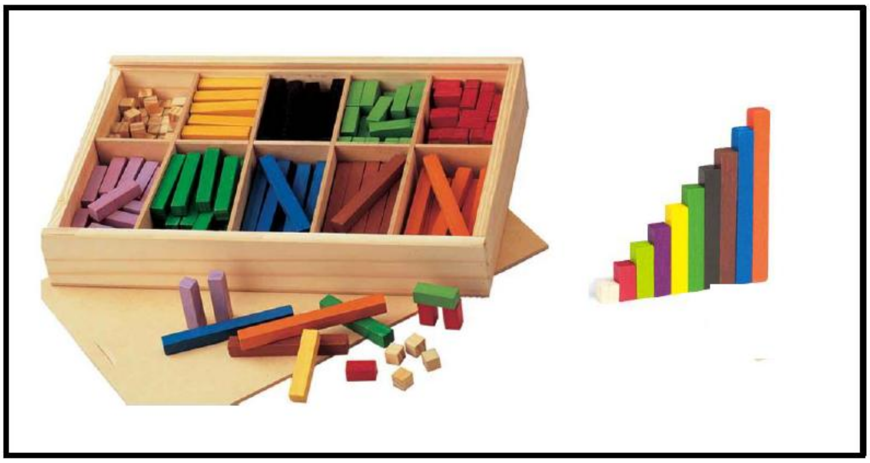
- Resolver la ecuación $3x = 14$

❖ Estructurar bien los contenidos que se quieren enseñar:

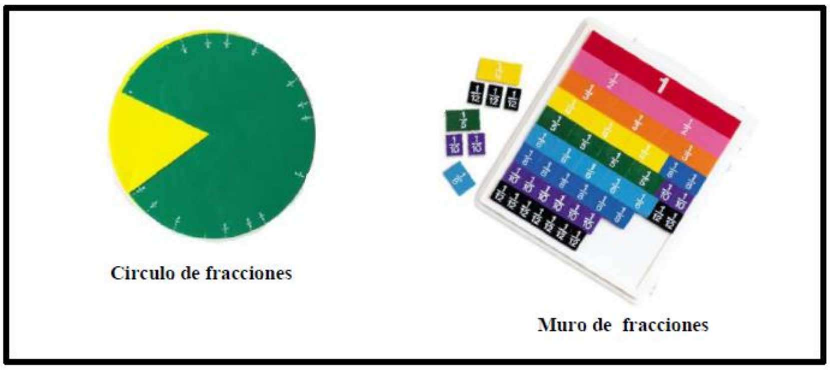
- Evitar material que no es claro, ejercicios y problemas confusos, rutinarios y repetitivos.

- Presentar el tema en forma clara y organizada con una buena dicción, un correcto uso del pizarrón y poniendo énfasis en los conceptos claves del tema.
- Usar material concreto; situaciones que representen el entorno de los alumnos para acercarlos al conocimiento matemático partiendo de su propia realidad.

  Actividad de dobleces. Proponer que los alumnos realicen dobleces en hojas rectangulares, acordando primero que se considera como unidad una hoja, para observar y discutir acerca de las diversas maneras de realizar dobleces para obtener medios, tercios, cuartos, etc.



Regletas Cuisenaire



❖ Realizar evaluaciones iniciales para detectar los contenidos previos que hay que adquirir para lograr el aprendizaje del contenido previsto.

- Presentar las operaciones en relación con los significados.

  https://www.geogebra.org/m/gvzW6bxs

5.3. POSIBLES LÍNEAS PARA CONTINUAR LA INVESTIGACIÓN

Considerado lo alcanzado en el presente estudio se proponen algunas formas de ampliarlo:

- Analizar los manuales y libros de textos que usan los alumnos y docentes para conocer cuál es el enfoque que tienen respecto a las fracciones y así sugerir ampliar/cambiar la bibliografía de ser necesario.
- Investigar de qué manera se introducen en el Nivel Primario las fracciones para conocer qué significados se imparten a los niños y con qué base epistemológica.
- Extender la investigación al ciclo orientado para contrastar la evolución de la comprensión y el razonamiento matemático y también observar el tipo y frecuencia de errores que aparecen.
- Indagar sobre el nivel de percepción que tienen los profesores de los errores que cometen sus alumnos y el tratamiento que realizan de los mismos.

ANEXO 1

PRESENTACIÓN DE LOS CUESTIONARIOS A LOS ALUMNOS

Primera hoja de cada cuestionario es para informar a los alumnos sobre la finalidad de los mismos; metodología de trabajo e instrucciones.

Hola:
Estamos trabajando en un estudio que servirá para elaborar una investigación de la profesora acerca de las fracciones y los alumnos en nuestra escuela.
Queremos pedir tu ayuda para que realices algunas actividades que no te tomarán mucho tiempo. Tus respuestas serán confidenciales y anónimas (en ningún momento se pide tu nombre).
Las personas que fueron seleccionadas para el estudio no se eligieron por su nombre sino por el año que cursan.
Las opiniones de todos los alumnos serán sumadas e incluidas en la investigación pero nunca se comunicarán datos individuales.
Te pedimos que realices las actividades con la mayor sinceridad posible. No hay respuestas correctas ni incorrectas.
Lee las instrucciones cuidadosamente. Emplea un lápiz o una birome para responder.
Eres una de las personas que puede señalar ciertas cuestiones que servirán para que todos aprendan mejor las fracciones y así colaborar para aprobar Matemática!

¡Muchas gracias por tu colaboración!

INSTRUCCIONES PARA RESPONDER

1. Lee atentamente las actividades y las preguntas.
2. Recuerda que para expresar tus respuestas puedes utilizar palabras cotidianas, números, símbolos, figuras, etc.
3. Si no puedes responder la pregunta escribe explicando por qué no puedes hacerlo. (Porque desconoces los términos adecuados, no recuerdas, lo ignoras u otra razón)
*4. Si te has equivocado puedes **tachar** y luego continuar con la respuesta. **(Nunca borrar)***
*5. Si tienes que hacer cálculos hazlos en la parte en blanco de la misma hoja. **De ninguna manera hagas tus cálculos en otra hoja.***
6. Te rogamos responder las preguntas en completo silencio para no interrumpir a tus compañeros.

ANEXO 2

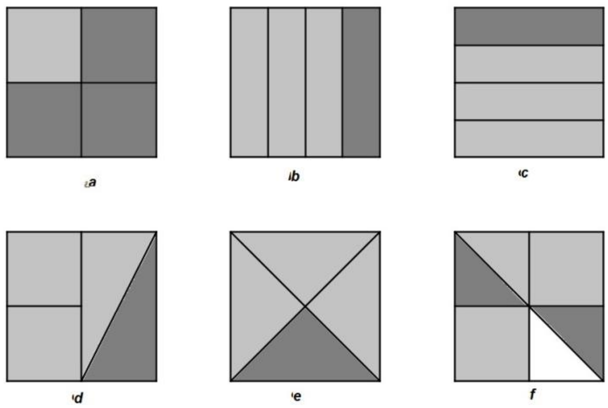
CUESTIONARIO SOBRE LOS SIGNIFICADOS DE LAS FRACCIONES

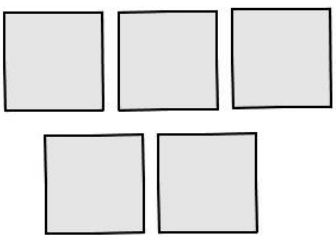
Destinatarios: alumnos de primer año. Actividades acordes a los conocimientos que se supone han adquirido en el nivel primario.

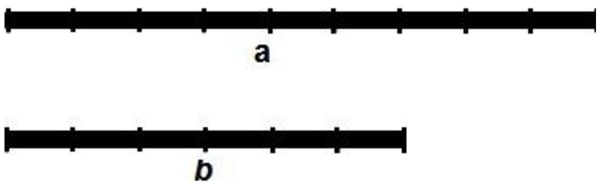
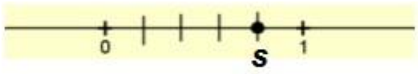
Curso: 1º año .... *Edad:..............* *Fecha: ....*

<table>
<tr><th>ACTIVIDADES</th><th>RESPUESTAS</th></tr>
<tr><td>1) La bandera que representará en los intercolegiales a los alumnos de primer año debe cumplir con los siguientes requisitos:

La bandera debe tener forma de cuadrado
La bandera debe tener únicamente 2 colores
Uno de los colores sólo debe cubrir la cuarta parte de la bandera

Observa los siguientes diseños e indica <u>todos</u> los posibles que cumplan con los requisitos anteriores.

</td><td>FUENTE: Hincapié Morales C.P. (2011), p. 44</td></tr>
<tr><td>2) La siguiente gráfica representa el “todo” con cinco bolitas. ¿Cuál es la fracción representada por las tres bolitas grises?

</td><td>FUENTE: Ruiz Cruz, C.A. (2013), p. 63</td></tr>
<tr><td>3) Si hay 5 tortas de chocolate como las que se muestran y se tienen que repartir en partes iguales entre cuatro niños, ¿cuánto le tocará a cada uno? Grafica cómo lo harías en el cuadriculado de la derecha.

</td><td>FUENTE: Hincapié Morales C.P. (2011), p.39</td></tr>
</table>

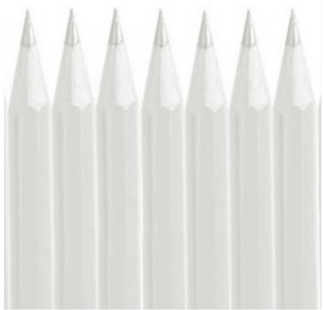
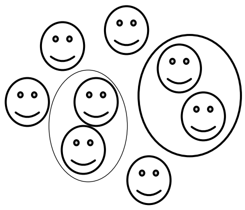
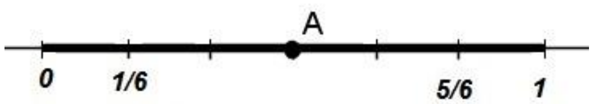
*4) En la figura el segmento **b** es parte del segmento **a**. Usando una fracción indica qué parte es. Puedes dibujar lo que necesites en el cuadriculado de la derecha.* 	***FUENTE: Quispe Yapo, W. (2011), p. 119***
*5) ¿Cuál es la fracción que representa al punto **S** en la siguiente recta numérica?:* 	***ELABORADA POR LA INVESTIGADORA***

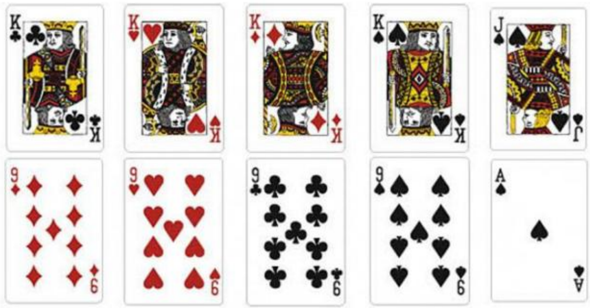
ANEXO 3

CUESTIONARIO SOBRE LOS SIGNIFICADOS DE LAS FRACCIONES

Destinatarios: alumnos de segundo año. Actividades acordes a los conocimientos que se supone han adquirido durante el primer año del nivel secundario.

Curso: 2º año .... *Edad:...............* *Fecha: ....*

ACTIVIDADES	***RESPUESTAS***
1) Andrés estaba comiendo una pizza (como la que se muestra) por partes: en el almuerzo comió ½ de la pizza, más tarde ¼ y a la noche 1/8. ¿Se comió completa la pizza? Realiza una gráfica indicando qué parte de la pizza se comió. 	***ELABORADA POR LA INVESTIGADORA***
2) Ana tiene siete lápices como los de la figura. Pinta tres lápices de color rojo y cuatro de color azul, ¿qué fracción del total de lápices son de color azul? 	***ELABORADA POR LA INVESTIGADORA***
3)  *¿Qué fracción representan las caritas encerradas?*	***FUENTE: Montenegro, L.(sf), p.9***
*4) ¿Cuál es la fracción que representa al punto **A** en la siguiente recta numérica?:* 	***ELABORADA POR LA INVESTIGADORA***

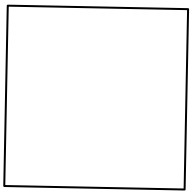
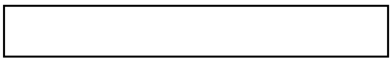
5)  *Dadas las 10 cartas anteriores:* *a) ¿Cuántas cartas son* $\frac{1}{10}$ *?* *b) ¿Cuántas cartas son* $\frac{1}{2}$*?* *c) Reparte, sin importar cuáles, las 10 cartas anteriores entre las 5 personas de la derecha. ¿Qué fracción de las cartas le corresponde a cada uno?*	 ***FUENTE: Ruiz Cruz, C.A. (2013), p. 129***
6) En la pastelería de don José se hornean 250 pasteles en el día, de los cuales 3/10 son de membrillo. ¿Cuántos pasteles de membrillo se hornean en el día?	***FUENTE: Hincapié Morales C.P. (2011), p.39***

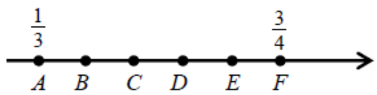
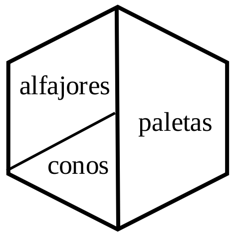
ANEXO 4

CUESTIONARIO SOBRE LOS SIGNIFICADOS DE LAS FRACCIONES

Destinatarios: alumnos de tercer año. Actividades acordes a los conocimientos que se supone han adquirido durante los dos primeros años del ciclo básico del nivel secundario.

Curso: 3º año .... *Edad:...............* *Fecha: ....*

ACTIVIDADES	***RESPUESTAS***
1) Utiliza la cuadrícula de la derecha para completar a la unidad si: *a) El cuadrado es un tercio de la unidad:*  *b) El rectángulo es dos cuartos de la unidad:* 	***FUENTE: Ruiz Cruz, C.A. (2013), p. 102***
2) En clase de artística los alumnos están haciendo collares, la profesora les dijo que 4 perlas representaban las 2/5 partes de las perlas para elaborarlos. ¿Cuántas perlas deben comprar?	***FUENTE: Hincapié Morales C.P. (2011), p.39***
3) En la reunión familiar de Lucia hay 11 personas. Compran tres pizzas y Lucia las debe repartir de manera que cada uno coma la misma cantidad. Dibuja la forma en cómo repartiría las tres pizzas. 	***FUENTE: Morales Díaz, R.O. (2014), p. 139***
4) Los puntos de A a F se encuentran a la misma distancia uno del otro sobre la recta numérica. El punto A representa el número $\frac{1}{3}$ *y el punto F el número* $\frac{3}{4}$	***ELABORADA POR LA INVESTIGADORA***

 *Entonces la fracción que representa al punto E es:* *a)* $\frac{5}{12}$ *b)* $\frac{2}{3}$ *c)* $\frac{4}{12}$ *d)* $\frac{5}{3}$	
5)El siguiente diagrama representa las preferencias de un grupo de alumnos con relación a los helados. En base a la información dada, ¿qué fracción de alumnos prefiere paletas?, ¿qué fracción de alumnos prefiere alfajores?	 ***FUENTE: Morales Díaz, R.O. (2014), p. 139***
6) Amelia ha gastado 3/8 de sus ahorros en la compra de un celular que le ha costado $ 6501. ¿Cuánto dinero tenía ahorrado?	***FUENTE: Cólera y Gaztelu. (2012), p. 78***

ANEXO 5

CUESTIONARIO SOBRE OPERACIONES ENTRE FRACCIONES

Destinatarios: alumnos de primer año. Operaciones básicas acordes a los conocimientos que se supone han adquirido en el nivel primario.

Curso: 1º año .... *Edad:..............* *Fecha: ....*

ACTIVIDADES: Realice las operaciones indicadas	***RESPUESTAS***
ELABORADAS POR LA INVESTIGADORA	
1) $\frac{2}{7}+\frac{11}{7}$	
2) $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$	
3) $\frac{5}{6}-\frac{1}{5}$	
4) $\frac{3}{5}\times\frac{4}{7}$	
5) $\frac{4}{7}\div\frac{5}{6}$	

ANEXO 6

CUESTIONARIO SOBRE OPERACIONES ENTRE FRACCIONES

Destinatarios: alumnos de segundo y tercer año. Operaciones acordes a los conocimientos que se supone han adquirido en el/los año/s anterior/es del nivel secundario.

Curso: 2º / 3º año .... *Edad:...............* *Fecha: ....*

ACTIVIDADES: Realice las operaciones indicadas simplificando cuando sea posible	***RESPUESTAS***
ELABORADAS POR LA INVESTIGADORA	
1) $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$	
2) $1-\frac{3}{5}+\frac{1}{2}$	
3) $\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}$	
4) $\frac{7}{8}\div\frac{5}{4}$	
FUENTE: González Del Olmo (2015), p.52	
5) $3-2\times\frac{3}{5}$	
6) $3\times\frac{1}{2}-\frac{3}{5}$	
7) $\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$	
8) $\frac{2}{3}\times\left(1+\frac{2}{5}\right)$	
9) $\frac{1}{2}\div\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)$	
10) $\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{6}\right)\div\left(\frac{1}{6}+\frac{2+5}{2+2}\right)$	

ANEXO 7

ESCUELA TÉCNICA Nº 7 “Dr. MANUEL SADOSKY”
Ministerio de Educación de la Provincia de San Luis

<u>PROGRAMA DE MATEMÁTICA – 2018 - CURSO</u>: 1° Año

UNIDAD 1. Sistema de numeración decimal, noción de base, propiedades. Sistema de numeración binario; aplicaciones. Propiedades de los sistemas posicionales. Sistemas de numeración no posicionales. Los números naturales: divisibilidad, múltiplos y divisores, número primo, mínimo común múltiplo, máximo común divisor. Operaciones y sus propiedades conmutativa, asociativa y distributiva. Operaciones combinadas.

UNIDAD 2. S.I.M.E.L.A.: unidades de longitud, cálculo de perímetros; otras unidades de longitud conocidas: pulgada, pie, milla; unidades de área y volumen más usuales, equivalencias y aplicaciones.

UNIDAD 3. Lenguaje coloquial y simbólico; expresiones algebraicas: ecuaciones de primer grado con una incógnita en los naturales. Problemas.

UNIDAD 4. Punto, recta, plano, segmento, semirrecta y ángulo. Clasificación de ángulos. Posiciones relativas de la recta en el plano, paralelismo y perpendicularidad. Coordenadas cartesianas: ubicar e identificar puntos de coordenadas positivas en el plano.

UNIDAD 5. Las fracciones positivas: su significado, representación gráfica, clasificación, fracciones equivalentes. Ubicación en la recta. Orden. Fracciones decimales. Equivalencia entre decimal exacto y fracción. Fracción y porcentaje. Operaciones con fracciones: suma, resta. Situaciones problemáticas.

UNIDAD 6. Triángulos: clasificación según sus lados y según sus ángulos. Construcción con regla y compás. Trazado de alturas, medianas, bisectrices y mediatrices. Puntos notables de un triángulo. Sumas de los ángulos interiores y exteriores de un triángulo, perímetro y área. Teorema de Pitágoras.

UNIDAD 7. Interpretación, representación y tratamiento de la información: estadística, nociones elementales, reconocimiento, recolección, registro y análisis de datos, tablas, gráficas de barras horizontales y verticales, perfiles, gráficos circulares, histogramas, pictogramas.

<u>BIBLIOGRAFIA</u>

- *Matemática Activa 7. <u>Autores:</u> Laurito L., B. de Stisin L., Trama E., Ziger D., Sidelsky E. <u>Editorial:</u> Puerto de Palos.*
- *Actividades de Matemática 7°. <u>Autores:</u> Diñeiro M.T., Kalizsky R.S.<u>Editorial:</u> Santillana*

Prof. M. Patricia Chiarani
Directora
Escuela Técnica N°
San Luis

ANEXO 8

ESCUELA TÉCNICA Nº 7 "Dr. MANUEL SADOSKY"
Ministerio de Educación de la Provincia de San Luis

<u>PROGRAMA DE MATEMÁTICA – 2018 - CURSO</u>: 2° Año

UNIDAD 1. Números enteros: números negativos, usos, la recta y los números enteros, valor absoluto, números opuestos, orden en Z.

UNIDAD 2. Notación científica, usos. Números decimales: aproximación por redondeo y truncamiento.

UNIDAD 3. Plano cartesiano: ubicar e identificar puntos. Vectores en el plano cartesiano; vector de posición. Suma y resta de vectores en forma gráfica (método de la poligonal y del paralelogramo) y analítica. Vectores colineales.

UNIDAD 4. Números enteros: operaciones de adición y sustracción, multiplicación y división; sus propiedades; operaciones combinadas. Operaciones de potenciación y radicación y sus propiedades; operaciones combinadas. Ecuaciones en Z de primer grado con una incógnita.

UNIDAD 5. Revisión del concepto de fracción: su significado, representación gráfica, clasificación, fracciones equivalentes. Ubicación en la recta. Orden. Fracciones decimales. Equivalencia entre decimal exacto y fracción. Fracción y porcentaje. Operaciones con fracciones y sus propiedades. Situaciones problemáticas.

UNIDAD 6. Ángulos adyacentes, complementarios y suplementarios. Ángulos opuestos por el vértice. Ángulos entre paralelas.

UNIDAD 7. Tratamiento de datos cualitativos y cuantitativos. Población y muestras: representatividad. Variable. Recolección y registro de datos. Tablas de frecuencias. Histogramas. Parámetros estadísticos, media aritmética, moda, desviación estándar.

<u>BIBLIOGRAFIA</u>

- Matemática Activa 8
  <u>Autores:</u> *Liliana Laurito. Laura B. de Stisin. Eduardo Trama. Dora Ziger. Estela Sidelsky.*
  <u>Editorial:</u> *Puerto de Palos.*
- Matemática 8° E.G.B.
  <u>Autores:</u> *Julia Seveso de Larotonda. Ana Renata Wykowski. Graciela Ferrarini*.
  <u>Editorial:</u> *Kapeluz*
- Matemática en Red 8
  <u>Autores:</u> *Alicia López. Claudia Marcela Pellet.* **<u>Editorial:</u>** a*Z*

ANEXO 9

ESCUELA TÉCNICA Nº 7 "Dr. MANUEL SADOSKY"
Ministerio de Educación de la Provincia de San Luis

<u>PROGRAMA DE MATEMÁTICA – 2018 - CURSO</u>: 3° Año

UNIDAD 1. Revisión de números racionales: operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación y sus propiedades. Operaciones combinadas. Concepto de densidad. Pasaje de fracción a expresión decimal y viceversa. Operaciones combinadas con fracciones y números decimales.

UNIDAD 2. Vectores en el plano cartesiano: componentes de un vector; producto de un vector por un número real. Módulo de un vector. Modelización de situaciones reales mediante el empleo de vectores.

UNIDAD 3. Números irracionales. Números reales: propiedades y concepto de completitud. Representar raíces cuadradas no exactas en la recta numérica. Número Pi. Circunferencia y círculo, elementos, propiedades, construcciones. Longitud de la circunferencia. Área del círculo. Circunferencia inscripta y circunscripta en un triángulo.

UNIDAD 4. Idioma coloquial y algebraico: ecuaciones de primer grado con una incógnita en Q. Interpretación y resolución de problemas.

UNIDAD 5. Proporcionalidad directa e Inversa. Proporciones numéricas. Problemas.

UNIDAD 6. Noción de Función. Noción de dependencia entre variables. Distintas formas de representación (Tablas, fórmulas, coloquial, gráfica). Función de proporcionalidad directa e inversa. Coordenadas cartesianas y gráficos. Interpretación y resolución de problemas: traducción de enunciados en lenguaje coloquial al simbólico. Uso de software para el estudio de algunas funciones.

UNIDAD 7. Polígonos convexos. Polígonos regulares. Suma de los ángulos interiores y exteriores. Cuadriláteros, definición y clasificación. Perímetro y área de distintos polígonos: fórmulas.

<u>BIBLIOGRAFIA</u>

Matemática Activa 9
<u>Autores:</u> *Liliana Laurito. Laura B. de Stisin. Eduardo Trama. Dora Ziger. Estela Sidelsky.* **<u>Editorial:</u>** *Puerto de Palos.*
Matemática en Red 9
<u>Autores:</u> *Alicia López. Claudia Marcela Pellet.* **<u>Editorial:</u>** a*Z*

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Abrate, R., Pochulu, M. y Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en matemática. Análisis de causas y sugerencias de trabajo*. Villa María: Universidad Nacional de Villa María.
2. Bachelard, G. (1988). *La formación del espíritu científico*. México: Siglo XXI.
3. Behr, M.J., Lesh, R., Thomas R. Post, T.R. y Silver, E.A. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, (pp. 91-125). New York: Academic Press.
4. Brousseau G., Davis R., Werner T. (1986). Observing Students at work, en Chistiansen B., Howson G., Otte M. (Edts): *Perspectives on Mathematics Education*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.
5. Cólera,J. y Gaztelu, I. (2012). *Matemáticas.* Madrid:Anaya.
6. Collette, J.P. (1986). *Historia de las matemáticas.* (P. G. Gayoso, Trad.) Mexico: Siglo XXI editores.
7. Chamorro, M. del C.; Belmonte Gómez J.M; Llinares S.; Ruiz Higueras M.L. y Vecino Rubio F. (2003). *Didáctica de las Matemáticas para Primaria.* Madrid: Pearson Educación S.A.
8. D'Amore, B. y Godino, J. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *10*, 191–218.
9. Del Puerto S.M., Minnaard C.L. y Seminara S.A. Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas. (2006). *Revista Iberoamericana de Educación Vol. 38 (Extra 4),* 51-63.
10. Di Blasi Regner, M. y Otros (2003). Dificultades y Errores: Un estudio de caso. Comunicación breve presentada en el II Congreso Internacional de Matemática

Aplicada a la Ingeniería y Enseñanza de la Matemática en Ingeniería (Buenos Aires, Diciembre 2003).

11. Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1984). *Children Learning Mathematic*. Oxford: The Alden Press Ltd.
12. Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Hitt, Fernando (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II*. México: Grupo Editorial Iberoamérica. 173 – 201.
13. Ellerbruch, L.W. y Payne, J. (1978). A Teaching Sequence from Initial Fraction Concepts th rough the Addition of Unlike Fractions, en *Developing Computational Skills*, Suydam, M . N. y Rey, R. E. (Ed.). Reston VA
14. Fandiño Pinilla M. I. (2015). Las fracciones: aspectos conceptuales y didácticos. En L. A. Hernández Rebollar, J. A. Juárez López, J. Slisko Ignjatov (Eds.), *Tendencias en la educación matemática basada en la investigación* (pp 25-38), México: BUAP Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.
15. Fazio, L. y Siegler, R. (2011). Enseñanza de las fracciones. *Serie Prácticas Educativa,22.* Recuperado el 30 de agosto de 2016 de http://www.iaoed.org/index.php/ed-practices-series
16. Flores García R. (2011). Los significados asociados a la noción de fracción en la escuela secundaria. En P.Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24,* 23-31. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
17. Flores, P., Lupiáñez, J.L., Berenguer, L., Marín, A. y Molina, M. (2011). *Materiales y recursos en el aula de matemáticas*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

18. Franchi,L y Hernández de Rincón, A. (2004). Tipología de errores en el área de la geometría plana. Parte II. *Educere*, *8*(24), 63-71

19. Freudenthal, H. (2001). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas.* (Luis Puig, trad.). (pp. 133-177). México: Cinvestav. (Obra original publicada en 1983).

20. Gallardo, J., González, J.L. y Quispe, W. (2008). Interpretando la comprensión matemática en escenarios básicos de valoración. un estudio sobre las interferencias en el uso de los significados de la fracción. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *11*(3). 355 - 382

21. Giordan A. (1996). ¿Cómo ir más allá de los modelos constructivistas? La utilización didáctica de las concepciones de los estudiantes. *Investigación en la Escuela, Nº 28*, 7-22.

22. Godino J., Batanero C. y Font V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática para maestros.* Universidad de Granada. https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/9_didactica_maestros.pdf

23. González del Olmo, D. (2015). *Errores comunes en el aprendizaje de las fracciones:Un estudio con alumnos de 12/13 años en Cantabria.* Tesis de Máster en Formación del Profesorado de Educación Secundaria no publicada. Universidad de Cantabria. España.

24. Hart, K. M. & Chelsea College. CSMS Mathematics Team (1981). *Children's understanding of mathematics:* 11-16. London: John Murray.

25. Hernández Sampieri, R.;Fernández Collado, C. y Baptista, L. M. (2010). *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill/Interamericana Editores, S.A. de C.V.

26. Hincapié Morales C.P. (2011). *Construyendo el concepto de fracción y sus diferentes significados, con los docentes de primaria de la institución educativa*

San Andrés de Girardota. Trabajo Final de Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales no publicado. Universidad Nacional de Colombia. Colombia.

27. Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational numbers. In R. A., Lesh & D. A., Bradbard (Eds.), *Number and measurement* (101-144). Columbus, Ohio: ERIOSMEAC.
28. Kieren, T. (1980). The rational number constructs. Its elements and mechanisms. En T. Kieren (Ed.), *Recent research on number learning* (125-149). Columbus, OH: Eric/Smeac.
29. Lakatos, I. (1978). *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. Madrid: Alianza Universidad.
30. Llinares Ciscar, S. y Sánchez García, M.V. (1997). *Fracciones: la relación parte todo.* Madrid: Síntesis
31. Martínez, C. y Lascano, M. (2001). Acerca de dificultades para la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones. *Revista Ema 6*(2), 159-179.
32. Merzbach U.C. and Carl B. Boyer C.B. (2011). *A History of Mathematics.* New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
33. Ministerio de Educación Presidencia de la Nación. (2011). Núcleos de Aprendizajes Prioritarios. Matemática. Ciclo Básico Educación Secundaria. Buenos Aires: Ministerio de Educación
34. Ministerio de Educación Gobierno de la Provincia de San Luis. Programa Escuelas Técnicas Profesional y de Oficios. Diseño Curricular (2014). San Luis: Ministerio de Educación
35. Ministerio de Educación Gobierno de la Provincia de San Luis. Diseño Curricular de Educación Primaria. San Luis: Ministerio de Educación

36. Montenegro, L. (sf). *Fracción como Parte de un Todo*. Recuperado el 22 de marzo de 2017 de https://es.calameo.com/books/0015932711e35ca4f6a83

37. Morales Díaz, R.O. (2014). *Dificultades y errores en la solución de problemas con números racionales.* Tesis de Magister en Enseñanza de las Ciencias no publicada. Universidad Autónoma de Manizales. Colombia.

38. Moreno, I. De Y Castellanos, L. De. (1997). Secuencia de enseñanza para solucionar ecuaciones de primer grado con una incógnita. *Revista Ema 2* (3). 247-258.

39. Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O. y Inbar, S. (1987). An Empirical Classification Model for Errors in High School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education 18* (1). 3-14.

40. Obando Zapata, G., Vanegas Vasco, M.D. y Vásquez Lasprilla, N.L. (2006). *Modulo 1. Pensamientos Numéricos y Sistemas Numéricos,* Medellín Colombia.

41. Payne, J. N. (1976). Review of research on fractions. In R. A., Lesh & D. A., Bradbard (Eds.), *Number and measurement* (145-187). Columbus, Ohio: ERIOSMEAC.

42. Perera, P y Valdemoros, M. (2007). Propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones en cuarto grado de educación primaria. *Investigación en Educación Matemática XI*, 209-218.

43. Piaget, J., Inhelder, B. y Szeminska, A. (1960). *The child's conception of geometry*. London: Routledge and Kegan.

44. Popper, K. (1979). *El desarrollo del conocimiento científico.* México: Siglo XXI.

45. Pruzzo, V. (2012). Las fracciones: ¿problema de aprendizaje o problemas de la enseñanza? *Revista Pilquen XIV* (8). Recuperado el 30 de agosto de 2016 de

www.revistapilquen.com.ar/SumarioPsico8.htm

46. Quispe Yapo, W. (2011). *La Comprensión de los Significados del Número Racional Positivo y su Relación con sus Operaciones Básicas y Propiedades Elementales.* Tesis de Doctor en Ciencias de la Educación no publicada. Universidad Nacional de Educación. Perú.

47. Radatz, H. (1980). Students' errors in the mathematical learning process: a survey. *For the Learning of Mathematics*, V. 1, Nº 1, pp. 16 – 20.

48. Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de la Matemática. En Kilpatrick Jeremy, Gómez Pedro y Rico Luis (Editores). *Educación Matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 69-108.

49. Ríos García, Y. (2007). Una ingeniería didáctica aplicada sobre fracciones. *Revista Omnia 13* (2), 120-157.

50. Ruiz, A. (2014). *La operacionalización de elementos teóricos al proceso de medida*, col. Omado. Barcelona: Universitat de Barcelona. Recuperado el 9 de febrero de 2020 de http://hdl.handle.net/2445/53152

51. Ruiz Cruz, C.A. (2013). *La fracción como relación parte-todo y como cociente: Propuesta Didáctica para el Colegio Los Alpes IED.* Tesis de Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales no publicada. Universidad Nacional de Colombia. Colombia.

52. Secretaría de Educación Pública (2001). *Libro para el Maestro. Educación Secundaria*. México.

53. Soto, G. (2015). Matemática a enseñar o para enseñar: el caso de las fracciones. *XIV CIAEM-IACME*. Conferencia llevada a cabo en Chiapas, México.

54. Streefland, L. (1993). *Las fracciones: un enfoque realista.* (Nora Da Valle, trad.) (pp.289-326). San Carlos de Bariloche: Grupo Patagónico de Educación

Matemática. Recuperado el 30 de agosto de 2016 de

http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2015/08/Streefland_Las_fracciones.pdf

55. https://www.scientificamerican.com/article/fractions-where-it-all-goes-wrong/