Tesis de Maestría

Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Concepciones de estudiantes de nivel medio sobre la noción de infinito matemático

Autora: María Teresa Juan

Directora: Mg. Virginia Montoro

Codirectora: Dra. Nora Scheuer

Facultad de Ingeniería

Universidad Nacional del Comahue

Bariloche, Agosto de 2011

A Marcelo,
a Sole,
a Joel.

Reconocimiento

Un trabajo de investigación es siempre fruto de ideas, proyectos y esfuerzos previos que corresponden a otras personas; en este sentido, mi más sincero agradecimiento a Virginia Montoro y Nora Scheuer, directora y codirectora de esta tesis por haber compartido generosamente conmigo toda esa experiencia. Además, a Virginia Montoro por su amistad, apoyo, comprensión y confianza; este logro es sin duda también suyo y a Nora Scheuer, no sólo por sus brillantes sugerencias, sino fundamentalmente por sus palabras de reconocimiento y aliento en los momentos en que más los necesité.

Esta tesis es el fruto de una suma de apoyos y esfuerzos a lo largo de muchos meses. A todas las personas que, en mayor o menor medida hicieron posible finalizar este trabajo, un agradecimiento infinito, de corazón:

A mi familia, por todo el apoyo, en especial a Sole y Joel, por haberme permitido terminar antes que ellos…y a Marcelo por todo el resto.

A mis compañeras y amigas, Martha Ferrero y Carolina Biscayart, por el impulso de cada mañana al pasar por mi oficina y preguntar: ¿y? ¿Cómo va?

A las chicas de siempre, Mónica De Torres Curth, Liliana Siñeriz, Nora Baccalá y por supuesto, Raquel Santinelli y Cristina Ferraris.

A las más recientes, Marcelita Cifuentes, Flavia Santamaría y Viriginia Zilio, a los estudiantes, Verónica Bianchi y Guillermo Fernandez Rajoy por haberme escuchado una y otra vez, como si fuera la primera.

A los directivos y estudiantes de los colegios CEM 2, CEM 46 y ECTLA, de la ciudad de Bariloche, sin cuya desinteresada colaboración y predisposición para responder el cuestionario, esta tesis no hubiera sido posible.

Palabras clave: Infinito – Matemática – Concepciones – Estudiantes - Secundaria

Resumen

El objetivo de esta tesis es indagar cuáles son las ideas que los estudiantes de nivel medio tienen respecto del concepto de infinito matemático. Se acota el estudio de las concepciones de los estudiantes sobre el infinito matemático a algunos aspectos como son: la posibilidad de obtener una colección infinita a partir de combinar una cantidad finita de elementos que puedan repetirse, la distinción entre infinito y un número muy grande y la diferenciación entre infinito y “todo”.

Se aplicó un cuestionario a 195 estudiantes de tres escuelas de Bariloche, cuyas edades se sitúan entre los 13 y los 19 años de edad, abordando la información obtenida a través del análisis multivariado de datos.

Los resultados más destacados respecto de los aspectos indagados nos permiten determinar principalmente que los estudiantes mayores generalmente aceptan la posibilidad de obtener colecciones infinitas y las diferencian de *muy numeroso* y de *todo*; un grupo de estudiantes, frente a la presencia de muchísimos elementos los interpretan como infinitos; mientras que otros estudiantes no aceptan la posibilidad de obtener infinito cuando se parte de pocos elementos (se permita repetir o no); los estudiantes más jóvenes se mostraron más inseguros para responder a todas estas cuestiones.

Keywords: Infinity - Mathematics - Conceptions - Students – High School

Abstract

The objective of this thesis is to investigate what are the ideas that high school students have about the mathematical concept of infinity. It limits the study of students' conceptions of the infinity to aspects such as: the possibility of getting an infinite collection from combining a finite number of elements that can be replicated, the distinction between infinite and a very large number and the differentiation between infinite and "whole."

A questionnaire was responded by 195 students from three schools in Bariloche, whose ages range between 13 and 19 years of age, processing the obtained information through multivariate analysis of the data.

The most prominent results about the inquired aspects allow us to determine that older students generally accept the possibility of infinite collections, and distinguish them from very large and whole, a group of students, at the presence of many elements understand their quantity as infinite, while other students do not accept the possibility of infinite when starting from a few elements (being allowed to repeat or not), younger students were more unsure while answering all these questions.

Indice

Introducción

El campo de estudio de la educación matemática se viene desarrollando en las últimas décadas como consecuencia de que matemáticos y educadores de la matemática, principalmente a partir de la constatación de serias y masivas dificultades en el alcance, profundidad y significación del aprendizaje escolar, se enfocaron en definir la dirección que debía tomar la enseñanza de la matemática, qué matemática queremos enseñar en las escuelas y cuáles son los procesos que median ese aprendizaje.

La investigación en educación matemática se ha visto enriquecida además, gracias al aporte de investigadores procedentes de la educación en general, de la psicología, de la historia, de la filosofía y la antropología.

Esta tesis de maestría se inscribe en el campo de la investigación en educación matemática, en el sentido que le da Kilpatrick (1998) según una definición amplia y útil de dicha disciplina como es la de "indagación metódica" acerca de las cuestiones vinculadas a la enseñanza y aprendizaje de la matemática. En este sentido, el término *indagación* sugiere que se busca dar respuesta a una pregunta específica, mientras que el término *metódica* implica que se expone de tal forma que el proceso de indagación pueda examinarse y verificarse.

Siguiendo la línea de la investigación en educación matemática, vista como la indagación metódica acerca de las cuestiones vinculadas a la enseñanza y aprendizaje de la matemática, este estudio se propone este tipo de indagación sobre las ideas de los estudiantes sobre un concepto psicológica y matemáticamente complejo como es el de infinito matemático.

La pregunta que guía nuestro trabajo es: ¿Cuáles son las ideas que los estudiantes de nivel medio tienen respecto de la noción de infinito y cómo se relacionan éstas con el estatus matemático de este concepto? Es decir, nos interesa conocer las concepciones de los estudiantes de nivel medio, respecto del concepto de infinito matemático.

En el currículum de nivel medio vigente en la provincia de Río Negro, donde se ubican las escuelas en las que hemos desarrollado nuestra indagación, para la asignatura matemática, el infinito no es un contenido explícito, sin embargo, contenidos tan específicos del nivel medio como el concepto de número real se encuentran inmersos en el concepto de infinito matemático (Garcia et al, 1999; Rico, 1997; Romero, 1997). El problema del infinito se presenta como el concepto clave en la construcción del concepto de número real, de modo que su evolución conceptual es parte esencial de esta construcción.

Hemos acotado el marco de estudio de las concepciones de los estudiantes sobre el infinito matemático a algunos pocos aspectos, como son la posibilidad de obtener una colección infinita a partir de combinar una cantidad finita de elementos que puedan repetirse, la distinción entre infinito y un número muy grande y la diferenciación entre infinito y “todo”. Estos aspectos del infinito fueron indagados por Montoro (2003), en estudiantes universitarios. En este estudio pretendemos completar dicha investigación, ampliando la franja evolutivo-educativa, abarcando jóvenes estudiantes de nivel medio, cuyas edades se sitúan entre los 13 y los 19 años.

El Capítulo 1 muestra muy sintéticamente la evolución del concepto de infinito en la historia de la matemática. Conocer las dificultades en la construcción histórica de esta noción nos ayudan a tener una idea de la magnitud de las dificultades con las que pueden encontrarse los estudiantes a la hora de abordar su conceptualización.

Antes de iniciar la descripción de las concepciones de los estudiantes sobre el infinito matemático, es preciso revisar la idea de «concepciones» propiamente dicha, un término analizado por numerosos autores. En el Capítulo 2 abordamos este tema.

En el Capítulo 3 planteamos específicamente el problema a indagar y explicitamos los objetivos del trabajo.

La metodología contempla dos aspectos, la obtención y el análisis de los datos. En el Capítulo 4 describimos la metodología de obtención de la información y en el Capítulo 5 la metodología específica utilizada para el tratamiento de los datos.

En el Capítulo 6 estudiamos las asociaciones entre las variables a analizar y cuáles son los aspectos indagados que plantean mayores o menores dificultades a los estudiantes.

En el Capítulo 7 analizamos la asociación entre las modalidades de respuesta según los participantes que las eligen y en el Capítulo 8 ampliamos este estudio realizando una clasificación de los estudiantes según sus respuestas. Estos análisis nos proporcionan un panorama más integrado de cómo los estudiantes conciben los diferentes aspectos del infinito indagados, y de ciertos factores evolutivo-educativos que pueden incidir en esas concepciones.

Completamos la presentación con las conclusiones expuestas en el Capítulo 9.

El trabajo consta además de tres anexos: el Anexo 1 contiene el cuestionario administrado, el Anexo 2 incluye la base de datos y el Anexo 3 es un complemento a los Capítulos 7 y 8.

Capítulo 1

El infinito matemático

Concebir y entender el infinito ha sido una tarea que ha ocupado a hombres y mujeres por muchos milenios y que se refleja en diferentes y variados aspectos de la actividad humana como son la filosofía, la matemática, la literatura, la cosmología o la teología.

Dice Isaac Asimov:

> "Hay un cierto número de palabras que a los editores les gusta ver en los títulos de los libros de ciencia ficción a modo de anuncio directo destinado a avisar a los aficionados al género que puedan acercarse a ver el estante de la librería, que los libros son efectivamente de ciencia ficción. Dos de esas palabras son, por supuesto, espacio y tiempo. Otras son *La Tierra* (con mayúsculas), *Marte, Venus, Alfa del Centauro, mañana, estrella, Sol, asteroides*, y otra, para llegar al meollo de este capítulo, es ***infinito***. (Asimov, 1984, p.38, la negrita es añadida).

Más allá de la ciencia ficción, lo cierto es que través de la historia, la noción de infinito ha generado confusión y controversia siendo también impulsora y generadora de la creación matemática.

Comencemos el recorrido de la evolución del concepto de infinito ubicándonos en la antigua Grecia: Aristóteles (384 - 322 A.C.) se planteaba: ¿Existen pruebas de la existencia del infinito? Él mismo enumera algunas: el tiempo, que es patentemente infinito, la división de las magnitudes, pero la principal prueba de su existencia es, sobre todo, que tanto el número como las magnitudes matemáticas como todo lo que hay detrás de los cielos, parecen ser infinitos (Zellini, 2004).

La dificultad que planteaba el infinito estaba asociada entonces a su inagotabilidad, lo que es infinito, no puede estar presente en su totalidad, de manera acabada en nuestro pensamiento según los antiguos filósofos griegos.

Así, por ejemplo, si consideramos los números enteros, podemos contar y considerar un número tan grande como podamos imaginar, sin embargo, nunca llegaremos a un límite fuera del cual ya no hay números que no hayamos considerado. Según Aristóteles, *"El infinito no es aquello fuera de lo cual no hay nada, sino aquello fuera de lo cual hay siempre algo"* (Zellini, 2004, p.13).

Aristóteles distinguía entre el infinito potencial y el infinito actual. Los números naturales, decía, son potencialmente infinitos, porque no tienen un elemento mayor que todos. Sin embargo, no aceptaba que fuesen actualmente infinitos, ya que creía imposible imaginar la colección completa de los números naturales como una cosa acabada. Él sostenía que sólo el infinito potencial es admisible para el pensamiento, ya que cualquier noción de infinito actual no sería "razonable". Aristóteles discutía esto en sus Capítulos 4-8 del Libro III de

Física donde afirma que negar que exista el infinito real (actual) y permitir solo el infinito potencial no presenta un obstáculo para los matemáticos.

¿Cómo entonces, podríamos preguntarnos, pudo Euclides probar que el conjunto de números primos es infinito en el 300 A. C.? La respuesta es que Euclides no lo expresó de esta manera en su obra Elementos. Esto es simplemente una formulación moderna de lo que Euclides afirmó en realidad en su teorema, en el cual de acuerdo con la traducción de Heath (1956), dice: *"Los números primos son mayores que cualquier magnitud asignada de números primos".*

Es decir, lo que de hecho probó Euclides era que los números primos son potencialmente infinitos ya que su prueba demuestra que, dada una colección finita de números primos, debe haber un número primo que no esté en el conjunto.

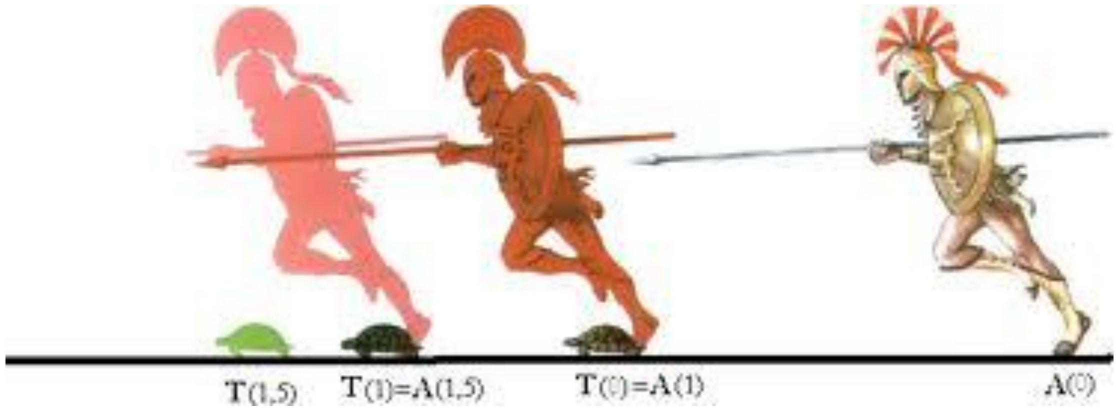
Tan grande fue la influencia de Aristóteles que más de 2.000 años más tarde nos encontramos al influyente matemático Karl Friedrich Gauss amonestando a un colega:

> "En cuanto a vuestra prueba, yo debo protestar vehementemente contra el uso que hacéis del infinito como algo consumado, porque esto no es permitido jamás en la matemática. El infinito es simplemente una manera de hablar; una forma abreviada para establecer que existen límites a los cuales ciertas razones pueden aproximarse

> tanto como se quiera mientras que otras magnitudes pueden crecer hasta más allá de los límites….”
> (Dantzig, 1947, p.244).

Alrededor del infinito han nacido algunas paradojas en matemática, comenzando por la paradoja de Aquiles y la Tortuga, expresada por Zenón de Elea (aprox. 490-430 A.C.): Aquiles, llamado "el de los pies ligeros" y el más hábil guerrero de los Aqueos, decide salir a competir en una carrera contra una tortuga. Dado que corre mucho más rápido que ella, y seguro de sus posibilidades, se da el lujo de darle una gran ventaja inicial. Aquiles recorre en poco tiempo la distancia que los separaba inicialmente, pero al llegar allí descubre que la tortuga ya no está, sino que ha avanzado, más lentamente, un pequeño trecho. Sin desanimarse, sigue corriendo, pero al llegar de nuevo donde estaba la tortuga, ésta ha avanzado un poco más (ver Figura 1.1). De este modo, Aquiles no ganará la carrera, ya que la tortuga estará siempre por delante de él.

Figura 1.1: Aquiles y la Tortuga[1]



Durante la Edad Media, la naturaleza del infinito tomó connotaciones teológicas, San Agustín (354- 430 D.C.) y Santo Tomás de Aquino (1224-1274 D.C.) afirmaron que sólo Dios es infinito (Ortiz ,1994). Pensamiento que tiene repercusiones en la cultura contemporánea, así, por ejemplo, Borges considera este mismo punto de vista al final de “El Zahir” en *El Aleph*: “Quizá yo acabe por gastar el Zahir a fuerza de pensarlo y de repensarlo, quizá detrás de la moneda esté Dios” (2005; p.144).

En uno de los *Diálogos* de Galileo, en 1636 aparece otro aspecto relacionado con las colecciones actualmente infinitas. Es la posibilidad de establecer una correspondencia biunívoca entre dos conjuntos infinitos, uno parte del otro. En este texto, Galileo muestra que si se aceptara que el conjunto de los números naturales es actualmente infinito, se podría establecer una

[1] Imagen extraída de: http://chendejandohuella.blogspot.com

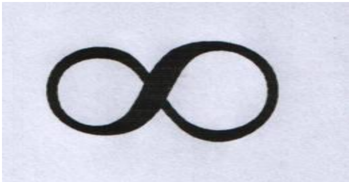
correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números naturales y el conjunto de los cuadrados de los números naturales (ver Tabla 1.1).

Tabla 1.1: La correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números naturales y el conjunto de los cuadrados de los números naturales permite poner a estos últimos en una lista.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	…..
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	…..

En ese mismo siglo, el matemático inglés John Wallis (1616- 1703), fue el primero en introducir el "nudo de amor" o "perezoso ocho", la lemniscata, símbolo del infinito que usamos hoy en día, en su tratado *infinitorum Arithmetica*, publicado en 1665.

Figura 1. 2: Lemniscata, símbolo utilizado para representar el infinito[2]



Diez años más tarde, Isaac Newton (1643-1727) en Inglaterra y Gottfried Leibniz (1646- 1716) en Alemania (trabajando independientemente) comenzaron el desarrollo del cálculo, que implicaba la admisión de infinitos actuales. Newton esquivó la cuestión mediante la introducción de un concepto

[2] Imagen extraída de: http://prof-rhander.blogspot.com

poco conocido: "fluxiones". Tanto uno como otro realizan su trabajo tratando el concepto de infinito actual como transparente, es decir, como algo dado, que no constituye objeto de discusión.

El desarrollo del cálculo abrió el camino para el estudio del análisis matemático, en el que tratar la cuestión del infinito actual se hizo inevitable.

Casi 200 años más tarde, apareció un folleto escrito por Bolzano (1781-1848), titulado: *Las paradojas del infinito*. Se lo considera el primero en abordar la cuestión del infinito actual. Aunque no profundizó suficientemente esta idea, fue el creador del importantísimo concepto de potencia[3] de un conjunto, del que hablaremos específicamente más adelante. El aporte fundamental de esta obra es la de instalar el tema definitivamente entre matemáticos, epistemólogos y lógicos.

Bolzano introdujo las siguientes definiciones: Un conjunto A es finito si es vacío o para algún entero positivo n, A es equipotente a {1,2,...., n} siendo n un número natural; de otra forma A es infinito. Un conjunto A es infinito si existe un subconjunto propio B de A equipotente a A; en cualquier otro caso A es finito, (Ortiz, 1994).

En 1883, Georg Cantor (1845-1918), en una serie de artículos titulados *Sobre variedades lineales infinitas de puntos*, trata por primera vez el infinito actual como un ente matemático bien definido, (Torretti, 1998). Cantor

[3] Dos conjuntos tienen la misma potencia si es posible establecer una función biunívoca entre ellos. Dos conjuntos con la misma potencia se denominan equipotentes.

comienza donde Galileo abandonó: es posible establecer una correspondencia biunívoca entre dos conjuntos infinitos aún cuando uno no sea más que una parte del otro. Más precisamente, esto define a los conjuntos infinitos.

Retomando la definición de potencia de Bolzano, dos conjuntos (finitos o infinitos) tienen la misma potencia si pueden ser apareados elemento por elemento. Si dos conjuntos tienen potencia distinta, entonces el proceso de apareamiento agotará a uno de ellos, pero siempre quedarán elementos sin su pareja en el otro conjunto. En otras palabras: en este caso, el primer conjunto puede ser apareado con una parte del segundo, pero "sobran" elementos del segundo conjunto, quedando sin aparear con elementos del primero. Bajo tales circunstancias, diremos que el segundo conjunto tiene mayor potencia que el primero.

Si A y B son dos conjuntos finitos, tales que cada uno de ellos contenga el mismo número de elementos, entonces es evidente que tienen la misma potencia; y recíprocamente, si A y B son dos conjuntos finitos que tienen igual potencia, tienen también la misma cantidad de elementos, el mismo número cardinal. Si A y B son dos conjuntos de distinta potencia, entonces, a mayor potencia corresponde también mayor número cardinal. Por consiguiente, para los conjuntos finitos, el concepto de potencia puede ser identificado con el de número cardinal.

Cantor definió que dos conjuntos (finitos o infinitos) tienen el mismo número de elementos (cardinal) si existe una correspondencia biunívoca entre los elementos de ambos conjuntos; Bolzano en cambio, sostenía que la existencia de una correspondencia biunívoca entre dos conjuntos infinitos A y B no justificaba la inferencia de igualdad de cardinalidad, es decir, la existencia de una tal correspondencia no implicaba que ambos conjuntos tuvieran la misma cantidad de elementos.

Cantor y Dedekind intercambiaron y discutieron estas definiciones del infinito:

Cantor (1878): Un conjunto finito es uno cuya potencia es un entero positivo. Para tal conjunto todo subconjunto propio tiene una potencia menor, mientras que un conjunto infinito A tiene la misma potencia que algún subconjunto propio de A. (Implícitamente expresó estas propiedades cuando demostró que R y R^n tenían la misma potencia).

Dedekind (1882): Un conjunto A es Dedekind-infinito si algún subconjunto propio B de A es equipotente a A; en cualquier otro caso A es Dedekind-finito. (Carta de Dedekind a Cantor, 1882. En Ortiz, 1994).

Cantor (1882): Por un conjunto finito entendemos un conjunto M, el cual surge a partir de un elemento original a través de la adición sucesiva de nuevos elementos de tal forma que el elemento original puede ser obtenido a partir de M eliminando sucesivamente los elementos añadidos en el orden reverso. (Ortiz, 1994)

Cantor se preguntó entonces si será posible identificar las potencias de los conjuntos infinitos con números de orden superior, que serían números transfinitos, si existen distintos números transfinitos, y por medio de este concepto crear una aritmética transfinita.

Continuando con la teoría de Cantor: llamemos χ_0 el símbolo representativo de la potencia del conjunto de los números naturales. Cualquier conjunto que posea la potencia χ_0 se denomina *infinito numerable*[4].

La sucesión de cuadrados perfectos que usaba Galileo (ver Tabla 1.1) en su argumento es por lo tanto, un conjunto numerable; el conjunto de los números pares es un conjunto numerable, más aún, podemos, por ejemplo, extraer del conjunto de los números naturales todos los números pares, después, todos los restantes múltiplos de 3, después, todos los múltiplos de 5, y seguimos teniendo un conjunto numerable. Todo subconjunto de un conjunto numerable es numerable ya sea infinito, como los ejemplos precedentes, o bien finito (por ejemplo si retiramos del conjunto de los números naturales todos los números de más de tres cifras).

Es decir, no es posible obtener un número transfinito más pequeño que χ_0, al menos de esta manera. Pero ¿es posible obtener uno mayor?

En cuanto a la potencia del conjunto de todos los números enteros: dado un número natural x, ocurre una y solo una de estas dos cosas: x es par o x es impar. Si x es impar, lo apareamos con $-(x+1)/2$ que es claramente un número entero; si x es par, lo apareamos con $(x-2)/2$, que también será un número entero. Es claro que para cada natural habrá un entero para formar pareja y

[4] Un conjunto es numerable si es finito o si tiene la potencia de los números naturales.

recíprocamente, si *y* es un número entero, *y* es menor que 0 ó *y* es mayor que 0 ó *y* es igual a 0. Si *y* es menor que 0, entonces, -2*y* - 1 es un número natural y es el número natural emparejado con *y*. Si *y* es mayor ó igual que 0, entonces 2*y* + 2 es el número natural emparejado con *y* (ver Tabla 1.2).

Tabla 1.2: Una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números naturales y el conjunto de los números enteros.

1	2	3	4	5	6	7	8	....
-1	0	-2	1	-3	2	-4	3	….

El conjunto de los números racionales tiene la misma potencia que el conjunto de los números naturales, es decir, también le corresponde χ_0 como símbolo representativo de su potencia.

Figura 1.3: Correspondencia entre los números naturales y los racionales positivos.

1/1	1/2	1/3	1/4	1/5......
2/1	2/2	2/3	2/4	2/5......
3/1	3/2	3/3	3/4	3/5......
4/1	4/2	4/3	4/4	4/5.....
5/1	5/2	5/3	5/4	5/5.....

....

La Figura precedente ilustra la correspondencia biunívoca entre los números naturales y los racionales positivos (al 1 le corresponde el 1; al 2 el ½; al 3 el 2; al 4 el 3; al 5 el 1/3, …).

Esta forma de colocar a los racionales en una lista, parece contradecir nuestro conocimiento de que ningún número racional tiene un siguiente inmediato, esto es, entre dos racionales cualesquiera podemos insertar una infinidad de números racionales. Notemos que es posible enumerar los números racionales, porque en la nueva ordenación no se mantiene el orden de magnitud.

Cantor estableció también que el conjunto de todos los números algebraicos[5] es numerable.

En este punto, estaríamos tentados de sospechar que todos los conjuntos son numerables y en este caso, solo habría un número transfinito. Pero Cantor observó ya en 1874 que esto no era así. Supo que no es posible ordenar todos los números reales en una sucesión numerable, esta demostración la publicó recién en 1883.

Como vimos previamente, todo subconjunto de un conjunto numerable también lo es, si el conjunto de los números reales fuera numerable también lo sería el intervalo (0,1)[6].

[5] Un número real x que satisface la ecuación $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = 0$, donde los coeficientes a_i son números racionales se llama *número algebraico.* Un número que no es algebraico se llama *trascendente.* Todos los números racionales son algebraicos, pero un número irracional puede ser algebraico o trascendente.

[6] (0,1) es el conjunto de todos los números reales mayores que 0 y menores que 1.

Supongamos que podemos colocar los elementos del intervalo (0,1) en una lista:

$$S_1, S_2, S_3, \ldots\ldots\ldots$$

Es decir, $(0,1) = \{S_n \in R \,/\, n \in N\}$ donde cada S_k está apareado con un n natural y cada n natural lo está con un S_k.

Siendo cada S_k un número real, puede escribirse:

$$S_k = 0{,}u_{k,1}u_{k,2}u_{k,3}\ldots\ldots\ldots\ldots$$

donde cada $u_{k,i}$ es 0, 1, ……ó 9

Consideremos el número real: $y = 0{,}v_1v_2v_3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Construido de la siguiente manera: v_k es 1 si $u_{k,k}$ es distinto de 1 y v_k es 2 si $u_{k,k}$ es igual a 1.

Este *y* no es ninguno de los S_k anteriores, es decir, no podemos colocar a los elementos de (0,1) en una lista, por lo tanto (0,1) no es numerable y por lo tanto, el conjunto de los números reales tampoco puede serlo. En consecuencia, el conjunto de los números reales tiene una potencia χ_1 distinta de χ_0 y dado que podemos aparear el conjunto de los naturales con una parte del conjunto de los reales, resulta χ_1 mayor que χ_0. Nada hay en la teoría de Cantor que excluya la posibilidad de un número transfinito mayor que χ_0 y menor que χ_1.

Dado un conjunto T de potencia *a*, siempre podemos construir otro conjunto de potencia estrictamente mayor que *a*: el conjunto de todos los subconjuntos de T, esto nos permite afirmar que no hay un último número transfinito.

Se define también una *"aritmética transfinita"*, pero su presentación excede los objetivos de este trabajo.

Hilbert, décadas más tarde, evaluaría la justa medida de la creación de Cantor:

"Nadie podrá expulsarnos del paraíso que Cantor creó para nosotros".

De todo lo expuesto y teniendo en cuenta los objetivos de este trabajo, los aspectos del infinito matemático sintetizados previamente que nos interesarán al indagar las concepciones de los estudiantes de nivel medio son:

* El cardinal, es decir la clase de equivalencia de los conjuntos de igual potencia, de un conjunto infinito, es de alguna manera la cantidad (infinita) de elementos del conjunto y lo es de tal manera que se crea la necesidad matemática de NUEVOS NÚMEROS que representen cada una de estas cantidades infinitas.

* El cardinal de los números enteros NO es un número entero, no es solo un número muy grande, sino que es un número de otra naturaleza que los números enteros, es un número transfinito.

* En una parte propia de un conjunto infinito puede haber tantos elementos como en todo el conjunto, es decir, también puede haber infinitos elementos, por lo tanto en infinito NO necesariamente están todos los elementos.

Capítulo 2

Las concepciones de los estudiantes como objeto de investigación psicoeducativa

2.1. Las concepciones de los estudiantes

Desde la década 1970-1980, las teorías del aprendizaje resaltan el estudio de las concepciones de los estudiantes como punto de partida de la enseñanza, debido a que sostienen que para que el aprendizaje sea significativo (Ausubel et al, 1978/83) es necesario partir de las ideas que los aprendices ya poseen, interactuando con ellas a fin de enriquecerlas o transformarlas.

Distintos autores consideran a las *concepciones* como parte del conocimiento, calificado como «ingenuo», «alternativo» o «implícito», según los distintos estudios. Coinciden en que este conocimiento no ha sido adquirido de un modo pasivo, sino a partir de la interacción con el entorno. La corriente de investigación interesada en estas concepciones pretende comprender cómo el sujeto es capaz de construir representaciones acerca del mundo, predecir y controlar sus acciones en el entorno e incluso relacionarse y apropiarse de representaciones externas (Martí, 2003) o sistemas notacionales críticos para almacenar y transformar el conocimiento cultural.

Para un concepto dado, desarrollamos una *imagen conceptual* (concept image, según Tall, 2001 o esquema conceptual tal como lo llama Garbin, 2005) que consiste en "toda la estructura cognoscitiva que tiene que ver con el concepto, que incluye todas las imágenes mentales, propiedades y procesos asociados" (Tall y Vinner, 1981, p.152). Esta imagen conceptual crece y cambia con la experiencia y reflexión y tiene la característica de no ser totalmente coherente, ya que varias partes de la imagen conceptual se desarrollan en tiempos diferentes y de modos diferentes; las conexiones usadas en una ocasión pueden ser diferentes de aquellas evocadas en otra. Las imágenes conceptuales se organizan a partir de experiencias parciales, que se concentran en ciertos aspectos de una situación, conectadas por distintas asociaciones (Tall, 2001).

Pozo (1999) señala que las concepciones alternativas de los alumnos pueden interpretarse en el marco de sus teorías implícitas, es decir, como representaciones implícitas generadas por procesos cognitivos implícitos, basados en reglas de carácter esencialmente asociativo e inductivo.

Vigotsky (1973) señaló que en todo proceso de enseñanza y aprendizaje existe una *prehistoria del aprendizaje* y Bachelard (1938) afirmó que en todo proceso educativo se conoce *contra* un conocimiento anterior; las concepciones son al mismo tiempo *herramientas* para interpretar la realidad y conducirse a través de ella y *barreras* que impiden en ocasiones, adoptar perspectivas y cursos de acción diferentes.

Brousseau (1983) señala que todos generamos concepciones sobre determinadas nociones, que en algunas ocasiones se revelan falsas, insuficientes, ineficaces o inadaptadas para la resolución de situaciones y problemas, lo que provoca errores repetitivos y resistentes, convirtiéndose en obstáculos en el surgimiento de nuevas comprensiones. En esta perspectiva, es claro entonces que la manifestación de obstáculos en el aprendizaje de los estudiantes está caracterizada por cierto tipo de conocimiento y no ausencia de él.

Consideramos que las concepciones, si bien son persistentes y no se cambian fácilmente, tienen la propiedad de modificarse a partir de la práctica educativa, con nuevos contextos y objetos de estudio. Es por ello que el conocimiento de estas concepciones por parte de los docentes, puede actuar como herramienta que favorece el aprendizaje de los alumnos.

2.2. Las concepciones sobre el infinito matemático en los estudiantes

Antes de abordar teorías formalizadas, los seres humanos generamos ciertas concepciones o imágenes (conceptuales) informales; la investigación muestra que éstas a menudo persisten mucho después de que las ideas formales son introducidas (Fischbein et al., 1979). Las imágenes informales personales pueden implicar rasgos esencialmente contradictorios. Por ejemplo, las experiencias informales invariablemente sugieren que "el todo es mayor que la parte", y así resulta, que si a un conjunto le retiramos algunos elementos, el conjunto resultante no podría tener la misma cantidad de elementos que el conjunto de partida, situación que claramente es verdadera en los conjuntos finitos, pero falsa cuando se trata con conjuntos infinito.

El significado que da Fischbein (1987) a la intuición es el de sentido común elemental, forma de conocimiento primitiva, opuesto a interpretaciones y concepciones científicas. Pero, si como vimos en el Capítulo anterior, el concepto de infinito es una creación humana extremadamente compleja, ¿de qué intuiciones estamos hablando al interesarnos por las concepciones de los estudiantes de nivel medio acerca de esta noción matemática? Fischbein (1987) facilita una forma válida para poder hablar de intuiciones del infinito a partir de intuiciones secundarias: son cogniciones que están completamente separadas de la experiencia práctica y que son producto de formas de razonamiento.

Investigaciones relativas a la intuición del infinito muestran que existen profundas contradicciones entre el concepto de infinito actual y nuestros esquemas intelectuales, los cuales están adaptados naturalmente a situaciones finitas. (Fischbein, Tirosh y Hess, 1979; y Fischbein, Tirosh y Melamed, 1981).

Monaghan (2001) examinó lo que él llama *concepciones subyacentes sobre el infinito* de estudiantes preuniversitarios entre 16 y 18 de edad. Las principales características encontradas se pueden resumir así: la primera visión de los estudiantes respecto al infinito es como un *proceso*, algo que sigue y sigue para siempre. Encontró en algunos estudiantes una visión del infinito como un *objeto*, a través de la referencia a un número muy grande o a colecciones que contienen más que cualquier número finito de elementos.

El concepto de infinito generalmente surge a partir de experiencias finitas, imaginando éstas extendidas al infinito; Tall (2001) se refiere a esta forma personal de acercarse al concepto de infinito como “infinito natural”.

Waldegg (1996), al estudiar las respuestas de estudiantes de bachillerato (de entre 15 y 18 años de edad) dadas a algunas preguntas relativas a situaciones vinculadas al infinito, encontró que hay factores que tienen una fuerte influencia sobre la comprensión de los conjuntos infinitos: el infinito potencial se hace evidente si el conjunto es no-acotado, al contrario, este infinito permanece oculto en un conjunto acotado, produciendo con ello una parálisis ante el problema. También encontró un rechazo a usar el criterio de la biyección para comparar un conjunto con uno de sus subconjuntos propios, aún en el caso de que haya una instrucción al respecto. Las intuiciones de los estudiantes respecto del infinito frecuentemente son localmente coherentes, pero globalmente se contradicen.

Tirosh (1991, 1999) estudió la comparación de conjuntos infinitos. Aspira a que los estudiantes desarrollen un conocimiento formal de la teoría de conjuntos de Cantor, junto con un adecuado desarrollo intuitivo para esta teoría. En relación a las respuestas que obtiene de los estudiantes afirma: pocos alumnos utilizan la correspondencia 1-1, tienden a pensar que todos los conjuntos infinitos tienen el mismo número de elementos, suponen que todos los métodos que sirven para comparar conjuntos finitos son adecuados para conjuntos infinitos, sus conocimientos son inconsistentes y esto provoca conflictos en ellos.

Montoro y de Torres Curth (1999) identifican los siguientes núcleos de dificultad asociados a la comprensión de la noción de infinito:

* El infinito matemático como distinto de "todo", "indefinido" o "muy grande".

* La representación de magnitudes continuas formadas por infinitos puntos sin medida.

* La posibilidad de establecer una correspondencia entre el todo y una de sus partes.

* La existencia de conjuntos actualmente infinitos.

* El paso de lo denso a lo continuo.

* El infinito en su aspecto ordinal y cardinal.

* La posibilidad de que una suma infinita pueda ser finita.

* La equipotencia de R y R^n.

* La aceptación del principio de inducción.

* El concepto de número real.

* Los conceptos de magnitud "infinitamente pequeña" e "infinitamente grande".

* La diferencia entre acotado y finito.

* La noción de límite.

El presente estudio es una continuación en alumnos de nivel medio, del trabajo realizado por Montoro y Scheuer (2003) con alumnos universitarios y cuyos principales resultados pueden verse en Montoro (2005) y Montoro y Scheuer (2004, 2006)

En estos trabajos las autoras estudiaron las concepciones de alumnos universitarios en nuestra localidad, en distintas etapas de distintas carreras, sobre el infinito matemático en un contexto de conteo. Encontraron que para muchos estudiantes que ingresan a la universidad, la construcción de una colección infinita parece ser imposible; sin embargo, cuando se les presenta una colección como infinita, tienden a pensarla como un proceso que continúa para siempre, esta concepción del infinito como algo que no termina, está en la base de infinito asociado a "todo", esto es, si una colección es infinita debe tener todos los elementos imaginables. A su vez, esta asimilación de infinito a "todo" induce a pensar que todos los conjuntos infinitos tienen la misma cantidad de elementos, por lo tanto, no pueden existir distintas colecciones infinitas en un universal.

En el mismo estudio se puso de manifiesto que con el aumento en la edad, emerge una asimilación de infinito a un número muy grande. En relación con un mayor conocimiento matemático, pero sin un estudio sistemático específico de la matemática (como sucede con quienes cursan la carrera de Biología), encontraron que los estudiantes atraviesan una transición conceptual manifestada a través de la inseguridad en las respuestas; sin embargo, los estudiantes que eligieron el estudio sistemático de la matemática, aceptan consistentemente las colecciones infinitas, las diferencian de “todo”, reconocen la posibilidad de existencia de distintos conjuntos infinitos dentro de un universal. La formación matemática universitaria resultó la variable de mayor peso para la comprensión de este concepto, seguida por el avance en la carrera. Las ideas matemáticamente correctas, en los diferentes aspectos indagados están fuertemente asociadas entre sí, en cambio las ideas alternativas se encuentran muy diferenciadas unas de otras. Esto es congruente con lo que se conoce acerca de las diferencias entre conocimiento informal e implícito por una parte, y formal y explícito por otra, en otros dominios de conocimiento (Pozo y Gomez Crespo, 1998).

En el presente estudio desarrollaremos como se presentan estas últimas cuestiones en alumnos del colegio secundario.

Capítulo 3

Planteo del problema y objetivos del estudio

En el Capítulo 1 hemos visto que, desde la matemática misma, el concepto de infinito se presentó como un obstáculo para los pensadores de todas las épocas, hasta su formulación y definición precisa en el siglo XIX.

En el Capítulo 2 hemos revisado destacados estudios anteriores que muestran que la noción de infinito es frecuentemente contradictoria en los estudiantes, que su comprensión es lábil y que los estudiantes encuentran importantes dificultades de conceptualización cuando se enfrentan con conceptos que la implican (Fischbein, Tirosh y Hess, 1979; Fischbein, Tirosh y Melamed, 1981; Waldegg, 1996, Montoro, 2005, Montoro y Scheuer, 2006).

Como mencionamos en el Capítulo precedente, este trabajo pretende profundizar el estudio realizado por Montoro y Scheuer (2003) con estudiantes universitarios, abarcando la franja etaria anterior, es decir, estudiantes de nivel medio (de 13-19 años de edad).

¿Por qué nos parece importante estudiar las concepciones de los estudiantes de nivel medio, respecto de un concepto que podría aparecer como avanzado respecto de ese nivel de escolaridad? En primer lugar, la Matemática actual se fundamenta en la Teoría de Conjuntos y ésta trabaja con diversos conceptos que involucran la noción de infinito. Una comprensión integral de esta ciencia debería entonces incluir el concepto de infinito. Por otro lado, contenidos tan específicos de la enseñanza media, como el concepto de número real, que atraviesa toda la escolaridad secundaria, se encuentra inmerso en el concepto de infinito matemático, como hemos planteado en la Introducción de esta tesis.

Sabemos que concebir una colección de infinitos elementos presentes simultáneamente requiere poner en juego procesos mentales de un notable nivel de abstracción, ya que este tipo de colecciones carecen de correlato directo en la naturaleza y su comprensión requiere, por ende, tratar las cantidades de modo muy diferente al que es habitual al interactuar con colecciones finitas.

Por otra parte, compartimos la posición de numerosos autores en cuanto a que conocer las concepciones que los estudiantes manifiestan es un paso indispensable y sienta los cimientos para diseñar e implementar eficaces procesos de enseñanza que permitan revisar, entender o reestructurar esas concepciones.

En este trabajo nos restringiremos a estudiar las ideas que un amplio y variado grupo de estudiantes de nivel medio presentan sobre aspectos que podríamos denominar "simples" respecto del infinito matemático, en dos contextos: uno de conteo que involucra una combinatoria y una situación hipotética, y un contexto del mundo real y cotidiano.

Específicamente, nos propusimos indagar qué ideas presentan los estudiantes respecto a la posibilidad de obtener una colección infinita de elementos a partir de la combinación de pocos elementos y a partir de muchos elementos. Pretendemos además estudiar si las respuestas de los estudiantes dan cuenta de la distinción entre “infinito” y “mucho” o “muy numeroso”.

Además, indagaremos sobre la posible distinción que realicen los estudiantes entre infinito y “todo”. ¿Qué ideas presentan estos participantes en cuanto a si a una cantidad infinita le quitamos finitos elementos? ¿Consideran que sigue siendo infinita la cantidad que nos queda?

Asimismo, analizaremos las ideas de los estudiantes acerca de la posibilidad de obtener distintas colecciones infinitas.

Analizaremos además la posible influencia de las características de distintas instituciones educativas, edad y género en las respuestas de los alumnos.

Capítulo 4

Participantes y metodología de indagación

En este capítulo presentamos la población participante en este estudio, una descripción del instrumento de indagación utilizado para obtener datos y la metodología utilizada para la recolección de estos datos.

4.1. Participantes

La población para este estudio está conformada por 195 estudiantes de entre 13 y 19 años de edad que asisten a tres colegios de Bariloche.

Los colegios elegidos son tres establecimientos de nivel medio de la ciudad de San Carlos de Bariloche: Centro de Educación Media N^{o} 46 (CEM46); Centro de Educación Media N^{o}2 (CEM2) y Escuela Cooperativa Técnica Los Andes (LOSANDES). Estos tres colegios son elegidos por gran cantidad de familias para sus hijos, por ser considerados de buen nivel en cuanto a la calidad educativa.

4.1.1 Características generales de la población participante según directivos de los colegios

Hemos realizado una entrevista semiestructurada con los directivos de cada una de las tres instituciones educativas, con el fin de obtener una descripción de cada uno de los colegios. Presentamos a continuación una síntesis de la información más relevante obtenida por este medio:

Centro de Educación Media N° 46:

Es un colegio público y gratuito, con orientación en turismo, de jornada simple, funciona solo en el turno de la mañana. El plan de estudios es de 5 años.

A la fecha del estudio, en todo el colegio hay 21 cursos (de primero a quinto año), un total de 650 alumnos.

Catorce docentes están a cargo de la asignatura matemática en los respectivos cursos. De los 14 docentes, 7 no tienen título profesional, algunos son ex estudiantes del Profesorado en Matemática (algunos de ellos no han completado el primer año de la carrera) que al tener trabajo no continúan los estudios. Estos docentes suelen faltar mucho a clase y hay distinto grado de exigencia entre los docentes en cuanto a los aprendizajes esperados en los alumnos, a pesar de ser el mismo programa el que se trabaja. Hay mucha rotación de docentes, ya que no suelen permanecer por mucho tiempo en los respectivos cargos.

En cuanto a la población estudiantil, es muy heterogénea. Entre el 15 % y 18% de los estudiantes son repitentes, siendo matemática y biología las materias con más baja promoción.

Casi un 70% de los estudiantes egresados sigue estudios terciarios/universitarios. Muchos se van a estudiar a otras ciudades.

Asisten chicos de distintas zonas de la ciudad. El porcentaje de chicos con padres profesionales es bajo. En general, comparado con otras escuelas, hay padres muy presentes, muy cuestionadores en cuanto a los contenidos de las asignaturas.

Otra característica que resaltan los directivos es la cantidad de alumnos del colegio, esto hace que el trato no sea muy personalizado. Solo se conoce a los muy buenos o a los muy malos.

<u>Centro de Educación Media Nº 2:</u>

Es un colegio público y gratuito, con orientación en comunicación social, de jornada simple. El colegio está repartido en dos turnos. El plan de estudios es de 5 años.

En los 10 cursos que funcionan en el colegio, están inscriptos un total de 230 estudiantes.

Están a cargo de la asignatura matemática en estos 10 cursos, cuatro docentes, de los cuales tres tienen título de Profesor de Matemática.

Los profesores con título, en general eligen trabajar por la mañana, que es el turno en el que se administró el cuestionario.

De estos cuatro docentes, dos hace más de 15 años que trabajan en el colegio en forma conjunta, lo que le da continuidad al proyecto educativo del colegio en matemática.

En cuanto a los estudiantes, casi no hay repitentes en este turno (en los dos primeros años solo hay uno).

En general, los alumnos de este colegio vienen de una población con las necesidades básicas cubiertas, suelen estar muy estimulados y tener estudios complementarios a los escolares (inglés, música, etc.).

La escuela se encuentra a 5 Km del centro de la ciudad y es una escuela muy buscada por los padres, así es que asisten chicos tanto de los alrededores como de zonas más alejadas, como el centro de la ciudad.

Alrededor del 80-90% de los estudiantes siguen estudios terciarios/universitarios.

Escuela Cooperativa Técnica Los Andes:

Es un colegio público de gestión privada. Tiene orientación tecnológica; de jornada doble y el plan de estudios comprende 6 años.

El colegio tiene 9 cursos en total, y 186 alumnos.

Están a cargo de la asignatura matemática en estos 9 cursos, tres docentes; de las cuales una es profesora de matemática, otra es maestra y la tercera es una ex-estudiante avanzada del profesorado en matemática. Las tres docentes trabajan en forma conjunta, tanto en cuanto a los acuerdos de contenidos como la profundidad de tratamiento de los mismos y la metodología de implementación.

Para poder ingresar al colegio, los alumnos deben rendir un examen de ingreso.

Más del 50% de los padres de los alumnos tienen estudios terciarios completos. Alrededor del 60% de los estudiantes vive en el centro de la ciudad o en la zona oeste. Más del 50 % de los estudiantes cursó sus estudios primarios en escuelas privadas.

El índice de repitencia del colegio es de un 13%, del cual el 76% son estudiantes que cursaron su escolaridad primaria en escuelas públicas. En general los repitentes no permanecen en el colegio.

4.1.2 Cursos seleccionados

Nos propusimos estudiar las respuestas de estudiantes al inicio, en una etapa intermedia y al finalizar los estudios secundarios. Seleccionamos entonces un curso completo de primer año, un curso completo de tercer año y un curso completo de quinto (o sexto) año de cada colegio. Los estudiantes de primer año tienen todos entre 13 y 14 años, los de tercer año entre 15 y 16 y los de quinto o sexto entre 17 y 19 años, es decir, la edad cronológica coincide en todos los caso con el nivel educativo.

De acuerdo a nuestro objetivo, hemos tomado para este estudio:

del colegio con orientación en turismo (CEM46):

22 estudiantes de 13 a 14 años

28 estudiantes de 15 a 16 años

22 estudiantes de 17 a 19 años,

del colegio con orientación en comunicación social (CEM2):

20 estudiantes de 13 a 14 años

21 estudiantes de 15 a 16 años

27 estudiantes de 17 a 19 años,

del colegio técnico (LOSANDES):

22 estudiantes de 13 a 14 años

15 estudiantes de 15 a 16 años

18 estudiantes de 17 a 19 años.

4.2 Instrumento de indagación

Con el objetivo de hallar indicadores de las concepciones de los alumnos de nivel medio respecto de la noción de "infinito matemático", tomamos por escrito un cuestionario individual. Salvo dos de las tareas propuestas, el resto coincide con las tareas trabajadas en la tesis de Montoro (2003).

4.2.1 Cuestionario

El cuestionario administrado comienza con un cuerpo de identificación del estudiante que lo responde, en el cual se consigna colegio, edad y género.

A continuación de este primer cuerpo se presentan 14 preguntas, de las cuales las primeras 13 son cerradas, mientras que la última es de asociación libre. Todas las preguntas tienen un ítem de respuesta abierto: "justifica tu respuesta".

Las primeras 12 preguntas se formulan sobre situaciones hipotéticas, que involucran un pensamiento combinatorio. La pregunta 13, en cambio, se refiere a un contexto cotidiano.

En el marco del constructivismo piagetiano, una de las propiedades más generales que caracterizan el pensamiento formal son las operaciones combinatorias: *Sin embargo, la oposición entre las operaciones combinatorias y las operaciones no combinatorias a su vez dependen de la diferencia entre lo posible y lo real: únicamente una combinatoria proporciona el conjunto de los posibles…*..(Inhelder y Piaget 1972, p. 216). En este sentido, las primeras 12 preguntas, atañen a lo *posible*, mientras que la última pregunta lo hace sobre lo *real*.

Las preguntas P1 a P7 y la P13 tienen como opción de respuesta: SI – NO – NO SÉ, las preguntas P8 a P11: POCAS - MUCHAS – INFINITAS y la P12: MÁS – MENOS - LA MISMA CANTIDAD.

A continuación presentamos el cuestionario completo: las situaciones y preguntas tal cual aparecen en el cuestionario, explicitando en cada caso su sentido en el contexto de nuestro estudio. El protocolo presentado a los alumnos se encuentra en el Anexo 1.

Para cada pregunta se consigna entre corchetes la respuesta correcta.

Primera situación planteada:

Juan y María juegan con una máquina que puede realizar 10 tareas distintas y posee un teclado con tres teclas: M, A y P. Ellos inventaron un sistema para denominar esas tareas a través de combinaciones de las tres teclas. Las combinaciones elegidas para cada una de las tareas fueron: MAP, MP, PM, AMP, MAA, PPMMA, MAPP, A, PMM, MAPA. A este sistema lo denominaron “idioma de máquina JM”.

Esta primera situación tiene la intención de introducir a los estudiantes en el tema. Pretende esclarecer a qué nos referimos cuando hablamos de idioma de máquina o de combinación. Cabe aclarar que cuando hablamos de combinación, nos referimos a la acepción que el término tiene en el lenguaje usual y no en sentido matemático, es decir, cada “combinación” es una sucesión de letras, que puede ser considerada como “palabra” en cuanto está separada de otras por espacios en blanco, sin importar que ésta tenga algún significado o no. En el sentido matemático, corresponde al concepto de *variación con repetición*.

Los protagonistas de esta situación disponen de tres elementos (M, A, P) que pueden combinar de cualquier manera, incluso repitiendo cada uno tantas veces quieran.

A partir de esta introducción se plantean dos preguntas:

P1: ¿Piensas que es posible con sólo estas tres teclas (M, A y P) crear un “idioma de máquina” para una máquina que realice 200.000 tareas? [Respuesta correcta: Sí]

P2: ¿Piensas que es posible con sólo estas tres teclas (M, A y P) crear un “idioma de máquina” con el cual siempre se podría dar una denominación a una tarea no prevista anteriormente? [Respuesta correcta: Sí]

La P1 estudia la posibilidad de obtener *muchas* combinaciones a partir de la combinación de estas tres teclas, y la P2 lo hace respecto de obtener *infinitas* de estas combinaciones, aunque lo hace de manera implícita, se refiere a un infinito potencial.

Segunda situación planteada:

> Juan y María cuentan ahora con un teclado de 28 teclas (una con cada letra de nuestro alfabeto) en el que se basaron para crear un "idioma de máquina" para denominar infinitas tareas de una máquina imaginaria. Lo llamaron JUANMARIANO.

En esta situación, los estudiantes se encuentran con que los personajes cuentan ahora con más elementos para combinar, manteniendo las mismas reglas de formación de los elementos, es decir: pueden combinar estos 28 elementos como quieran y tienen permitido repetir cada uno de ellos las veces que sea necesario. En este caso se informa, al pasar, que las combinaciones obtenidas son infinitas ("infinitas tareas").

En base a esta premisa, se plantean las preguntas:

P3: ¿Crees que en base a estas mismas 28 letras, se podría construir otro "idioma de máquina" diferente al JUANMARIANO (es decir que estos dos "idiomas" difieran en al menos una combinación de letras) que también sea infinito? [Respuesta correcta: Sí]

P4: La combinación de teclas ANANA, ¿estará necesariamente en el "idioma de máquina" JUANMARIANO? [Respuesta correcta: No]

Estas dos preguntas indagan, desde dos formulaciones distintas, un mismo aspecto: si un conjunto posee infinitos elementos de un universal, ¿los posee necesariamente a todos? La P3 se refiere a la posibilidad de existencia de dos conjuntos infinitos distintos en un referencial establecido, mientras que la

P4 indaga si un elemento determinado debe estar necesariamente en el conjunto.

Tercera situación planteada:

> Otro día, Juan y María inventaron otro "idioma de máquina" en base a nuestro alfabeto de 28 letras (que llamaron BARILOCHENSE), y cumple con las siguientes reglas:
>
> Regla I: En BARILOCHENSE están todas las combinaciones de dos letras (por ejemplo SI, NO, AB, RR, TT, TE, ST, GO, TA, etc.).
>
> Regla II: Si una combinación está en BARILOCHENSE, también estará esa combinación con una A al final (por ejemplo si está PP está PPA y también PPAA, si está PERRO está PERROA, y PERROAA)

En esta situación se introducen "reglas" de formación de los elementos en cuestión.

Estas reglas permiten construir un conjunto infinito de manera inductiva aunque este conjunto no es único.

Ante esta propuesta se plantean las siguientes preguntas:

P5: ¿Podrías asegurar que BARILOCHENSE tiene infinitas combinaciones para designar tareas? [Respuesta correcta: Sí]

P6: Decir si las siguientes combinaciones de teclas están necesariamente en BARILOCHENSE:

KS	TPAAA	AAA	ANANA	TAPA
[R.C.:Sí]	[R.C.:Sí]	[R.C.:Sí]	[R.C.:No]	[R.C.:No]

P7: Si retiramos de BARILOCHENSE todas las combinaciones que tengan a lo sumo 20 letras. ¿Tendremos todavía un “idioma de máquina” con infinitas combinaciones? [Respuesta correcta: Sí]

La P5 indaga si es posible obtener una colección infinita a partir de combinar finitos elementos de manera inductiva.

La P6 es una pregunta de aplicación, que intenta averiguar si se comprendió la definición del conjunto en cuestión. Notemos que el primer ítem (KS) es levemente distinto a los demás, ya que para comprobar que la combinación se encuentra en el conjunto, solo tienen que verificar que se cumple la primera de las reglas, mientras que en los restantes ítems debe comprobar que verifica ambas reglas.

La P7, análoga a la P4, se pregunta si en un conjunto infinito deben estar todos elementos, pero en este caso desde el punto de vista de lo que ocurre al retirar una cantidad finita de elementos de un conjunto infinito.

<u>Cuarta situación planteada:</u>

Juan y María, se juntaron una vez más y jugaban a inventar “idiomas de máquinas” para máquinas imaginarias. Juan propuso arreglárselas sólo con tres teclas (M, A, P), mientras que María propone tener 15.000.000 de teclas.

En este nuevo contexto, los personajes deciden manejarse con distinta cantidad de elementos de partida. La idea de esta propuesta es ver cómo influye la cantidad de elementos iniciales en las ideas de los estudiantes respecto de la cantidad resultante de combinaciones. Si bien esta es una condición irrelevante matemáticamente, Montoro (2005) muestra que esto incide en las respuestas de muchos jóvenes y adultos. En un caso tenemos <u>pocos</u> elementos (3) y en el otro <u>muchos</u> (15.000.000).

En cada una de las preguntas siguientes, cada personaje introduce sus propias reglas que básicamente consisten en repetir o no los elementos. Las preguntas P8 a P11 tienen como opciones:

Piensas que este sistema tendrá:

Pocas combinaciones (menos de 1000)

Muchas combinaciones (más de 1000, pero NO infinitas)

Infinitas combinaciones

P8: El primer "sistema" que propone Juan (JUAN1) es el siguiente:

JUAN1: "Todas las combinaciones posibles con estas tres letras (M, A, P), sin que puedan repetirse las letras en una determinada combinación". (Por ejemplo: AMP, PAM estarán en JUAN1, mientras que MAPA y MMP no están permitidas). [Respuesta correcta: Pocas]

P9: María propone un sistema similar pero basado en sus 15.000.000 de teclas (MARIA1), es decir:

MARIA1: “Todas las combinaciones posibles de las 15.000.000 teclas, sin que puedan repetirse las teclas en una determinada combinación.” [Respuesta correcta: Muchas]

P10: Juan decide, entonces que su sistema (JUAN2) estará constituido por todas las combinaciones de las tres letras (M, A, P) pero ahora pueden repetirse las letras sin restricciones. [Respuesta correcta: Infinitas]

P11: María insiste en utilizar 15.000.000 teclas y que su sistema (MARIA2) esté constituido por todas las combinaciones de esas letras y pueden repetirse sin restricciones. [Respuesta correcta: Infinitas]

Estas cuatro propuestas indagan sobre la cantidad de elementos del conjunto que resulta de considerar todas las combinaciones posibles de una cantidad finita de elementos.

En el caso de P8 y P9, en cada combinación no está permitido repetir los elementos, la diferencia entre ambas es la cantidad de elementos de partida: en la P8 contamos con solo 3 elementos, mientras que en la P9 con 15.000.000. Las P10 y P11 son análogas a las P8 y P9 respectivamente, pero se añade la condición de que los elementos pueden repetirse en cada combinación.

A este cuerpo de preguntas se añade la P12:

P12: Piensas que el sistema MARIA2 tendrá:

Más combinaciones que el sistema JUAN2

Menos combinaciones que el sistema JUAN2

La misma cantidad de combinaciones que JUAN2

[Respuesta correcta: La misma cantidad]

Esta pregunta plantea una comparación entre los dos conjuntos infinitos, uno obtenido mediante la combinación de pocos elementos y otro de muchos elementos. La inclusión de esta pregunta apunta a ver si está presente en las respuestas de los estudiantes el criterio de la biyección en la determinación del cardinal de un conjunto.

Pregunta de contexto cotidiano:

Esta pregunta, de tres ítems, intenta averiguar sobre la idea respecto a la cantidad de elementos de colecciones de elementos del mundo cotidiano, que si bien son imposibles de contar por un ser humano, son finitos.

P13: Dejando de lado las máquinas…

a) La cantidad de hojas de todos los árboles que hay en el Parque Nacional Nahuel Huapi en este momento, ¿es infinita? [Respuesta correcta: No]

b) La cantidad de granos de arena que hay en este momento en las playas de Bariloche, ¿es infinita? [Respuesta correcta: No]

c) La cantidad de granos de arena que hay en este momento en el mundo, ¿es infinita? [Respuesta correcta: No]

En estas últimas preguntas, consideramos colecciones de un número muy grande de objetos que se encuentren en el contexto cotidiano de los estudiantes de nuestra ciudad. El ítem c) intenta ver si influye el salirnos del contexto más conocido y también si interviene como variable en la respuesta dada que la colección sea más numerosa.

Con estas preguntas pretendemos estudiar si los estudiantes asocian conjuntos muy grandes al infinito.

<u>Pregunta de asociación libre:</u>

El último punto plantea una cuestión de asociación libre con la idea de que ésta nos indique cuáles son los conceptos, objetos, ideas, que los estudiantes relacionan con el infinito:

P14: Por último te pedimos que escribas las tres primeras palabras que viene a tu mente cuando escuchas la palabra *"infinito"*.

En la Tabla 4.1 siguiente sintetizaremos, qué aspecto pretendemos indagar con cada uno de los ítems.

Tabla 4.1 Formulación de las preguntas y qué aspecto se pretende indagar con cada una de ellas

Pregunta	¿Qué pregunta?
1) ¿Piensas que es posible con sólo estas tres teclas (M, A y P) crear un "idioma de máquina" para una máquina que realice 200.000 tareas? □ Sí □ No □ No se puede determinar □ No sé	Mediante la combinación de tres elementos, ¿es posible obtener muchos?

Justifica tu respuesta:	
2) ¿Piensas que es posible con sólo estas tres teclas (M, A y P) crear un "idioma de máquina" con el cual siempre se podría dar una denominación a una tarea no prevista anteriormente? □ Sí □ No □ No se puede determinar □ No sé Justifica tu respuesta:	Mediante la combinación de tres elementos, ¿es posible obtener infinitos? (la idea de obtener infinitos no está explicitada)
3) ¿Crees que en base a estas mismas 28 letras, se podría construir otro "idioma de máquina" diferente al JUANMARIANO (es decir que estos dos "idiomas" difieran en al menos una combinación de letras) que también sea infinito. □ Sí □ No □ No se puede determinar □ No sé Justifica tu respuesta:	¿En infinito está todo? ¿Existen distintos infinitos?
4) La combinación de teclas ANANA, ¿estará <u>necesariamente</u> en el "idioma de máquina" JUANMARIANO □ Sí □ No □ No se puede determinar □ No sé Justifica tu respuesta:	¿En infinito está todo?
5) ¿Podrías asegurar que BARILOCHENSE tiene infinitas combinaciones para designar tareas? □ Sí □ No □ No se puede determinar □ No sé Justifica tu respuesta:	¿Es posible obtener infinitos elementos a partir de combinar finitos elementos (28)?
6) Decir si las siguientes combinaciones de teclas están	¿Se comprendió la

<u>necesariamente</u> en BARILOCHENSE: KS TPAAA AAA ANANA TAPA □ Sí □ No □ No se puede determinar □ No sé Justifica tu respuesta:	definición del idioma barilochense?
7) Si retiramos de BARILOCHENSE todas las combinaciones que tengan a lo sumo 20 letras. ¿Tendremos todavía un “idioma de máquina” con infinitas combinaciones? □ Sí □ No □ No se puede determinar □ No sé Justifica tu respuesta:	Si quito algunos elementos a un conjunto infinito, ¿sigo teniendo infinitos?
8) El primer “sistema” que propone Juan (JUAN1) es el siguiente: “Todas las combinaciones posibles con estas tres letras (M, A, P), sin que puedan repetirse las letras en una determinada combinación”. (Por ejemplo: AMP, PAM estarán en JUAN1, mientras que MAPA y MMP no están permitidas) Piensas que este sistema tendrá: Pocas combinaciones (menos de 1000) Muchas combinaciones (más de 1000, pero NO infinitas) Infinitas combinaciones Justifica tu respuesta:	Si no puedo repetir y parto de **pocos** elementos, ¿puedo obtener poco, mucho o infinito?
9) María propone un sistema similar pero basado en sus 15.000.000 de teclas (MARIA1), es decir: “Todas las combinaciones posibles de los 15.000.000 de	Si no puedo repetir pero tengo **muchos** elementos, ¿puedo

teclas, sin que puedan repetirse las teclas en una determinada combinación.” Piensas que este sistema tendrá: Pocas combinaciones (menos de 1000) Muchas combinaciones (más de 1000 pero NO infinitas) Infinitas combinaciones Justifica tu respuesta:	obtener poco, mucho o infinito?
10) Juan decide, entonces que su sistema (JUAN2) estará constituido por todas las combinaciones de las tres letras (M, A, P) pero ahora pueden repetirse las letras sin restricciones. Piensas que este sistema tendrá: Pocas combinaciones (aproximadamente menos de 1000) Muchas combinaciones (más de 1000 pero no infinitas) Infinitas combinaciones Justifica tu respuesta:	Si puedo repetir y parto de **pocos** elementos, ¿puedo obtener poco, mucho o infinito?
11) María insiste en utilizar 15.000.000 de teclas y que su sistema (MARIA2) esté constituido por todas las combinaciones de esas letras y pueden repetirse sin restricciones. Piensas que este sistema tendrá: Pocas combinaciones (aproximadamente menos de 1000) Muchas combinaciones (más de 1000 pero no infinitas) Infinitas combinaciones Justifica tu respuesta:	Si puedo repetir y parto de **muchísimos** elementos, ¿puedo obtener poco, mucho o infinito?

12) Piensas que el sistema MARIA2 tendrá: Más combinaciones que el sistema JUAN2 Menos combinaciones que el sistema JUAN2 La misma cantidad de combinaciones que JUAN2 Justifica tu respuesta:	Criterio utilizado para la comparación de cardinalidad de conjuntos
13.a) La cantidad de hojas de todos los árboles que hay en el Parque Nacional Nahuel Huapi en este momento, ¿Es infinita? □ Sí □ No □ No sé Justifica tu respuesta:	Posibilidad de encontrar en nuestro entorno conjuntos discretos infinitos
13.b) La cantidad de granos de arena que hay en este momento en las playas de Bariloche, ¿Es infinita? □ Sí □ No □ No sé Justifica tu respuesta:	Posibilidad de encontrar en nuestro entorno conjuntos discretos infinitos
13.c) La cantidad de granos de arena que hay en este momento en el mundo, ¿Es infinita? □ Sí □ No □ No sé Justifica tu respuesta:	Posibilidad de encontrar en nuestro entorno conjuntos discretos infinitos
14) Por último te pedimos que escribas las tres primeras palabras que viene a tu mente cuando escuchas la palabra *“ infinito*	¿Cuáles son las ideas, objetos o conceptos que asocian al infinito?

Capítulo 5

Metodología de análisis de los datos

En este capítulo, presentamos la metodología de tratamiento de los datos obtenidos.

A partir de la administración del cuestionario, con el fin de describir tipos de respuesta, grupos de individuos según sus respuestas y encontrar asociaciones entre los tipos de respuesta y las características de los estudiantes según su colegio, edad y género, hemos abordado la información proporcionada por el cuestionario a través del análisis multivariado de los datos, ya que este análisis permite estudiar las asociaciones entre individuos descriptos por varias variables simultáneamente.

5.1. Elaboración de la base de datos

El primer paso consistió en definir las variables sobre el conjunto de participantes y precisar sus modalidades.

El segundo paso consistió en preparar la tabla o matriz de datos, que recoge la información obtenida a partir de las respuestas al cuestionario. Esta tabla presenta 195 filas (una por cada individuo) y 22 columnas (una por cada variable). En esta etapa hemos trabajado específicamente con las respuestas cerradas al cuestionario.

Cada celda *ij* toma el valor que corresponde a la modalidad de la variable *j* que representa la respuesta dada por el individuo *i* a la pregunta que representa a esa variable.

5.2. Variables determinadas sobre el conjunto de participantes y sus modalidades

A partir de los datos obtenidos clasificamos las variables a considerar en dos tipos: *variables de caracterización* que refieren a las características de los estudiantes (colegio, edad, género) y *variables de respuesta* determinadas por las respuestas a cada una de las preguntas del cuestionario.

Describimos a continuación estos dos tipos de variables precisando las modalidades que presentan.

5.2.1 Variables de caracterización y sus modalidades

Son las variables que describen a cada estudiante, independientemente de sus respuestas.

Nuestras variables de caracterización son: COLEGIO, EDAD y GÉNERO.

La variable COLEGIO posee tres modalidades, que corresponden a los tres colegios en los que se suministró el cuestionario: Centro de Educación Media N° 2, Centro de Educación Media N° 46 y Escuela Cooperativa Técnica

Los Andes que en adelante denominaremos CEM2; CEM46 y LOSANDES, respectivamente.

Convertimos a la variable EDAD en una variable cualitativa (nominal), definiendo tres intervalos que dan lugar a las tres modalidades consideradas:

al intervalo de 13 a 14 años, lo denominamos MENORES,

al intervalo de 15 a 16 años INTERMEDIOS y

al intervalo de 17 a 19 años lo llamamos MAYORES.

5.2.2 Variables de respuesta y sus modalidades

Cada una de las preguntas del cuestionario determina una variable, cuyas modalidades respectivas corresponden a las opciones de respuestas ofrecidas para esa pregunta o subpregunta. Contamos así con 19 variables de respuesta.

En la siguiente Tabla vemos la descripción de estas variables y las modalidades que asume cada una de ellas:

Tabla 5.1: Variables de respuesta y sus modalidades. Aparecen subrayadas las modalidades de las variables de respuesta correspondientes a respuestas correctas.

Variable		Modalidades que toma la variable		
VARIABLES DE RESPUESTA	P1	$\underline{\text{SI}}$	NO	NO SE
	P2	$\underline{\text{SI}}$	NO	NO SE
	P3	$\underline{\text{SI}}$	NO	NO SE
	P4	SI	$\underline{\text{NO}}$	NO SE
	P5	$\underline{\text{SI}}$	NO	NO SE
	P6a	$\underline{\text{SI}}$	NO	NO SE
	P6b	$\underline{\text{SI}}$	NO	NO SE
	P6c	$\underline{\text{SI}}$	NO	NO SE
	P6d	SI	$\underline{\text{NO}}$	NO SE
	P6e	SI	$\underline{\text{NO}}$	NO SE
	P7	$\underline{\text{SI}}$	NO	NO SE

	P8	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	NOCONTESTA
	P9	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	NOCONTESTA
	P10	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	NOCONTESTA
	P11	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	NOCONTESTA
	P12	MAS	MENOS	MISMA	NOCONTESTA
	P13a	SI	NO	NOSE	
	P13b	SI	NO	NOSE	
	P13c	SI	NO	NOSE	

5.3 Análisis de los datos

Realizamos un primer acercamiento al tratamiento de los datos en el cual analizamos la independencia entre las modalidades de las variables de caracterización: COLEGIO, EDAD y GENERO.

Se buscaron correlaciones entre las variables de respuesta, mediante cálculo de **correlación por Chi Cuadrado** (χ^2). La prueba χ^2 permite determinar si dos variables cualitativas están o no asociadas. El estadístico χ^2 mide la diferencia entre el valor que debería resultar si las dos variables fuesen independientes y el que se ha observado en la realidad. Cuanto mayor sea esa diferencia (y, por lo tanto, el valor del estadístico), mayor será la relación entre ambas variables.

Utilizamos para este primer acercamiento el método de caracterización de las variables (Decisia Spad 5.5).

Luego, a partir de las frecuencias observadas, estudiamos las características generales de las respuestas dadas al cuestionario, como por ejemplo, cuáles se presentan como más fáciles o ante cuáles manifiestan mayor incertidumbre los estudiantes.

A continuación realizamos un **Análisis Factorial de Correspondencias Múltiples**, (AFCM) (Benzécri, 1973) de la tabla que cruza los 195 participantes con todas las modalidades de todas las variables. Tomando como base las respuestas de todos los individuos, sin clasificación previa, intentamos identificar grupos de individuos que responden en forma similar o en forma opuesta y distinguir relaciones de estos grupos de modalidades de respuesta con las modalidades de caracterización de los sujetos. Este método ha sido especialmente diseñado para describir, visualizar y sintetizar grandes cantidades de datos obtenidos sobre un conjunto de individuos (Fine, 1996).

Posterior al AFCM, realizamos una Clasificación Jerárquica Ascendente de los estudiantes según sus modalidades de respuesta. Para el AFCM y la clasificación se utilizó el paquete Decisia Spad versión 5.5.

En todo nuestro estudio, consideramos como individuos los 195 estudiantes que contestaron el cuestionario.

Tuvimos en cuenta para este análisis las tres variables de caracterización descriptas anteriormente y las variables de respuesta que denominamos: P1, P2, P3, P4, P5, P6a, P6b, P6c, P6d, P6e, P7, P8, P9, P10, P11, P12, P13a, P13b y P13c.

Partimos de la base de datos determinada por la tabla en la que cada fila corresponde a un individuo y cada columna a una variable (de caracterización o de respuesta). Transformamos esta tabla en una tabla en la que a cada modalidad se le asigna un número, por ejemplo, la variable P1 toma los valores 1, 2 ó 3 de acuerdo a que la modalidad presente sea "*sí*", "*no*" ó "*no sé*" respectivamente; la variable P10 toma los valores 1, 2, 3, ó 4 de acuerdo a que tome la modalidad "*pocas*", "*muchas*", "*infinitas*" o "*no contesta*".

En la tabla 1 del anexo 2, se muestra la tabla que cruza a los individuos con las respuestas dadas a cada pregunta.

A continuación describiremos brevemente los métodos utilizados[1].

5.3.1 Análisis Factorial de Correspondencias Múltiples

Este método estadístico multivariado permite describir las relaciones entre varias variables nominales. Nos permite, en particular, estudiar nuestro universo de 195 estudiantes descriptos por las 22 variables cualitativas (correspondientes a las 3 variables de caracterización y las 19 variables de respuesta que hemos precisado en la Tabla 5.1 en este capítulo).

Sintéticamente, diremos que cada individuo está representado por un vector de 22 dimensiones (en R^{22}) cuyas coordenadas son 0 ó 1 (1 si posee la

[1] El detalle de la aplicación de los métodos, o una mayor profundización de la técnica de los mismos se puede encontrar en: Lebart, Morineau y Fénelon (1979) o en Crivisqui (1993) o Baccalá y Montoro (2008).

modalidad, 0 en caso contrario), es decir, cada individuo está descripto por las modalidades que posee.

Tenemos así una representación de los individuos según puntos (vectores) en un espacio de dimensión 22. Dos individuos se asemejarán si poseen modalidades similares; cuantas más modalidades compartan, más "parecidos" serán. Por otro lado, la proximidad (menor distancia) entre modalidades se interpreta como asociación entre modalidades.

Las modalidades de una misma variable se encuentran alejadas y son ortogonales entre sí. Las modalidades raras[2] están alejadas de todas las demás. Una modalidad es el centro de gravedad de los individuos que la poseen, bajo esta interpretación, dos modalidades de distintas variables están próximas cuando son elegidas por casi los mismos individuos y diremos que hay asociación entre ellas.

Para estudiar esta gran nube de puntos, se busca representarlos en planos que expresen de la manera más aproximada la asociación de individuos entre sí, de modalidades entre sí, y entre los individuos y las modalidades según las relaciones baricéntricas. Esta representación en planos es posible mediante una proyección de cada punto en el plano respectivo, por esta razón, el coseno cuadrado nos indica cuán cerca o lejos se encuentra el punto de cada uno de los ejes que determinan el plano. Un coseno cuadrado alto indica una mayor proximidad al eje.

[2] Llamamos modalidad rara a una modalidad respondida por pocos individuos.

Los factores del AFCM son los valores de las coordenadas en cada eje, estos factores nos brindan información sobre las principales variabilidades de los tipos de respuesta.

Es de nuestro interés observar los grupos de asociaciones de modalidades de respuestas, y obtener información acerca del tipo de respuestas con el que se asocia cada modalidad de caracterización, es decir, quiénes son los individuos (en términos de las modalidades de caracterización asumidas) que responden de determinada manera. Con el fin de que estas variables de caracterización no contribuyan en la conformación de los ejes y planos factoriales pero sí estén representadas en nuestro análisis, consideraremos a estas variables como ilustrativas. Dado que las variables correspondientes a las preguntas 6 (5 variables en total), 12 y 13 (3 variables en total) son de distinta índole que las demás, las consideraremos también como ilustrativas. Esto nos permitirá analizar con qué tipos de respuestas se asocian estas últimas, pero sin que éstas determinen los ejes y planos factoriales.

Así resultan entonces 10 variables activas y 12 variables ilustrativas.

Las modalidades activas (que participan en la conformación de los ejes) son 34. A fin de decidir si las variables ilustrativas están bien representadas en estos planos analizamos el valor test correspondiente. Valores test superiores a 2 en valor absoluto permiten rechazar la hipótesis de una extracción al azar con un umbral del 5%.

El programa Spad automáticamente elimina del análisis las modalidades activas cuya presencia es menor al 2%. En nuestro caso las dos modalidades de muy bajas frecuencias suprimidas fueron: P8INFINITAS (solo la toman dos individuos) y P11POCAS (elegida por un solo individuo).

Resumiendo, se realizó un AFCM de la tabla que cruza los 195 individuos con las variables P1, P2, P3, P4, P5, P7, P8, P9, P10 y P11, tomando como variables ilustrativas y que no participan en la conformación de los planos las variables Colegio, Edad, Género, P6A, P6B, P6C, P6D, P6E, P12, P13A, P13B y P13C.

5.3.2 Clasificación Jerárquica Ascendente

Este método de análisis de los datos nos permite clasificar el conjunto de los estudiantes de acuerdo a la similitud en sus modos de respuesta, esto es, de acuerdo a que se parezcan en las respuestas que dan a las preguntas del cuestionario.

El método de clasificación utilizado corresponde al denominado *"de agregación de Ward"* y utiliza los resultados del Análisis Factorial de Correspondencias Múltiples realizado previamente[3].

Este método jerárquico ascendente consiste en realizar sucesivas particiones del conjunto de todos los estudiantes, basadas en las distancias entre

[3] Más detalle de este método puede encontrarse en: Ward (1963) y de manera más sintética en Baccalá y Montoro (2008).

las proyecciones de los puntos que representan a cada estudiante, sobre x ejes factoriales. Cuando decimos que *“un estudiante está en una clase”* nos estamos refiriendo a esta representación.

En la primera partición tenemos 195 clases, es decir, en cada una de estas clases hay exactamente un estudiante. En los pasos siguientes, se van agrupando las clases que sean más parecidas en cuanto a sus modos de respuesta. Continuando de esta manera hasta que todos los individuos estén en una sola clase, el investigador cortará el proceso cuando las clases obtenidas tengan sentido en el contexto de la investigación, en general, las clases que se juntan en una iteración comienzan a estar más alejadas, es decir, son más diferentes.

El histograma de los índices de nivel nos indica la cantidad de individuos que se agrupan y la distancia entre los grupos aglutinados en cada iteración.

Capítulo 6

Descripción del conjunto de estudiantes según las variables de caracterización y grado de dificultad de las preguntas del cuestionario administrado

En este capítulo, en primer lugar, estudiamos el conjunto de participantes según las características que nos interesaron para este estudio: colegio, género y edad, examinando las asociaciones entre estas modalidades de caracterización.

En segundo lugar, estudiamos cuáles son las preguntas con un mayor número de respuestas correctas, es decir, las que resultaron más “fáciles” a estos estudiantes, y también veremos cuáles son las que presentan más respuestas *no sé* o *no contesta*, es decir, cuáles parecen haber planteado más dudas a los estudiantes a la hora de responder.

6.1 Descripción del conjunto de participantes según las variables de caracterización

Las variables de caracterización definidas para este estudio son: Edad, Género y Colegio. Recordemos que hemos definido para la variable Edad tres modalidades: MENORES (de 13 a 14 años), INTERMEDIOS (de 15 a 16 años) y MAYORES (de 17 a 19 años); para la variable Género dos modalidades:

FEMENINO y MASCULINO y para la variable Colegio tres modalidades: CEM2, CEM46 y LOSANDES.

6.1.1 Variables de caracterización: frecuencias y asociaciones entre ellas

Analizaremos ahora más específicamente, qué tipo de asociaciones encontramos entre las modalidades de las variables de caracterización de los individuos. Tal como mencionamos en el Capítulo 5, utilizamos el método de caracterización de las variables (Decisia Spad 5.5).

6.1.1.1 Relación de la variable COLEGIO con las otras variables de caracterización

Tomamos como variable a caracterizar la variable COLEGIO y como variables caracterizantes, las variables EDAD y GÉNERO.

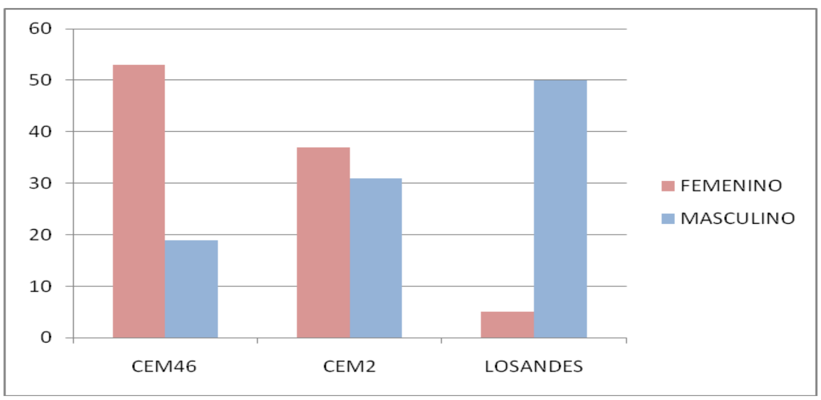
Según muestra la Tabla 6.1, la variable COLEGIO está fuertemente asociada a la variable GÉNERO y no hay una correlación significativa entre la variable COLEGIO y la variable EDAD.

Tabla 6.1: Valores test y chi-cuadrado de la asociación de la variable COLEGIO con las restantes variables de caracterización.

Valor Test	Variable	χ^2
99.99	COLEGIO	390.00
6.90	GENERO	53.31
0,07	EDAD	3,53

Analizando las frecuencias encontradas (Gráfico 6.1) en cada uno de los colegios, podemos ver que el colegio técnico (LOSANDES) está fuertemente asociado a la modalidad MASCULINO, mientras que la modalidad CEM46 lo está a la modalidad FEMENINO. En cambio, la modalidad CEM2 presenta una distribución más homogénea respecto de las modalidades de la variable GENERO.

Gráfico 6.1: Distribución de las modalidades de la Variable GENERO respecto de cada modalidad de la variable COLEGIO



El 74 % de los estudiantes del CEM46 son mujeres y el 56% de las estudiantes mujeres está en el CEM46. Mientras que el 50% de los varones está en el colegio técnico y el 91% de los estudiantes del colegio técnico son varones.

6.1.1.2 Relación de la variable EDAD con las otras variables de caracterización

En este caso, consideramos como variable a caracterizar la variable EDAD y la caracterizamos con las variables GENERO y COLEGIO.

Tabla 6.2: Valores test y chi-cuadrado de la asociación de la variable COLEGIO con las restantes variables de caracterización.

Valor Test	Variable	χ^2
99.99	EDAD	390.00
1.23	GENERO	4.42
0.07	COLEGIO	3.53

La Tabla 6.2 precedente muestra que la variable EDAD no está asociada por ninguna de las restantes variables de caracterización.

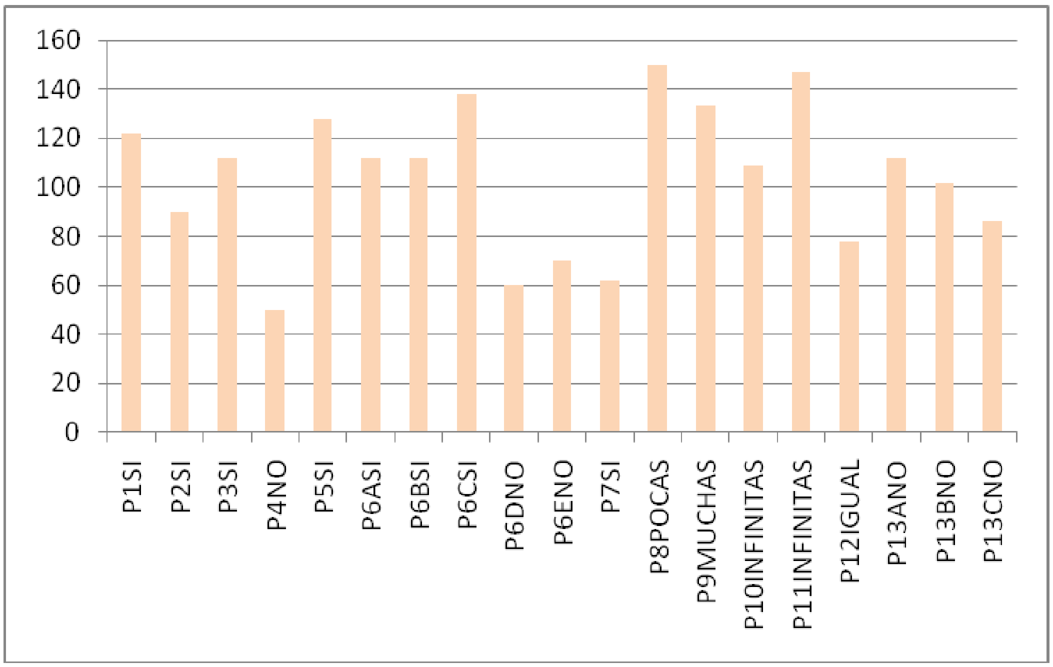
Podemos decir entonces, que la edad es independiente de la escuela y el género de los estudiantes, mientras que el género está fuertemente asociado al colegio, el femenino está asociado al colegio CEM46 y el género masculino lo está al colegio LOSANDES.

6.2 Estudio del grado de dificultad de las preguntas del cuestionario administrado

Examinamos a continuación cuáles son las preguntas con un mayor número de respuestas correctas, esto es, las que podemos presuponer como más "fáciles", y también veremos cuáles son las que presentan más respuestas *no sé* o *no contesta*, es decir, cuales pueden estar planteando más dudas a los estudiantes a la hora de responder.

El Gráfico 6.2 muestra las frecuencias de las respuestas correctas dadas por los estudiantes a las preguntas del cuestionario.

Gráfico 6.2: Cantidad de estudiantes que responde correctamente cada pregunta (n = 195)



Las preguntas con mayor número de respuestas correctas son la P8 y la P11. La P8 plantea la construcción de una colección finita que resulta de combinar *pocos* elementos que *no pueden repetirse*, mientras que la P11 presenta una colección infinita resultante de la combinación de *muchísimos* elementos que *pueden repetirse*. Vemos que disminuye la cantidad de respuestas correctas cuando la pregunta se refiere a un conjunto con *muchos* elementos que no se repiten (P9) y desciende mucho más aún cuando se trata de un conjunto que es infinito y resulta de combinar *pocos* elementos que *se* *repiten* (P10). Esto nos está indicando una diferenciación al momento de decidir si una colección posee infinitos elementos, de acuerdo a la cantidad de elementos de partida, pese a que esta condición no es relevante desde el punto de vista matemático. Para los estudiantes participantes, parece ser más sencillo decidir que una colección es infinita si los elementos de partida son muchos.

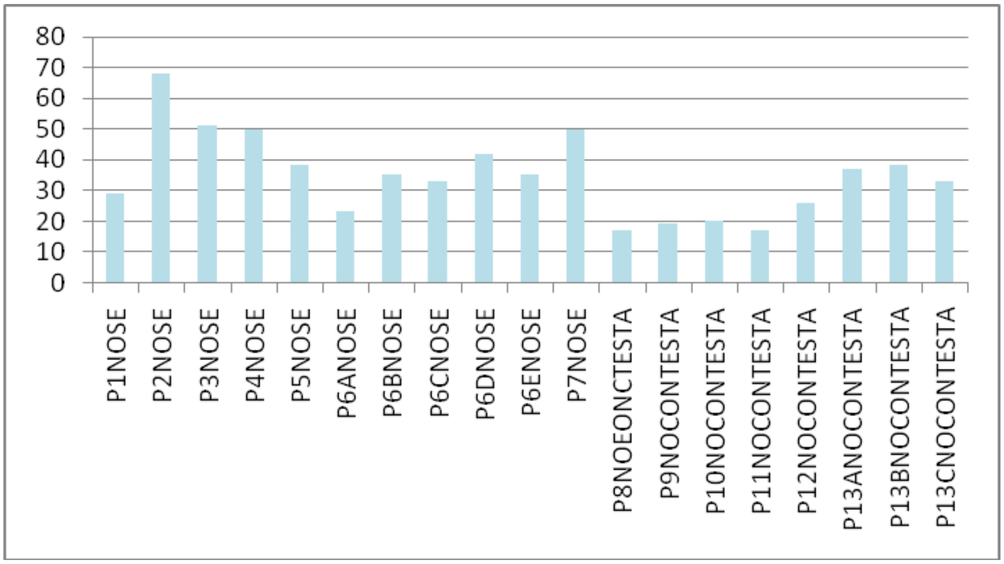
En la misma línea, es muy significativo observar en el Gráfico 6.2 cómo va disminuyendo la cantidad de estudiantes que piensan que no son infinitos: las hojas de los árboles, los granos de arena de Bariloche, los granos de arena del mundo. A medida que estas colecciones crecen en su cantidad de elementos, son menos los que sostienen que no son infinitos.

Por otro lado, las preguntas que menos estudiantes responden correctamente son las P4, P6d, P6e Y P7. Los ítems de la P6 indagan respectivamente si dos elementos determinados están o no en un conjunto, la respuesta correcta es que NO están. Tanto la P4 como la P7 estudian si hay una asimilación de infinito a “todo”, esto es, ¿si una colección es infinita, debe entonces contener ***todos*** los elementos?

Podemos concluir entonces que lo más sencillo parece ser decidir sobre la cantidad de elementos de una colección finita generada a partir de muy pocos elementos y la cantidad de elementos de una colección infinita generada por muchísimos elementos, mientras que lo más difícil de la tarea planteada, resulta ser decidir si una colección infinita debe necesariamente poseer todos los elementos.

A continuación veremos cuáles son las preguntas con mayor cantidad de respuestas *no sé* o *no contesta;* el Gráfico 6. 3 muestra la cantidad de estudiantes que asumen esta respuesta para cada pregunta.

Gráfico 6. 3: Cantidad de estudiantes que responde “*no sé”* o *no contesta* en cada pregunta:



Podemos obsevar que la pregunta con más respuestas *“no sé”* es la P2, esta pregunta indaga si es posible obtener infinitos elementos a partir de la combinación de tres elementos que se repiten. Contrariamente, las preguntas que menos dudas parecen ofrecer son las P8, P9, P10 y P11 que indagan aspectos muy similares al examinado por la P2.

Prácticamente la misma cantidad de estudiantes duda al responder las P3, P4 y P7. Estas tres preguntas indagan aspectos similares: s*i es posible obtener distintas colecciones infinitas* y *si en infinito deben estar todos los* *elementos.* Lo que nos indica que las tres preguntas producen un nivel de duda similar en los estudiantes.

A medida que se va avanzando en el cuestionario, hay una disminución de repuestas *"no sé"* o *"no contesta"*, creemos que los estudiantes van tomando confianza al familiarizarse con estos tópicos.

Teniendo en cuenta tanto las respuestas correctas como las no respuestas, vemos que el porcentaje de respuestas correctas es alto y es bajo el porcentaje de no respuestas. Es decir, lo más frecuente es que los estudiantes contesten y contesten bien.

Al interior de la P6, que indaga si elementos determinados están en un conjunto definido inductivamente, vemos que resulta más dificil responder en los casos en que el elemento no está en el conjunto, esto indica que resulta más dificil asegurar que un elemento NO ESTÁ en el conjunto.

Capítulo 7

Asociación entre las modalidades de respuesta según los estudiantes que las eligen

Como se explicó en el Capítulo 5 mostraremos en este capítulo los resultados del análisis factorial de correspondencias múltiples (AFCM) aplicado a la tabla de los 195 participantes descriptos por las variables de caracterización y de respuesta.

Recordemos que consideramos 10 variables activas; las variable de respuesta: P1, P2, P3, P4, P5, P7, P8, P9, P10 y P11, con sus respectivas modalidades que según se explicitó en el capítulo 5, en total, suman 32.

Hemos considerado como variables ilustrativas a las variables de caracterización de los participantes (EDAD, GÉNERO y COLEGIO) y a las variables de respuesta P6, P12 y P13.

La inercia total de la nube de puntos se calcula dividiendo el número total de modalidades de variables activas por el número total de variables activas menos 1. En nuestro caso es 32/10 – 1= 2,2 distribuida en 32 - 10 = 22 autovalores.

Podemos observar (Tabla 7.1) que a partir de los dos primeros autovalores se advierte un decrecimiento a saltos, mientras que en los restantes este decrecimiento es mucho más suave, por esta razón y siguiendo criterios usuales (Baccalá y Montoro, 2008; Crivisqui, 1993), describiremos e interpretaremos los dos primeros factores.

Tabla 7.1.: Valores propios con los respectivos porcentajes acumulados asociados e histograma.

Nº	V. PROPIO	%	% ACUMUL.	
1	0.4042	18.37	18.37	**
2	0.2229	10.13	28.50	***
3	0.1539	7.00	35.50	********************************
4	0.1364	6.20	41.70	****************************
5	0.1352	6.15	47.85	***************************
6	0.1143	5.20	53.05	***********************
7	0.1123	5.10	58.15	***********************
8	0.1003	4.56	62.71	********************
9	0.0964	4.38	67.09	********************
10	0.0931	4.23	71.32	*******************
11	0.0858	3.90	75.22	*****************
12	0.0796	3.62	78.84	****************
13	0.0723	3.29	82.13	***************
14	0.0689	3.13	85.26	**************
15	0.0629	2.86	88.11	*************
16	0.0609	2.77	90.88	*************
17	0.0570	2.59	93.47	************
18	0.0444	2.02	95.49	*********
19	0.0377	1.71	97.20	********
20	0.0296	1.35	98.55	******
21	0.0179	0.82	99.36	****
22	0.0140	0.64	100.00	***

Analizaremos a continuación cuáles son las variables y modalidades más contributivas a la conformación de cada factor y cuáles de éstas están bien representadas.

Consideraremos como particularmente contributivas a un determinado factor a aquellas variables y modalidades activas que tengan una contribución mayor o igual que la contribución media de las variables o modalidades respectivamente.

Contribución media de las variables: (100/10) % = 10 %

Contribución media de las modalidades: (100/32) % = 3,125 %

Para analizar si la modalidad está bien representada en un determinado eje, estudiamos el coseno cuadrado. Recordemos (Capítulo 5) que cuanto más alejada del eje se encuentre la modalidad, menor será el coseno cuadrado. (Tabla 1, Anexo 3)

En el caso de las variables ilustrativas, consideramos que una modalidad no se encuentra representada en un eje por azar, si posee un valor test en valor absoluto igual o superior a 2. La tabla 2 del Anexo 3 muestra las modalidades, el valor test asociado a cada una y su respectiva coordenada, en cada eje.

7.1 Los factores del AFCM

Vamos a describir e interpretar los factores a partir de tres cuestiones:

- *Según las variables y modalidades activas que contribuyen de manera particular* a su conformación.
- *De acuerdo a su conformación en vías de definirlo como una nueva variable sintética, es decir, que resume un conjunto de variables y está relacionada lo más posible con las variables iniciales.*
- *Según la relación existente entre las modalidades de respuesta y de caracterización asociadas a cada factor.*

La tabla 7.2 sintetiza la conformación de cada uno de los factores, en cuanto a las modalidades de variables activas que contribuyen a su formación y las modalidades de variables ilustrativas (de respuesta para P6, P12 y P13 y de caracterización de los participantes según edad, colegio y género) que se encuentran bien representadas en este eje. El signo (+) indica las modalidades con coordenada positiva en ese eje y el signo (-) las modalidades con coordenada negativa. Se encuentran subrayadas las modalidades que constituyen la respuesta correcta. Un mayor detalle puede encontrarse en las tablas 1 y 2 del anexo 3.

Tabla 7.2: Conformación y modalidades asociadas a cada eje del AFCM.

Eje	Modalidades de variables de respuesta activas que contribuyen principalmente en la formación del eje	Modalidades de variables de respuesta ilustrativas bien representadas en este eje.	Modalidades de variables de caracterización que están bien representadas en este eje
I	(+) P1NOSE, P3NOSE, P5NOSE, P7NOSE, P8NOCONTESTA, P9NOCONTESTA, P10NOCONTESTA, P11NOCONTESTA.	(+) P6aNOSE, P6bNOSE, P6cNOSE, P6dNOSE, P6eNOSE, P12NOCONTESTA, P13aNOSE, P13bNOSE, P13cNOSE (-)P6aSI, P6bSI, P6cSI, P6dSI, P6eSI, 12MAS, P12IGUAL, P13aNO, P13bNO, P13cNO	(+) CEM46; MENORES (-) LOSANDES, MAYORES
II	(+) P1SI, P2SI, P4NO, P7SI, P8NOCONTESTA, P9NOCONTESTA, P10NOCONTESTA, P11NOCONTESTA (-) P2NO, P8MUCHAS, P9POCAS, P9INFINITAS; P10MUCHAS; P11MUCHAS	(+) P6aSI, P12NOCONTESTA, P12IGUAL, P13aNOCONTESTA, P13bNO, P13cNO, P13cNOCONTESTA (-) P6aNO, P12MAS, P13aSI; P13bSI, P13cSI	(+) CEM2, MAYORES (-) CEM46, MENORES

7.1.1 Factor I

Las modalidades de respuesta que más aportan a la conformación de este eje corresponden a respuestas del tipo "*no sé*" ó "no contesta".

7.1.1.1 En cuanto a las modalidades de respuesta que contribuyen a la formación del eje

Este primer factor sintetiza y reúne casi todas las respuestas "*no sé"* y las no respuestas, tanto si la pregunta en cuestión involucra muchos (P9NOCONTESTA, P11NOCONTESTA) o pocos elementos de partida (P1NOSE, P8NOCONTESTA, P10NOCONTESTA) para conformar las colecciones.

Observando las coordenadas (Tabla 1, Anexo 3), las modalidades P8NOCONTESTA, P9NOCONTESTA, P10NOCONTESTA y P11NOCONTESTA se encuentran muy próximas entre sí, esto está indicando que son "casi" los mismos individuos los que las prefieren; lo mismo ocurre con las modalidades P1NOSE, P3NOSE, P5NOSE y P7NOSE que también se encuentran muy cercanas entre sí, pero alejadas de las anteriores.

7.1.1.2 En cuanto a las modalidades de caracterización

Las modalidades de caracterización que poseen un valor test aceptable son: CEM46 y LOSANDES, de la variable COLEGIO; y de la variable EDAD también encontramos dos modalidades: MENORES y MAYORES.

Vemos que todas las modalidades de respuesta que contribuyen principalmente a la conformación de este factor poseen coordenada positiva. También tienen coordenadas positivas las modalidades CEM46 y MENORES, en cambio, las modalidades LOSANDES y MAYORES poseen coordenada negativa, es decir, estas dos modalidades están alejadas de las modalidades de respuesta más representativas de este factor.

7.1.1.3 En cuanto a las modalidades de las variables de respuesta ilustrativas

Encontramos con coordenada negativa todas las modalidades correspondientes a respuestas SI de todos los ítems de la P6, recordemos que la P6, indaga en cada uno de sus cinco ítems si un determinado elemento pertenece o no al conjunto. Independientemente de que el elemento en cuestión esté (como KS) o no (como ANANA) en el conjunto, la respuesta presente en este eje es: *sí, la combinación debe pertenecer al conjunto*. También encontramos con coordenadas negativas las modalidades P12MAS y P12IGUAL, que aseguran que el conjunto obtenido con 15.000.000 elementos que se repiten tiene más elementos que el conjunto obtenido con 3 elementos que se repiten y que ambos conjuntos tienen igual cantidad de elementos, respectivamente. También con coordenada negativa la respuesta NO a las P13a, P13b, y P13c que aseguran que en ese momento, no había infinitas hojas en los árboles del Parque Nacional Nahuel Huapi ni infinitos granos de arena en las playas de Bariloche, ni en las del mundo.

Por otro lado, con coordenada positiva localizamos la respuesta NOCONTESTA a la P12 y respuestas NOSÉ a todos los ítems de la pregunta P6 Y P13.

Resumiendo, podemos interpretar que el factor I:

* Representa *la inseguridad en la respuesta tanto en lo que concierne a colecciones finitas como infinitas.*

* Opone los *estudiantes menores de una de las escuelas públicas,* asociados con la inseguridad en las respuestas, a los *estudiantes mayores o de la escuela técnica.*

7.1.2 Factor II

7.1.2.1 En cuanto a las modalidades de respuesta que contribuyen a la formación del eje

Este segundo eje agrupa, por un lado, respuestas correctas a algunas de las primeras preguntas del cuestionario (P1, P2, P4 y P7), y por otro, la falta de respuestas a las últimas preguntas.

Contrapuestamente, en el otro extremo del eje, se encuentran respuestas incorrectas o respuestas NOSÉ a las primeras preguntas (P1 y P2) y respuestas que expresan ideas alternativas (incorrectas) a las últimas preguntas (P9, P10 y P11).

7.1.2.2 En cuanto a las modalidades de caracterización

En este factor, todas las variables de caracterización presentan un buen valor test. Las dos modalidades de la variable GÉNERO, se encuentran muy cercanas al origen de coordenadas y muy alejadas de cualquier grupo de respuestas, esto nos indica que ambos grupos de individuos no se asocian a un grupo de respuesta característico. Es decir, no podemos inferir asociaciones entre “tipos de respuesta” y género.

De la variable EDAD, están bien representadas las modalidades MAYORES y MENORES. La modalidad MAYORES, con coordenada positiva, se encuentra muy cercana al grupo de respuestas correctas, mientras que la modalidad MENORES, con coordenada negativa está próxima al grupo de respuestas incorrectas.

Tienen un buen valor test dos modalidades de la variable COLEGIO, que corresponden a las dos modalidades de los colegios no técnicos: CEM46 y CEM2. El factor II discrimina entre estas dos modalidades de modo que la primera, con coordenada negativa se encuentra próxima al grupo de respuestas incorrectas, mientras que la modalidad CEM2 está próxima a las respuestas correctas o no respuestas a las últimas preguntas.

7.1.2.3 En cuanto a las modalidades de las variables de respuesta ilustrativas

Este eje opone las modalidades P12MAS y P6aNO, que manifiestan la idea de que *las combinaciones de 15.000.000 elementos que se repiten son más que las combinaciones de tres elementos que se repiten* y *que la combinación de letras KS no pertenece al conjunto “Barilochense”, que contiene todas las combinaciones de dos letras*, con coordenada negativa; a las modalidades <u>P12IGUAL</u> y <u>P6aSI</u>, que exteriorizan la idea de que *las* *combinaciones de 15.000.000 elementos que se repiten son la misma cantidad de elementos que las combinaciones de tres elementos que se repiten* y *que la combinación de letras KS pertenece al conjunto "Barilochense"*, con coordenada positiva.

Por otro lado, encontramos que este segundo eje también opone, con coordenada negativa, la respuesta SI a las P13a, P13b, y P13c que aseguran que en ese momento, había infinitas hojas en los árboles del Parque Nacional Nahuel Huapi e infinitos granos de arena en las playas de Bariloche y en las del mundo; a las respuestas (con coordenada positiva) que afirman que No son infinitas las colecciones recién mencionados y la modalidad *"no contesta"* si hay infinitos granos de arena en el mundo.

Resumiendo, podemos interpretar que el factor II:

* Opone la no aceptación de la posibilidad de obtener infinitos elementos a no respuestas y a respuestas que aceptan la posibilidad de obtener infinito a partir de 3 elementos que se repiten.

* Representa la asimilación de infinito a un número muy grande, por ejemplo los granos de arena deben ser infinitos.

* Opone a los dos colegios no técnicos y también opone los estudiantes mayores (cercanos al CEM2) a los estudiantes menores (cercanos al CEM46).

7.2 El plano factorial

Analizaremos a continuación el gráfico del plano factorial considerado en este AFCM.

Como se explicó en METODOLOGIA para la interpretación de los planos factoriales, debemos tener en cuenta que dos modalidades son semejantes cuánto más cercanas se encuentren. Es decir, que dos modalidades de respuesta estén cercanas significa que son casi los mismos individuos los que tienen ese tipo de respuesta. Por otra parte debe considerarse que las modalidades cercanas al centro de coordenadas son las respuestas más comunes, mientras que en los extremos de los ejes se ubicarán aquellas más características por alguna razón, expresada en el factor de variabilidad correspondiente.

El plano que consideraremos es el determinado por los ejes I y II[1] (Gráfico 7.1).

Vamos a interpretar en este plano las asociaciones entre las modalidades de respuesta de las variables activas, luego describiremos las proyecciones en el plano de las modalidades de caracterización e interpretaremos la relación entre las modalidades de respuesta y las de caracterización que puedan considerarse con una buena representación en ese plano. Por último analizaremos las proyecciones de las modalidades de variables de respuesta que hemos considerado como ilustrativas.

[1] Hemos analizado el posible aporte de considerar un tercer eje y con él, los planos que este eje determina con los ejes 1 y 2, encontrando que su consideración no agrega información relevante a la ya obtenida.

Tuvimos en cuenta para este análisis cuáles son las modalidades contributivas a cada eje y cuáles de éstas se encuentran bien representadas en el plano. Tomamos el criterio de considerar que una variable está bien representada si la suma de cosenos cuadrados en los ejes correspondientes es igual o superior a 0,15.

En el plano presentado, las modalidades de variables de respuesta a considerar por ser contributivas se encuentran representadas en color rojo, las modalidades de caracterización en color verde y las modalidades de las variables de respuesta ilustrativas en color negro. Tal como venimos haciendo, hemos subrayado las modalidades de variables de respuesta correspondientes a respuestas correctas.

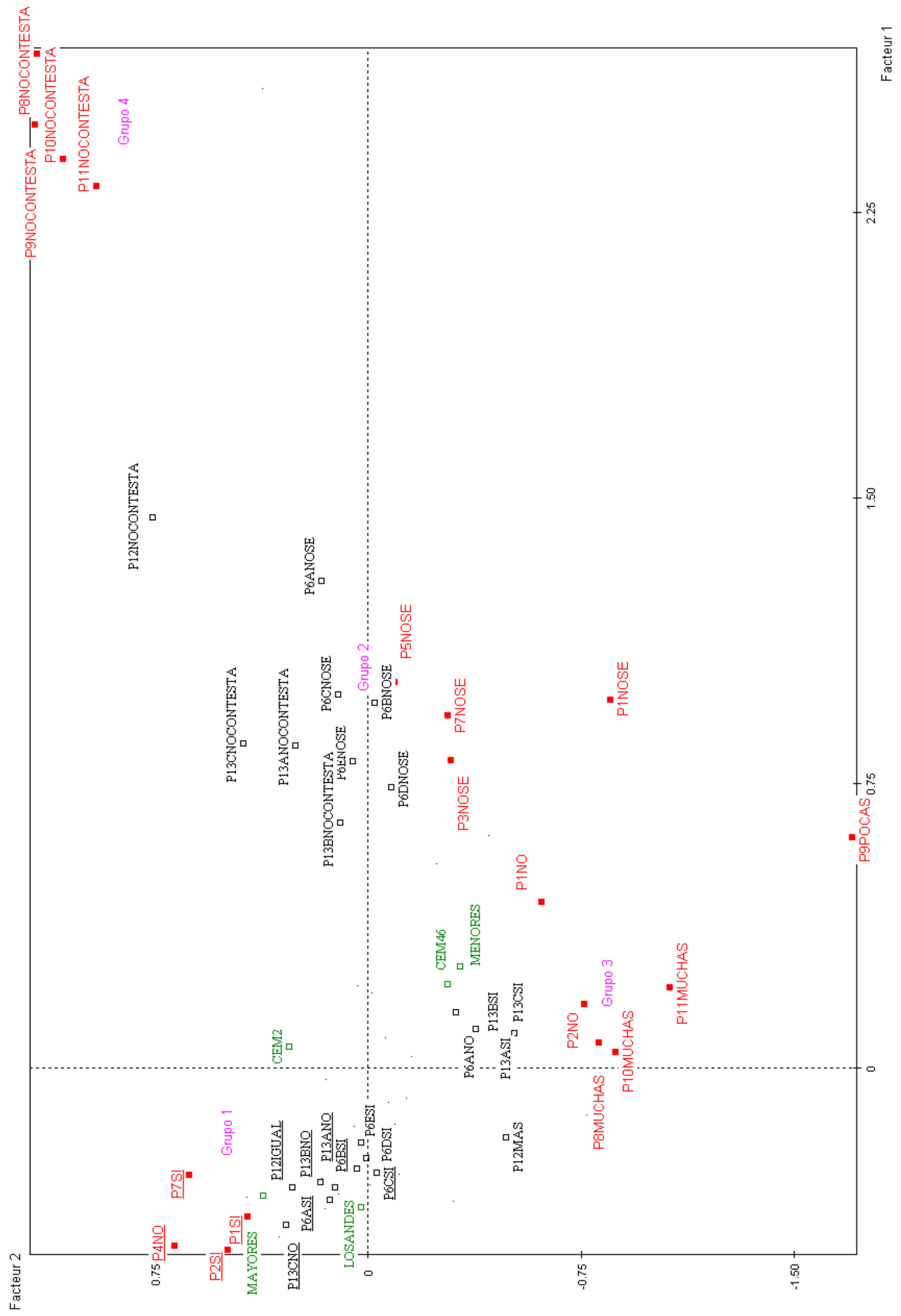
7.2.1. Descripción del Plano Factorial

Este plano es el determinado por los ejes I y II. Recordemos que estos ejes están caracterizados por:

Primer eje: Inseguridad en la respuesta.

Segundo eje: Aceptación de las colecciones infinitas y diferenciadas de "todo" o *un número muy grande vs. la no aceptación de las colecciones infinitas, y asimilación de infinito a un número muy grande (o a mucho).*

Grafico 7.1: Plano Factorial. En color rojo, las modalidades correspondientes a variables de respuesta activas más contributivas a estos ejes; en negro, las modalidades correspondientes a variables de respuesta ilustrativas bien representadas; en verde, las modalidades de caracterización bien representadas. Las modalidades correspondientes a respuestas correctas se encuentran <u>subrayadas</u>.



Se encuentran muy cercanas entre sí las modalidades P1SI, P2SI, P4NO y P7SI, y alejadas de éstas pero también muy cercanas entre sí las modalidades P8NOCONTESTA, P9NOCONTESTA, P10NOCONTESTA y P11NOCONTESTA. En el cuadrante inferior derecho se encuentran muy próximas las modalidades P2NO, P8MUCHAS, P10MUCHAS, y P11MUCHAS y separadas de éstas y cercanas entre sí, P1NOSE, P3NOSE, P5NOSE y P7NOSE. Por último, alejada de todas las agrupaciones anteriores, encontramos P9POCAS.

Lo anterior nos está indicando que casi los mismos individuos que responden correctamente la P1, responden también correctamente las P2, P4 y P7, es decir, quienes aceptan la posibilidad de obtener infinitos elementos a partir de la combinación de tres elementos que se repiten son casi los mismos que consideran que una colección con infinitos elementos no necesariamente incluye todos los elementos. Por otra parte, los estudiantes que no responden a la P8 son casi los mismos que no responden la P9, P10 y P11 que indagan sobre la posibilidad de obtener infinitos elementos a partir de combinar pocos o muchos elementos que no se repiten o sobre la posibilidad de obtener infinitos elementos a partir de combinar pocos o muchos elementos que se repiten, respectivamente.

Por otro lado, quienes responden que no es posible obtener infinitos elementos a partir de la combinación de 3 elementos que pueden o no repetirse son casi los mismos que consideran que tampoco es posible obtener infinitos elementos combinando muchos elementos que se repiten, es decir, de ninguna manera pueden obtenerse infinitos elementos.

Podemos entonces identificar en este plano cuatro grupos:

7.2.1.1 Grupo 1

Este grupo relaciona las modalidades de respuesta: P1SI, P2SI, P4NO y P7SI que refieren a respuestas que evidencian que estos estudiantes *aceptan la existencia de colecciones infinitas y diferencian infinito de "todo".* Asociado a este grupo de respuestas encontramos las modalidades de caracterización: MAYORES, CEM2 y LOSANDES.

En cuanto a las modalidades de respuesta ilustrativas, se encuentran bien representadas en este grupo, respuestas SI a todos los ítems indagados en la P6, y respuestas NO a todos los ítems de la P13 que refieren a las respuestas que indican que NO hay infinitas hojas, ni infinitos granos de arena.

Podemos caracterizar este grupo como de respuestas correctas. Principalmente, las ideas presentes son:

- *Es posible obtener infinito a partir de finitos elementos:* A partir de la combinación de una cantidad finita (3, 28 ó 15.000.000) de elementos que se pueden repetir, obtengo una colección infinita.
- *Infinito diferenciado de "todo".* Un elemento del referencial no necesariamente debe estar en infinito.
- *Muy grande distinto de infinito*.

La asociación entre modalidades de variables de respuesta y de caracterización presentes en este grupo nos está señalando una fuerte vinculación entre la aceptación de las colecciones infinitas y su diferenciación de colecciones de muchísimos elementos, como la de de los granos de arena o la de las hojas de los árboles, por una parte y los estudiantes mayores o de uno de los colegios públicos y la escuela técnica, por la otra.

7.2.1.2 Grupo 2

En este grupo encontramos las modalidades NOSÉ de las variables de respuesta: P1, P3, P5 y P7. Corresponden a inseguridad frente a las preguntas que indagan sobre la posibilidad de obtener infinitos elementos a partir de la combinación de 3 elementos que se repiten, la posibilidad de obtener distintas colecciones infinitas, la posibilidad de obtener infinito a partir de una construcción inductiva y la posibilidad de seguir teniendo infinitos elementos al retirar una cantidad finita de elementos de una colección infinita. No encontramos modalidades de caracterización asociadas a estas respuestas.

En cuanto a las variables de respuesta ilustrativas encontramos también las modalidades NOSÉ de todos los ítems de la P13 y de la P6, es decir, la duda respecto de si la cantidad de hojas o granos de arena es infinita y duda también en la pregunta de reconocimiento de si un elemento pertenece o no una colección definida previamente.

Las modalidades de caracterización MENORES Y CEM46, se encuentran ubicadas de manera casi equidistante entre este grupo y el grupo 3, esto significa que los estudiantes con estas características de colegio y edad, se encuentran repartidos entre las respuestas características de estos dos grupos.

Este grupo se caracteriza entonces por la *duda* o inseguridad en los distintos tópicos indagados.

7.2.1.3. Grupo 3

Este grupo asocia las modalidades de respuesta: P2NO, P8MUCHAS, P10MUCHAS y P11MUCHAS, es decir, con pocos o muchos elementos que pueden repetirse o no, obtengo muchos. Podemos definir este grupo de respuestas como de *imposibilidad de obtener infinito*, dado que tanto si contamos con pocos o muchos elementos que se repiten o no, lo que se obtiene es mucho, no infinito. En cambio, el tipo de respuestas elegidas en cuanto a los contextos concretos que expresan: *la cantidad de hojas o de granos de arena es tan numerosa que debe ser infinita*, indican que asocian un número muy grande al infinito.

Como mencionamos previamente, si bien podemos asociar a este grupo las modalidades de caracterización MENORES y CEM46, estas modalidades, etaria y escolar, se encuentran tan cercanas a las modalidades de respuesta de este grupo como a las modalidades del grupo 2.

En cuanto a las modalidades de respuesta que hemos considerado ilustrativas se encuentran en este grupo P6aNO, P12MAS, P13aSI, P13bSI y P13cSI. La presencia de P12MAS nos estaría indicando que la forma de comparar la cantidad de elementos de dos colecciones es a partir de la inclusión esto es, si un conjunto incluye a otro, entonces tiene más elementos que el primero, la cual funciona cuando se trata de finitos elementos, pero no así cuando están involucrados infinitos elementos, como vimos en el Capítulo 1. Respecto de la P13, las modalidades presentes representan las respuestas que aseguran que hay infinitas hojas en los árboles e infinitos granos de arena en Bariloche y en el mundo.

7.2.1.4 Grupo 4

En este grupo encontramos las modalidades NOCONTESTA de las variables P8, P9, P10 y P11, que indagan sobre la cantidad de elementos obtenidos a partir de combinar pocos elementos que no pueden repetirse (P8), o que sí pueden repetirse (P10); o de muchos elementos de partida que no pueden repetirse (P9) o que sí pueden repetirse (P11). La modalidad P12NOCONTESTA, es decir, la no respuesta ante la comparación de colecciones infinitas se encuentra cerca de este grupo. Notemos que éstas constituyen la totalidad de preguntas en el último tramo del cuestionario.

Ninguna modalidad de caracterización se encuentra próxima a este grupo de respuestas.

Este grupo se caracteriza por la "no respuesta a estas preguntas". Observemos que este grupo de respuestas no se encuentra próximo al grupo 2 en el plano factorial, lo que nos señalaría que no son los mismos individuos que asumen las modalidades presentes en cada uno de ellos. Las variables de respuesta presentes en el grupo 2 tienen como opción la respuesta NO SÉ, mientras que el grupo de variables del grupo 4, presentan la falta de respuesta. Es decir, podemos suponer que el grupo 2 podría estar más asociado a la duda en la respuesta, que a la "no respuesta" por omisión.

Refuerza esta idea el hecho de que, en general, los estudiantes que no responden tampoco suelen contestar el ítem abierto correspondiente en el que se le pide que justifique su respuesta, en cambio, los alumnos que contestan NO SÉ suelen justificar por qué no saben. A modo de ejemplo veamos la respuesta de dos estudiantes que contestan NO SÉ y cuya proyección en el plano se encuentra próxima al grupo 2 (A21): "*tengo dudas"* (P2), (A50):*" no tengo idea, podría ser, pero no sé"* (P1). Lo que queremos significar con esto es que es posible que la no respuesta en estas últimas preguntas, pueda estar indicando que los estudiantes ya estaban cansados cuando llegó el turno de responderlas más que la inseguridad en la respuesta que aparece más visiblemente en el grupo 2.

7.3 Resumen de resultados

La tabla 7.3 resume los resultados encontrados en este plano y sintetiza la idea subyacente de cada grupo a partir de la interpretación de las modalidades halladas:

Tabla 7.3: Resumen de los resultados e interpretación del plano factorial:

	Grupo	Modalidades de respuesta	Modalidades de caracterización	Idea subyacente
Primer Plano	G1	P1SI, P2SI, P4NO y P7SI, P6aSI, P6bSI, P6cSI, P6dSI, P6eSI, P12IGUAL, P13aNO, P13bNO, P13cNO	MAYORES, CEM2 y LOSANDES	*Aceptación de las colecciones infinitas, distinción entre infinito y "todo" así como entre Infinito y "mucho"*
		P1NOSE, P3NOSE, P5NOSE,		

	G2	P7NOSE, P13aNOSE, P13bNOSE, P13cNOSE, P6aNOSE, P6bNOSE, P6cNOSE, P6dNOSE, P6eNOSE.	------------------	*Duda o inseguridad*
	G3	P2NO, P10MUCHAS y P11MUCHAS, P6aNO, P12MAS, P13aSI, P13bSI y P13cSI	MENORES y CEM46	*No aceptación de colecciones infinitas y asociación de número muy grande al infinito.*
	G4	P8NOCONTESTA, P9NOCONTESTA, P10NOCONTESTA y P11NOCONTESTA	------------------	*No respuesta a las últimas preguntas del cuestionario.*

7.4 Discusión y síntesis de los resultados del AFCM

En el plano estudiado, los tipos de respuestas correctas, correspondientes a preguntas similares, están fuertemente asociadas entre sí, lo mismo ocurre con las respuestas incorrectas, y con las modalidades asociadas a la inseguridad en la respuesta. Es decir, se observa cierta consistencia en las respuestas.

Encontramos que hay variables que sintetizan la información, es decir, variables que aparecen conformando los dos ejes estudiados, éstas son: P7, P8, P9, P10 y P11, que indagan si en *una colección infinita deben estar todos los elementos* y si *es posible obtener infinitos elementos a partir de la combinación de pocos* o *muchos elementos que no se repiten,* o *de pocos* o *muchos elementos que se repiten,* respectivamente.

Vemos que una primera diferenciación está dada por los estudiantes que responden correctamente vs. los que no responden o responden *"no sé"*, tomando las respuestas dadas, podemos establecer los siguientes “patrones de respuesta”:

Un primer grupo de respuestas corresponde a la *aceptación de las colecciones infinitas* y a la *diferenciación entre infinito y todo*, asociadas a los alumnos mayores y los estudiantes de dos de los colegios: LOSANDES y CEM2

Un segundo patrón de respuestas se relaciona con la *duda* o inseguridad frente a estas cuestiones, caracterizado por los estudiantes menores y los estudiantes del CEM46.

Otro patrón de respuestas está caracterizado por la *dificultad en la admisión de las colecciones infinitas*. Este tipo de respuestas se asocia con los estudiantes menores y del CEM46.

El último patrón de respuestas corresponde a la *no respuesta* a las últimas preguntas del cuestionario.

En suma, entre los estudiantes indagados encontramos un amplio arco de respuestas, que se extienden desde lo que parecería ser una comprensión del infinito matemático, a una dificultad para pensarlo como un cardinal de origen, naturaleza y extensión diferentes a los que dan lugar sea a mucho, sea a todo; hasta la inseguridad e incluso un escaso interés en el tema, en el sentido que ese interés se agota tras unas 7 preguntas.

En estos diversos patrones parece incidir la escuela y también la edad de los estudiantes pero no así el género. Se asocian a una mayor comprensión matemática del infinito la escuela técnica y una de las otras escuelas, la que presenta un proyecto educativo más sólido con respecto a la matemática, así como los alumnos mayores. La otra escuela y los alumnos menores se encuentran entre la inseguridad y el interés poco sostenido en la cuestión del infinito matemático.

Capítulo 8

Clasificación de los estudiantes según las modalidades de respuesta

Buscamos clasificar a los participantes basándonos en la similitud de sus modos de respuesta. Con este fin, como adelantamos en el Capítulo 5, luego del análisis factorial de correspondencias múltiples (cuyos resultados hemos descripto en el Capítulo 7) realizamos una clasificación de estos estudiantes, según sus modos de respuesta y buscando asociaciones de cada clase con las variables de caracterización. Para ello, como adelantáramos en la metodología, se utilizó el método de clasificación jerárquica ascendente de Ward (Ward, 1963).

8.1 Construcción de la partición

Realizamos la partición sobre el conjunto de los 195 individuos representados por sus coordenadas en los 5 primeros ejes del AFCM (obtenidas en el AFCM descrito en el Capítulo 7). La Tabla 8.1 muestra el histograma de los 20 índices de nivel más altos.

Tabla 8.1: Histograma de los 20 índices de nivel más elevados de la clasificación jerárquica

NUM.	EFF.	INDICE	HISTOGRAMA DE LOS INDICES DE NIVEL
366	7	0.00321	*
367	15	0.00416	**
368	26	0.00426	**
369	14	0.00432	**
370	7	0.00448	**
371	40	0.00581	**
372	19	0.00634	**
373	11	0.00638	**
374	43	0.00729	**
375	8	0.00763	**
376	20	0.00822	***
377	69	0.00955	***
378	14	0.00998	***
379	28	0.01023	***
380	29	0.01262	****
381	12	0.01285	****
382	23	0.01913	*****
383	19	0.02245	******
384	47	0.02721	*******
385	31	0.02886	********
386	**76**	**0.07104**	******************
387	107	0.07569	*******************
388	176	0.15316	**************************************
389	195	0.32486	**

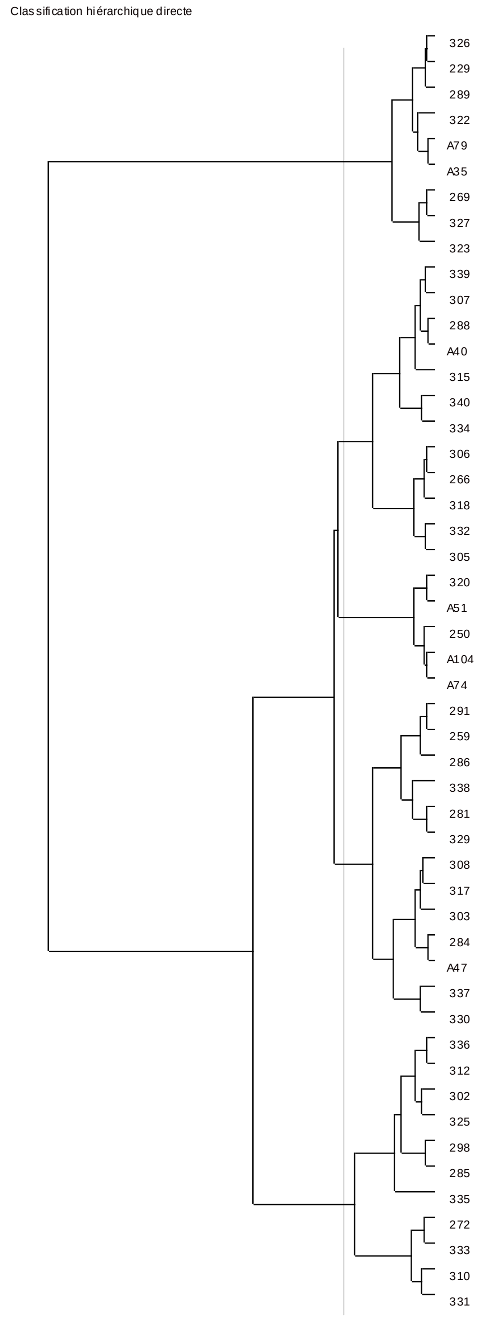
La primera columna de la tabla precedente (Num.) indica el número de iteración en el proceso de clasificación ascendente, la segunda columna (Ef.), la cantidad efectiva de individuos agrupados en esa iteración y la tercera (Índice), indica la distancia entre los individuos o grupos de individuos que se agrupan en ese paso.

Analizando los índices, podemos ver que a partir de la iteración 385, comienzan a agruparse individuos o grupos de individuos bastante distantes entre sí. Teniendo en cuenta este hecho y considerando también los saltos en el histograma, consideramos conveniente realizar la partición en 3 ó 5 clases.

La clasificación en tres clases determina tres grupos de estudiantes asociados a *respuestas correctas, no respuestas* y *respuestas incorrectas* respectivamente. Dado que, más que observar si los estudiantes responden bien o mal, nos interesa prestar atención a *qué* responden, cuáles son las respuestas que expresan ideas alternativas y cuáles son las asociaciones entre estas respuestas, hemos decidido considerar para nuestro análisis la clasificación en cinco clases pues es más informativa para este propósito.

El dendograma de la clasificación (Gráfico 8.1) clarifica esta elección.

Grafico 8.1: Dendograma de la clasificación jerárquica.



8.2 Resultados

En el Gráfico 8.2 presentamos el plano factorial correspondiente al AFCM realizado previamente, en el cual se han proyectado los centros de gravedad de las cinco clases. Cabe recordar que para esta clasificación se consideraron 3 ejes más que los que componen este plano, es decir que se capitaliza mayor información que con el AFCM.

8.2.1 Descripción de las clases

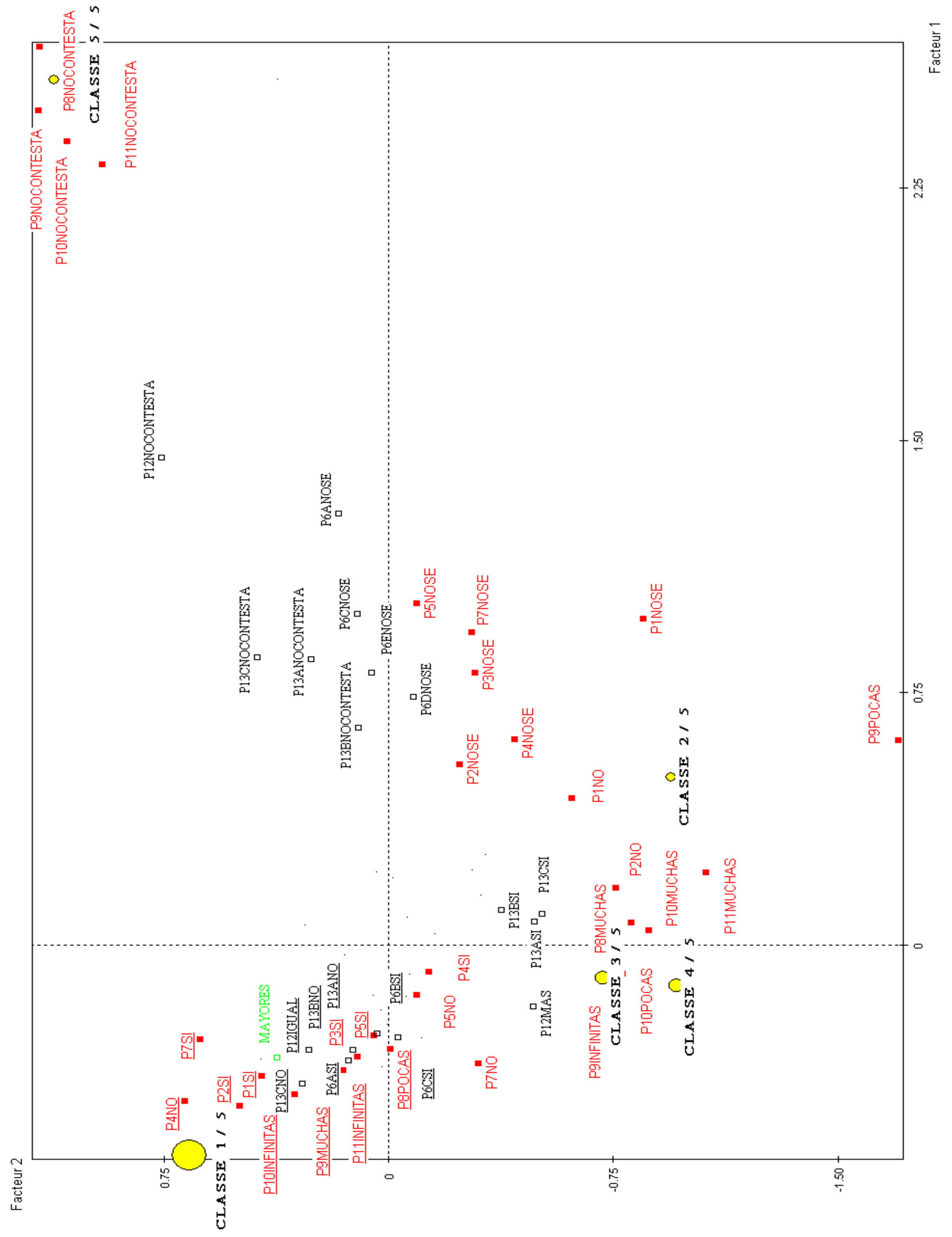
Describiremos cada clase a partir de los modos de respuesta característicos de los participantes pertenecientes a cada una de ellas y las modalidades de caracterización asociadas.

En el Anexo 3 (Tablas 3 a 7), para cada clase se presenta la respectiva tabla que ilustra las modalidades mejor representadas, es decir las más frecuentes, y las subrepresentadas, es decir las de muy baja frecuencia en esa clase. En cada tabla aparecen subrayadas las respuestas correctas y en color rojo las modalidades correspondientes a variables de caracterización.

Presentaremos una interpretación de cada clase y ejemplificaremos con algunas de las respuestas de justificación (preguntas abiertas) dadas por algunos estudiantes representativos de la clase a las preguntas correspondientes a la modalidad presente en la clase.

Grafico 8.2: Proyección de las cinco clases en el primer plano factorial.

Señalamos en rojo, las modalidades de variables de respuesta activas; en negro, las modalidades de respuesta ilustrativas; se encuentran subrayadas las respuestas correctas. Indicamos en verde las modalidades de variables de caracterización. Los círculos amarillos representan el baricentro de la clase y su tamaño es proporcional a la cantidad de individuos que se encuentran en la clase.



8.2.1.1 Clase 1

La Tabla 3 (Anexo 3) muestra las modalidades de respuesta más representativas de la clase 1 y de caracterización asociadas a ella, como así también las modalidades de respuesta o de caracterización subrepresentadas en esta clase.

Se encuentran en esta clase 86 estudiantes, correspondientes al 44.10% del total de los participantes. La clase se caracteriza por reunir una gran cantidad de estudiantes MAYORES y muy pocos que concurren al CEM46. La característica distintiva de esta clase es que aglutina todas las respuestas correctas.

Las modalidades asociadas representan la aceptación de que con pocos o muchos elementos que se repiten es posible obtener infinitos (P1SI, P10INFINITAS, P11INFINITAS). Sin embargo, si no es posible repetir los elementos, se obtienen pocos si son pocos los elementos a combinar, o muchos si son muchos los elementos a combinar (P8POCAS, P9MUCHAS). También está presente la modalidad que representa la idea de que una colección puede tener muchísimos elementos, como el total de las hojas de los árboles, o de los granos de arena pero sin embargo no es infinita (P13aNO, P13bNO, P13cNO); en infinito no necesariamente está todo (P4NO, P7SI) y que es posible obtener infinitos elementos de manera inductiva (P5SI). En cuanto a las modalidades de respuesta presentes, hay coincidencias con el grupo 1 identificado en el AFCM del Capítulo 7.

Casi el 63% de los alumnos de esta clase son MAYORES.

Se encuentran subrepresentadas en esta clase principalmente las modalidades correspondientes a respuestas *no sé* o la falta de respuesta para todas las preguntas, fundamentalmente P8, P9, P10 y P11, con menos del 10% de individuos que toma estas modalidades presentes en esta clase. Es decir que los estudiantes de esta clase prefieren contestar completo el cuestionario.

Con el fin de estudiar en mayor detalle qué significan para los estudiantes las respuestas dadas, hemos observado las justificaciones dadas por algunos estudiantes de la clase.

En cuanto a las modalidades de respuesta que indican que las combinaciones de elementos que se repiten son infinitas, ya se parta de pocos como de muchos elementos, encontramos justificaciones que atienden a la posibilidad de combinar los elementos. Veamos por ejemplo, la siguiente justificación:

"Porque si se pueden repetir infinitamente los dígitos, las combinaciones son infinitas" (Justificación dada por A94 a la P1SI).

Respecto a las respuestas que aseguran que si parto solo de 3 elementos y no puedo repetirlos en cada combinación obtengo pocos y si parto de 15.000.000 elementos, sin que esté permitido repetirlos, logramos muchos, encontramos que la justificación dada en algunos casos está basada en que los elementos no pueden repetirse en cada combinación:

"porque no está permitido repetir letras. Las combinaciones son muy limitadas" (justificación dada por A57 a P8POCAS),

Algunas justificaciones incluyen también una diferenciación explícita entre mucho e infinito:

"Creo que las combinaciones pueden ser muchas, ya que tiene muchas letras pero no son infinitas porque no se puede repetir." (Justificación dada por A57 a P9MUCHAS).

En otros casos, la justificación está dada por el cálculo de cuántos son efectivamente los elementos en cuestión, aunque no sea correcto:

"si son solo 3 dígitos las combinaciones posibles son 27 (3.3)" (Justificación dada por A94 a P8POCAS),

Respecto de las justificaciones dadas a las preguntas que buscan indagar *si un conjunto es infinito, ¿debe contener todos los elementos?* Encontramos:

"Creo que sí es posible construir otro idioma de máquina, ya que se pueden combinar de distinta manera las 28 letras" (Justificación dada por A54 a P3SI)

La pregunta P12 plantea la comparación entre dos cantidades infinitas. Muchas de las justificaciones que encontramos a la respuesta que asegura que las dos colecciones involucradas tienen la misma cantidad de elementos, parecen señalar que si dos colecciones son infinitas deberán tener la misma cantidad de elementos (lo cual en este caso es cierto), es decir lo que manifiestan las justificaciones parece ser que existe un único cardinal de conjuntos infinitos. Por ejemplo:

"Ambos son infinitos" (Justificación dada por A94 a P12IGUAL)

En cuanto a las preguntas referidas a conjuntos del mundo cotidiano, la mayoría de las justificaciones están asociadas a la posibilidad de contar los elementos:

"Pero son muchísimas, dudo que sea posible que una persona las cuente. Pero no son infinitas, si se quisiera calcularlas se encontraría un sistema que lo permita" (Justificación dada por A94 a P13aNO).

Podemos caracterizar esta clase, entonces, como de aceptación de colecciones infinitas, diferenciación entre infinito y todo y diferenciación entre infinito y un número muy grande. Aglutina así todas las respuestas correctas del cuestionario.

Además, en virtud de la subrepresentación de respuestas *no sé* o falta de respuesta, podríamos decir que es una clase caracterizada por la seguridad. Estas respuestas características están asociadas a los alumnos mayores y se encuentran con escasa representación los menores y los estudiantes del CEM46.

8.2.1.2 Clase 2

La tabla 4 del Anexo 3 muestra las modalidades presentes en la clase y las modalidades subrepresentadas en ella.

Se encuentran en esta clase 24 estudiantes que corresponden al 12,31% del total de los participantes. Se caracteriza por incluir muy pocos estudiantes mayores y tiene asociada la *duda e inseguridad en la respuesta.*

Las modalidades de respuesta que caracterizan esta clase son: P9POCAS y las correspondientes a respuestas "*no sé*" de las variables P1, P2, P3, P4, P5 y P7; es decir, de las primeras preguntas. La conformación de esta clase es análoga a la del grupo 2 del AFCM realizado en el capítulo anterior.

La modalidad P9POCAS corresponde a la respuesta: *“con 15.000.000 de teclas, sin que puedan repetirse las teclas en una determinada combinación, se obtienen pocas combinaciones (menos de 1.000)”*. Entre los estudiantes participantes, ésta es una respuesta “rara” ya que solo 10 del total de 195 estudiantes la da. Todos ellos se encuentran en esta clase.

Ninguna modalidad de caracterización se encuentra asociada a esta clase. Sin embargo, se encuentra subrepresentada en ella la modalidad MAYORES. Esto quiere decir que los estudiantes que dan este tipo de respuestas generalmente no son mayores. Estos estudiantes contestan *no sé* a casi todas las preguntas y si bien también están todos los que responden P9POCAS, la mayoría de los de la clase, casi el 70%, contesta *no sé* a las primeras preguntas, es decir que la característica central de esta clase es la duda.

Presentamos a continuación algunas justificaciones dadas por algunos estudiantes de esta clase.

Las justificaciones presentes indican inseguridad o duda en cuanto a los distintos tópicos indagados. Por ejemplo, en cuanto a la P2 que indaga si con tres elementos que se repiten es posible obtener infinitos elementos, las justificaciones presentes hacen referencia a la duda planteada por la dificultad de lograrlo:

"No sé porque con solo tres teclas es difícil crear un idioma" (justificación dada por A26 a P2NOSE),

o a la duda asociada a una dificultad personal al no haber tenido la posibilidad de pensar sobre esto previamente:

"Para responder sí o no, tendría que investigar sobre el tema" (justificación dada por A170 a P2NOSE).

En cuanto a la idea de que si una colección es infinita contiene todos los elementos, encontramos también la duda o inseguridad:

"Creo que no, pero no estoy seguro" (justificación dada por A126 a P7NOSE),

"Capaz que se puede obviar" (justificación dada por A170 a P4NOSE).

En cuanto a la pregunta que indaga sobre la posibilidad de obtener infinito a partir de combinar los elementos siguiendo una regla inductiva, la justificación presente para la respuesta "no sé" a esta pregunta es:

"Porque hay muchas combinaciones, pero las letras, va a llegar un punto en donde no se va a poder combinar más" (justificación dada por A26 a P5NOSE).

8.2.1.3 Clase 3

La Tabla 5 del Anexo 3 muestra las modalidades características en la clase y las modalidades subrepresentadas en ella.

En esta clase se encuentran 31 de los 195 estudiantes, que representan el 15.9% de los estudiantes participantes en este estudio.

Las modalidades de respuesta que caracterizan a esta clase corresponden a las respuestas que expresan las ideas: independientemente de que esté permitido o no repetir los elementos, combinando pocos elementos se obtienen muchos pero no infinitos (P2NO, P8MUCHAS y P10MUCHAS), y combinando muchos elementos se obtienen infinitos (P9INFINITAS y P11INFINITAS). También se encuentran en esta clase las respuestas que indican que existen infinitas hojas en los árboles del Parque Nacional Nahuel Huapi (P13aSI) y existen infinitos granos de arena en Bariloche y en el mundo (P13bSI y P13cSI); que expresan la idea de que un número muy grande es infinito.

No encontramos modalidades de caracterización presentes en esta clase.

Respecto de la posibilidad de obtener infinitos elementos a partir de la combinación de tres elementos que se repiten, algunas justificaciones tienen que ver con que el proceso puede finalizar:

"No sé, porque se podría llegar a un momento en el cual se interrumpe" (justificación dada por A121 a P2NO).

A124 asegura que:

"Porque son pocas las letras" (justificación dada por A124 a P10MUCHAS).

En cuanto a que con 15.000.000 elementos que no se repiten se puede obtener infinitos, nos encontramos con respuestas que asimilan un número muy grande a infinito:

"Infinitas combinaciones, porque al tener 15.000.000 de teclas serán infinitas las combinaciones" (justificación dada por A88 a P9INFINITAS), es decir, un número tan grande deberá ser infinito.

Esta misma asimilación de muy numeroso a infinito, también la encontramos en las justificaciones dadas para las respuestas que aseguran que existen infinitas hojas en los árboles del Parque Nacional Nahuel Huapi, o infinitos granos de arena, en este momento:

"Sí, creo que hay "muchas"" (justificación dada por A121 a P13aSI),

También encontramos justificaciones asociadas a la imposibilidad de contar los elementos de estos conjuntos:

"Existe una determinada cantidad de granos, pero imposible de contabilizar" (Justificación dada por A142 a P13bSI),

Esta clase está caracterizada entonces, por la asimilación de un número muy grande con infinito junto con la noción de que no se puede obtener infinito a partir de pocos elementos. No hay modalidades de caracterización en esta clase ni tampoco encontramos modalidades de caracterización subrepresentadas en ella. Es decir que es una modalidad de respuesta que se encuentra muy repartida entre las distintas modalidades de caracterización.

8.2.1.4 Clase 4

Se encuentran en esta clase 35 estudiantes, casi el 18% de los participantes.

Las modalidades presentes en esta clase (ver Tabla 6 del Anexo 3) representan las ideas de que con pocos elementos, pueda o no repetirlos en cada combinación, obtengo pocos elementos (P8POCAS y P10POCAS) y, si son muchos los elementos, obtengo muchos (P11MUCHAS), pero en ningún caso es posible obtener infinitos.

También encontramos la modalidad que representa la idea de que si retiro una cantidad finita de elementos de una colección infinita, ya NO tenemos infinitos (P7NO); lo que también podría estar expresando la idea de que si una colección infinita es presentada como tal, entonces debe contener todos los elementos.

Esta clase se parece mucho al grupo 3 del AFCM realizado en el Capítulo 7.

Las modalidades subrepresentadas en esta clase corresponden a respuestas que indican que es posible obtener infinitos elementos a partir de la combinación de pocos o muchos elementos que se repiten (P1SI, P10INFINITAS y P11INFINITAS) y que aceptan que un conjunto infinito no necesariamente contiene todos los elementos (P7SI).

No encontramos variables de caracterización en esta clase.

Veamos algunas justificaciones dadas por algunos de esta clase:

"Con 15 millones de letras podrías hacer muchas combinaciones pero nunca se llegaría al infinito" (justificación dada por A183 a P11MUCHAS).

"Sigo pensando igual…no es posible tantas combinaciones" (justificación dada por A16 a P10POCAS).

8.2.1.5 Clase 5

En esta clase se encuentran menos del 10 % de los estudiantes participantes (19 alumnos). En la Tabla 7 del Anexo 3 se muestran las modalidades características presentes en la clase y las subrepresentadas.

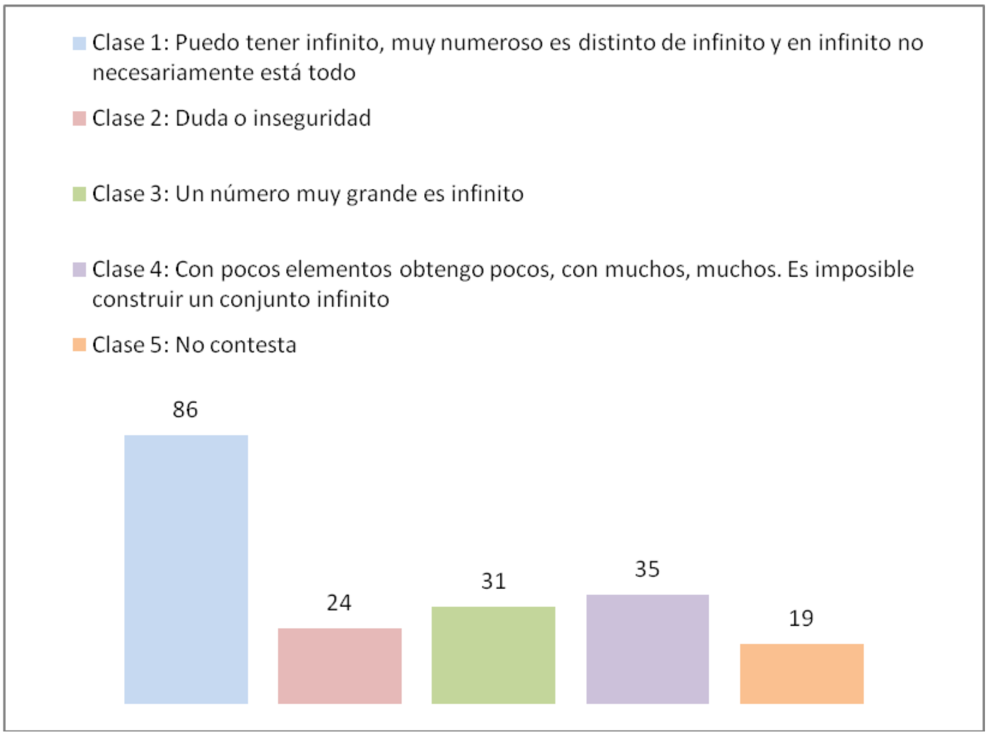
En coincidencia con el grupo 4 del AFCM, esta clase está caracterizada por las no-respuestas, principalmente a las últimas preguntas, sin estar asociada a ninguna modalidad de caracterización, observando las modalidades subrepresentadas podemos decir que los estudiantes presentes en esta clase se caracterizan por no ser del colegio LOSANDES, ninguno de los estudiantes de este colegio se encuentra en esta clase.

La mayoría de los alumnos de esta clase, además de no contestar las P8, P9, P10, P11, P12 y P13, tampoco justifican sus respuestas.

8.3 Discusión e interpretación de los resultados de la clasificación

El gráfico 8.3 compara la conformación de las clases de acuerdo a la cantidad de integrantes de cada una.

Gráfico 8.3 Cantidad de estudiantes que integran cada clase



Sintéticamente podemos decir que estas cinco clases están caracterizadas de la siguiente manera:

Clase 1: Puedo tener infinito, muy numeroso es distinto de infinito y en infinito no necesariamente está todo

Tiene asociadas las siguientes ideas:

- *con un número finito de elementos, que se pueden repetir, puedo obtener infinitas combinaciones,*
- *una colección infinita no necesariamente tiene todos los elementos.*
- *una colección con muchísimos elementos, no necesariamente posee infinitos elementos.*

Clase 2: Duda o inseguridad

Esta clase está caracterizada por la inseguridad en la respuesta y por no encontrarse en ella estudiantes mayores.

Clase 3: Un número muy grande es infinito

Agrupa las siguientes ideas:

- *solo con mucho puedo obtener infinitos elementos,*
- *una colección con gran cantidad de elementos es infinito.*

Clase 4: Con pocos elementos, obtengo pocos elementos, con muchos, muchos. Infinito no es posible

Las respuestas presentes indican las ideas:

- *Es imposible obtener infinito.*
- *Si una colección es dada como infinita, entonces debe contener* <u>*todos*</u> *los elementos.*

Clase 5: No contesta

No contestan las últimas preguntas.

Podemos describir cinco clases de estudiantes caracterizados por sus modos de respuesta: según un gradiente desde las respuestas correctas, pasando a la inseguridad en las respuestas, luego respuestas incorrectas y por último, no respuestas.

El grupo de respuestas que son acordes al status matemático de la noción de infinito es el más numeroso. Encontramos que las respuestas correctas se encuentran muy vinculadas entre sí en el sentido de que quienes responden correctamente lo hacen prácticamente en todas sus respuestas. Estos estudiantes no solo evidencian la capacidad de determinar si un conjunto es infinito o no, sino además, en sus justificaciones dejan en claro que lo diferencian de un número muy grande, o de "todo" en el sentido de poseer todos los elementos posibles. Los estudiantes que dan estas respuestas son principalmente los estudiantes ente 17 y 19 años.

En cuanto a las respuestas que no se ajustan a la noción matemática del infinito, tal como expresamos, nos interesa ver cuál es la diversidad de respuestas halladas. En esta situación podemos identificar dos tipologías de respuesta. Por un lado, las respuestas que identifican infinito con un número muy grande, y por otro, las que consideran que no es posible obtener infinito, pero en el caso en que una colección sea dada como infinito, ésta debe contener todos los elementos. Esto último coincide con parte de las *concepciones subyacentes* sobre el infinito encontradas por Monaghan (2001) y por Montoro (2005) y Montoro y Scheuer (2006), revisadas en el Capítulo 2

En cuanto a la no respuesta, encontramos que se diferencia del tipo de respuestas que representan inseguridad, en que estas últimas expresan esta inseguridad a través de las justificaciones presentes de las respuestas dadas, mientras que la no respuesta también se manifiesta como no respuesta en cuanto a la justificación. Parece ser más una decisión de no contestar que una manifestación de inseguridad. Si bien no encontramos asociadas estas respuestas con modalidades de caracterización, sí podemos asegurar que los estudiantes que no contestan no son alumnos del colegio técnico y los estudiantes cuyas respuestas manifiestan dudas, no son los estudiantes mayores.

Esta clasificación refina los resultados obtenidos por el AFCM al interior de las ideas alternativas, en cuanto a que nos aporta una tipología de respuesta que no estaba presente anteriormente. Se trata de las respuestas que indican la imposibilidad de construir un conjunto infinito, independientemente de la cantidad de elementos con los que se cuente de partida y de que esté permitido o no repetir los elementos, diferenciada de las respuestas que indican una asociación de infinito con un número muy grande.

Capítulo 9

Conclusiones

En este capítulo presentamos algunas conclusiones de este trabajo, expuestas según dos aspectos, uno con respecto a la metodología utilizada para esta tesis y el otro respecto a los resultados, en relación con los objetivos planteados.

9.1. En cuanto a la metodología

El primer análisis estadístico de los datos realizado permitió visualizar las características respecto de edad y género de los estudiantes participantes, informando que el colegio técnico está caracterizado por tener una población mayoritariamente de varones; y que, respecto a la edad, no hay asociaciones significativas con colegio o género. Vemos así que en líneas generales, los participantes de este trabajo no eran repitentes, o para ser más precisos, se encontraban en el nivel educativo que correspondía a su edad.

Todas las preguntas fueron contestadas y ninguna fue respondida de manera unánime, lo que anula tanto un posible efecto piso como un efecto techo en las preguntas (en el sentido de que haya alguna tarea que no nos brinde información, ya sea por demasiado simple o por demasiado compleja). Esto nos brinda confianza en que el cuestionario resultó adecuado para ser administrado a estos participantes con sus características de escolaridad y edad, permitiéndonos una indagación calibrada de las cuestiones que nos interesaron a partir de los datos obtenidos del mismo.

El análisis descriptivo de frecuencias de respuestas correctas y de *no respuestas* o respuestas *no sé* nos permitió inferir que las preguntas más fáciles para estos estudiantes fueron las que atañen a una colección infinita determinada por muchísimos elementos que se combinan y las que corresponden a una colección finita definida por pocos elementos que se combinan sin repetirse. Esto nos permitió identificar una primera idea compartida por un alto porcentaje de estos estudiantes de nivel medio: combinando *muchos elementos sí puedo obtener infinitos.*

La disminución de respuestas *"no sé"* o *"no contesta"* al avanzar en el cuestionario, podría estar indicando que los estudiantes fueron adquiriendo confianza en el curso de la misma situación que pensamos como de indagación. En otras palabras, este contexto parece haber operado como situación de reflexión y quizás de aprendizaje, en el sentido de ampliar la zona de desarrollo próximo, es decir, la distancia entre aquello que el niño (o en nuestro caso el adolescente) tiene la habilidad de hacer y aquello que es capaz de hacer mediante una ayuda o guía (Vygotski, 1978).

El análisis multivariado de las respuestas al cuestionario nos permitió reconocer patrones de respuestas de estos estudiantes, superando la mera contabilización de *respuestas correctas* vs. *respuestas incorrectas*. En efecto, el análisis factorial de correspondencias múltiples realizado en base a las respuestas de los participantes sin clasificar, nos permitió identificar agrupaciones de patrones de respuestas, además de permitirnos encontrar asociaciones entre modos de respuestas y algunas de las características de los estudiantes que nos prefijamos para este estudio, concretamente, colegio y edad. En cambio, el género no se asoció a grupos de modalidades de respuesta.

El método de clasificación jerárquica ascendente completó este estudio brindándonos la posibilidad de identificar clases de estudiantes con modos de respuesta similares compartidas. Así, pudimos ubicar a cada estudiante en una sola clase y así obtener una idea de la distribución de las concepciones acerca del infinito matemático en el conjunto de los 195 estudiantes de nivel medio participantes.

9.2 En cuanto a los resultados según los objetivos planteados

A partir de la pregunta que guía este trabajo: *¿Cuáles son las ideas que los estudiantes de nivel medio tienen respecto de la noción de infinito y cómo se relacionan éstas con el estatus matemático de este concepto?* expondremos a continuación algunas inferencias, a partir de los resultados obtenidos, específicamente respecto de las ideas de los estudiantes en cuanto a los aspectos del infinito matemático que nos propusimos indagar y que explicitamos en el Capítulo 3 de esta tesis.

9.2.1 *Respecto a la posibilidad de obtener una colección de infinitos elementos a partir de la combinación de una cantidad finita de elementos (pocos o muchos)*

Las asociaciones entre las modalidades de respuesta de los estudiantes nos muestran un amplio espectro de ideas respecto de la posibilidad de construir una colección infinita a partir de la combinación de una cantidad finita de elementos.

Entre las ideas presentes encontramos en los extremos las posiciones que indican que *no es posible generar una colección infinita*, por un lado y en el extremo opuesto, que *es posible construir una colección infinita, independientemente de la cantidad de elementos de los que parta.* Desde la primera posición, las colecciones infinitas no parecen ubicarse siquiera en el espectro de lo pensable o concebible. En cambio, desde la segunda no sólo es posible pensar en colecciones infinitas, sino que también se captan los mecanismos básicos a partir de los cuales esas colecciones pueden generarse. Es de resaltar que más del 60% de las respuestas dadas a las preguntas que indagan este aspecto, son respuestas que expresan la idea de que es posible generar una colección infinita a partir de la combinación de una cantidad finita de elementos, porcentaje similar al encontrado por Montoro (2003) en estudiantes universitarios y coincide también con los resultados obtenidos por Fischbein y col. (1979) en estudiantes de edades similares a las nuestras.

Entre estas dos posiciones que se sitúan en dos extremos opuestos en cuanto a la posibilidad de generar o de pensar en colecciones infinitas, encontramos algunas otras posiciones que dan cuenta de niveles incipientes de problematización respecto de esta cuestión. Preferimos distinguir unas posiciones de otras en lugar de ordenarlas en una escala, pues a partir de nuestros datos no podemos afirmar que los estudiantes transiten por estas diversas posiciones en un camino hacia una comprensión más completa. Es más, tampoco podríamos asegurar que todos los alumnos en algún momento se hayan encontrado en la posición más alejada de la representación de colecciones infinitas: aquella desde la cual éstas aparecen como impensables o imposibles.

Retomando entonces aquellas concepciones que dan cuenta de un grado intermedio de problematización, sin ánimo de ordenarlas internamente, nos parece importante distinguir unas de otras. Una de ellas está caracterizada por la inseguridad en la respuesta, fundamentalmente a las preguntas introductorias que investigan este tópico, lo cual sugiere una cierta conciencia de la magnitud de un problema que supera la propia posibilidad actual de representación conceptual.

Las demás concepciones que revelan un cierto grado intermedio de problematización comparten la relevancia prioritaria dada al número de elementos del conjunto de partida. Es decir, el énfasis está puesto en la cantidad de elementos con los que se cuenta para combinar y no en la posibilidad de repetir o no los elementos en cada combinación. Sobre la base de este principio común, encontramos una diversidad de ideas. Una es aquella que expresa que *combinando pocos elementos, aunque se puedan repetir, es imposible obtener infinitos.* Esta idea se expresa de acuerdo a dos modalidades: la que sostiene que *con poco, solo obtengo poco* y *con poco, puedo obtener mucho, pero no infinito*. Otra concepción asentada sobre el énfasis dado a la cantidad de elementos de partida acepta la posibilidad de formar colecciones infinitas al considerar que *con muchos elementos y solo con muchos, es posible obtener infinitos*. Esta gama de ideas se había encontrado también en el estudio de Montoro y Sheuer (2003).

9.2.2. *Respecto de la distinción entre "infinito" y "mucho" o "muy numeroso"*

Un pequeño grupo de estudiantes manifiesta la idea de que *muchísimos elementos* son *infinitos*. Sin embargo, resulta notable que al aumentar el número de elementos en cuestión, es mayor el número de respuestas que afirman que se trata de infinitos elementos aunque no lo sean. Esto nos está indicando que existe una identificación *muy numeroso - infinito.* Estos resultados son similares a los encontrados por Monaghan (2001) en estudiantes pre-universitarios de entre 16 y 18 años.

Según muestra el análisis de la clasificación jerárquica presentado en el Capítulo 8, este tipo de respuestas se asociaron a los estudiantes del CEM46, que es el colegio que se presentaba como menos sólido en cuanto a su proyecto de educación matemática. Esto nos sugiere que una propuesta educativa poco consistente no alcanzaría para favorecer las construcciones que los estudiantes realizan de contenidos no específicamente curriculares, y no trabajados especialmente, como el concepto de infinito. O, más particularmente, que la distinción entre infinito y muy numeroso parece apoyarse en una educación matemática articulada a lo largo del nivel medio.

9.2.3 Respecto de la distinción entre infinito y todo

Las preguntas que específicamente indagan este aspecto son las que implicaron una mayor dificultad a los estudiantes, dado que fueron las que presentaron un mayor porcentaje de respuestas incorrectas que correctas o no respuestas. Esto concuerda con los resultados encontrados con Montoro (2003) con estudiantes en distintas etapas en la universidad, como se mostró en el Capítulo 2.

Los estudiantes que diferenciaron *infinito* de *todo* son prácticamente los mismos que aceptaron las colecciones infinitas y que diferenciaron *muy numeroso* de *infinito*; estos estudiantes eran principalmente alumnos del CEM 2 y del colegio técnico. El análisis factorial de correspondencias múltiples nos mostró que la duda respecto de la diferenciación entre infinito y todo se asoció a los alumnos menores y del CEM 46 (Grupo 2) y la misma caracterización de alumnos se asoció también a la asimilación de *infinito* con *muy numeroso*

(Grupo 3). Tal como mencionamos anteriormente, creemos que un proyecto educativo sostenido en el tiempo así como una buena formación de los docentes podría ser un factor que facilita el acercamiento, acompañado de seguridad, de estos estudiantes a este tema no trabajado previamente.

9.2.4 Respecto a la relación entre las características de las distintas instituciones educativas, la edad y el género en las respuestas de los alumnos

Según los resultados del análisis de la clasificación jerárquica realizado, vemos que los alumnos mayores (de 17 a 19 años) generalmente aceptaron las colecciones infinitas, las diferenciaron de los conjuntos muy numerosos y aceptaron también que un conjunto infinito no necesariamente posee todos los elementos; cuestión ésta que no ocurrió con los estudiantes menores (de 13 a 14 años). Los estudiantes de edad intermedia (de 15 a 16 años) se encontraban repartidos en los distintos grupos por lo que podemos describir esta franja etaria como de transición, en la cual están presentes todas las gamas de estas ideas. Observamos una evolución con la edad (y escolaridad) en el siguiente sentido: generalmente, los estudiantes más jóvenes fueron los que presentaron más dudas, es decir, se muestran más inseguros para responder a estas cuestiones, los estudiantes de edad intermedia, están repartidos entre la duda, respuestas no adecuadas y respuestas que se ajustan al status matemático del infinito y los estudiantes mayores, principalmente muestran seguridad y una adecuación de sus respuestas con el status matemático del infinito.

En cuanto a las instituciones educativas, los estudiantes del CEM46 fueron los que más presentaron ideas alternativas respecto de la noción de infinito, habitualmente no aceptando las colecciones infinitas, y en el caso de aceptarlas, identificándolas con "*todo*" o con conjuntos muy numerosos. También podemos decir que los estudiantes del colegio técnico LOSANDES respondieron a las preguntas o más específicamente, no dieron por respuesta *"no sé"* a las preguntas del cuestionario. Es decir, estos estudiantes presentaron seguridad y precisión en sus respuestas. Los estudiantes del CEM2 y del Colegio LOSANDES mayoritariamente aceptaron las colecciones infinitas, las diferenciaron de los conjuntos muy numerosos y diferenciaron también infinito de todo.

No se presentaron diferencias en las respuestas de los estudiantes en función del género. Esta variable no apareció en nuestro estudio como relevante.

Los resultados nos mostraron un avance de acuerdo a la edad de los estudiantes de nivel medio en las ideas respecto de la noción de infinito, este avance va de la inseguridad hacia las ideas adecuadas.

Podemos hacer un paralelismo de estos resultados con los encontrados por Montoro y Scheuer (2003) y Montoro (2005), ya que en encontraron que la variable de más peso para una adecuada construcción del concepto de infinito es la formación específica matemática en el sentido de que los estudiantes que habían estudiado específicamente el concepto en de infinito, es decir, los estudiantes de Matemática, brindaron respuestas correctas y en nuestro caso, los estudiantes que mejor respondieron pertenecen a instituciones educativas con un proyecto educativo más sólido y con mayor énfasis puesto en la materia matemática. Dado que las diferencias fundamentales entre estas instituciones residía en características como cantidad de estudiantes y de docentes, formación académica de los docentes y planes de estudio, y no en las características socioeconómicas de la población de estudiantes; podríamos pensar que estas diferencias influirían en la formación matemática de los estudiantes de nivel medio y en este sentido, el paralelismo entre los resultados de nuestro estudio (ubicado en el nivel medio) y el de Montoro (ubicado en el nivel universitario).

Esto coincide y fortalece la postura de varios investigadores, entre otros: Waldegg (1996); Tall (2001); Montoro (2003, 2005); respecto de que la noción de infinito matemático no es una noción intuitiva, y mucho menos puede ser aprendida por la experiencia sensible, sino que se requiere de contextos educativos que favorezcan la reflexión matemática a través de intervenciones de enseñanza específicas y sostenidas.

Sin embargo, nuestros resultados nos hacen pensar que los aspectos que hemos indagado de la noción de infinito resultan asequibles a los estudiantes de nivel medio, el progreso en las respuestas al avanzar el cuestionario nos hace pensar que estas nociones se encuentran en lo que Vigotsky llama nivel de desarrollo potencial (Vigotsky, 1978). Siguiendo esta línea, y asumiendo que el aprendizaje favorece el desarrollo, entendemos que además de representar una oportunidad de reflexión, su tratamiento explícito puede colaborar con la comprensión de contenidos que involucran el concepto de infinito y que sí son curriculares en la escuela media. Para ello, nos parece útil que los docentes puedan conocer algunas de las formas en que sus estudiantes abordan las colecciones infinitas, e incluso las dificultades que algunos pueden evidenciar para concebir incluso su existencia. Este estudio pretende ser un aporte en esa dirección. Conociendo esas diversas ideas, los docentes pueden generar en clase situaciones que favorezcan la explicitación, problematización, revisión y elaboración de esas ideas, en vistas de avanzar hacia una comprensión más profunda e integrada.

Creemos también que un tratamiento adecuado requiere de docentes formados, y queremos señalar que vemos con preocupación la gran presencia de personal que desarrolla tareas docentes en matemática sin poseer título acorde en las escuelas secundarias de la ciudad de Bariloche en un momento en que la enseñanza de la matemática se ha constituido en una preocupación internacional, expresada a través de numerosas declaraciones. Existe un consenso generalizado según el cual el desempeño ciudadano requiere cada vez más una formación básica científica en general y en particular matemática. La Comisión para el Mejoramiento de la Enseñanza de las Ciencias Naturales y la Matemática (2007) recomienda en este sentido: *"La formación de los docentes debe ser un componente básico de una estrategia integral para el mejoramiento de la enseñanza de las ciencias naturales y la matemática"*. Resaltamos entonces la importancia de fortalecer y promover la formación de profesores de matemática en nuestra región.

Por último, esperamos que este estudio se constituya en un pequeño aporte que contribuya a la reflexión y toma de decisiones docentes.

Anexo 1

En este anexo se presenta el cuestionario tal cual fue administrado a los estudiantes de nivel medio.

Este cuestionario forma parte de un trabajo de investigación en el área Educación. En los casos en que se dan opciones, recuadra la que consideres correcta. No olvides justificar tu respuesta en cada caso solicitado. Tu colaboración es muy importante. Muchas gracias por tu ayuda.

Colegio: ………………………Curso:……………………

Edad: ……………… Género: F □ M □

Juan y María, juegan con una máquina que puede realizar 10 tareas distintas y posee un teclado con tres teclas: M, A y P. Ellos inventaron un sistema para denominar esas tareas a través de combinaciones de las tres teclas. Las combinaciones elegidas para cada una de las tareas fueron: MAP, MP, PM, AMP, MAA, PPMMA, MAPP, A, PMM, MAPA. A este sistema lo denominaron "idioma de máquina JM".

1) ¿Piensas que es posible con sólo estas tres teclas (M, A y P) crear un "idioma de máquina" para una máquina que realice 200.000 tareas?

SI NO NO SE

Justifica tu respuesta:

2) ¿Piensas que es posible con sólo estas tres teclas (M, A y P) crear un "idioma de máquina" con el cual siempre se podría dar una denominación a una tarea no prevista anteriormente?

SI NO NO SE

Justifica tu respuesta:

Juan y María cuentan ahora con un teclado de 28 teclas (una con cada letra de nuestro alfabeto) en el que se basaron para crear un "idioma de máquina" para denominar infinitas tareas de una máquina imaginaria. Lo llamaron JUANMARIANO.

3) ¿Crees que en base a estas mismas 28 letras, se podría construir otro "idioma de máquina" diferente al JUANMARIANO (es decir que estos dos "idiomas" difieran en al menos una combinación de letras) que también sea infinito.

SI NO NO SE

Justifica tu respuesta:

4) La combinación de teclas ANANA, ¿estará necesariamente en el "idioma de maquina" JUANMARIANO?

SI NO NO SE

Justifica tu respuesta:

Otro día, Juan y María inventaron otro "idioma de máquina" en base a nuestro alfabeto de 28 letras (que llamaron BARILOCHENSE), y cumple con las siguientes reglas:

Regla I: En BARILOCHENSE están todas las combinaciones de dos letras (por ejemplo SI, NO, AB, RR, TT, TE, ST, GO, TA, etc.).

Regla II: Si una combinación está en BARILOCHENSE, también estará esa combinación con una A al final (por ejemplo si está PP está PPA y también

5) ¿Podrías asegurar que BARILOCHENSE tiene infinitas combinaciones para designar tareas?

SI NO NO SE

Justifica tu respuesta:

6) Decir si las siguientes combinaciones de teclas están necesariamente en

BARILOCHENSE:

KS	SI	NO	NO SE
TPAAA	SI	NO	NO SE
AAA	SI	NO	NO SE
ANANA	SI	NO	NO SE
TAPA	SI	NO	NO SE

7) Si retiramos de BARILOCHENSE todas las combinaciones que tengan a lo sumo 20 letras. ¿Tendremos todavía un “idioma de máquina” con infinitas combinaciones?

SI NO NO SE

Justifica tu respuesta:

Juan y María, se juntaron un vez más y jugaban a inventar "idiomas de máquinas" para máquinas imaginarias. Juan propuso arreglárselas sólo con tres teclas (M, A, P), mientras que María propone tener 15.000.000 de teclas.

8) El primer "sistema" que propone Juan (JUAN1) es el siguiente:

JUAN1: "Todas las combinaciones posibles con estas tres letras (M, A, P), sin que puedan repetirse las letras en una determinada combinación". (Por ejmplo: AMP, PAM estarán en JUAN1, mientras que MAPA y MMP no están permitidas)

Piensas que este sistema tendrá:

Pocas combinaciones (menos de 1000)

Muchas combinaciones (más de 1000, pero NO infinitas)

Infinitas combinaciones

Justifica tu respuesta:

9) María propone un sistema similar pero basado en sus 15.000.000 de teclas (MARIA1), es decir:

MARIA1: "Todas las combinaciones posibles de los 15.000.000 de teclas, sin que puedan repetirse las teclas en una determinada combinación."

Piensas que este sistema tendrá:

Pocas combinaciones (menos de 1000)

Muchas combinaciones (más de 1000 pero NO infinitas)

Infinitas combinaciones

Justifica tu respuesta:

10) Juan decide, entonces que su sistema (JUAN2) estará constituido por todas las combinaciones de las tres letras (M, A, P) pero ahora pueden repetirse

las letras sin restricciones.

Piensas que este sistema tendrá:

Pocas combinaciones (aproximadamente menos de 1000)

Muchas combinaciones (más de 1000 pero no infinitas)

Infinitas combinaciones

Justifica tu respuesta:

11) María insiste en utilizar 15.000.000 de teclas y que su sistema (MARIA2) esté constituido por todas las combinaciones de esas letras y pueden repetirse sin restricciones.

Piensas que este sistema tendrá:

Pocas combinaciones (aproximadamente menos de 1000)

Muchas combinaciones (más de 1000 pero no infinitas)

Infinitas combinaciones

Justifica tu respuesta:

12)Piensas que el sistema MARIA2 tendrá:

Más combinaciones que el sistema JUAN2

Menos combinaciones que el sistema JUAN2

La misma cantidad de combinaciones que JUAN2

Justifica tu respuesta:

13)Dejando de lado las máquinas…

a) La cantidad de hojas de todos los árboles que hay en el Parque Nacional Nahuel Huapi en este momento, ¿Es infinita?

SI NO NO SE

Justifica tu respuesta:

b) La cantidad de granos de arena que hay en este momento en las playas de Bariloche, ¿Es infinita?

SI NO NO SE

Justifica tu respuesta:

c) La cantidad de granos de arena que hay en este momento en el mundo, ¿Es infinita?

SI NO NO SE

Justifica tu respuesta:

14) Por último te pedimos que escribas las tres primeras palabras que viene a tu mente cuando escuchas la palabra *"infinito"*

Anexo 2

En este anexo se presenta la base de datos construida a partir de los datos obtenidos de la administración del cuestionario

	Colegio	Edad	Género	P1	P2	P3	P4	P5	P6A	P6B	P6C	P6D	P6E	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13A	P13B	13C
A1	46	16	F	SI	SI	NO	SI	NO	SI	SI	SI	SI	SI	NO	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NO	NO	NO
A2	46	17	M	NS	NO	NS	NS	NO	NO	SI	SI	NS	NO	NS	NC	NC	NC	POCAS	MAS	NO	NO	NO
A3	46	15	F	NS	NO	NS	SI	SI	SI	SI	SI	NS	NS	NS	POCAS	MUCHAS	POCAS	INFINITAS	MAS	NO	SI	SI
A4	46	15	F	NS	NO	NO	NO	NS	SI	SI	SI	NS	SI	NO	POCAS	INFINITAS	MUCHAS	INFINITAS	MAS	SI	SI	SI
A5	46	16	F	SI	SI	NO	NO	SI	SI	SI	SI	NO	NO	NO	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NO	NO	NO
A6	46	16	F	NS	NO	NS	SI	SI	SI	NO	SI	NO	NO	NO	POCAS	INFINITAS	POCAS	INFINITAS	MAS	NO	NO	SI
A7	46	15	F	NO	NS	NS	SI	SI	SI	NO	SI	NO	NO	NO	POCAS	MUCHAS	POCAS	INFINITAS	MAS	SI	NO	SI
A8	46	16	F	NO	NS	NS	SI	SI	SI	NO	SI	NO	NO	NS	POCAS	MUCHAS	POCAS	MUCHAS	MAS	SI	NO	SI
A9	46	18	F	NO	NO	SI	NS	SI	NO	SI	SI	SI	SI	NO	POCAS	INFINITAS	MUCHAS	INFINITAS	MAS	SI	SI	SI
A10	46	15	F	SI	SI	SI	SI	SI	NO	SI	SI	SI	SI	SI	POCAS	INFINITAS	INFINITAS	INFINITAS	MAS	SI	NO	SI
A11	46	16	F	NO	NO	SI	SI	SI	NO	NO	NO	NO	NO	NO	POCAS	INFINITAS	POCAS	INFINITAS	MAS	SI	SI	SI
A12	46	16	F	NO	NO	NO	SI	SI	SI	NO	SI	NO	NO	SI	POCAS	INFINITAS	INFINITAS	INFINITAS	MAS	SI	SI	SI
A14	46	16	F	NO	NS	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	SI	NC
A15	46	16	F	NS	NO	SI	NS	SI	NO	SI	SI	NO	NO	NS	MUCHAS	POCAS	INFINITAS	INFINITAS	MAS	SI	SI	SI
A16	46	16	F	NO	NO	SI	NS	SI	NO	SI	SI	NS	NS	NO	POCAS	MUCHAS	POCAS	INFINITAS	MAS	SI	SI	SI
A17	46	16	F	NO	NO	NO	NO	SI	NC	NC	NC	NC	NC	NO	MUCHAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NO	NO	NO
A18	46	16	F	SI	NO	NO	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	NO	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MAS	NO	SI	SI
A19	46	16	F	NO	NC	NS	SI	SI	NO	SI	SI	SI	SI	NO	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	SI	SI	SI
A20	46	16	F	NS	NS	NS	NS	SI	NO	SI	SI	NO	NO	NO	POCAS	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	MISMA	NO	SI	SI
A21	46	16	F	NS	NS	NS	NS	SI	NO	SI	SI	NO	NO	NO	POCAS	POCAS	MUCHAS	MUCHAS	MISMA	NO	SI	SI
A22	46	15	F	NS	SI	NO	SI	SI	NO	SI	SI	SI	SI	NO	POCAS	MUCHAS	MUCHAS	MUCHAS	MAS	NO	SI	SI
A23	46	16	M	SI	NS	SI	SI	SI	SI	NO	NO	SI	SI	NO	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NO	SI	SI
A24	46	14	F	NO	NS	SI	SI	SI	SI	NO	SI	SI	SI	NO	POCAS	MUCHAS	POCAS	INFINITAS	MAS	NO	NO	SI
A25	46	14	F	NO	NS	SI	SI	SI	NS	SI	NS	SI	SI	NS	POCAS	MUCHAS	NC	MUCHAS	MENOS	NO	NO	NS
A26	46	14	F	NO	NS	SI	SI	NS	SI	SI	NS	NO	SI	NS	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MENOS	NS	SI	SI
A27	46	14	F	NS	NS	NS	NS	NS	NO	NO	SI	SI	NO	NS	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NO	NO	NO
A28	46	14	F	SI	SI	SI	NS	SI	SI	NO	NS	NS	SI	SI	POCAS	INFINITAS	MUCHAS	INFINITAS	MISMA	NO	SI	NS
A29	46	14	F	NO	NS	SI	SI	SI	SI	NS	SI	SI	SI	N S	POCAS	MUCHAS	MUCHAS	INFINITAS	MAS	SI	SI	SI
A30	46	14	M	NS	NC	SI	SI	SI	NO	SI	NS	SI	NO	SI	POCAS	MUCHAS	MUCHAS	INFINITAS	MAS	NS	NS	SI
A31	46	13	F	SI	NS	SI	SI	SI	NO	SI	SI	NO	NO	SI	MUCHAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MAS	NO	NS	NO
A32	46	13	F	NC	NO	SI	NO	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	MUCHAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MAS	SI	SI	SI
A33	46	15	F	NO	NO	NO	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	POCAS	INFINITAS	INFINITAS	INFINITAS	MAS	SI	SI	SI
A34	46	14	F	NO	NS	SI	SI	SI	NO	SI	SI	NO	NO	NO	POCAS	NC	NC	NC	NC	SI	NO	SI
A35	46	15	M	SI	NO	NO	SI	NO	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC
A36	46	13	F	NO	NS	SI	SI	SI	SI	NS	SI	SI	NO	NS	MUCHAS	INFINITAS	NC	MUCHAS	MISMA	NO	NS	NO
A37	46	13	M	SI	NO	NC	NC	NS	NO	NC	NO	SI	SI	NS	NC	MUCHAS	NC	INFINITAS	MAS	NS	NO	NO
A38	46	13	F	NS	SI	NO	NS	SI	SI	NS	NS	SI	NS	NS	POCAS	INFINITAS	MUCHAS	INFINITAS	MAS	NS	SI	NO
A39	46	13	F	NS	NS	NS	NS	NS	NS	NS	NS	NS	NS	NS	MUCHAS	MUCHAS	MUCHAS	INFINITAS	MISMA	SI	NS	SI
A40	46	13	F	NO	NS	SI	NS	SI	SI	NS	SI	SI	SI	SI	MUCHAS	INFINITAS	MUCHAS	INFINITAS	MISMA	SI	SI	NS
A41	46	13	F	NO	NS	SI	SI	NS	SI	NS	SI	NS	NS	NO	MUCHAS	INFINITAS	POCAS	MUCHAS	MAS	NS	SI	SI
A42	46	13	M	SI	SI	SI	NS	SI	NO	NO	SI	SI	NO	NS	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NO	NO	NO
A43	46	15	F	NO	Si	NS	SI	SI	SI	NO	NO	NS	NS	NO	POCAS	INFINITAS	MUCHAS	INFINITAS	MAS	SI	SI	SI
A44	46	15	F	NS	NS	NS	SI	NS	NS	NS	NS	NS	NS	NS	NC	NC	NC	NC	NC	SI	SI	SI
A46	46	14	F	NO	NS	SI	SI	NS	SI	SI	SI	NS	NS	SI	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MAS	NS	SI	SI
A47	46	13	M	NS	SI	NC	NO	NS	NO	NO	NO	NS	SI	NS	POCAS	MUCHAS	POCAS	MUCHAS	MISMA	NO	NO	SI
A48	46	14	F	NS	NS	NS	SI	NC	NO	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	MUCHAS	NC	NC	NC	NC
A49	46	14	M	NS	NS	NO	NS	NS	NS	NS	NS	NS	NS	NS	POCAS	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	NC	NO	NS	NS
A50	46	14	M	NO	NS	NS	NS	NO	NO	SI	NO	NO	NO	NS	POCAS	NC	MUCHAS	NC	NC	NS	SI	SI
A51	46	15	M	NS	NS	NS	NO	SI	NC	NC	NC	NC	NC	NO	NC	POCAS	MUCHAS	NC	NC	NS	SI	SI
A52	2	18	F	SI	SI	SI	SI	NS	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC

A53	2	17	M	SI	NC	SI	NO	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	POCAS	NC	INFINITAS	INFINITAS	NC	NO	NO	NO
A54	2	17	F	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	NO	SI	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MENOS	SI	SI	SI
A55	2	17	M	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	NO	NO	SI	POCAS	MUCHAS	MUCHAS	INFINITAS	MAS	NO	NO	NO
A56	2	18	M	SI	SI	NO	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	NO	MUCHAS	MUCHAS	MUCHAS	MUCHAS	MAS	NO	NO	NO
A57	2	17	F	SI	NS	NO	SI	SI	SI	SI	SI	SI	NO	SI	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NO	NO	NO
A58	2	19	F	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	POCAS	INFINITAS	INFINITAS	INFINITAS	MAS	NS	NS	SI
A59	2	17	F	Si	SI	NO	NS	NS	SI	SI	SI	NS	NS	SI	POCAS	MUCHAS	MUCHAS	INFINITAS	MENOS	NO	NO	NO
A60	2	17	M	SI	SI	SI	NO	SI	SI	SI	SI	NS	NS	NO	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NO	NO	NO
A61	2	18	F	SI	SI	NO	SI	SI	SI	SI	NS	NS	NS	NO	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NS	NS	NS
A62	2	17	M	SI	SI	NS	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	NC	NO	NO	NO
A63	2	18	M	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	NO	SI	NO	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NO	NO	SI
A64	2	17	M	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NO	NO	NO
A65	2	18	F	SI	SI	SI	NS	SI	NS	NS	NS	NS	NS	NS	POCAS	INFINITAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NO	NO	NO
A66	2	13	F	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	POCAS	MUCHAS	POCAS	MUCHAS	MAS	NO	NS	NO
A67	2	13	F	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	POCAS	MUCHAS	MUCHAS	INFINITAS	MAS	NO	NO	NO
A68	2	13	M	SI	SI	SI	NO	NO	SI	SI	SI	SI	SI	NO	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	MUCHAS	MISMA	NO	NO	NO
A69	2	14	M	NO	SI	SI	NO	SI	SI	SI	SI	NO	NO	SI	POCAS	MUCHAS	NC	NC	NC	NC	NC	NC
A70	2	14	M	NO	SI	NC	NC	SI	SI	SI	SI	NO	NO	NO	POCAS	INFINITAS	POCAS	NC	NC	NO	SI	SI
A71	2	14	M	NO	NS	NS	NS	SI	NS	NS	NS	NS	NS	SI	POCAS	NC	MUCHAS	NC	MISMA	SI	SI	SI
A72	2	14	F	SI	SI	NS	NS	NC	NO	SI	SI	SI	SI	SI	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MAS	NO	SI	SI
A73	2	13	F	SI	SI	SI	SI	SI	SI	NO	SI	SI	SI	NO	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NO	NO	NO
A74	2	13	M	SI	NS	SI	SI	NO	NS	SI	SI	NO	SI	NO	POCAS	POCAS	POCAS	MUCHAS	MAS	NO	NO	NO
A75	2	13	F	SI	SI	SI	SI	NS	NO	NO	NO	SI	SI	NO	POCAS	MUCHAS	POCAS	MUCHAS	MAS	NS	NS	NO
A76	2	13	F	SI	SI	SI	NO	SI	SI	NO	NO	NO	NO	NO	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MAS	NO	NO	NO
A77	2	13	F	SI	SI	SI	NS	SI	SI	NO	NO	NO	NO	SI	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	NC	NO	NO	NS
A78	2	15	M	SI	NS	NS	SI	NS	SI	NO	NO	SI	SI	NS	NC	NC	NC	NC	NC	NS	NS	NS
A79	2	17	M	NO	SI	NO	SI	NS	NO	NO	NS	NO	SI	SI	NC	NC	NC	MUCHAS	MENOS	SI	NS	SI
A80	2	13	M	SI	NS	SI	SI	NS	SI	NS	SI	NS	NS	NS	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NO	NO	NO
A81	2	14	M	NO	NS	NS	SI	SI	NO	SI	SI	NS	SI	NO	POCAS	MUCHAS	MUCHAS	INFINITAS	MAS	NO	NO	SI
A82	2	14	M	NS	NS	NS	NS	NS	NS	NS	NS	NS	NS	NS	NC	NC	NC	NC	NC	NO	NO	NS
A83	2	14	F	NO	NO	SI	NS	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NS	POCAS	INFINITAS	MUCHAS	MUCHAS	MAS	SI	SI	SI
A84	2	14	M	NS	NS	NS	NS	NS	NS	NS	NS	NS	NS	NS	NC	NC	NC	NC	NC	NS	NS	NS
A85	2	13	F	NO	NO	SI	NS	SI	NS	NS	NS	NS	NS	NO	POCAS	MUCHAS	MUCHAS	INFINITAS	MAS	SI	NO	SI
A86	2	13	F	NO	NO	NS	NS	SI	NO	NO	NO	SI	SI	NS	NC	NC	NC	INFINITAS	MISMA	NS	NS	NS
A87	2	13	F	SI	NS	SI	SI	NO	SI	NS	SI	SI	SI	NO	POCAS	INFINITAS	MUCHAS	MUCHAS	MAS	SI	NO	SI
A88	2	17	M	NO	SI	SI	NS	NS	NO	NS	SI	SI	NS	NO	POCAS	INFINITAS	INFINITAS	INFINITAS	MAS	NO	NO	NS
A89	2	18	M	SI	SI	NO	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	NO	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NO	NO	NO
A90	2	17	M	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	NO	NO	SI	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NO	NO	NO
A91	2	17	M	NS	SI	NS	SI	NS	SI	NC	NC	SI	SI	NO	MUCHAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NO	NO	NS
A92	2	18	M	SI	SI	SI	SI	SI	NO	SI	SI	NO	NO	NO	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NO	NO	NO
A93	2	19	F	NO	NS	SI	NS	NC	NC	NC	NC	NC	NC	SI	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC
A94	2	17	F	SI	SI	SI	NO	NO	SI	NO	SI	NO	NO	NS	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NO	NO	NO
A95	2	19	M	NO	NS	NO	SI	SI	NO	SI	SI	SI	SI	NO	POCAS	MUCHAS	MUCHAS	MUCHAS	MISMA	NO	NO	NO
A96	2	17	F	SI	SI	SI	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	SI	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MAS	NS	NS	NS
A97	2	17	F	NS	NS	SI	SI	SI	NO	NO	SI	SI	NO	NS	MUCHAS	INFINITAS	MUCHAS	INFINITAS	MAS	NO	NO	SI
A98	2	15	M	SI	SI	SI	NO	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NO	NO	NO
A99	2	15	M	SI	SI	SI	NO	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NO	NO	NO
A100	2	15	F	SI	SI	SI	NO	SI	SI	SI	NO	NO	SI	NO	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MAS	SI	SI	SI
A101	2	16	F	SI	NS	SI	NO	SI	SI	NS	NO	NO	SI	NO	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MAS	SI	SI	SI
A102	2	16	F	NO	NO	SI	NO	NO	SI	SI	NO	NO	SI	NS	POCAS	MUCHAS	MUCHAS	MUCHAS	MAS	NS	NS	SI
A103	2	15	F	SI	NS	SI	NO	SI	NS	SI	SI	NO	NS	SI	POCAS	MUCHAS	MUCHAS	INFINITAS	MAS	SI	SI	SI

A104	2	15	F	SI	NS	NC	SI	SI	NO	SI	SI	NO	NO	NO	POCAS	POCAS	INFINITAS	INFINITAS	MAS	NO	NO	SI
A105	2	16	F	SI	SI	NC	SI	SI	NO	SI	SI	NO	NO	NO	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	NC	SI	SI	SI
A106	2	16	F	SI	SI	SI	NO	SI	SI	SI	SI	NO	SI	SI	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC
A107	2	16	M	NS	NO	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	NS	MUCHAS	INFINITAS	MUCHAS	INFINITAS	MAS	NO	NO	NO
A108	2	16	M	SI	NS	NS	NS	SI	NO	SI	SI	SI	NO	NS	MUCHAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NO	NO	NO
A109	2	15	M	SI	SI	SI	NO	SI	SI	NO	SI	NO	NO	NO	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NO	NO	NO
A110	2	15	F	SI	NS	SI	NO	SI	NO	NO	NO	NO	NO	SI	NC	NC	NC	INFINITAS	MISMA	NS	SI	SI
A111	2	15	F	SI	NS	NS	NS	SI	NO	SI	NO	NO	NO	SI	MUCHAS	MUCHAS	POCAS	NC	NC	SI	SI	SI
A112	2	15	F	SI	NS	SI	SI	SI	NO	SI	SI	SI	SI	NS	MUCHAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	SI	NO	SI
A113	2	18	F	SI	SI	SI	SI	NO	NO	SI	SI	NO	NO	NO	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NS	NS	NS
A114	2	15	M	SI	SI	SI	NO	NO	SI	NO	SI	NO	NO	NS	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NO	NO	NO
A115	2	15	M	NS	NO	SI	NS	SI	SI	SI	SI	NO	NO	NO	POCAS	MUCHAS	MUCHAS	MUCHAS	MAS	SI	NO	SI
A116	2	17	F	SI	NS	SI	SI	SI	SI	NO	SI	SI	SI	NO	POCAS	MUCHAS	POCAS	INFINITAS	MAS	NO	SI	SI
A117	2	15	F	SI	NS	NO	SI	NO	SI	NO	SI	SI	SI	NO	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NO	NO	NO
A118	2	16	F	NS	NO	SI	NS	SI	SI	SI	SI	NO	NO	NO	POCAS	MUCHAS	MUCHAS	MUCHAS	MAS	SI	NO	SI
A119	2	15	F	SI	NS	SI	NO	SI	NO	SI	SI	SI	SI	SI	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MAS	NO	NO	NO
A120	LA	13	M	SI	NS	SI	SI	NO	SI	SI	NS	SI	SI	NO	INFINITAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MAS	NO	NO	NO
A121	LA	14	m	SI	NS	NO	NS	NO	SI	NO	SI	NO	NO	NO	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	INFINITAS	MAS	SI	SI	SI
A122	LA	13	M	SI	NS	SI	SI	NO	SI	SI	SI	SI	SI	NS	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NO	NO	NO
A123	LA	13	M	SI	NO	SI	SI	NO	NO	NO	SI	SI	NO	NO	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	MUCHAS	MAS	NS	NS	NS
A124	LA	14	M	SI	NO	NS	SI	NS	NO	NO	SI	SI	NO	SI	MUCHAS	MUCHAS	MUCHAS	INFINITAS	MAS	NS	NS	NS
A125	LA	14	M	SI	SI	NS	SI	NO	NO	SI	SI	SI	SI	NO	POCAS	MUCHAS	MUCHAS	INFINITAS	MAS	NO	NO	NS
A126	LA	13	M	NO	NS	NS	NC	SI	SI	SI	SI	SI	SI	NS	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MAS	SI	SI	SI
A127	LA	14	M	SI	NO	SI	NC	SI	NO	SI	SI	NO	NO	NO	MUCHAS	POCAS	INFINITAS	INFINITAS	MAS	NO	NO	NO
A128	LA	14	M	NO	NS	SI	SI	SI	NO	SI	NS	SI	SI	NO	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NO	SI	SI
A129	LA	13	M	NO	NS	NS	SI	NS	NO	NO	SI	SI	NO	NS	POCAS	POCAS	INFINITAS	MUCHAS	MISMA	NS	NS	SI
A130	LA	14	M	NO	NS	NC	SI	NS	NO	NO	NS	NS	SI	NS	POCAS	POCAS	MUCHAS	MUCHAS	MAS	SI	NS	SI
A131	LA	13	M	SI	NO	SI	NS	NO	NO	SI	SI	NO	SI	NO	POCAS	MUCHAS	POCAS	MUCHAS	MAS	NO	NS	NO
A132	LA	13	M	SI	NS	NS	NC	NC	NS	NS	SI	SI	SI	SI	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MAS	NO	NS	NC
A133	LA	13	M	SI	SI	NO	SI	SI	SI	NO	SI	SI	SI	SI	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	SI	SI	SI
A134	LA	13	M	NO	NS	SI	NS	SI	SI	SI	NS	SI	NO	SI	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MENOS	NO	NO	NC
A135	LA	13	M	SI	NO	NO	SI	SI	NO	SI	SI	SI	NO	SI	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NO	NO	NO
A136	LA	13	M	SI	NS	NS	NS	SI	NO	SI	SI	NS	NO	NO	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MAS	NO	NO	NS
A137	LA	13	M	NO	SI	SI	NS	SI	NO	NS	NO	NS	SI	NS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	INFINITAS	MAS	NO	NS	NO
A138	LA	14	M	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	NO	POCAS	MUCHAS	MUCHAS	MUCHAS	MAS	NS	NS	NO
A139	LA	13	M	SI	NO	NO	NS	SI	NO	SI	SI	SI	SI	SI	POCAS	MUCHAS	MUCHAS	INFINITAS	MAS	NO	NO	NO
A140	LA	13	M	SI	NS	SI	NC	SI	SI	SI	SI	NO	NO	NO	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NO	NO	NO
A141	LA	13	M	SI	NO	SI	NO	NS	NS	NS	NS	NS	NS	SI	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NO	NO	NO
A142	LA	18	M	SI	SI	NS	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	NO	INFINITAS	INFINITAS	INFINITAS	INFINITAS	NC	NO	SI	SI
A143	LA	19	M	SI	SI	NS	NO	SI	SI	SI	SI	NO	NO	SI	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	NC	NO	NO	NO
A144	LA	18	M	SI	SI	NO	SI	SI	SI	SI	SI	NO	NO	NO	POCAS	MUCHAS	POCAS	MUCHAS	MAS	NS	NS	SI
A145	LA	18	M	SI	SI	SI	NO	NS	NS	NS	NS	NS	NS	NO	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NO	NS	NO
A146	LA	19	M	SI	NO	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	POCAS	MUCHAS	MUCHAS	INFINITAS	MAS	SI	SI	SI
A147	LA	19	M	SI	SI	NS	NO	NO	NO	NO	SI	SI	NO	NS	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NO	NO	NO
A148	LA	19	M	SI	NO	NS	NS	SI	SI	SI	SI	SI	SI	N S	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NO	NS	NS
A149	LA	18	F	Si	SI	SI	NO	SI	SI	NO	SI	NO	NO	NO	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NO	NO	NO
A150	LA	19	F	SI	NO	SI	SI	SI	SI	SI	SI	NS	NO	NS	MUCHAS	INFINITAS	MUCHAS	INFINITAS	MENOS	SI	SI	SI
A151	LA	18	M	SI	SI	SI	SI	NO	SI	NO	SI	SI	SI	NO	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	NC	NO	NO	NO
A152	LA	19	M	SI	SI	SI	SI	SI	NO	NO	NO	NO	NO	NO	POCAS	MUCHAS	MUCHAS	INFINITAS	MAS	NS	NS	NC
A153	LA	18	M	SI	SI	SI	NO	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	POCAS	MUCHAS	POCAS	INFINITAS	MAS	NO	NO	NO
A154	LA	19	M	SI	SI	SI	NO	SI	SI	SI	SI	NO	NO	SI	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NO	NO	NO

A155	LA	18	M	Si	si	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NO	SI	SI
A156	LA	19	F	SI	SI	SI	NO	NO	NO	SI	NO	NO	NO	NO	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NO	NO	NO
A157	LA	18	M	SI	SI	SI	SI	SI	NO	NO	SI	SI	NO	NO	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NS	NS	NS
A158	LA	18	F	SI	NO	SI	SI	NS	NS	NS	NS	NS	NS	NS	MUCHAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	SI	SI	SI
A159	LA	18	M	SI	SI	SI	SI	NS	SI	SI	SI	NS	NS	SI	POCAS	INFINITAS	MUCHAS	INFINITAS	MAS	NO	SI	SI
A160	LA	16	M	SI	SI	SI	NO	NO	SI	SI	SI	NS	NO	NO	POCAS	INFINITAS	MUCHAS	INFINITAS	MAS	SI	SI	SI
A161	LA	16	M	SI	SI	NS	NO	SI	SI	NO	SI	NO	NO	NO	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	NC	SI	SI	NC
A162	LA	15	M	NS	NS	SI	NO	NO	SI	NO	SI	SI	SI	NO	POCAS	INFINITAS	INFINITAS	INFINITAS	MENOS	SI	SI	SI
A163	LA	15	M	SI	SI	NO	SI	SI	SI	SI	SI	NO	NO	NO	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NO	NO	NO
A164	LA	15	M	SI	SI	SI	NO	SI	SI	SI	SI	NS	NS	NO	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NO	NO	NO
A165	LA	16	M	SI	SI	SI	NC	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	POCAS	MUCHAS	MUCHAS	INFINITAS	MAS	NO	NO	NO
A166	LA	15	M	SI	NS	SI	SI	SI	NO	SI	SI	NO	SI	NS	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NO	NO	SI
A167	LA	15	M	SI	SI	NO	SI	SI	SI	SI	SI	NO	NO	NO	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NO	NO	NO
A168	LA	15	M	NS	NO	NS	SI	NS	SI	SI	SI	NO	NO	NS	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NO	NO	NO
A169	LA	15	F	SI	SI	NS	SI	SI	NO	SI	SI	SI	SI	SI	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MAS	SI	SI	SI
A170	LA	16	M	SI	NS	SI	NS	NS	SI	NS	SI	SI	SI	NS	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NS	NO	NO
A171	LA	15	M	NO	NS	SI	SI	SI	SI	NO	SI	SI	SI	NO	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NO	NO	NO
A172	LA	16	M	SI	SI	SI	NO	SI	NO	NO	SI	NS	NO	NO	POCAS	MUCHAS	MUCHAS	INFINITAS	MAS	NO	NO	NO
A173	LA	15	M	SI	SI	NO	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NO	NO	NO
A174	LA	15	M	SI	NS	SI	NO	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NO	NO	NO
A175	46	18	M	SI	SI	SI	NS	SI	SI	SI	SI	SI	SI	NO	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NO	NO	NO
A176	46	17	M	SI	SI	SI	NO	SI	SI	SI	SI	SI	NO	SI	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NO	NO	NO
A177	46	17	F	SI	SI	NC	SI	SI	SI	SI	SI	NO	SI	NS	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NO	NO	NO
A178	46	16	F	SI	NS	NC	SI	SI	SI	SI	NO	SI	NO	NO	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	SI	NO	NO
A179	46	18	F	NO	NS	SI	NO	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	POCAS	MUCHAS	POCAS	INFINITAS	MAS	NS	NS	SI
A180	46	17	F	NO	NO	NS	SI	NS	SI	SI	SI	SI	SI	NO	POCAS	MUCHAS	NC	MUCHAS	MAS	SI	SI	SI
A181	46	17	F	SI	SI	SI	NO	SI	SI	NS	NS	SI	SI	NO	POCAS	INFINITAS	POCAS	INFINITAS	MAS	NO	NO	NO
A182	46	17	M	SI	SI	NO	NO	SI	SI	SI	SI	NO	NO	SI	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NO	NO	NO
A183	46	17	M	SI	SI	SI	SI	NS	NO	NO	SI	SI	SI	NO	POCAS	MUCHAS	MUCHAS	MUCHAS	MAS	NO	NO	NO
A184	46	17	F	SI	SI	SI	NO	SI	SI	SI	SI	NO	NO	SI	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NO	NO	NO
A185	46	16	F	NS	SI	NO	NS	NO	NS	NO	NO	SI	SI	SI	POCAS	MUCHAS	MUCHAS	MUCHAS	MAS	NS	NS	NO
A186	46	17	F	SI	SI	SI	NO	SI	SI	NS	NS	SI	SI	SI	POCAS	INFINITAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NO	NO	NO
A187	46	17	M	SI	SI	NO	NO	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	MUCHAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NO	NO	NO
A188	46	17	F	SI	NS	NO	NO	NO	SI	SI	SI	NS	NS	SI	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	SI	SI	SI
A189	46	17	M	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	NC	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NO	NO	NO
A190	46	17	M	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MAS	NO	NO	NO
A191	46	18	F	SI	SI	NS	NS	SI	SI	SI	SI	NO	SI	NS	MUCHAS	INFINITAS	NC	NC	NC	NO	NO	NO
A192	46	17	F	SI	SI	SI	NO	SI	NO	NO	SI	SI	SI	SI	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MAS	NO	NO	NO
A193	46	18	M	SI	SI	SI	NO	NO	SI	NO	SI	SI	SI	NO	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NO	NO	NO
A194	46	19	F	NO	NO	SI	SI	NS	SI	NO	NO	SI	NS	NO	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MAS	NO	NO	NO
A195	46	17	F	SI	SI	SI	NO	SI	SI	SI	SI	NO	NO	NO	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NO	NO	NO
A196	46	17	F	NO	NO	NO	NO	NO	NO	SI	SI	SI	NO	NO	POCAS	MUCHAS	MUCHAS	MUCHAS	MAS	NO	NO	NO
A197	46	17	M	SI	SI	SI	NO	SI	SI	SI	SI	NO	NO	SI	POCAS	MUCHAS	INFINITAS	INFINITAS	MISMA	NC	NO	NO

Anexo 3

Este anexo contiene las salidas provistas por el paquete Spad Decisia 5.5 como resultado de la aplicación de los métodos de Análisis Factorial de Correspondencias Múltiples y de Clasificación Jerárquica.

A.3.1Tablas del AFCM

En todas las tablas de este AFCM se encuentran subrayadas las modalidades de variables de respuesta que corresponden a respuestas correctas.

Tabla 1: Coordenadas, contribuciones y cosenos cuadrados de las modalidades de las variables activas respecto de los dos primeros factores. Resaltadas las contribuciones superiores a la media.

Var.	Modalidad	Ef.	Dist. al origen	Coordenadas		Contribución		Cos^2	
				Eje1	Eje2	Eje 1	Eje2	Eje 1	Eje 2
P1	P1SI	122	0.59836	-0.39	0.42	2.33	5.02	0.25	0.30
	P1NO	44	3.43182	0.44	-0.61	1.07	3.79	0.06	0.11
	P1NOSE	29	5.72414	0.97	-0.85	3.45	4.82	0.16	0.13
	Contribución acumulada					6.85	13.63		
P2	P2SI	90	1.16667	-0.48	0.49	2.60	5.04	0.20	0.21
	P2NO	37	4.27027	0.17	-0.76	0.14	4.92	0.01	0.14
	P2NOSE	68	1.86765	0.54	-0.24	2.50	0.89	0.16	0.03
	Contribución acumulada					5.24	10.85		
P3	P3SI	112	0.74107	-0.29	0.16	1.19	0.68	0.11	0.04
	P3NO	32	5.09375	-0.28	-0.11	0.31	0.09	0.02	0.00
	P3NOSE	51	2.82353	0.81	-0.29	4.24	0.98	0.23	0.03
	Contribución acumulada					5.74	1.75		
P4	P4SI	95	1.05263	-0.08	-0.14	0.07	0.40	0.01	0.02
	P4NO	50	2.90000	-0.46	0.68	1.37	5.29	0.07	0.16
	P4NOSE	50	2.90000	0.61	-0.42	2.38	2.05	0.13	0.06
	Contribución acumulada					6.14	7.74		
P5	P5SI	128	0.52344	-0.27	0.05	1.17	0.07	0.14	0.00
	P5NO	29	5.72414	-0.15	-0.09	0.08	0.06	0.00	0.00
	P5NOSE	38	4.13158	1.02	-0.09	4.98	0.08	0.25	0.00
	Contribución acumulada					6.23	0.21		
P7	P7SI	62	2.14516	-0.28	0.63	0.62	5.60	0.04	0.18
	P7NO	83	1.34940	-0.35	-0.30	1.30	1.72	0.09	0.07
	P7NOSE	50	2.90000	0.93	-0.28	5.48	0.90	0.30	0.03
	Contribución acumulada					7.4	8.22		
P8	P8POCAS	150	0.30000	-0.31	-0.01	1.82	0.00	0.33	0.00
	P8MUCHAS	25	6.80000	0.07	-0.81	0.01	3.77	0.00	0.10
	P8NOCONTESTA	17	10.47060	2.67	1.17	14.44	5.80	0.64	0.14
	Contribución acumulada					16.27	9.57		
P9	P9POCAS	10	18.50000	0.61	-1.71	0.47	6.67	0.02	0.16
	P9MUCHAS	133	0.46617	-0.37	0.15	2.31	0.71	0.29	0.05
	P9INFINITAS	33	4.90909	-0.12	-0.77	0.06	4.48	0.00	0.12
	P9NOCONTESTA	19	9.26316	2.48	1.17	14.83	5.96	0.67	0.15
	Contribución acumulada					17.67	17.82		
P10	P10POCAS	20	8.75000	-0.09	-0.78	0.02	2.79	0.00	0.07
	P10MUCHAS	46	3.23913	0.05	-0.87	0.01	7.99	0.00	0.23
	P10INFINITAS	109	0.78899	-0.44	0.31	2.70	2.46	0.25	0.12
	P10NOCONTESTA	20	8.75000	2.39	1.07	14.49	5.26	0.65	0.13
	Contribución acumulada					17.22	18.50		

P11	P11MUCHAS	30	5.50000	0.22	-1.06	0.18	7.76	0.01	0.20
	P11INFINITAS	147	0.32653	-0.33	0.10	1.80	0.38	0.30	0.04
	P11NOCONTESTA	17	10.47060	2.32	0.95	11.60	3.56	0.51	0.09
	Contribución acumulada					13.58	11.7		

Tabla2: Valores test y coordenadas de las modalidades de las variables ilustrativas respecto de los 2 primero ejes. Resaltados los valores test iguales o superiores a 2 (en valor absoluto)

Variable	Modalidad	Ef.	Dist. al origen	Coordenadas		Valor Test	
				Eje 1	Eje 2	Eje 1	Eje 2
Colegio	CEM46	72	1.70833	0.22	-0.28	2.37	-2.98
	CEM2	68	1.86765	0.06	0.28	0.59	2.83
	LOSANDES	55	2.54545	-0.36	0.02	-3.17	0.20
Edad	MENORES	64	2.04688	0.27	-0.32	2.63	-3.16
	INTERMEDIOS	64	2.04688	0.08	-0.06	0.79	-0.61
	MAYORES	67	1.91045	-0.33	0.37	-3.38	3.72
Género	FEMENINO	95	1.05263	0.03	-0.15	0.43	-2.09
	MASCULINO	100	0.95000	-0.03	0.15	-0.43	2.09
P6A	P6ASI	112	0.74107	-0.34	0.13	-5.55	2.13
	P6ANO	60	2.25000	0.15	-0.31	1.38	-2.87
	P6ANOSE	23	7.47826	1.28	0.16	6.53	0.84
P6B	P6BSI	112	0.74107	-0.26	0.04	-4.26	0.61
	P6BNO	48	3.06250	-0.09	-0.07	-0.71	-0.56
	P6BNOSE	35	4.57143	0.96	-0.02	6.28	-0.15
P6C	P6CSI	138	0.41304	-0.27	-0.03	-5.92	-0.69
	P6CNO	24	7.12500	0.22	0.04	1.14	0.21
	P6CNOSE	33	4.90909	0.98	0.10	6.19	0.65
P6D	P6DSI	93	1.09677	-0.24	0.01	-3.14	0.07
	P6DNO	60	2.25000	-0.15	0.05	-1.41	0.47
	P6DNOSE	42	3.64286	0.74	-0.08	5.40	-0.61
P6E	P6ESI	90	1.16667	-0.19	0.02	-2.51	0.32
	P6ENO	70	1.78571	-0.15	-0.06	-1.61	-0.61
	P6ENOSE	35	4.57143	0.81	0.05	5.27	0.35
P12	P12MAS	83	1.34940	-0.18	-0.48	-2.17	-5.81
	P12MENOS	8	23.37500	0.20	-0.01	0.57	-0.04
	P12IGUAL	78	1.50000	-0.31	0.26	-3.54	3.01
	P12NOCONTESTA	26	6.50000	1.45	0.76	7.92	4.14
P13A	P13ASI	46	3.23913	0.07	-0.49	0.55	-3.79
	P13ANO	112	0.74107	-0.31	0.12	-5.02	1.89
	P13ANOCONTESTA	37	4.27027	0.85	0.26	5.74	1.72
P13B	P13BSI	55	2.54545	0.10	-0.38	0.92	-3.31
	P13BNO	102	0.91177	-0.30	0.17	-4.35	2.45
	P13BNOCONTESTA	38	4.13158	0.65	0.10	4.44	0.67
P13C	P13CSI	76	1.56579	0.09	-0.52	1.05	-5.73
	P13CNO	86	1.26744	-0.41	0.29	-5.09	3.55
	P13CNOCONTESTA	33	4.90909	0.86	0.44	5.38	2.75

A.3.2 Tablas de la Clasificación

Se encuentran indicadas con rojo las modalidades que corresponden a variables de caracterización y al igual que en las tablas del AFCM, en todas las tablas de esta clasificación se encuentran subrayadas todas las modalidades de variables de respuesta que corresponden a respuestas correctas.

Tabla 3: Modalidades características de la clase 1

CLASE 1 / 5 (Efectivos: 86 - Porcentaje: 44.10)

Modalidades características	% de la clase en la modalidad	% de la modalidad en la clase	Valor test	Probabilidad	Cantidad de sujetos que toma la modalidad
Modalidades asociadas a la clase:					
P1SI	65.57	93.02	8.12	0.000	122
P10INFINITAS	68.81	87.21	7.99	0.000	109
P11INFINITAS	57.82	98.84	7.32	0.000	147
P9MUCHAS	50.90	94.19	7.21	0.000	133
P2SI	71.11	74.42	7.02	0.000	90
P13CNO	68.60	68.6	6.05	0.000	86
P8POCAS	54.67	95.35	5.61	0.000	150
P13ANO	59.82	77.91	5.08	0.000	112
P13BNO	60.78	72.09	4.83	0.000	102
P4NO	74.00	43.02	4.81	0.000	50
P12IGUAL	65.38	59.30	4.77	0.000	78
P7SI	67.74	48.84	4.4	0.000	62
P6ASI	57.14	74.42	4.16	0.000	112
P5SI	53.91	80.23	3.72	0.000	128
MAYORES	62.69	48.84	3.63	0.000	67
P3SI	55.36	72.09	3.56	0.000	112
P6BSI	53.57	69.77	2.97	0.002	112
P6CSI	50.00	80.23	2.45	0.007	138
Modalidades opuestas a la clase:					
P6CNOSE	24.24	9.30	-2.37	0.009	33
CEM46	31.94	26.74	-2.48	0.007	72
P13ANOCONTESTA	24.32	10.47	-2.56	0.005	37
P10POCAS	15.00	3.49	-2.63	0.004	20
P6ENOSE	22.86	9.30	-2.67	0.004	35
P9POCAS	0.00	0.00	-2.81	0.002	10
P6ANOSE	13.04	3.49	-3.12	0.001	23
P13BSI	25.45	16.28	-3.18	0.001	55
P2NOSE	27.94	22.09	-3.21	0.001	68
P11NOCONTESTA	5.88	1.16	-3.31	0.000	17
MENORES	26.56	19.77	-3.34	0.000	64
P13ASI	21.74	11.63	-3.41	0.000	46
P12MAS	28.92	27.91	-3.56	0.000	83

P6DNOSE	19.05	9.30	-3.63	0.000	42
P9NOCONTESTA	5.26	1.16	-3.63	0.000	19
P10NOCONTESTA	5.00	1.16	-3.79	0.000	20
P6BNOSE	14.29	5.81	-3.91	0.000	35
P8MUCHAS	8.00	2.33	-3.95	0.000	25
P8NOCONTESTA	0.00	0.00	-4.03	0.000	17
P9INFINITAS	12.12	4.65	-4.08	0.000	33
P5NOSE	13.16	5.81	-4.30	0.000	38
P3NOSE	17.65	10.47	-4.41	0.000	51
P13CSI	23.68	20.93	-4.52	0.000	76
P10MUCHAS	15.22	8.14	-4.53	0.000	46
P4NOSE	16.00	9.30	-4.65	0.000	50
P1NO	13.64	6.98	-4.67	0.000	44
P7NOSE	14.00	8.14	-5.02	0.000	50
P2NO	8.11	3.49	-5.06	0.000	37
P1NOSE	0.00	0.00	-5.67	0.000	29
P11MUCHAS	0.00	0.00	-5.80	0.000	30

Tabla 4: Modalidades características de la clase 2

CLASE 2 / 5 (Efectivos: 24 - Porcentaje: 12.31)

Modalidades Características	**% de la clase en la modalidad**	**% de la modalidad en la clase**	**Valor test**	**Probabilidad**	**Cantidad de estudiantes que toma la modalidad**
Modalidades asociadas a la clase:					
P9POCAS	90.00	37.50	5.57	0.000	10
P3NOSE	35.29	75.00	5.20	0.000	51
P7NOSE	30.00	62.50	3.91	0.000	50
P1NOSE	37.93	45.83	3.76	0.000	29
P2NOSE	25.00	70.83	3.63	0.000	68
P4NOSE	28.00	58.33	3.45	0.000	50
P5NOSE	31.58	50.00	3.44	0.000	38
Modalidades opuestas a la clase:					
P9INFINITAS	0.00	0.00	-2.39	0.009	33
P1SI	7.38	37.50	-2.45	0.007	122
P7SI	3.23	8.33	-2.58	0.005	62
MAYORES	2.99	8.33	-2.84	0.002	67
P3SI	4.46	20.83	-3.68	0.000	112
P2SI	2.22	8.33	-4.00	0.000	90

Tabla 5: Modalidades características de la clase 3:

CLASE 3 / 5 (Efectivos: 31 - Porcentaje: 15.90)

Modalidades características	**% de la clase en la modalidad**	**% de la modalidad en la clase**	**Valor test**	**Probabilidad**	**Cantidad de estudiantes que toma esta modalidad**
Modalidades asociadas:					
P9INFINITAS	66.67	70.97	7.49	0.000	33
P8MUCHAS	60.00	48.39	5.36	0.000	25
P13BSI	32.73	58.06	3.64	0.000	55
P13ASI	34.78	51.61	3.55	0.000	46

P10MUCHAS	32.61	48.39	3.14	0.001	46
P11INFINITAS	20.41	96.77	3.13	0.001	147
P2NO	35.14	41.94	3.09	0.001	37
P13CSI	25.00	61.29	2.55	0.005	76
Modalidades opuestas a la clase:					
P1SI	10.66	41.94	-2.35	0.009	122
P13BNO	8.82	29.03	-2.65	0.004	102
P6DNO	5.00	9.68	2.73	0.003	60
P8POCAS	10.00	48.39	-3.64	0.000	150
P9MUCHAS	6.77	29.03	-4.73	0.000	133

Tabla 6: Modalidades características de la clase 4:

CLASE 4 / 5 (Efectivos: 35 - Porcentaje: 17.95)

Modalidades características	% de la clase en la modalidad	% de la modalidad en la clase	Valor test	Probabilidad	Cantidad de estudiantes que toma esta modalidad
Modalidades asociadas:					
P11MUCHAS	76.67	65.71	7.84	0.000	30
P12MAS	37.35	88.57	6.05	0.000	83
P10POCAS	70.00	40.00	5.31	0.000	20
P7NO	33.73	80.00	4.80	0.000	83
P1NO	36.36	45.71	3.22	0.001	44
P10MUCHAS	34.78	45.71	3.04	0.001	46
P8POCAS	22.00	94.29	2.69	0.004	150
P5NO	37.93	31.43	2.61	0.005	29
P4SI	25.26	68.57	2.42	0.008	95
Modalidades opuestas a la clase:					
P6CNOSE	3.03	2.86	-2.44	0.007	33
P1SI	11.48	40.00	-2.81	0.002	122
P7SI	3.23	5.71	-3.80	0.000	62
P12IGUAL	2.56	5.71	-4.79	0.000	78
P10INFINITAS	3.67	11.43	-5.84	0.000	109
P11INFINITAS	7.48	31.43	-6.03	0.000	147

Tabla 7: Modalidades características de la clase 5:

Clase 5 / 5 (Efectivos: 19 - Porcentaje: 9.74)

Modalidades caracterísicas	% de la clase en la modalidad	% de la modalidad en la clase	Valor test	Probabilidad	Cantidad de estudiantes que toma esta modalidad
Modalidades asociadas a la clase:					
P9NOCONTESTA	94.74	94.74	9.86	0.000	19
P8NOCONTESTA	94.12	84.21	8.97	0.000	17
P10NOCONTESTA	85.00	89.47	8.96	0.000	20
P11NOCONTESTA	76.47	68.42	7.05	0.000	17
P12NOCONTESTA	50.00	68.42	5.82	0.000	26
P13ANOCONTESTA	35.14	68.42	4.83	0.000	37

P13CNOCONTESTA	33.33	57.89	4.11	0.000	33
P6CNOSE	33.33	57.89	4.11	0.000	33
P6BNOSE	31.43	57.89	3.95	0.000	35
P6ANOSE	39.13	47.37	3.95	0.000	23
P7NOSE	26.00	68.42	3.93	0.000	50
P5NOSE	28.95	57.89	3.73	0.000	38
P6DNOSE	26.19	57.89	3.45	0.000	42
P6ENOSE	28.57	52.63	3.44	0.000	35
P3NOSE	23.53	6316	3.37	0.000	51
P13BNOCONTESTA	26.32	52.63	3.22	0.001	38
P4NOSE	20.00	52.63	2.43	0.007	50
P2NOSE	17.65	63.16	2.41	0.008	68
Modalidades opuestas a la clase:					
P3SI	4.46	26.32	-2.64	0.004	112
P2SI	3.33	15.79	-2.64	0.004	90
P1SI	4.92	31.58	-2.64	0.004	122
P13BNO	3.92	21.05	-2.67	0.004	102
P6DSI	3.23	15.79	-2.78	0.003	93
P12MAS	2.41	10.53	-2.89	0.002	83
LOSANDES	0.00	0.00	-3.02	0.001	55
P13CNO	2.33	10.53	-3.02	0.001	86
P6BSI	3.57	21.05	-3.15	0.001	112
P5SI	3.91	26.32	-3.45	0.000	128
P7NO	1.20	5.26	-3.50	0.000	83
P13ANO	1.79	10.53	-4.21	0.000	112
P6ASI	1.79	10.53	-4.21	0.000	112
P6CSI	2.17	15.79	-5.03	0.000	138
P10INFINITAS	0.00	0.00	-5.32	0.000	109
P11INFINITAS	2.04	15.79	-5.59	0.000	147
P8POCAS	2.00	15.79	-5.79	0.000	150
P9MUCHAS	0.75	5.26	-5.86	0.000	133

Referencias

Asimov, I. (1984). *De los números y su historia*. Buenos Aires: El Ateneo.

Ausubel, D. P., Novak, J. D., y Henesian, H. (1978/83). *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas. Título original: Educational psychology. New York: Holt Rinehart and Winton.

Baccalá N. y Montoro, V. (2008). *Introducción al Análisis Multivariado*. Cuaderno Universitario nº 51. Centro Regional Universitario Bariloche. Universidad Nacional del Comahue. Secretaría de Investigación y Extensión. CRUB . UNC.

Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. París: Librairie philosophique J. Vrin.

Benzécri, J. (1973). L'Analyse des Dones. Tomo II: La taxonomie. Tomo 2: L'Analyse des Correspondences (segunda edición 1976). París: Dunod.

Borges, J.L. (2005). *El Aleph*. Buenos Aires: Emecé editores.

Brousseau, G. (1983). Les obstacle epistémologiques et les problemas en mathemátiques. *Recherches en Didactique des Mathemátiques, 4* (2), 165-198.

Brousseau, G. (1993). Fundamentos y Métodos de la Didáctica de la Matemática. *RDM* Nº *9* (3). Versión en español publicada por Facultad de Matemática, Astronomía y Física de la Universidad de Córdoba.

Carretero, M. (1997). *Introducción a la Psicología cognitiva*. Colección: Psicología Cognitiva y Educación. Buenos Aires: AIQUE Grupo Editor.

Comisión Nacional para el Mejoramiento de la Enseñanza de las Ciencias Naturales y la Matemática. (2007). Informe final. Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de la República Argentina.

Dantzig, T. (1947). *Número, el lenguaje de la ciencia*. Buenos Aires: Librería del Colegio. Colección Ciencia y Método.

Druit, R. (1996). The constructivst view in Science Education- What it has to offer and what should not be expected from it? *Investigações em Ensino de Ciências*, *1* (1), 40-75.

Fine, J. (1996). *Iniciación a los análisis de datos multidimensionales a partir de ejemplos.* Montevideo: Editorial Universidad de la República.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics*. Dordrecht: Reidel.

Fischbein, E., Tirosh, D. y Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics, 10*, 3-40.

Fischbein, E. Tirosh, D y Melamed, U. (1981). Is it possible to measure the intuitive acceptance of the mathematical statement? *Educational Studies of Mathematics, 12,* 491-512.

Garbin, S. (2005). ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos; las representaciones y los lenguajes matemáticos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8* (2), 169-193.

García O., G., Serrano, C. y Diaz, H. (1999). ¿Qué hay detrás de las dificultades que presenta la comprensión del concepto de Número Real? *Revista de la facultad de Ciencia y Tecnología de la Universidad Pedagógica Nacional, 5,* 5-17.

Geymonat, L. (1998). *Historia de la Filosofía y de la Ciencia*. Barcelona: Crítica.

Heath, T. L. (1956). *The Thirteen Books of Euclid's Elements.* New York: Dover.

Inhelder, B. y Piaget, J. (1972). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*. Buenos Aires: Paidós. 209-230.

Juan, M. T. y Montoro, V. (2009). Concepciones de estudiantes de nivel medio sobre aspectos básicos de la noción de infinito en un contexto de conteo. *Revista de Educación Matemática, 24*.

http://www.famaf.unc.edu.ar/~revm/digital24-1/Investigacion24-1/4Juan-Montoro.pdf

Kilpatrick, J., Gomez, P. y Rico, L. (1998). *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia.* Bogotá: Una empresa docente.

Lebart, L.et al. (1979). *Traitement de Donnés Statistiques*. París: Dunod.

Martí, E. (2003). *Representar el mundo externamente. La adquisición infantil de los sistemas externos de representación*. Madrid: Visor.

Monaghan, J. (2001). Young people's ideas of infinity. *Educational Studies in Mathematics,* 48 (2/3), 239-258.

Montoro, V. (2005). Al infinito y más acá: concepciones de estudiantes universitarios. *Infancia y Aprendizaje*, 28,4, 409-427.

Montoro, V. y De Torres Curth, M. (1999). Reflexiones sobre las dificultades que conlleva la noción de infinito en el aprendizaje de la matemática. *Epsilon, 45* (15), 357-364.

Montoro, V. y Scheuer, N. (2003). *Estudio sobre concepciones de estudiantes universitarios respecto de la noción de infinito matemático*. Tesis de Maestría no publicada. Neuquén: Universidad Nacional del Comahue.

Montoro, V.y Scheuer, N. (2004). ¿Cómo piensan el infinito matemático los estudiantes universitarios de distintas carreras? *Epsilon*, 60, 20 (3), 435-447.

Montoro, V. y Scheuer, N. (2006). *Pensando el infinito. Concepciones de estudiantes universitarios.* En Aymerich, J. y Vives, S.eds., *Matemáticas para el siglo XXI. Colleció D'Informàtica I Tecnologia , 22,*. Castelló de la Plana: Universitat Jaume I., 257- 266.

Ortiz, J. (1994). El concepto de infinito. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 1* (2) ,59-81.

Piaget, J. (1952). *The Child's Conception of Number.* New York: Norton. (original publicado en 1941).

Piaget, J. e Inhelder, B. (1980). *Psicología del niño.* Madrid: Morata.

Pozo, J.I. (1989). *Teorías cognitivas del aprendizaje*. Madrid: Ediciones Morata.

Pozo, J. I. (1999). Más allá del cambio conceptual: El aprendizaje de la ciencia como cambio representacional. *Enseñanza de las ciencias, 17* (3), 513-520.

Pozo. J. I. y Carretero, M. (1987). Del pensamiento formal a las concepciones espontáneas: ¿Qué cambia en la enseñanza de la ciencia? *Infancia y Aprendizaje* (38), 35-52.

Pozo. J. I. y Carretero, M. (1992). *Causal theories, reasoning strategies, and conflict resolution by experts and novices in Newtonian mechanics*. En A. Demetriou, M Shayer, y Efklides Eds.: *Neo-Piagetians Theories of Cognitive Development: Implications and Applications for Education*. London: Routledge, 231- 255.

Pozo, J.I. y Gomez Crespo, M.A. (1998). *Aprender y enseñar ciencia.* Madrid: Ediciones Morata.

Rico, Luis (1997). *Los organizadores del currículo de matemáticas*. En Rico, L.; Castro, E. et al. (Eds.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Madrid: ice - Horsori. 39-59.

Romero, A. (1997). *La introducción del número real en la enseñanza secundaria: una experiencia de investigación-acción.* México: Servicios editoriales de la universidad de ciencias, UNAM. Colección Mathema.

Santander Ferreira, H. (2001). Zenón, Aquiles, la tortuga y la demostración del infinito. *A Parte Rei, Revista Electrónica de Filosofía.* http://serba.pntic.mec.es/AParteRei.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches en Didactiques des Mathematiques, 6* (1) 5-67.

Solaeche Galera, M.C. (1995). La controversia entre L. Kronecker y G. Cantor acerca del Infinito. *Divulgaciones Matemáticas, 3* (1/2) 115-120.

Tall, D. (2001). Natural and formal infinities. *Educational Studies in Mathematics, 48,* (2/3), 199- 238.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12* (2), 151-169.

Tirosh, D. (1985). *The intuition of infinity and its relevance for mathematics education*. Tesis doctoral no publicada, Tel Aviv University, Israel.

Tirosh, D. (1991). *The role of students' intuitions of infinity in teaching the Cantorial theory. In D. Tall (Ed.), Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 199-214.

Tirosh, D. (1999). Finite and infinite set: definitions and intuitions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 30*, 3, 341-349.

Torretti, R. (1998). *El paraíso de Cantor*. Santiago de Chile: Editorial Universitaria Universidad Nacional Andrés Bello.

Vigotsky, L. (1973). *Pensamiento y lenguaje*. Buenos Aires: Pleyade.

Vigotsky, L. (1983). *Obras escogidas II.* Madrid: Aprendizaje visor.

Vigotsky, L. (1978). *El Desarrollo de los Procesos Psicológicos Superiores*. (Tít. orig.: Mind in Society. The Development of Higher psychological Processes). México: Crítica.

Waldegg, G. (1996). Identificación de obstáculos epistemológicos en el estudio del infinito actual. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 1*, (1), 107-122.

Ward, J. (1963). Hierarchical grouping to optimize an objective function. *Journal American Statistic Association, 58*, 236-244.

Zellini, P. (2004) *Breve historia del infinito*. Madrid: Siruela.