



Universidad Nacional del Comahue  
CENTRO REGIONAL UNIVERSITARIO BARILOCHE

ANULACIÓN DEL UMBRAL EPIDÉMICO EN  
REDES BIPARTITAS CON DISTRIBUCIÓN DE  
GRADO DE LEY DE POTENCIAS

*Trabajo final de Licenciatura en Matemática*

Guido Claro

Dirigido por

Dr. Sebastián Risau Gusman



# Agradecimientos

A mi mamá por haber puesto el hombro incondicionalmente en mi favor, a mi papá por haberme dado su mano en los momentos más difíciles. Por velar por mí, por mostrarme el mundo, por enseñarme todo. Sin ellos no habría llegado hasta acá.

A Sebastián Risau por el aguante, el compromiso y la predisposición. A las y los docentes del CRUB por haber compartido conmigo ese tesoro que es el conocimiento, por haberme recibido siempre con los brazos abiertos, por su dedicación, por amar lo que hacen. A Pablo Luppi por haberme mostrado el principio del camino.

A mi familia, a mis amigas y amigos, a los que me quieren. A los que se fueron y a los que hoy después de tantos años, siguen a mi lado. A todos los que se cruzaron en mi camino y me enseñaron algo.

A la Universidad Pública, transformadora y creadora de oportunidades, por haberme brindado educación gratuita y de calidad. A quienes no tuvieron mi suerte y con su esfuerzo la hacen posible.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	2
1.1.1. Modelos basados en ecuaciones diferenciales (modelos com- partimentales) . . . . .	2
1.1.2. Modelos basados en grafos . . . . .	6
<b>2. Nociones de probabilidad</b>	<b>9</b>
2.1. Definiciones básicas . . . . .	9
2.2. Ley de probabilidad total . . . . .	10
2.3. Valor esperado . . . . .	11
2.4. Dos desigualdades importantes . . . . .	12
2.5. Distribución exponencial . . . . .	13
2.6. Distribución geométrica . . . . .	15
2.7. Dominancia estocástica . . . . .	15
2.8. Procesos estocásticos . . . . .	16
2.8.1. Procesos de Poisson . . . . .	16
2.8.2. Caminatas aleatorias . . . . .	17
2.8.3. Martingalas . . . . .	17
2.8.4. Tiempos de paro . . . . .	18
<b>3. Grafos aleatorios</b>	<b>19</b>
3.1. Dos modelos clásicos . . . . .	20
3.2. El modelo de configuración . . . . .	22
3.3. Probabilidad de grafos bipartitos . . . . .	23
<b>4. El proceso de contacto</b>	<b>25</b>
4.1. Umbral epidémico . . . . .	26
4.2. Construcción del proceso de contacto . . . . .	27
4.3. Propiedades del proceso de contacto . . . . .	28

5. Anulación del umbral epidémico en redes bipartitas con distribución de grado de ley de potencias	33
6. Conclusión	57
7. Apéndice: demostraciones y resultados auxiliares	59

# Capítulo 1

## Introducción

El objetivo de la epidemiología matemática [1] es proponer y analizar modelos matemáticos de propagación de diversas enfermedades en poblaciones formadas por *agentes*, humanos o no (puede modelarse por ejemplo la propagación de un virus informático entre computadoras). A partir de unos pocos parámetros, como por ejemplo la tasa  $\lambda$  de probabilidad de que un agente enfermo (o *infectado*) contagie a un agente sano (o *susceptible*), puede estudiarse la evolución de la enfermedad para determinar si se generará una epidemia o no. En la mayoría de los modelos la tasa de infección tiene un valor crítico llamado *umbral epidémico*, representado por  $\lambda_c$ : para enfermedades con tasas de infección mayores que  $\lambda_c$ , un pequeño número de infectados generará una epidemia (o sea, se enfermará una proporción importante de la población), y con tasas de infección menores que  $\lambda_c$  la infección no llegará a infectar a una fracción significativa en la población (figura 1.1).

Uno de los principales objetivos de la epidemiología matemática es determinar el valor de ese umbral no sólo para diversas enfermedades sino también para diversos tipos de población. Los métodos clásicos de modelado de epidemias están basados en sistemas de ecuaciones diferenciales que describen la dinámica de la propagación de una infección en una población; y más recientemente aparecieron los modelos basados en redes o *grafos*, siendo los vértices los agentes y las aristas las posibles vías de propagación de una infección. Una de las ventajas que ofrece esta manera de modelar las poblaciones es que permite representar distintos tipos de vías de propagación, de acuerdo a la enfermedad que se desea modelar, por ejemplo una red de contactos sexuales entre individuos presentará una topología distinta a una red de propagación de una gripe.

La dinámica de una epidemia en un grafo puede ser modelada mediante métodos aproximados o de *campo medio* [2, 3], o mediante métodos probabilísticos, en parti-

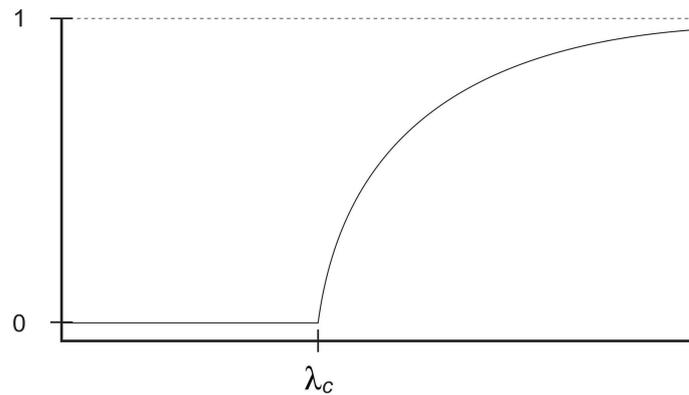


Figura 1.1: Densidad de vértices infectados en el estado de equilibrio en función de la tasa de infección. Se observa cómo a partir de  $\lambda_c$  el sistema se estabiliza con una densidad no nula de vértices infectados

cular el llamado *proceso de contacto* [4].

Los métodos de campo medio arrojan como resultado que el umbral epidémico se anula en grafos con distribución de grado en forma de ley de potencias con potencia  $2 < \alpha \leq 3$ , o sea grafos en los que para  $k$  suficientemente grande el grado de un vértice es  $k$  con probabilidad  $P(k) = Ck^{-\alpha}$  con constantes  $C$  positiva y  $2 < \alpha \leq 3$ , pero que ese umbral es mayor que cero para potencias  $\alpha$  mayores que 3. Sin embargo, recientemente se publicó un trabajo que muestra rigurosamente usando técnicas del Proceso de Contacto sobre familias de grafos que el umbral epidémico se anula para cualquier valor de  $\alpha > 3$  [5]. Más precisamente, lo que se puede probar es que si todos los vértices del grafo están infectados en el estado inicial, la infección sobrevive durante un tiempo que es exponencial en el número de vértices, para todos los valores de la tasa de infección. El propósito de este trabajo es extender dicho resultado a las redes bipartitas, las cuales se conjetura que forman un conjunto de medida nula sobre la familias de redes aleatorias y por lo tanto no son alcanzadas por resultados probabilísticos que puedan hacerse sobre estas familias.

## 1.1. Antecedentes

### 1.1.1. Modelos basados en ecuaciones diferenciales (modelos compartimentales)

Los modelos epidemiológicos basados en ecuaciones diferenciales ordinarias suelen llamarse en la bibliografía modelos compartimentales, entendiendo por compartimiento a un grupo de individuos distribuidos uniformemente que comparten una

misma característica, como la edad o estar todos infectados, etc. Uno de los modelos más sencillos es el *SIR*, propuesto por Kermack y McKendrick (1927). Éste describe la dinámica de un agente infeccioso en una población cerrada en que los individuos susceptibles son infectados y posteriormente desarrollan inmunidad a la enfermedad o mueren. Si bien estos dos casos son radicalmente opuestos en términos humanos, en términos epidemiológicos son esencialmente lo mismo. No hace diferencia si una persona es inmune o está muerta, ya que en cualquier caso no forma parte de los posibles individuos que pueden ser infectados. El modelo consta de una división de la población en clases o compartimientos disjuntos que representan los posibles estados en los que se puede encontrar un individuo: *susceptibles* (*S*), *infectados* (*I*) y *removidos o recuperados* (*R*), y procede bajo la suposición de que el agente infeccioso se transmite por “contacto” de infectados a susceptibles. La dinámica es: un individuo susceptible es infectado por interacción con un individuo infectado, después de lo cual pasa a la clase *I* donde permanece por un período de tiempo, tras el cual pasa a la clase *R*, situación que puede considerarse como que el individuo adquirió inmunidad a la enfermedad o murió. Sin pérdida de generalidad podemos pensar en *S*, *I* y *R* como las densidades de individuos susceptibles, infectados y recuperados, respectivamente, lo que nos permite, en el límite con el tamaño de la población tendiendo a infinito, considerarlas como variables continuas. Este modelo se realiza con las siguientes hipótesis:

1. La población se mantiene constante. Esto es, en todo instante  $t$  se verifica que:

$$S(t) + I(t) + R(t) = 1.$$

2. La distribución de individuos es uniforme en cada compartimiento. Esto quiere decir que todos los individuos susceptibles tienen la misma probabilidad de ser infectados. Esto nos plantea una hipótesis de homogeneidad de la población desatendiendo las posibles variaciones estructurales.
3. La tasa de infección, que determina la densidad de infectados por unidad de tiempo es proporcional al producto  $S(t)I(t)$
4. Los individuos infectados se curan y pasan a la clase *R* con una tasa proporcional a  $I(t)$ .

Con estas hipótesis podemos representar la dinámica de la enfermedad mediante un sistema de ecuaciones diferenciales que describe la variación de las cantidades *S*, *I*, y *R* con el tiempo:

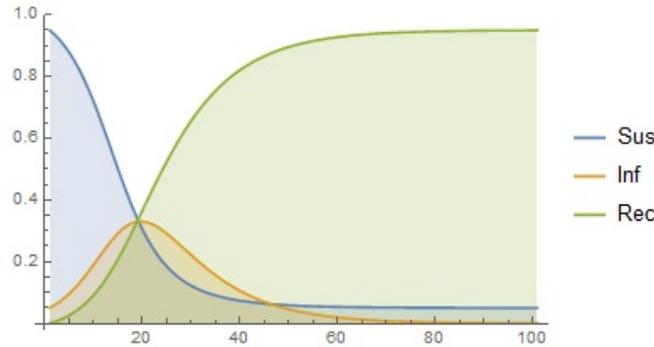


Figura 1.2: Evolución típica de un sistema  $SIR$  con tasas  $\lambda = 0,3$  y  $\beta = 0,1$ . Se observa cómo la densidad de individuos susceptibles va disminuyendo a medida que estos se infectan para luego pasar a la clase de recuperados, cuya densidad aumenta con el tiempo. La densidad de individuos infectados alcanza un valor máximo para luego colapsar en el estado con densidad nula.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = -\lambda SI \\ \frac{dI}{dt} = \lambda SI - \beta I \\ \frac{dR}{dt} = \beta I \end{array} \right.$$

donde  $\lambda$  y  $\beta$  son las tasa de infección y curación individual. Como podemos observar en las dos primeras ecuaciones,  $R$  no tiene ningún efecto en la dinámica de  $S$  e  $I$ , formalizando la idea de que los individuos *removidos* no afectan a la propagación de la infección.

Sin tener que hacer un análisis exhaustivo del sistema de ecuaciones diferenciales podemos observar algunas características cualitativas de las soluciones: para comenzar, observamos que el número de susceptibles disminuye todo el tiempo, y teniendo en cuenta de que todos los individuos infectados pasan a estar recuperados tenemos que eventualmente el sistema colapsa en un estado de todos los individuos recuperados. La figura 1.2 representa una simulación del modelo  $SIR$ .

Algunas enfermedades no confieren inmunidad luego de la recuperación de la infección, por lo que los individuos infectados se alternan entre los estados susceptible e infectado, lo que da lugar al modelo  $SIS$ . Podemos construir un sistema de ecuaciones diferenciales que describa la dinámica del modelo  $SIS$  a partir del sistema del

modelo  $SIR$  simplemente agregando el término  $\beta I$  a la ecuación para  $\frac{dS}{dt}$ , obteniendo el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\lambda SI + \beta I \\ \frac{dI}{dt} = \lambda SI - \beta I \end{cases} \quad (1.1)$$

Una característica importante de este modelo es que nunca tendremos el total de la población infectado ya que en un tiempo suficientemente largo el sistema se estabiliza en un estado en el que las tasas totales de infección y curación se igualan y una fracción fija de la población (pero no el total de la misma) está siempre infectada. La fracción de individuos infectados en ese límite puede ser obtenida del sistema (1.1) mediante la sustitución  $S = 1 - I$  y haciendo  $dI/dt = 0$ , obteniendo  $I = (\lambda - \beta)/\lambda$  para el caso  $\lambda > \beta$ . Por otro lado, si  $\lambda \leq \beta$  el sistema tiende al estado  $I = 0$  ya que con esta relación entre las tasas el tiempo de curación será en promedio menor que el tiempo de infección.

Como acabamos de ver, en este caso el comportamiento del sistema difiere sustancialmente con el del modelo  $SIR$  ya que no hay una categoría que eventualmente absorba a todos los individuos. La dinámica del sistema está determinada por el *número reproductivo básico*  $R_0 = \frac{\lambda}{\beta}$ , que puede ser interpretado como el número promedio de casos nuevos que producirá una persona infectada en una población completamente susceptible. Este parámetro define un *umbral epidémico* del sistema: Si  $R_0 > 1$  los individuos infecciosos al inicio de la enfermedad incrementarán el número de nuevas infecciones, es decir, se producirá un brote epidémico y el sistema se estabiliza en un estado con una porción no nula de vértices infectados, y si por el contrario  $R_0 < 1$  los individuos serán transmisores poco eficientes y la enfermedad acabará por desaparecer.

Sin pérdida de generalidad podemos *reescalar* el tiempo mediante el cambio de variables  $t' = \beta t$  lo que únicamente modificará la escala temporal del sistema. De esta manera podemos llevar la tasa de curación a 1, lo que nos permite reducir el número de parámetros del sistema y que este quede determinado únicamente por la tasa de infección. Con el cambio mencionado obtenemos  $\frac{1}{\beta} \frac{dS}{dt} = \frac{dS}{dt'}$  y renombrando las variables el sistema queda:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\lambda SI + I \\ \frac{dI}{dt} = \lambda SI - I \end{cases}$$

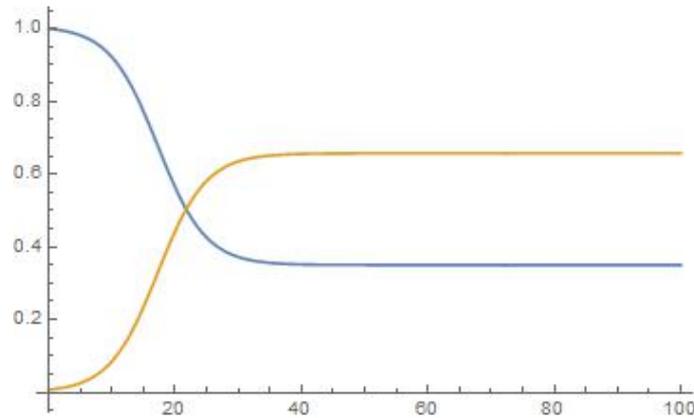


Figura 1.3: Simulación del sistema (1.1) con  $\lambda = 0,4$  y  $\beta = 0,14$  con un estado inicial de todos los vértices susceptibles.

con  $S + I = 1$ , y la tasa de infección coincide con el número reproductivo básico y el umbral epidémico es 1: si  $\lambda > 1$  se genera una epidemia, y si  $\lambda < 1$  la enfermedad desaparece.

### 1.1.2. Modelos basados en grafos

Los modelos compartimentales se realizan bajo una hipótesis de homogeneidad de la población, esto significa que todos los individuos de la población están conectados entre sí y por lo tanto todos tienen la misma probabilidad de resultar infectados. Una manera de soslayar esta suposición es modelar la población como un grafo, en el cual los vértices representan a los individuos y cada arista representa una relación entre dos individuos, o sea una posible vía de infección. De esta manera se puede generar un modelo que tenga en cuenta la complejidad estructural de la población mediante relaciones sociales.

#### Métodos aproximados sobre grafos

Como en general no se conocen exactamente las relaciones sociales de cada individuo de la población, es imposible construir el grafo exacto. Por ello se recurre a la teoría de grafos aleatorios, en la cual a partir de algunas pocas propiedades se construye un espacio de probabilidad de grafos en los cuales sólo estas propiedades están fijas. Las más importantes son el tamaño del grafo  $n$  y la “distribución de grado”  $P(k)$ , que para un número dado  $k$  nos indica la probabilidad de que un vértice tenga esa cantidad de vecinos. Una distribución de grado frecuente en poblaciones humanas es la distribución de *ley de potencias* [6], en la cual el grado de un vértice es  $k$  con probabilidad  $P(k) = Ck^{-\alpha}$  para  $k$  suficientemente grande con constantes  $C$  y  $\alpha$

positivas. De manera análoga a lo que ocurre en el modelo *SIS* compartimental, en este modelo tenemos que en cada tiempo  $t$  un vértice susceptible se infecta a una tasa  $\nu$  por la cantidad de vecinos infectados, y al mismo tiempo los vértices infectados se curan y se vuelven nuevamente susceptibles con probabilidad  $\gamma$ , definiendo una *tasa efectiva de propagación*

$$\lambda = \frac{\nu}{\gamma},$$

y sin pérdida de generalidad podemos fijar  $\gamma = 1$  ya que sólo afecta a la definición de la escala temporal de la propagación.

Para el estudio de epidemias en redes aleatorias se puede recurrir a los métodos aproximados, y el más usado es el método de “campo medio”, en el cual se considera que la probabilidad de tener un vecino infectado es la misma para todos los vértices. De esta manera podemos describir el modelo *SIS* mediante la ecuación que describe la dinámica de la densidad relativa  $\rho_k(t)$  de vértices de grado  $k$  infectados:

$$\frac{d\rho_k(t)}{dt} = -\rho_k(t) + \lambda k[1 - \rho_k(t)]\Theta(\lambda, t), \quad (1.2)$$

donde  $\Theta(\lambda, t)$  es la probabilidad de que en el instante  $t$  una arista incida en un vértice infectado y se calcula mediante la ecuación

$$\Theta(\lambda, t) = \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k k P(k) \rho_k(t), \quad (1.3)$$

donde  $\langle k \rangle$  es el grado medio de los vértices [7].

En el estado de equilibrio tenemos,  $\frac{d\rho_k(t)}{dt} = 0$ , lo que nos permite despejar  $\rho_k(t)$  en (1.2) y obtener las densidades de equilibrio

$$\rho_k = \frac{\lambda k \Theta(\lambda)}{1 + \lambda k \Theta(\lambda)},$$

y entonces reemplazando en (1.3) obtenemos la ecuación de autoconsistencia

$$\Theta(\lambda) = \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k k P(k) \frac{\lambda k \Theta(\lambda)}{1 + \lambda k \Theta(\lambda)},$$

la cual tiene dos soluciones, una positiva y  $\Theta = 0$  para  $\lambda > \lambda_c$ , y solamente la solución  $\Theta = 0$  para  $\lambda \leq \lambda_c$ , con

$$\lambda_c = \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle},$$

lo que determina un umbral epidémico que resulta ser positivo para una red con distribución de grado en forma de ley de potencias con  $\alpha > 3$  y se anula si  $2 < \alpha \leq 3$  ya que en este caso  $\langle k^2 \rangle \rightarrow \infty$  en el límite con el número de vértices tendiendo a infinito [7].

Para redes bipartitas los métodos de campo medio arrojan el mismo resultado: Si la población está particionada en dos clases  $A$  y  $B$  en donde los vértices de tipo  $A$  sólo se conectan a vértices del tipo  $B$  y viceversa, tenemos

$$\lambda_c = \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle} = \frac{2 \langle k_A \rangle \langle k_B \rangle}{\langle k_A^2 \rangle \langle k_B \rangle + \langle k_A \rangle \langle k_B^2 \rangle},$$

donde  $k_A$  y  $k_B$  representan los grados en las poblaciones  $A$  y  $B$ , respectivamente [8].

En 2009 Chatterjee y Durrett [5] demostraron usando métodos probabilísticos que el umbral epidémico  $\lambda_c$  es cero para cualquier valor de  $\alpha > 3$ , y nuestro objetivo será recrear esa demostración en el caso de redes bipartitas con distribuciones de grado en forma de ley de potencias en los dos tipos de vértices,  $P_A(k) = C_A k^{-\alpha_A}$  y  $P_B(k) = C_B k^{-\alpha_B}$ , con  $\alpha_A > 3$  y  $\alpha_B > 3$ . Este objetivo se motiva en la conjetura de que los grafos bipartitos forman un conjunto de medida nula sobre el total de grafos aleatorios (ver sección 3.3), por lo cual el resultado de Chatterjee y Durrett no es aplicable ya que este aplica al total de grafos aleatorios.

Este trabajo está estructurado de la siguiente manera. En el capítulo 2 se enuncian las definiciones y resultados de probabilidad necesarias para describir el proceso de contacto y las demostraciones de las proposiciones en los capítulos subsiguientes. El capítulo 3 es acerca de grafos, allí se presentan todas las definiciones correspondientes y se introducen los grafos aleatorios, las distintas maneras de generarlos y la conjetura que motiva este trabajo, a saber, que la probabilidad de que un grafo aleatorio sea bipartito tiende a cero cuando la cantidad de vértices tiende a infinito. En el capítulo 4 se presenta el proceso de contacto, junto con definiciones y resultados acerca del mismo. En el capítulo 5 se presenta el resultado principal de este trabajo, plasmado en el Teorema 5.15, junto con todos los lemas necesarios para su demostración. Para simplificar la lectura de este trabajo sólo se presenta en ese capítulo la demostración del lema más importante, mientras que de los demás lemas sólo se dan los enunciados, dejando las demostraciones correspondientes para el apéndice. Finalmente, en el capítulo 6 se presenta la conclusión final acerca de este trabajo y se plantean distintos interrogantes que surgen a partir de todas las consideraciones hechas.

# Capítulo 2

## Nociones de probabilidad

### 2.1. Definiciones básicas

**Definición 2.1.1.** Un *espacio de probabilidad* es una terna  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , en donde:

- El *espacio muestral*  $\Omega$  es cualquier conjunto no vacío, y el cual contiene a todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.
- $\mathcal{F}$  es una  $\sigma$ -álgebra de  $\Omega$ , donde los elementos de  $\mathcal{F}$  serán los *eventos* o *sucesos*.
- La *medida de probabilidad* o simplemente *probabilidad*  $P$ , es una función de  $\mathcal{F}$  en  $[0, 1]$  que cumple los *axiomas de Kolmogorov*, esto es:
  - $P(\emptyset) = 0$
  - $P(\Omega) = 1$
  - $P$  es  $\sigma$ -aditiva, o sea aditiva para uniones disjuntas numerables.

La definición anterior de Probabilidad es llamada *definición axiomática* o *de Kolmogorov* [18].

**Definición 2.1.2.** Dados dos eventos  $A$  y  $B$  definidos en un mismo espacio de probabilidad, con  $P(B) > 0$ , la probabilidad condicional de  $A$  dado  $B$  representa la probabilidad de que ocurra  $A$  dado que ocurre  $B$ , y se define como

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

**Definición 2.1.3.** Dos eventos son independientes si la ocurrencia de uno no condiciona la ocurrencia del otro. Más precisamente, dados dos eventos  $A$  y  $B$  en un

espacio de probabilidad, diremos que son *independientes* si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Además podemos observar en este caso que  $P(A|B) = P(A)$

**Definición 2.1.4.** Dado un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , una *variable aleatoria* es una función que asigna un valor numérico a cada elemento del espacio muestral. Más precisamente, una variable aleatoria  $X$  es una función  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  medible respecto a  $\mathcal{F}$ , esto es,

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Definición 2.1.5.** De manera análoga a lo definido para eventos se dice que dos variables aleatorias  $X$  e  $Y$  definidas en un mismo espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  son independientes si

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

**Definición 2.1.6.** Se llama *función de distribución acumulada* de  $X$ , y se abrevia FDA, a la función definida como

$$F_X(a) = P(X \leq a), \quad a \in \mathbb{R}.$$

**Definición 2.1.7.** Una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  es llamada *función de densidad de probabilidad* de  $X$  si

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx.$$

## 2.2. Ley de probabilidad total

La *ley de probabilidad total* nos dice que si  $\{B_n : n \in 0, 1, 2, 3, \dots\}$  es una partición finita o numerable del espacio muestral y  $A$  es un evento cualquiera entonces

$$P(A) = \sum_n P(A \cap B_n) = \sum_n P(A|B_n)P(B_n).$$

En particular, si  $X$  es una variable aleatoria discreta tomando valores sobre un conjunto  $I$ , la igualdad anterior implica

$$P(A) = \sum_{x \in I} P(A|X = x)P(X = x)$$

y si  $X$  es una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad  $f_X(x)$  el resultado análogo es

$$P(A) = \int_{-\infty}^{\infty} P(A|X = x)f_X(x)dx.$$

**Definición 2.2.1.** Dadas dos variables aleatorias discretas  $X$  e  $Y$ , su *función de probabilidad conjunta* es

$$P_{X,Y}(x, y) = P(X = x, Y = y).$$

Aplicando la ley de probabilidad total tenemos

$$\begin{aligned} P(X = x) &= \sum_y P(X = x|Y = y)P(Y = y) \\ &= \sum_y P(X = x, Y = y) \\ &= \sum_y P_{X,Y}(x, y). \end{aligned} \tag{2.1}$$

**Definición 2.2.2.** La probabilidad dada por la ecuación (2.1) es llamada *probabilidad marginal de  $X$*  respecto de la probabilidad conjunta  $P_{X,Y}(x, y)$ .

## 2.3. Valor esperado

**Definición 2.3.1.** Si  $X$  es una variable aleatoria discreta que toma valores en un conjunto  $I$ , definimos la *esperanza condicional* de  $X$  dado un evento  $A$  como

$$E(X|A) = \sum_{k \in I} kP(X = k|A),$$

siempre que la serie converja absolutamente. Si  $A$  es el espacio muestral completo tenemos simplemente

$$E(X) = E(X|\Omega) = \sum_{k \in I} kP(X = k),$$

y en ese caso se llama simplemente *valor esperado*, *esperanza*, *media* o *valor medio*, y puede ser representado también como  $\langle X \rangle$ .

Más generalmente, para una función  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$  tenemos

$$E(\phi(X)) = \sum_{k \in I} \phi(k)P(X = k).$$

Aplicando la ley de probabilidad total tenemos la siguiente propiedad:

$$E(X) = E(E(X|Y)). \quad (2.2)$$

**Definición 2.3.2.** Para una variable aleatoria continua  $X$  con densidad  $f_X$  el *valor esperado* se define como

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

y más generalmente,

$$E(\phi(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) f_X(x) dx,$$

siempre que la integral esté definida.

De la definición se puede ver que el valor esperado es un operador lineal.

**Definición 2.3.3.** Dada una variable aleatoria  $X$  con media  $\mu = E(X)$ , se define la *varianza* de  $X$  como

$$\text{Var}(X) = E[(X - \mu)^2] = E[X^2] - E[X]^2.$$

## 2.4. Dos desigualdades importantes

Presentamos dos desigualdades que serán de utilidad.

**Proposición 2.1** (Desigualdad de Markov). *Si  $X$  es una variable aleatoria no negativa, entonces para todo  $\alpha > 0$ ,*

$$P(X \geq \alpha) \leq E(X)/\alpha.$$

*Demostración.* Definamos una nueva variable aleatoria  $Z$  como

$$Z(\omega) = \begin{cases} \alpha & \text{si } X(\omega) \geq \alpha \\ 0 & \text{si } X(\omega) < \alpha. \end{cases}$$

Entonces claramente  $Z \leq X$ , y por lo tanto  $E(Z) \leq E(X)$ . Por otro lado tenemos que  $E(Z) = \alpha P(X \geq \alpha)$ . Por lo tanto  $\alpha P(X \geq \alpha) \leq E(X)$ .

□

La desigualdad de Markov es válida sólo para variables aleatorias no negativas, pero implica inmediatamente otra desigualdad que se cumple para variables aleatorias en general.

**Proposición 2.2** (Desigualdad de Chevychev). *Sea  $Y$  una variable aleatoria con valor medio finito  $\mu$ . Entonces para todo  $\alpha > 0$ ,*

$$P(|Y - \mu| \geq \alpha) \leq \text{Var}(Y)/\alpha^2.$$

*Demostración.* Sea  $X = (Y - \mu)^2$ . Entonces  $X$  es una variable aleatoria no negativa, y aplicando la desigualdad de Markov tenemos

$$P(|Y - \mu| \geq \alpha) = P(X \geq \alpha^2) \leq E(X)/\alpha^2 = \text{Var}(Y)/\alpha^2.$$

□

## 2.5. Distribución exponencial

Una variable aleatoria continua  $X$  tiene una distribución exponencial de parámetro  $\lambda > 0$ , y lo denotamos por  $X \sim \exp(\lambda)$  y diremos que es una variable exponencial cuando su función de densidad de probabilidad es

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

Esto significa que para  $a > 0$ , la *función de distribución* es

$$F_X(a) = P(X \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x} = 1 - e^{-\lambda a} \quad (2.3)$$

y para  $a$  suficientemente chico,

$$P(X < a) = 1 - e^{-\lambda a} \approx \lambda a.$$

La varianza y el valor esperado son

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{y} \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Sea  $t > 0$ . La distribución de  $X$  a partir de  $t$  es

$$\begin{aligned}
P(X > x + t | X > t) &= \frac{P(X > x + t, X > t)}{P(X > t)} \\
&= \frac{P(X > x + t)}{P(X > t)} \\
&= \frac{e^{-\lambda(x+t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda x} = P(X > x)
\end{aligned}$$

o sea que la distribución de  $X$  condicionada a que  $X > t$  es la misma que la de  $X$ . A esta propiedad se la llama *propiedad de pérdida o falta de memoria* de la distribución exponencial.

Sean  $X \sim \exp(\lambda)$  e  $Y \sim \exp(\beta)$  dos variables aleatorias exponenciales independientes entre sí. La distribución del mínimo entre ellas es

$$\begin{aligned}
P(\min\{X, Y\} \geq t) &= P(X \geq t)P(Y \geq t) \\
&= e^{-\lambda t}e^{-\beta t} = e^{-(\lambda+\beta)t},
\end{aligned}$$

o sea que el mínimo entre dos variables exponenciales de parámetros  $\lambda$  y  $\beta$  es una variable exponencial de parámetro  $\lambda + \beta$ .

Podemos usar la ley de probabilidad total para calcular la distribución de la diferencia  $X - Y$ :

$$\begin{aligned}
P(X - Y \geq t) &= P(X \geq Y + t) \\
&= \int_0^\infty P(X \geq Y + t | Y = y) f_Y(y) dy \\
&= \int_0^\infty P(X \geq y + t | Y = y) f_Y(y) dy \\
&= \int_0^\infty P(X \geq y + t) f_Y(y) dy \\
&= \int_0^\infty e^{-(y+t)\lambda} \beta e^{-\beta y} dy \\
&= \frac{\beta e^{-\lambda t}}{\lambda + \beta}.
\end{aligned}$$

Poniendo  $t = 0$  en la ecuación anterior tenemos

$$P(X \geq Y) = \frac{\beta}{\lambda + \beta}.$$

Diremos que un proceso ocurre a tasa  $\lambda$  cuando el tiempo de espera hasta que ocurra es una variable aleatoria exponencial de parámetro  $\lambda$ .

## 2.6. Distribución geométrica

Una variable aleatoria discreta  $X$  tiene una distribución geométrica de parámetro  $p$ , y lo denotamos por  $X \sim \text{geom}(p)$ , cuando su función de probabilidad es

$$f(x) = \begin{cases} p(1-p)^x & \text{si } x = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La distribución geométrica representa la probabilidad de tener una cantidad  $x$  fracasos en un ensayo antes de obtener un éxito, donde la probabilidad de éxito es  $p$ , la probabilidad de fracaso  $1-p$  y los ensayos son independientes entre sí. De esta manera el producto  $p(1-p)^x$  indica la probabilidad de haber tenido  $x$  fracasos seguidos de un éxito.

La función de distribución acumulada de la distribución geométrica es es

$$F_X(a) = P(X \leq a) = 1 - (1-p)^{a+1},$$

para  $a \geq 0$ , y el valor esperado es

$$E(X) = \frac{1}{p}.$$

## 2.7. Dominancia estocástica

Una variable aleatoria  $X$  es *estocásticamente menor* que una variable aleatoria  $Y$ , o está *dominada estocásticamente* por  $Y$ , y lo denotamos por  $X \preceq Y$ , si se cumple que

$$P(X > t) \leq P(Y > t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Por ejemplo, si  $X \sim \exp(\lambda_1)$  e  $Y \sim \exp(\lambda_2)$  con  $\lambda_1 \leq \lambda_2$ , entonces  $Y \preceq X$ .

## 2.8. Procesos estocásticos

Un *proceso estocástico a tiempo discreto* es una sucesión  $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$  de variables aleatorias definidas en un mismo espacio de probabilidad y  $X_n$  representa el valor de cierta cantidad aleatoria a tiempo  $n$ .

Si las variables aleatorias están indexadas por los números reales no negativos hablamos de un *proceso estocástico a tiempo continuo*  $\{X_t\}_{t \geq 0}$ , y  $X_t$  representa el estado de un proceso aleatorio a tiempo  $t$ . Los procesos estocásticos a tiempo continuo que nos interesarán serán puntualmente los *procesos de Poisson*, las *martingalas*, las *caminitas aleatorias* y el *proceso de contacto*.

### 2.8.1. Procesos de Poisson

Sea  $\{T_n\}_{n \geq 1}$  una sucesión de variables aleatorias independientes entre sí con distribución exponencial de un mismo parámetro  $\lambda$ . Sea  $t_0 = 0$  y  $t_n = T_1 + \cdots + T_n$  para  $n \geq 1$ . Definimos el *proceso de Poisson* de parámetro  $\lambda$  como

$$N(t) = \text{máx} \{n : t_n \leq t\}, \quad t \geq 0.$$

Las variables  $T_n$  representan los intervalos de tiempo entre eventos sucesivos,  $t_n = T_1 + \cdots + T_n$  es el instante en el que ocurre el  $n$ -ésimo evento y  $N(s)$  es el número de eventos que han ocurrido hasta el instante  $s$ . Llamaremos *tiempos de interarribo* a las  $T_i$  y *tiempos de llegada* a las  $t_n$ .

La variable aleatoria  $N(t)$  sigue una distribución de Poisson:

$$P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$$

y su función de distribución es

$$P(N(t) \geq k) = \sum_{j=k}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j e^{-\lambda t}}{j!}.$$

Analizando la expresión anterior tenemos que si  $N_1(t)$  y  $N_2(t)$  son dos procesos de Poisson de parámetros  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  respectivamente, con  $\lambda_1 \leq \lambda_2$ , entonces

$$P(N_1(t) \geq k) \leq P(N_2(t) \geq k),$$

o sea que mientras mayor sea el parámetro más eventos ocurrirán en promedio.

### 2.8.2. Caminatas aleatorias

Sea  $\{X_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , una sucesión de variables aleatorias discretas independientes e igualmente distribuidas y definimos el proceso  $\{S_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , mediante

$$S_n = X_0 + X_1 + \cdots + X_n.$$

Una caminata aleatoria representa la posición de una partícula moviéndose mediante *saltos* en un conjunto discreto y las variables  $X_i$  son los *incrementos* de la caminata aleatoria. De la definición podemos observar que para conocer la evolución del proceso es necesario conocer la distribución de las  $X_i$ , o lo que es lo mismo, la distribución de las diferencias  $S_{i+1} - S_i$ .

De la independencia de los incrementos tenemos que

$$P(S_{n+1} = j | S_n = i_n, S_{n-1} = i_{n-1}, \dots, S_1 = i_1) = P(S_{n+1} = j | S_n = i_n),$$

y de la misma manera

$$E(S_{n+1} | S_1, \dots, S_n) = E(S_{n+1} | S_n),$$

o sea que el estado de una caminata aleatoria en el paso  $n+1$  depende exclusivamente del estado en el paso  $n$ , ya que por la definición la información de todos los estados anteriores a  $S_n$  está contenida en el mismo  $S_n$ . La caminata aleatoria es un caso particular de una familia más amplia de procesos estocásticos llamados *procesos de Markov*.

### 2.8.3. Martingalas

Un proceso estocástico  $\{X_n\}$ , con  $n \in \mathbb{N}_0$ , es una *martingala* si para cualquier  $n \geq 0$  se verifica:

1.  $E(X_n) < \infty$
2.  $E(X_{n+1} | X_0, X_1, \dots, X_n) = X_n$

Si en la condición 2 en lugar de una igualdad tenemos

$$E(X_{n+1} | X_0, X_1, \dots, X_n) \leq X_n$$

decimos que  $\{X_n\}$  es una *supermartingala*, y si

$$E(X_{n+1} | X_0, X_1, \dots, X_n) \geq X_n$$

decimos que es una *submartingala*.

Sea  $\{X_n\}$  una martingala. Aplicando repetidamente la ecuación (2.2) y la propiedad 2 de martingalas tenemos

$$E(X_n) = E(E(X_n|X_{n-1}, \dots, X_0)) = E(X_{n-1}) = \dots = E(X_0). \quad (2.4)$$

y la igualdad se cambia por una desigualdad ( $\leq$ ,  $\geq$ ) en el caso de una supermartingala o una submartingala, respectivamente. Esto significa que en una martingala el valor esperado se mantiene constante a lo largo del tiempo, y que disminuye o aumenta en el caso de una supermartingala o una submartingala, respectivamente.

Si  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una caminata aleatoria con incrementos  $\{X_n\}$  tales que  $E(X_i) = \mu$ , entonces  $\{S_n\}$  es una supermartingala si  $\mu \leq 0$ , una martingala si  $\mu = 0$  y una submartingala si  $\mu \geq 0$ .

#### 2.8.4. Tiempos de paro

**Definición 2.8.1.** Sea  $\{X_n\}$  una martingala y  $\tau$  una variable aleatoria que toma los valores  $0, 1, 2, \dots$ . Entonces  $\tau$  es un *tiempo de paro* si para todo  $m = 0, 1, 2, \dots$  el evento  $\{\tau = m\}$  no depende de los valores  $X_{m+1}, X_{m+2}, \dots$ , es decir si podemos determinar la ocurrencia o no ocurrencia del evento  $\{\tau = m\}$  con la información obtenida del proceso hasta tiempo  $m$ . Por ejemplo, si  $\{X_n\}$  es una caminata aleatoria sobre un conjunto  $I$  y  $k \in I$ , podemos definir un tiempo de paro como

$$\tau = \text{mín} \{n \geq 1 : X_n = k\},$$

es decir,  $\tau$  es el primer tiempo en que el proceso toma el valor  $k$ . Si por el contrario definimos  $\tau$  como

$$\tau = \text{máx} \{n \geq 1 : X_n = k\},$$

no será un tiempo de paro ya que para determinar si efectivamente es el máximo debemos contemplar los valores que toma la caminata aleatoria en todos los tiempos posibles.

La ecuación (2.4) nos dice que  $E(X_n) = E(X_0)$ , para cualquier tiempo fijo  $n > 0$ . Cabe preguntarse si se puede afirmar lo mismo para  $E(X_\tau)$ , donde  $\tau$  es un tiempo de paro y por lo tanto aleatorio. El siguiente teorema, cuya demostración puede encontrarse en [9], nos da condiciones suficientes para que eso ocurra.

**Teorema** (Teorema de paro opcional). *Sea  $\{X_n\}$  una martingala y  $\tau$  un tiempo de paro. Si  $P(\tau < \infty) = 1$  y  $|X_n| \leq M$  para todo  $n \leq \tau$ , para algún  $M > 0$ , entonces*

$$E(X_\tau) = E(X_0),$$

y la igualdad se cambia por una desigualdad ( $\leq$ ,  $\geq$ ) en el caso de una supermartingala o una submartingala.

# Capítulo 3

## Grafos aleatorios

Los grafos son la representación matemática de una *red*, en la cual se tiene un conjunto de agentes interconectados entre sí. Formalmente un *grafo*  $G$  es un par ordenado  $(V, E)$ , con  $V = V(G)$  y  $E = E(G)$  que consiste en un conjunto  $V(G)$  de *vértices* y un conjunto  $E(G)$  de *aristas* (E de *edges* en inglés), junto con una *función de incidencia*  $\psi_G$  que le asigna a cada arista de  $E$  un par no ordenado de vértices de  $V$ . Si  $e$  es una arista y  $u$  y  $v$  son vértices tales que  $\psi_G(e) = \{u, v\}$  decimos que  $u$  y  $v$  están *conectados* por  $e$ , que son los *extremos* de  $e$ , o que son *vecinos* o *adyacentes*, y se denota  $u \sim v$ . A la cantidad de vecinos de un vértice  $v$  se lo llama *grado* de  $v$  y se lo denota por  $g(v)$ , y si todos los vértices tienen el mismo grado se dirá que el grafo es *regular*. Si la función de adyacencia es inyectiva y los pares de la forma  $\{v, v\}$  no tienen preimagen por  $\psi_G$  decimos que el grafo es *simple*, o sea que entre dos vértices no puede haber más de una arista ni puede haber *bucles*, o sea vértices conectados a sí mismos. Si todos los vértices están conectados entre sí decimos que el grafo es *completo*. Aclaración: en este trabajo los términos *red* y *grafo* serán usados como sinónimos.

Decimos que un grafo es *bipartito* cuando el conjunto de vértices puede ser particionado en dos subconjuntos  $A$  y  $B$  de manera que cada arista tiene un extremo en  $A$  y un extremo en  $B$ , o lo que es lo mismo, cada vértice de  $A$  sólo se conecta con un vértice de  $B$ , y viceversa (ver Figura 3.1). Si todos los vértices de  $A$  están conectados con todos los vértices de  $B$  tenemos un grafo *completo bipartito*. Una *estrella* es un grafo completo bipartito en el que alguno de los dos subconjuntos  $A$  o  $B$  tienen un único elemento, llamado el *centro* de la estrella, y los demás vértices serán llamados las *hojas* de la estrella.

Un *camino* es un grafo simple en el que los vértices pueden ser organizados en una secuencia en la que dos vértices son adyacentes si son consecutivos en la secuencia,

y no son adyacentes en otro caso. La *longitud* de un camino es la cantidad de aristas que lo componen, y definimos de esta manera una *distancia* entre dos vértices como la longitud del camino más corto que los une. El primer y último vértice de un camino son los *extremos* del camino. El *diámetro* de un grafo es la distancia más larga entre pares de vértices (es el mayor camino más corto). Un *ciclo* de tres o más vértices es un grafo simple en el que los vértices pueden ser organizados en una secuencia cíclica de manera que dos vértices son adyacentes si son consecutivos en la secuencia, o sea que un ciclo es un camino en el que los extremos coinciden. Un grafo sin ciclos es un *árbol*. En un árbol podemos identificar un vértice como la *raíz*, y en ese caso la *altura* del árbol será la longitud del camino más largo con extremo en la raíz. Diremos que los vértices que están a distancia  $j$  de la raíz son vértices de  $j$ -ésima generación. Observemos que las definiciones anteriores son independientes de si el grafo es o no bipartito, y que además las estrellas y los árboles son grafos bipartitos por definición, como puede observarse en la figura 3.1.

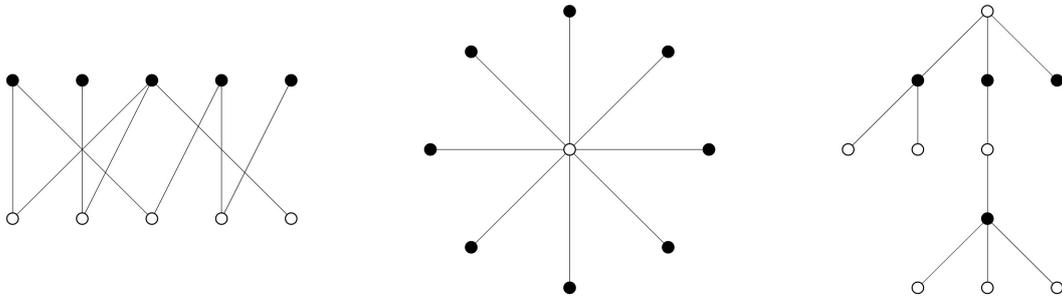


Figura 3.1: Un grafo bipartito genérico, un grafo estrella y un árbol de altura 4. Los vértices negros y los vértices blancos representan la bipartición de los vértices en subconjuntos  $A$  y  $B$  respectivamente.

**Definición 3.0.1.** Un *grafo aleatorio* es un modelo de red en el que los valores de ciertas propiedades son fijos pero que la red es en cualquier otro aspecto aleatoria, a continuación presentaremos algunas nociones básicas acerca de la generación de grafos aleatorios. En este contexto se define la *distribución de grado* como la distribución de probabilidad del grado de un vértice cualquiera del grafo, la cual denotaremos como  $p_k = P(g(v) = k)$ .

### 3.1. Dos modelos clásicos

Estrictamente un *grafo aleatorio* se define como una distribución de probabilidad sobre un conjunto de grafos posibles en donde cada grafo es escogido de acuerdo a la

distribución mencionada. Un ejemplo básico de grafo aleatorio es en el que elegimos el grafo de manera azarosa entre todos los posibles grafos simples con exactamente  $n$  nodos y  $m$  aristas. Hay  $\binom{n}{2}$  pares de vértices entre los que podemos colocar una arista, por lo tanto hay  $\binom{\binom{n}{2}}{m}$  maneras de colocar las  $m$  aristas, y simplemente elegimos cualquiera de ellas con igual probabilidad. Una manera equivalente de construir el modelo es fijando el número de vértices  $n$  y colocando una cantidad fija  $m$  de aristas entre ellos al azar, o lo que es lo mismo, tomamos  $m$  distintos pares de vértices y los conectamos con una arista. Este modelo de grafo suele llamárselo  $G(n, m)$  y se define como una distribución de probabilidad  $P(G)$  sobre todos los posibles grafos  $G$ , con

$$P(G) = \frac{1}{\binom{\binom{n}{2}}{m}}$$

para grafos simples con  $n$  vértices y  $m$  aristas y cero en otro caso.

Cuando hablamos acerca de las propiedades de un grafo aleatorio nos referimos a dichas propiedades promediadas sobre el conjunto de grafos. Podremos querer saber, por ejemplo, cuál es el diámetro típico de un grafo con un cierto número de aristas. Claramente hay casos especiales de grafos que tienen diámetros particularmente grandes o pequeños, pero no reflejan el comportamiento típico. Si estamos buscando una propiedad típica, el promedio sobre todos los grafos es en principio una respuesta más acertada.

Algunas propiedades del grafo aleatorio  $G(n, m)$  se pueden calcular fácilmente. Por ejemplo el número promedio de aristas es claramente  $m$ , y el grado promedio es  $2m/n$ . Desafortunadamente, otras propiedades no son tan fáciles de calcular, y gran parte de la labor matemática se ha realizado en un modelo ligeramente distinto que permite dar respuestas a otro tipo de preguntas. Este modelo es llamado  $G(n, p)$ , en el cual tenemos  $n$  vértices pero no fijamos la cantidad de aristas sino la probabilidad de que entre dos vértices haya una arista y para cualquier par de vértices colocamos una arista entre ellos con probabilidad  $p$ .

Nuevamente, la definición técnica de este modelo no es en términos de un grafo en particular sino en términos de un conjunto de grafos, y un grafo  $G$  aparece con probabilidad

$$P(G) = p^m(1-p)^{\binom{n}{2}-m},$$

donde  $m$  es el número de aristas del grafo. El cálculo del valor medio  $\langle m \rangle$  es directo: Por definición el número medio de aristas entre dos vértices es  $p$ , y entonces el número medio entre los  $\binom{n}{2}$  pares de vértices es

$$\langle m \rangle = \binom{n}{2} p.$$

Podemos usar este resultado para calcular el grado promedio de un vértice. El grado medio en un grafo con exactamente  $m$  aristas es  $2m/n$ , y entonces el grado medio en  $G(n, p)$  es

$$d = \left\langle \frac{2m}{n} \right\rangle = \frac{2\langle m \rangle}{n} = \frac{2}{n} \binom{n}{2} p = (n-1)p$$

De manera muy similar podemos calcular también la distribución de grado. Un vértice del grafo se conecta con probabilidad independiente  $p$  a cada uno de los otros  $n-1$  vértices. Entonces la probabilidad de conectar a  $k$  vértices en particular y no a los restantes es  $p^k(1-p)^{n-1-k}$ . Hay  $\binom{n-1}{k}$  maneras de elegir esos  $k$  vértices, y entonces la probabilidad de estar conectado a exactamente  $k$  vértices es

$$p_k = \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}, \quad (3.1)$$

lo cual es una distribución binomial.

Si se fija el grado medio  $d = (n-1)p$ , en el límite con  $n$  tendiendo a infinito la ecuación 3.1 resulta en

$$p_k = e^{-d} \frac{d^k}{k!},$$

que es una distribución de Poisson, por lo que al grafo  $G(n, p)$  se lo suele llamar *grafo aleatorio de Poisson* [10].

## 3.2. El modelo de configuración

**Definición 3.2.1.** Si  $G$  tiene vértices  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , la secuencia  $(g(v_1), g(v_2), \dots, g(v_n))$  es llamada *secuencia de grado* de  $G$ .

El *modelo de configuración* es un modelo de grafo aleatorio en el que a diferencia de los modelos  $G(n, m)$  y  $G(m, p)$  se puede fijar una distribución de grado arbitraria, y además permite el cálculo de muchas de las propiedades del grafo. Estrictamente hablando, el modelo de configuración es un modelo de grafo aleatorio con una dada secuencia de grado en lugar de una distribución de grado. Si lo que se busca es un grafo a partir de una distribución de grado en particular simplemente se extrae una secuencia de grado de dicha distribución y se procede.

Sea  $\{k_i\}$  una secuencia de grado, o sea que especificamos el grado  $k_i$  de cada vértice  $i = 1, 2, \dots, n$ . Podemos generar un grafo con esa secuencia de grado de la siguiente manera: Le asignamos a cada vértice  $i$  un total de  $k_i$  *muñones*, o *medias aristas*. Hay  $\sum_i k_i = 2m$  muñones en total, donde  $m$  será el número de aristas del grafo. Luego elegimos dos muñones al azar y los conectamos entre sí para formar una arista. Luego

volvemos a elegir otro par de muñones de los  $2m - 2$  restantes, los conectamos y seguimos el proceso hasta que no queden muñones disponibles. Habremos entonces generado un grafo en el que cada vértice tiene el grado esperado. Específicamente el resultado es un *matching* entre los muñones, y el proceso descrito genera cada *matching* posible con igual probabilidad. Por definición del modelo cualquier par de muñones tiene la misma probabilidad de ser conectado, lo que nos da una hipótesis de uniformidad que nos permite calcular analíticamente ciertas propiedades del grafo generado.

El procedimiento descrito no impide la generación de aristas múltiples o bucles ya que la elección de los muñones se realiza al azar. Podríamos pensar en impedir esto simplemente rechazando la creación de estas aristas en la construcción del grafo, pero en este caso el grafo generado no sería extraído con probabilidad uniforme del conjunto de *matchings* posibles, lo que nos quitaría la característica de uniformidad mencionada. Afortunadamente tanto la densidad de aristas múltiples como de bucles tiende a cero cuando  $n$  tiende a infinito [10].

El modelo de configuración puede ser fácilmente extendido para la generación de grafos bipartitos. Se definen vértices de dos tipos ( $A$  y  $B$ ) y se le asigna el grado a cada vértice, representado por la cantidad de muñones. Luego se procede con el *matching* al azar pero tomando un vértice de cada tipo. Notemos que cada tipo de vértices puede tener una distribución de grado distinta; sólo será necesario que la cantidad total de muñones es igual en los dos tipos.

### 3.3. Probabilidad de grafos bipartitos

Este trabajo se motiva en la conjetura de que las redes bipartitas forman un subconjunto de medida de probabilidad nula sobre el total de redes aleatorias en el límite con la cantidad de vértices  $n$  tendiendo a infinito. Esto no es un resultado probado, sin embargo tenemos resultados que son un gran indicio de que esto es así. Más precisamente, lo que se puede probar es que la proporción de grafos bipartitos regulares sobre el total de grafos regulares en un conjunto de  $n$  vértices, esto es, grafos en lo que todos los vértices tienen un mismo grado, tiende a cero cuando  $n$  tiende a infinito.

Un grafo bipartito puede ser representado mediante una *matriz de adyacencia* de tamaño  $n_A \times n_B$  en donde las filas representan a los vértices de  $A$  y las columnas a los vértices de  $B$ , y en la que los coeficientes  $a_{ij}$  son 1 si hay una arista entre los vértices  $i_A$  y  $j_B$  y 0 en caso contrario. Recíprocamente, cualquier matriz  $m \times n$  de coeficientes 0-1 representa un grafo bipartito con  $m$  vértices de tipo  $A$  y  $n$  vértices de tipo  $B$ . De esta manera el problema de contar grafos es totalmente equivalente a

contar matrices de coeficientes 0-1.

McKay y Wang [11] probaron que el número de grafos bipartitos regulares de grado  $d$  tiende a

$$\frac{(nd/2)!}{(d!)^n} \exp\left(\frac{-(d-1)^2}{2} - \frac{(d-1)^2(2d^2 - 2d + 2)}{6nd} + \mathcal{O}\left(\frac{4d^4}{n^2}\right)\right), \quad (3.2)$$

cuando  $n \rightarrow \infty$ , con  $n = n_A + n_B$ . La notación  $f = \mathcal{O}(g)$  es la *notación de Landau* e indica que para  $x$  suficientemente grande el crecimiento de  $f$  es menor que el de  $g$  multiplicada por alguna constante. Más precisamente:

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x))$$

si existen constantes  $x_0$  y  $M$  tales que  $|f(x)| \leq Mg(x)$ , para todo  $x \geq x_0$ . Se dirá que  $f(x)$  es de orden  $g(x)$ .

Teniendo en cuenta lo anterior podemos afirmar que para  $n$  suficientemente grande el segundo factor de 3.2 es menor o igual que 1, entonces la cantidad de grafos bipartitos regulares de grado  $d$  es menor que

$$\frac{(nd)!}{(d!)^n}. \quad (3.3)$$

Por otro lado, Liebenau y Wormald [13] probaron que para  $1 \leq d \leq n-2$  el número de grafos regulares de grado  $d$  en un conjunto de  $n$  vértices tiende a

$$\frac{\binom{n-1}{d}^n \binom{\binom{n}{2}}{dn/2}}{\binom{n(n-1)}{dn}} e^{1/4} \quad (3.4)$$

cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Aplicando las cotas  $\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n} < n! < \sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n+1}$  [14] en el cociente entre (3.3) y (3.4) tenemos que la proporción de grafos bipartitos regulares sobre el total de grafos regulares en un conjunto de  $n$  vértices, con  $n$  suficientemente grande, es menor o igual que

$$\sqrt{\pi d n} e^{-n(d/2-1)+3},$$

y esa cantidad claramente tiende a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ . De esta manera hemos probado que en el límite con la cantidad de vértices  $n$  tendiendo a infinito los grafos bipartitos regulares aparecen con una probabilidad tendiendo a cero sobre el total de grafos regulares. Este resultado apoya la conjetura de que los grafos aleatorios bipartitos, no necesariamente regulares, aparecen con probabilidad tendiendo a cero cuando el número de vértices  $n$  tiende a infinito.

# Capítulo 4

## El proceso de contacto

Mediante el Proceso de Contacto podemos estudiar una epidemia considerando la conectividad de los nodos y las distancias entre ellos. Así, si en el método de campo medio consideramos que todos los vértices tienen la misma probabilidad de ser infectados por otro vértice que se encuentre infectado, ya que todos tienen la misma probabilidad de tener un vecino infectado, aquí tenemos que la probabilidad de infección disminuye con la distancia, refiriéndonos con distancia a la distancia en un grafo.

Consideremos un grafo  $G = (V, E)$ . El proceso de contacto puede ser considerado como un modelo para la propagación de una infección a través de las aristas del grafo. Los individuos que pueden ser infectados son los vértices del grafo y las aristas son las vías de infección. A cada instante  $t$  un vértice puede estar en estado infectado o sano. Definimos las funciones  $\xi_t : t \geq 0$  en  $V$  de manera que  $\xi_t(x) = 1$  si el vértice  $x$  está infectado a tiempo  $t$ , y  $\xi_t(x) = 0$  si se encuentra sano. Un vértice infectado se cura (pasa al estado sano) a tasa 1, independientemente del estado de los demás vértices, y se vuelve susceptible; por otro lado, un vértice susceptible se infecta a una tasa  $\lambda$  veces la cantidad de vecinos infectados. Observemos a partir de la definición que el proceso de contacto permite el estudio de la propagación de infecciones en poblaciones finitas ya que lo que se estudia es la propagación de vértice a vértice, a diferencia de los modelos basados en ecuaciones diferenciales que son representativos para una población infinita, ya que esta le brinda una condición de continuidad a las densidades  $S$ ,  $I$  y  $R$ .

Formalmente el proceso de contacto en  $V$  con parámetro de infección  $\lambda \geq 0$  es un proceso estocástico a tiempo continuo  $\xi_t$  en el espacio  $\{0, 1\}^V$ . Los elementos de  $\{0, 1\}^V$  son los estados del sistema, o *configuraciones* y los identificamos con subconjuntos  $A$  de  $V$  mediante  $A = \{x \in V : \xi_t(x) = 1\}$ . Esto es, el estado del

sistema en un instante  $t$  queda determinado por el conjunto de vértices infectados en ese instante. Al proceso con estado inicial  $A \subset V$  lo denotaremos por  $\xi_t^A$ , y en caso de que  $A$  sea un sólo vértice  $x$  diremos  $\xi_t^x$ . Las tasas de transición para  $\xi_t$  están dadas por:

$$\begin{aligned} \xi_t^A &\rightarrow \xi_t^A \setminus \{x\} && \text{para } x \in \xi_t^A \text{ a tasa } 1 \\ \xi_t^A &\rightarrow \xi_t^A \cup \{x\} && \text{para } x \notin \xi_t^A \text{ a tasa } \lambda \cdot \#\{y \in \xi_t^A : x \sim y\}. \end{aligned}$$

Lo anterior significa que los vértices infectados se “curan” en un tiempo exponencial con media 1, independientemente del estado de sus vecinos, mientras que los vértices sanos se infectan en un tiempo aleatorio exponencial con tasa proporcional al número de vecinos infectados.

## 4.1. Umbral epidémico

Para el proceso de contacto  $\xi_t$  en grafos *infinitos* se puede definir un análogo al umbral epidémico presentado en la sección 1.1, el cual determina si un brote epidémico crecerá hasta alcanzar un estado endémico de equilibrio o morirá [19]. Formalmente se lo define como

$$\lambda_c = \sup \{ \lambda : P(\exists t_0 : \xi_t^A = \emptyset, \forall t \geq t_0) = 1 \}$$

Si el grafo es finito el único estado de equilibrio es el estado con todos los vértices sanos, ya que por la naturaleza estocástica del modelo en alguna de sus fluctuaciones se curarán todos los vértices, y al no haber vértices infectados el sistema se estabiliza, o sea que el proceso de contacto siempre se extingue y por lo tanto es necesario otro criterio para definir un umbral epidémico

Se ha observado que en grafos finitos el proceso de contacto exhibe un valor crítico  $\lambda_c$  que separa el comportamiento del proceso de contacto en dos regímenes. Para valores de la tasa de infección menores que  $\lambda_c$  el proceso de contacto se extingue en un tiempo no exponencial en la cantidad de vértices  $n$ , con probabilidad tendiendo a 1 cuando  $n \rightarrow \infty$ , mientras que para valores mayores que  $\lambda_c$  el tiempo será exponencial en  $n$  [19], nuevamente con probabilidad tendiendo a 1 cuando  $n \rightarrow \infty$ .

En vista de lo anterior, para el proceso de contacto en grafos finitos podemos definir el umbral epidémico como el valor  $\lambda_c$  de la tasa de infección en donde se produce un cambio de régimen entre tiempos de extinción no exponenciales a tiempos de extinción exponenciales en la cantidad de vértices.

**Definición 4.1.1.** Formalmente, para el proceso de contacto en un grafo finito  $G_n$  de tamaño  $n$  y tiempo de extinción  $\tau_n$  definimos el umbral epidémico  $\lambda_c$  como:

$$\lambda_c = \inf \left\{ \lambda : \lim_{n \rightarrow \infty} P(\tau_n > e^{Cn}) = 1 \right\},$$

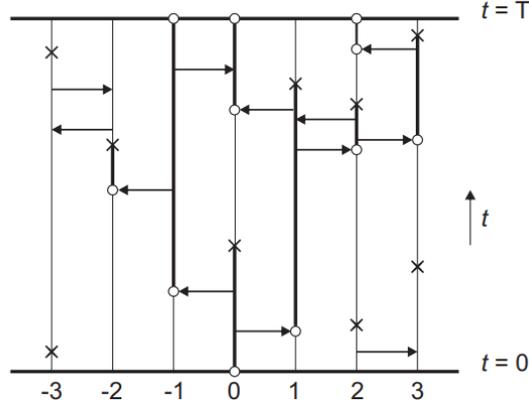


Figura 4.1: Construcción gráfica del proceso de contacto. Podemos observar que hay caminos activos desde  $(0,0)$  hasta  $(2,T)$ ,  $(0,T)$  y  $(-1,T)$

con  $C$  una constante positiva.

## 4.2. Construcción del proceso de contacto

La construcción que aquí se presenta se denomina *construcción gráfica del proceso de contacto*. Para cada  $x \in V$  consideramos un proceso de Poisson  $N_x$ , de tasa 1, y un proceso de Poisson  $N_{x,y}$  de tasa  $\lambda$  para cada par ordenado de vecinos  $(x,y)$ . Consideremos el espacio  $V \times [0, \infty)$ . Para el tiempo  $t$  de cada evento de  $N_x$  colocamos un símbolo de curación  $*$  en el punto  $(x,t) \in V \times [0, \infty)$ , y para el tiempo  $t$  de cada evento de  $N_{x,y}$  colocamos una flecha  $\rightarrow$  de  $(x,t)$  a  $(y,t)$  como símbolo de contagio. Los primeros indican los tiempos de curación del vértice  $x$ , siempre que se encuentre infectado, y las segundas indican los eventos de contagio de  $x$  a  $y$  siempre que en ese instante  $x$  esté infectado e  $y$  no lo esté. La figura 4.1 muestra esta construcción para  $V = \mathbb{Z}$  con aristas entre  $i$  e  $i+1$ , para todo  $i \in \mathbb{Z}$ .

Sean  $(x,s), (y,t) \in V \times [0, \infty)$ , con  $s < t$ . Diremos que hay un camino activo de  $(x,s)$  a  $(y,t)$  cuando exista una sucesión de puntos

$$(x,s) = (x_0,t_0), (x_0,t_1), (x_1,t_1), (x_1,t_2), \dots, (x_k,t_{k+1}) = (y,t)$$

con  $t_i < t_{i+1}$  y  $x_i \sim x_{i+1}$  cumpliendo que:

1. Cada segmento  $x_i \times [t_i, t_{i+1}]$  no contiene ningún punto de curación.
2. En  $t_i$  ocurre un evento de contagio de  $x_i$  a  $x_{i+1}$ .

O sea que un camino activo de  $(x,s)$  a  $(y,t)$  es un camino que se mueve en el tiempo y en la dirección de las flechas, sin cruzarse con ningún símbolo de curación.

### 4.3. Propiedades del proceso de contacto

La construcción gráfica del proceso nos permite concluir que el proceso de contacto cumple con una propiedad de *monotonía* respecto al orden parcial inducido por la inclusión en los subconjuntos de  $V$ , esto es, si  $A$  y  $B$  son subconjuntos de  $V$  con  $A \subset B$ , entonces  $\xi_t^A \subset \xi_t^B$  para todo  $t$ , ya que si existe un camino activo de  $(x, 0)$  a  $(y, t)$ , con  $x \in A$ , ese mismo camino nos sirve para afirmar que  $y \in \xi_t^B$ , porque  $x \in B$ .

Tenemos además que el proceso de contacto es *aditivo*, o cumple la propiedad de *aditividad*, y es que

$$\xi_t^{A \cup B} = \xi_t^A \cup \xi_t^B,$$

puesto que si se tiene  $y \in \xi_t^{A \cup B}$  podemos encontrar un camino activo desde  $(x, 0)$  hasta  $(y, t)$ , donde  $x$  pertenece a  $A$  o  $B$ , y por lo tanto  $y$  pertenece a  $\xi_t^A$  o a  $\xi_t^B$ . Esto quiere decir que comenzar el proceso con un conjunto inicial de infectados  $A \cup B$  es equivalente a comenzar un proceso con un conjunto inicial de infectados  $A$ , otro con un conjunto  $B$  y unir los conjuntos de vértices infectados en ambos procesos.

Otra propiedad de la que se hará un uso extensivo es la *auto-dualidad* del proceso de contacto, y establece que

$$P(\xi_t^A \cap B \neq \emptyset) = P(\xi_t^B \cap A \neq \emptyset)$$

para cualesquiera subconjuntos  $A$  y  $B$  de vértices. Esto lo podemos ver a partir de la misma representación gráfica, pensando a los caminos activos como decrecientes en el tiempo y revirtiendo la dirección de cada flecha de infección, lo que nos permite pensar al proceso de contacto como reversible en el tiempo e intuitivamente significa que es equivalente comenzar el proceso con un conjunto inicial de vértices infectados  $A$  e infectar vértices de un conjunto  $B$ , que comenzar en  $B$  e infectar a los vértices de  $A$ .

Sea  $\eta$  una configuración del proceso. Esta automáticamente define una función  $\eta(x)$  como

$$\begin{cases} \eta(x) = 1 & \text{si } x \in \eta \\ \eta(x) = 0 & \text{si } x \notin \eta. \end{cases}$$

Definimos un orden parcial en la familia de posibles configuraciones del proceso mediante:

$$\eta_1 \leq \eta_2 \quad \text{si} \quad \eta_1(x) \leq \eta_2(x), \forall x \in V.$$

Una función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  definida en el espacio de configuraciones es creciente si se cumple que

$$\eta_1 \leq \eta_2 \Rightarrow f(\eta_1) \leq f(\eta_2).$$

Por ejemplo  $f(\xi) = \xi(x)$  para un  $x \in V$  fijo, o  $g(\xi) = \#\{x \in V : \xi(x) = 1\}$ , son funciones crecientes.

Sobre el espacio de configuraciones se puede definir una distribución de probabilidad  $\mu$ . Definamos un orden entre distribuciones de probabilidad de configuraciones mediante la relación

$$\mu_1 \preceq \mu_2 \quad \text{si} \quad E^{\mu_1}(f) \leq E^{\mu_2}(f), \quad \forall f \text{ creciente.}$$

Sea  $\eta_t$  la distribución de configuraciones posibles a tiempo  $t$  cuando la configuración inicial es  $\eta$ . Observemos que  $\eta_t$  no es una configuración en particular sino la distribución que le asigna a cada configuración a tiempo  $t$  una probabilidad. Cada configuración posible a tiempo  $t$  se obtiene a partir de una asignación puntual de cruces y flechas en la representación gráfica junto con una configuración inicial. Cada asignación posible de cruces y flechas en la construcción gráfica es una *realización* del proceso, y denotaremos por  $\eta_t^R$  a la configuración a tiempo  $t$  en una realización  $R$  habiendo comenzado en la configuración  $\eta$ .

Llamaremos *atractividad* a la siguiente propiedad: Si  $\xi$  y  $\eta$  son dos configuraciones entonces

$$\xi \leq \eta \Rightarrow \xi_t \preceq \eta_t, \quad \forall t > 0.$$

O sea que el orden en las configuraciones iniciales implica el orden en las distribuciones a tiempo  $t$ .

**Proposición 4.1.** *El proceso de contacto es atractivo*

*Demostración.* Por la propiedad de monotonía tenemos que para una misma realización  $R$

$$\xi \leq \eta \Rightarrow \xi_{t,R} \leq \eta_{t,R},$$

entonces si  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es una función creciente

$$E^{\xi_t}(f) = \int_{\mathcal{R}} f(\xi_{t,R}) dP(R) \leq \int_{\mathcal{R}} f(\eta_{t,R}) dP(R) = E^{\eta_t}(f),$$

donde la integral se realiza sobre el conjunto de todas las posibles realizaciones del proceso. Entonces

$$\xi_t \preceq \eta_t.$$

□

**Proposición 4.2.** *Si en un proceso el estado inicial es  $\mathbf{1}$  (todos los vértices infectados), y en otro proceso hay una distribución  $\mu$  de estados iniciales, entonces*

$$\mu_t \preceq \mathbf{1}_t$$

*Demostración.* Si la distribución inicial es  $\mu$ , la probabilidad de una configuración inicial  $\xi$  es  $\mu(\xi)$ . Entonces para cualquier función  $f$ ,

$$E^{\mu_t}(f) = \sum_{\xi \in X} E^{\xi_t}(f)\mu(\xi).$$

Como  $\xi \leq \mathbb{1}$  para todo  $\xi \in X$ , por atractividad vale

$$E^{\mu_t}(f) = \sum_{\xi \in X} E^{\xi_t}(f)\mu(\xi) \leq \sum_{\xi \in X} E^{\mathbb{1}_t}(f)\mu(\xi) = E^{\mathbb{1}_t}(f)$$

para toda  $f$  creciente. Entonces

$$\mu_t \preceq \mathbb{1}_t.$$

□

**Corolario 4.3.**  $\mathbb{1}_{t+s} \preceq \mathbb{1}_t$ ,  $\forall s, t > 0$ .

*Demostración.* Basta tomar  $\mu = \mathbb{1}_s$  en la proposición anterior. Entonces para toda  $f$  creciente tenemos

$$E^{\mathbb{1}_{t+s}}(f) \leq E^{\mathbb{1}_t}(f)$$

□

El siguiente teorema establece que en promedio sobre todas las realizaciones del proceso, comenzando con todos los vértices infectados, la proporción de infectados disminuye en el tiempo.

**Teorema 4.4.**  $P(|\mathbb{1}_{t+s}^R| > m) \leq P(|\mathbb{1}_t^R| > m)$

*Demostración.* Consideremos la función creciente  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  definida como

$$f(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\xi| > m \\ 0 & \text{si } |\xi| \leq m, \end{cases}$$

donde  $|\xi|$  representa la cantidad de vértices infectados en la configuración  $\xi$ . Entonces para cualquier distribución  $\mu$  de configuraciones:

$$\begin{aligned} E^\mu(f) &= \sum_{\xi \in X} \mu(\xi)f(\xi) = \sum_{|\xi| > m} \mu(\xi)f(\xi) + \sum_{|\xi| \leq m} \mu(\xi)f(\xi) \\ &= \sum_{|\xi| > m} \mu(\xi) = P^\mu(|\xi| > m), \end{aligned}$$

con  $\xi \in X$ , o sea, la probabilidad de que una configuración  $\xi \in X$  tenga más de  $m$  infectados, dada la distribución de configuraciones  $\mu$ . Entonces si consideramos las distribuciones  $\mathbb{1}_{t+s}$  y  $\mathbb{1}_t$  tenemos

$$P(|\mathbb{1}_{t+s}^R| > m) = E^{\mathbb{1}_{t+s}}(f) \leq E^{\mathbb{1}_t}(f) = P(|\mathbb{1}_t^R| > m)$$

□



# Capítulo 5

## Anulación del umbral epidémico en redes bipartitas con distribución de grado de ley de potencias

Consideremos el proceso de contacto en un grafo bipartito. En este caso tenemos dos tipos de vértices, los de tipo  $A$  y los de tipo  $B$ . Cada vértice de tipo  $A$  sólo puede estar conectado a vértices del tipo  $B$ , y viceversa. Es natural por lo tanto pensar en que puede haber dos tasas diferentes de infección,  $\lambda_A$  que indica la tasa a la que un vértice de tipo  $A$  infecta a uno de tipo  $B$  y su análogo  $\lambda_B$ . Podemos considerar también que la curación en vértices de los dos tipos difieran entre sí. En este caso tenemos los parámetros  $\beta_A$  y  $\beta_B$  que indican la tasa de curación de los vértices de tipo  $A$  y  $B$  respectivamente.

Demostraremos usando técnicas del proceso de contacto que en las redes bipartitas con distribución de grado en forma de ley de potencias tanto en los vértices de tipo  $A$  como los de tipo  $B$ , esto es  $P_A(k) = C_A k^{-\alpha_A}$  y  $P_B(k) = C_B k^{-\alpha_B}$  para  $k$  suficientemente grande, el umbral epidémico es cero si  $\alpha_A > 3$  y  $\alpha_B > 3$ , en contraposición con los resultados obtenidos por campo medio.

### Definiciones

Antes de comenzar serán necesarias algunas definiciones. Sean  $\lambda'_A = \lambda_A/\beta_B$ ,  $\lambda'_B = \lambda_B/\beta_A$  y  $\lambda'_{\min} = \min\{\lambda'_A, \lambda'_B\}$ . Para un vértice de grado  $k$  definamos  $L_A = \lambda'_A k/4$ ,  $L_B = \lambda'_B k/4$  y  $L_{\min} = \min\{L_A, L_B\}$ . Siguiendo la terminología de Durrett [5]

diremos que un vértice de tipo  $A$  está *encendido* si tiene al menos  $0,4L_A$  vecinos infectados, y que está *caliente* si tiene al menos  $L_A$  vecinos infectados, y la definición será análoga para vértices de tipo  $B$ , con  $0,4L_B$  y  $L_B$  respectivamente. Trabajaremos bajo las siguientes suposiciones:

$$\lambda'_A, \lambda'_B, \frac{\lambda_A}{\beta_A}, \frac{\lambda_B}{\beta_B} \leq 1$$

y además supondremos que todos los vértices del grafo son de grado  $k_{\min} \geq 3$ .

Como última observación notemos que si  $n_A$  y  $n_B$  representan la cantidad de vértices de tipo  $A$  y  $B$  respectivamente, el total de vértices del grafo es claramente  $n = n_A + n_B$ . Dado que cada arista del grafo tienen que conectar con un vértice de cada tipo en sus extremos tenemos que  $n_A \langle d_A \rangle = n_B \langle d_B \rangle$ , y entonces

$$n_A = n \frac{\langle d_B \rangle}{\langle d_A \rangle + \langle d_B \rangle} = \mu_A n, \quad n_B = n \frac{\langle d_A \rangle}{\langle d_A \rangle + \langle d_B \rangle} = \mu_B n,$$

donde  $\langle d_A \rangle$  y  $\langle d_B \rangle$  representan los grados medios en  $A$  y  $B$  respectivamente.

El proceso de contacto ocurre entre cada vértice infectado y sus vecinos, por lo tanto el grafo estrella será una estructura de vital importancia en el estudio del proceso de contacto en nuestro grafo. Siguiendo la terminología de Durrett, llamaremos *estrellas* a los vértices de grado  $k \geq n^\varepsilon$  con  $\varepsilon > 0$  y estudiaremos puntualmente el proceso de contacto en el conjunto de estrellas del grafo, la transmisión de la infección entre ellas y la permanencia en las mismas. Al conjunto de estrellas del grafo lo denotaremos como  $V_n^\varepsilon$ . No deberán confundirse las estrellas con el grafo estrella, siendo que con estrella nos referiremos a un vértice con un determinado grado mínimo, o lo que es lo mismo, al centro de un grafo estrella con una determinada cantidad de hojas. Los términos infección y proceso de contacto serán usados como sinónimos.

Un último aspecto a tener en cuenta es que trabajaremos sobre un espacio de probabilidad más general que el del proceso de contacto ya que además del proceso de contacto vamos a considerar grafos aleatorios siguiendo una distribución, y generados mediante el modelo de configuración.

## Estudio del proceso de contacto

Comenzaremos demostrando que si un vértice se encuentra *caliente* en  $t = 0$ , este permanecerá *encendido* durante un tiempo exponencial en la cantidad de vecinos con una muy alta probabilidad, o sea que la infección sobrevive durante un tiempo exponencialmente largo. Para esto consideramos el grafo estrella, y sin pérdida de generalidad podemos suponer que el centro es de tipo  $A$  y las hojas de tipo  $B$ .

**Lema 5.1.** Sea  $G$  un grafo estrella con centro  $0$  de tipo  $A$  y hojas  $1, 2, \dots, k$  de tipo  $B$ , y sean las siguientes hipótesis:  $\frac{\lambda_A}{\beta_B} \leq 1$  y  $\lambda_A \lambda_B k \geq 50 \beta_A \beta_B$ . Sean  $T_A = \frac{e^{\lambda_A \lambda_B k / 80 \beta_B^2}}{2(\beta_A + \beta_B) L_A}$  y  $P_{L_A, i}$  la probabilidad cuando a tiempo  $t = 0$   $L_A$  hojas están infectadas y el centro está en estado  $i$ , con  $i = 0$  si está sano e  $i = 1$  si está infectado. Entonces

$$P_{L_A, i} \left( \inf_{t \leq T_A} |\xi_t^{L_A}| \leq 0, 4 L_A \right) \leq 7 e^{-\lambda_A \lambda_B k / 80 \beta_B^2}$$

*Demostración.* Consideremos el proceso  $\{H_t\}_{t \geq 0}$ , compuesto por la familia de variables aleatorias que indican la cantidad de hojas infectadas a cada tiempo  $t$ . Cuando el sistema se encuentra en un estado con el centro infectado y  $H_t$  hojas infectadas pueden ocurrir tres eventos: una infección de una hoja, una curación de una hoja y la curación del centro. Por otro lado mientras el centro se encuentra sano sólo pueden ocurrir curaciones de hojas o la reinfección del centro. Teniendo en cuenta que el centro se infecta a una tasa  $\lambda_B H_t$  y las curaciones de hojas ocurren a una tasa  $\beta_B H_t$ , la probabilidad de que un evento sea la reinfección del centro es

$$\frac{\lambda_B H_t}{\lambda_B H_t + \beta_B H_t} = \frac{\lambda_B}{\lambda_B + \beta_B},$$

y la probabilidad de que sea una curación de hoja es

$$\frac{\beta_B H_t}{\lambda_B H_t + \beta_B H_t} = \frac{\beta_B}{\lambda_B + \beta_B},$$

por lo tanto si  $j < H_t$ , la probabilidad de que se curen  $j$  hojas antes de que se infecte el centro viene dada por una distribución geométrica con probabilidad de éxito  $\frac{\lambda_B}{\lambda_B + \beta_B}$ :

$$P(N = j) = \left( \frac{\beta_B}{\lambda_B + \beta_B} \right)^j \frac{\lambda_B}{\lambda_B + \beta_B}$$

ya que las curaciones de hojas son independientes entre sí y con la infección del centro y por lo tanto se multiplican las probabilidades de los eventos. Finalmente, el número  $N$  de hojas que se curarán mientras el centro esté sano sigue la siguiente distribución:

$$P(N = j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j > H_t \\ \left( \frac{\beta_B}{\lambda_B + \beta_B} \right)^j \frac{\lambda_B}{\lambda_B + \beta_B} & \text{si } j < H_t \\ 1 - \sum_{i=0}^{H-1} P(N = i) & \text{si } j = H_t \end{cases}$$

Observemos que la probabilidad de que se curen  $H_t$  hojas no viene dada por la distribución geométrica ya que en ese caso el centro no se puede reinfectar, o sea que se llega a un estado absorbente con todas las hojas y el centro sanos.

Estudiemos el sistema cuando la cantidad de hojas infectadas  $H_t$  satisface  $H_t \leq L_A$ . Como mencionamos anteriormente, la dinámica de  $H_t$  depende del estado del centro, y estudiar dicha dinámica requiere considerar los dos casos por separado: centro infectado y centro sano. Para simplificar construimos un nuevo proceso  $H'_t$  que tenga las mismas propiedades que  $H_t$ , con la única diferencia de que se comprime a cero el tiempo en el que el centro se encuentra sano. De esta manera podemos reducir el sistema a un caso en el que sólo ocurrirán curaciones e infecciones de hojas, teniendo dos tipos de curaciones: de a una por vez, correspondientes al estado con el centro infectado y de a  $N$  a la vez, de acuerdo a la distribución mencionada anteriormente, correspondientes al estado con el centro sano y cuyo tiempo de ocurrencia fue comprimido a cero. De esta manera nuestro proceso  $H'_t$  recorrerá la misma secuencia de números que  $H_t$  pero en un tiempo menor. Según lo expresado la caminata  $H'_t$  queda definida por las siguientes tasas de transición:

$$\begin{aligned} H'_t &\rightarrow H'_t + 1 && \text{a tasa } \lambda_A |k - H'_t| \geq \lambda_A (k - \lambda_A k / 4\beta_B) \\ H'_t &\rightarrow H'_t - 1 && \text{a tasa } \beta_B H'_t \\ H'_t &\rightarrow H'_t - j && \text{a tasa } \beta_A \left( \frac{\beta_B}{\lambda_B + \beta_B} \right)^j \frac{\lambda_B}{\lambda_B + \beta_B} \text{ para } j = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Consideremos ahora la caminata  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  dada definida en el intervalo  $(-\infty; k]$  y dada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} X_t &\rightarrow X_t + 1 && \text{a tasa } \lambda_A |k - X| \geq \lambda_A (k - \lambda_A k / 4\beta_B) \\ X_t &\rightarrow X_t - 1 && \text{a tasa } \beta_B X \Theta(X) \\ X_t &\rightarrow X_t - j && \text{a tasa } \beta_A \left( \frac{\beta_B}{\lambda_B + \beta_B} \right)^j \frac{\lambda_B}{\lambda_B + \beta_B} \text{ para } j = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

donde  $\Theta(x)$  es la *función escalón de Heaviside*:  $\Theta(x) = 0$  si  $x \leq 0$ , y  $\Theta(x) = 1$  si  $x > 0$ .

Por razones que se verán más adelante nos interesa que  $H'_t$  se mueva dentro del intervalo  $(0, 4L_A; L_A]$ . Dentro de ese intervalo  $H'_t$  y  $X_t$  son idénticas, por lo tanto trabajaremos con la caminata  $X_t$  de ahora en adelante. La razón para considerar el nuevo dominio para la variable  $X_t$  es que esta permite los valores negativos, los cuales se pueden alcanzar con los saltos de tamaño  $j$ .

Buscaremos acotar inferiormente (en probabilidad) a la caminata  $X_t$ . Para eso consideraremos una nueva caminata  $Y_t$  más accesible al tratamiento analítico y que servirá

de cota inferior de  $X_t$  en el sentido que

$$P(Y_t \geq k) \leq P(X_t \geq k), \quad \forall t > 0.$$

Sea la caminata aleatoria  $\{Y_t\}_{t \geq 0}$  definida en el intervalo  $(-\infty, L_A]$  mediante las siguientes tasas de transición:

$$\begin{aligned} Y_t \rightarrow Y_t + 1 & \quad \text{a tasa } \frac{3}{4}\lambda_A k(1 - \delta_{Y_t L_A}) \\ Y_t \rightarrow Y_t - 1 & \quad \text{a tasa } \lambda_A k/4 \\ Y_t \rightarrow Y_t - j & \quad \text{a tasa } \beta_A \left( \frac{\beta_B}{\lambda_B + \beta_B} \right)^j \frac{\lambda_B}{\lambda_B + \beta_B} \text{ para } j = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

donde  $\delta_{ij}$  es la función delta de Kronecker:  $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$  y  $\delta_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ , y representa el hecho de que  $Y_t$  no puede pasar de  $L_A$  por cómo está definida.

La caminata  $\{Y_t\}$  presenta la ventaja de que sus tasas de transición son constantes, nlo que facilita el tratamiento analítico, mientras que las de  $\{X_t\}$  dependen del estado en cada tiempo  $t$ .

Si dividimos el tiempo en intervalos de ancho  $dt$  suficientemente chico podemos usar propiedades de la distribución exponencial y describir las caminatas  $\{X_t\}$  e  $\{Y_t\}$  en términos no de tasas sino de probabilidades de transición dentro de cada intervalo, con la ventaja de que por la propiedad de falta de memoria de la distribución exponencial dichas probabilidades se renuevan en cada nuevo intervalo. Sean  $X_n$  e  $Y_n$  los valores que toman las caminatas  $\{X_t\}$  e  $\{Y_t\}$  en el  $n$ -ésimo intervalo. Entonces:

$$P(X_{n+1} = X_n + 1) = \lambda_A |k - X_n| dt$$

$$P(Y_{n+1} = Y_n + 1) = \frac{3}{4}\lambda_A k(1 - \delta_{Y_n L_A}) dt$$

$$P(Y_{n+1} = Y_n - 1) = \frac{1}{4}\lambda_A k dt$$

$$P(X_{n+1} = X_n - 1) = \beta_B X_n \Theta(X_n) dt$$

$$P(X_{n+1} = X_n - j) = \beta_A \left( \frac{\beta_B}{\lambda_B + \beta_B} \right)^j \frac{\lambda_B}{\lambda_B + \beta_B} dt \text{ para } j = 0, 1, 2, \dots$$

$$P(Y_{n+1} = Y_n - j) = \beta_A \left( \frac{\beta_B}{\lambda_B + \beta_B} \right)^j \frac{\lambda_B}{\lambda_B + \beta_B} dt \text{ para } j = 0, 1, 2, \dots$$

$$P(X_{n+1} = X_n) = 1 - [\lambda_A(k - X_n) + \beta_B X_n \Theta(X_n) + \beta_A] dt$$

$$P(Y_{n+1} = Y_n) = 1 - \left( \frac{1}{4}\lambda_A k + \frac{3}{4}\lambda_A k(1 - \delta_{Y_n L_A}) + \beta_A \right) dt,$$

y donde el término  $\beta_A$  en la expresión de las últimas dos probabilidades proviene de realizar las series geométricas  $\sum_{j=0}^{\infty} P(X_{n+1} = X_n - j)$  y  $\sum_{j=0}^{\infty} P(Y_{n+1} = Y_n - j)$ .

De esta manera tenemos que para cualquier tiempo  $t$  y  $n = \left\lceil \frac{t}{dt} \right\rceil$ ,

$$P(X_t = X_n) = 1 - \mathcal{O}(dt),$$

por lo que la caminata  $X_n$  aproxima a  $X_t$  con probabilidad tendiendo a uno cuando  $dt$  tiende a cero, e igualmente respecto a las  $Y_n$  e  $Y_t$ .

Demostraremos ahora que si  $X_0 = Y_0$  el proceso  $\{X_n\}$  está acotado inferiormente por el proceso  $\{Y_n\}$  en el sentido que

$$P(Y_n \geq k) \leq P(X_n \geq k),$$

y si esa relación se cumple para la caminata discreta para todo  $dt$ , en el límite con  $dt$  tendiendo a cero la relación se cumplirá para las caminatas en tiempo continuo.

Usaremos la técnica del *acoplamiento* [12]: Construyamos una caminata aleatoria  $\{(\mathcal{X}_n, \mathcal{Y}_n)\}$  definida en el espacio  $(-\infty; k] \times (-\infty; L_A]$  y dada por las siguientes probabilidades de transición si  $\mathcal{X}_n \leq L_A$ :

$$P((\mathcal{X}_{n+1}, \mathcal{Y}_{n+1}) = (\mathcal{X}_n + 1, \mathcal{Y}_n + 1)) = \frac{3}{4} \lambda_A k \delta_{Y_n L_A} dt$$

$$P((\mathcal{X}_{n+1}, \mathcal{Y}_{n+1}) = (\mathcal{X}_n + 1, \mathcal{Y}_n - 1)) = \frac{1}{4} \lambda_A k dt - \beta_B \mathcal{X}_n \Theta(\mathcal{X}_n) dt$$

$$P((\mathcal{X}_{n+1}, \mathcal{Y}_{n+1}) = (\mathcal{X}_n + 1, \mathcal{Y}_n)) = \beta_B \mathcal{X}_n \Theta(\mathcal{X}_n) dt - \lambda_A \mathcal{X}_n \frac{3}{4} \lambda_A k \delta_{Y_n L_A} dt$$

$$P((\mathcal{X}_{n+1}, \mathcal{Y}_{n+1}) = (\mathcal{X}_n, \mathcal{Y}_n)) = 1 - [\lambda_A (k - \mathcal{X}_n) + \beta_B \mathcal{X}_n \Theta(\mathcal{X}_n) + \beta_A] dt$$

$$P((\mathcal{X}_{n+1}, \mathcal{Y}_{n+1}) = (\mathcal{X}_n - 1, \mathcal{Y}_n - 1)) = \beta_B \mathcal{X}_n \Theta(\mathcal{X}_n) dt$$

$$P((\mathcal{X}_{n+1}, \mathcal{Y}_{n+1}) = (\mathcal{X}_n - j, \mathcal{Y}_n - j)) = \beta_A \left( \frac{\beta_B}{\lambda_B + \beta_B} \right)^j \frac{\lambda_B}{\lambda_B + \beta_B} dt \quad \text{para } j = 0, 1, 2, \dots$$

0 en otro caso,

y para el caso  $\mathcal{X}_n > L_A$  la definimos como

$$P((\mathcal{X}_{n+1}, \mathcal{Y}_{n+1}) = (\mathcal{X}_n + i, \mathcal{Y}_n + k)) = P(X_{n+1} = X_n + i) P(Y_{n+1} = Y_n + k)$$

con  $i, k = 1, 0, -1, -j$ ; para  $j = 0, 1, 2, \dots$

Si este proceso comienza en una configuración inicial  $(\mathcal{X}_0, \mathcal{Y}_0)$  en la que  $\mathcal{Y}_0 \leq \mathcal{X}_0$ , esta relación se mantendrá para todos los pasos siguientes ya que en el caso  $\mathcal{X}_n \leq L_A$  no hay ninguna probabilidad de transición que permita romper ese orden, y en el caso  $\mathcal{X}_n > L_A$  el orden se cumple de manera trivial pues  $\mathcal{Y}_n \leq L_A$ . Se puede observar que si  $\mathcal{X}_0 = X_0$  e  $\mathcal{Y}_0 = Y_0$  las distribuciones marginales de  $\{\mathcal{X}_n\}$  e  $\{\mathcal{Y}_n\}$  coinciden con las distribuciones de  $\{X_n\}$  e  $\{Y_n\}$  respectivamente, ya que coinciden las tasas de transición. De esta manera, si  $X_0 = Y_0$  tenemos que para el  $n$ -ésimo intervalo,

$$P(Y_n > a) = P(\mathcal{Y}_n > a | \mathcal{X}_n) \leq P(\mathcal{X}_n > a | \mathcal{Y}_n) = P(X_n > a),$$

y entonces, en el límite con  $dt$  tendiendo a cero,

$$P(Y_t > a) \leq P(X_t > a), \quad \forall a \geq 0.$$

La relación encontrada entre  $X_t$  e  $Y_t$  (y por lo tanto entre  $H_t$  e  $Y_t$ ) nos permite encontrar mediante  $Y_t$  cotas inferiores para expresiones del estilo  $P(X_t \geq a)$ .

Sea  $\theta < 0$  tal que  $e^{-\theta} = 1 + \frac{\lambda_B}{2\beta_B}$  y sea  $\{Z_n\}$  un proceso definido como  $Z_n = e^{\theta Y_n}$ , con  $Y_n \leq L_A$ , y en donde con  $Y_n$  nos referimos al valor de la caminata aleatoria  $\{Y_t\}$  en el  $n$ -ésimo paso, independientemente del tiempo en que este ocurra. Demostremos que  $\{Z_n\}$  es una supermartingala, es decir que  $E(Z_{n+1} | Z_n) \leq Z_n$ :

$$\begin{aligned} E(Z_{n+1} | Z_n) &= e^{(Y_{n+1})\theta} P(Y_{n+1} = Y_n + 1) + e^{(Y_{n+1})\theta} P(Y_{n+1} = Y_n - 1) + \\ &\sum_{N=0}^{\infty} e^{(Y_{n+1}-N)\theta} P(Y_{n+1} = Y_n - N) \\ &= e^{(Y_{n+1})\theta} \frac{3}{4} \lambda_A k \frac{1}{\lambda_A k + \beta_A} + e^{(Y_{n+1})\theta} \frac{1}{4} \lambda_A k \frac{1}{\lambda_A k + \beta_A} \\ &+ \sum_{N=0}^{\infty} e^{(Y_{n+1}-N)\theta} \frac{\beta_A}{\lambda_A k + \beta_A} \left( \frac{\beta_B}{\lambda_B + \beta_B} \right)^N \frac{\lambda_B}{\lambda_B + \beta_B} \\ &= e^{\theta Y_n} \left[ \frac{2\beta_B}{2\beta_B + \lambda_B} \frac{3}{4} \lambda_A k \frac{1}{\lambda_A k + \beta_A} + \left( 1 + \frac{\lambda_B}{2\beta_B} \right) \frac{1}{4} \lambda_A k \frac{1}{\lambda_A k + \beta_A} \right. \\ &\left. + \sum_{N=0}^{\infty} \left( 1 + \frac{\lambda_B}{2\beta_B} \right)^N \left( \frac{\beta_B}{\lambda_B + \beta_B} \right)^N \frac{\beta_A}{\lambda_A k + \beta_A} \frac{\lambda_B}{\lambda_B + \beta_B} \right] \\ &= e^{\theta Y_n} \left[ \frac{2\beta_B}{2\beta_B + \lambda_B} \frac{3}{4} \lambda_A k \frac{1}{\lambda_A k + \beta_A} + \left( 1 + \frac{\lambda_B}{2\beta_B} \right) \frac{1}{4} \lambda_A k \frac{1}{\lambda_A k + \beta_A} + \frac{2\beta_A}{\lambda_A k + \beta_A} \right] \end{aligned}$$

$$= e^{\theta Y_n} \frac{\lambda_A k}{\lambda_A k + \beta_A} \left[ \frac{3}{4} \frac{2\beta_B}{2\beta_B + \lambda_B} + \frac{1}{4} (1 + \lambda_B/2\beta_B) + \frac{2\beta_A}{\lambda_A k} \right] = \circledast$$

Si  $0 < x < 1 \Rightarrow \frac{1}{1+x} < 1 - x + x^2$ . Entonces como  $\lambda_B/\beta_B < 1$ ,

$$\frac{1}{1 + \lambda_B/2\beta_B} < 1 - \lambda_B/2\beta_B + \left( \frac{\lambda_B}{2\beta_B} \right)^2,$$

entonces

$$\begin{aligned} \circledast &\leq e^{\theta Y_n} \frac{\lambda_A k}{\lambda_A k + \beta_A} \left[ \frac{3}{4} \left( 1 - \frac{\lambda_B}{2\beta_B} + \left( \frac{\lambda_B}{2\beta_B} \right)^2 \right) + (1 + \lambda_B/2\beta_B) \frac{1}{4} + \frac{2\beta_A}{\lambda_A k} \right] \\ &\leq e^{\theta Y_n} \frac{\lambda_A k}{\lambda_A k + \beta_A} \left[ 1 - \frac{1}{16} \frac{\lambda_B}{\beta_B} + \frac{2\beta_A}{\lambda_A k} \right] \text{ para } \frac{\lambda_B}{\beta_B} \leq 1. \end{aligned}$$

y si  $\lambda_A \lambda_B k \geq 50 \beta_A \beta_B$  tenemos que

$$\frac{\lambda_A k}{\lambda_A k + \beta_A} \left[ 1 - \frac{1}{16} \frac{\lambda_B}{\beta_B} + \frac{2\beta_A}{\lambda_A k} \right] \leq 1$$

y por lo tanto

$$E(Z_{n+1}|Z_n) \leq e^{\theta Y_n} = Z_n$$

por lo que  $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una *supermartingala*.

Aplicando la función de distribución acumulada de la distribución geométrica y la desigualdad  $e^{x/2} \leq 1 + x$  tenemos que cuando  $Y_n = L_A$ :

$$\begin{aligned} P_L(N > 0, 1L_A) &= \left( \frac{\beta_B}{\lambda_B + \beta_B} \right)^{0,1L_A+1} \leq \left( \frac{\lambda_B}{\beta_B} + 1 \right)^{-0,1L_A} \\ &\leq e^{-\frac{\lambda_B L_A}{20\beta_B}} = e^{-\frac{\lambda_A \lambda_B k}{80\beta_B^2}}, \end{aligned} \tag{5.1}$$

o sea que con probabilidad mayor que  $1 - e^{-\lambda_A \lambda_B k / 80\beta_B^2}$  la cadena estará dentro del intervalo  $[0,9L_A, L_A)$  luego del primer salto. Veamos que con una alta probabilidad a partir de este punto la cadena oscilará dentro del intervalo  $(0,4L_A; L_A]$ .

A medida que evoluciona la cadena eventualmente toma  $Y_t = L_A$  o algún valor  $Y_t \leq 0,4L_A$ . Sea  $q$  la probabilidad de que la cadena  $Y_n$  comenzando en cualquier

valor dentro del intervalo  $[0, 8L_A, L_A)$  llegue al intervalo  $(-\infty; 0, 4L_A]$  antes que a  $L_A$ .

Para acotar  $q$  definamos el tiempo de paro  $\tau$  dado por  $Y_\tau \leq 0, 4L_A$  o  $Y_\tau = L_A$ . Por el teorema de paro opcional:  $E(Z_\tau) \leq E(Z_0)$ , lo que nos permite encontrar una cota para la probabilidad  $q$ :

$$\begin{aligned}
 E(e^{\theta Y_\tau}) &= e^{\theta L_A} P(Y_\tau = L_A) + \sum_{i=-\infty}^{0, 4L_A} e^{\theta i} P(Y_\tau = i) \\
 &\geq e^{\theta L_A} P(Y_\tau = L_A) + e^{\theta 0, 4L_A} \sum_{i=-\infty}^{0, 4L_A} P(Y_\tau = i) \\
 &= e^{\theta L_A} P(Y_\tau = L_A) + e^{\theta 0, 4L_A} P(Y_\tau \leq 0, 4L_A) \\
 &= e^{\theta L_A} (1 - q) + e^{\theta 0, 4L_A} q \\
 &\geq e^{\theta 0, 4L_A} q
 \end{aligned}$$

Entonces

$$e^{\theta 0, 4L_A} q \leq E(e^{\theta Y_\tau}) = E(Z_\tau) \leq E(Z_0) = E(e^{\theta Y_0}) \leq e^{\theta 0, 8L_A},$$

por lo tanto

$$q \leq e^{\theta 0, 4L_A}$$

Por otro lado,

$$e^{\theta 0, 4L_A} \leq e^{-\frac{\lambda_B}{4\beta_B} \frac{4}{10} \frac{\lambda_A k}{4\beta_B}} = e^{-\lambda_A \lambda_B k / 40 \beta_B^2}$$

y finalmente

$$q \leq e^{-\lambda_A \lambda_B k / 40 \beta_B^2}. \quad (5.2)$$

Cuando  $Y_n = L_A$  no puede haber saltos positivos, entonces las tasas de transición son:

$$\begin{aligned}
 Y_n &\rightarrow Y_n - 1 && \text{a tasa } \lambda_A k / 4 \\
 Y_n &\rightarrow Y_n - N && \text{a tasa } \beta_A.
 \end{aligned}$$

y el tiempo medio hasta que ocurre alguno de los dos saltos es

$$\frac{1}{\lambda_A k / 4 + \beta_A} = \frac{1}{L_A \beta_B + \beta_A}. \quad (5.3)$$

La probabilidad de que el salto deje a la cadena en un valor  $Y < 0,8L_A$  es

$$P_L(N > 0,2L_A) = \left(\frac{\lambda_B}{\beta_B} + 1\right)^{-0,2L_A} \leq e^{-\frac{\lambda_B L_A}{10\beta_B}} = e^{-\frac{\lambda_A \lambda_B k}{40\beta_B^2}}, \quad (5.4)$$

entonces la probabilidad de que  $\{Y_n\}$  vuelva a  $L_A$  sin pasar por el intervalo  $(-\infty, 0,4L_A]$  es mayor o igual que

$$\left(1 - e^{-\frac{\lambda_A \lambda_B k}{40\beta_B^2}}\right)(1 - q) \geq \left(1 - e^{-\frac{\lambda_A \lambda_B k}{40\beta_B^2}}\right)^2,$$

en virtud de la cota encontrada en la ecuación (5.2) para  $q$ , y entonces la probabilidad de que la cadena vuelva a  $L_A$  una cantidad  $M = \exp(\lambda_A \lambda_B k / 80\beta_B^2)$  de veces seguidas sin pasar por el intervalo  $(-\infty, 0,4L_A]$  es mayor o igual que

$$\begin{aligned} \left(1 - e^{-\frac{\lambda_A \lambda_B k}{40\beta_B^2}}\right)^{2M} &\geq 1 - 2Me^{-\frac{\lambda_A \lambda_B k}{40\beta_B^2}} \\ &= 1 - 2e^{-\frac{\lambda_A \lambda_B k}{80\beta_B^2}} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Consideremos los tiempos que tarda cada excursión de la caminata, desde que sale de  $L_A$  hasta que vuelve a llegar a  $L_A$ . Claramente cada uno de esos tiempos es mayor que el tiempo que tarda el primer salto, el cual sigue una distribución exponencial de parámetro

$$\frac{1}{L_A \beta_B + \beta_A},$$

según la ecuación 5.3.

Sea  $T_M$  la suma de los tiempos de las primeras  $M$  excursiones, y  $T_M^*$  la suma de los tiempos de los primeros saltos desde  $L_A$  de cada excursión, entonces:

$$\begin{aligned} P\left(T_M < \frac{M}{2(L_A \beta_B + \beta_A)}\right) &\leq P\left(T_M^* < \frac{M}{2(L_A \beta_B + \beta_A)}\right) \\ &= P\left(T_M^* < \frac{E(T_M^*)}{2}\right) \\ &= P(T_M^* - E(T_M^*) < -E(T_M^*)/2) \\ &\leq P(|T_M^* - E(T_M^*)| > E(T_M^*)/2) \\ &\leq \frac{\text{Var}(T_M^*)}{E(T_M^*)^2/4} = 4e^{-\frac{\lambda_A \lambda_B k}{80\beta_B^2}}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

donde la última desigualdad es la desigualdad de Chevychev.

En resumen tenemos que:

$$\text{de (5.1): } P_{L_A}(N < 0,1L_A) \geq 1 - e^{-\frac{\lambda_A \lambda_B^k}{80\beta_B^2}}$$

$$\text{de (5.5): } P(\text{volver } M \text{ veces a } L_A) \geq 1 - 2e^{-\frac{\lambda_A \lambda_B^k}{80\beta_B^2}}$$

$$\text{de (5.6): } P\left(T_M \geq \frac{M}{2L_A(\beta_A + \beta_B)}\right) \geq 1 - 4e^{-\frac{\lambda_A \lambda_B^k}{80\beta_B^2}},$$

entonces tomando  $T_A = \frac{M}{2L_A(\beta_A + \beta_B)}$  tenemos

$$\begin{aligned} P\left(\inf_{t \leq T_A} |\xi_t^{L_A}| \geq 0,4L_A\right) &\geq P\left(\inf_{t \leq T_A} X_t \geq 0,4L_A\right) \geq P\left(\inf_{t \leq T_A} Y_t \geq 0,4L_A\right) \\ &\geq \left(1 - e^{-\frac{\lambda_A \lambda_B^k}{80\beta_B^2}}\right) \left(1 - 2e^{-\frac{\lambda_A \lambda_B^k}{80\beta_B^2}}\right) \left(1 - 4e^{-\frac{\lambda_A \lambda_B^k}{80\beta_B^2}}\right) \\ &\geq 1 - 7e^{-\frac{\lambda_A \lambda_B^k}{80\beta_B^2}}. \end{aligned}$$

□

Es natural preguntarse acerca de la redundancia de las desigualdades (5.1) y (5.4), y su justificación radica en que en el estado inicial del proceso el centro puede estar infectado o sano, y el tratamiento hecho hasta ahora considera al centro infectado en todo momento. En este sentido, la ecuación 5.1 nos garantiza un estado inicial efectivo en el que el centro se encuentra infectado y la cantidad de hojas infectadas es mayor que  $0,9L_A$ . Entonces (5.1) hace referencia al primer salto que da la cadena comenzando en  $L_A$  cuando comienza el proceso, y la desigualdad (5.4) a los saltos subsiguientes.

Intercambiando  $A$  y  $B$  tendremos un resultado análogo para el caso en que el centro sea de tipo  $B$ . Tomando máximos y mínimos adecuadamente obtenemos el siguiente corolario, que será válido independientemente de si el centro es de tipo  $A$  o de tipo  $B$ :

**Corolario 5.2.** Sean  $T = \min\{T_A, T_B\}$  y  $\beta_{\max} = \max\{\beta_A, \beta_B\}$ . La probabilidad de que un vértice caliente siga encendido durante un tiempo  $T$  es mayor o igual que:

$$1 - 7e^{-\frac{\lambda_A \lambda_B^k}{80\beta_{\max}^2}}$$

*Demostración.* por el lema 5.1 tenemos que para un grafo estrella de centro de tipo  $A$  y hojas de tipo  $B$ ,

$$P_{L_A,i} \left( \inf_{t \leq T} |\xi_t^{L_A}| > 0,4L_A \right) \geq P_{L_A,i} \left( \inf_{t \leq T_A} |\xi_t^{L_A}| > 0,4L_A \right) \geq 1 - 7e^{-\lambda_A \lambda_B k / 80\beta_B^2}.$$

Análogamente, si el centro es de tipo  $B$  y las hojas de tipo  $A$ ,

$$P_{L_B,i} \left( \inf_{t \leq T} |\xi_t^{L_B}| > 0,4L_B \right) \geq P_{L_B,i} \left( \inf_{t \leq T_B} |\xi_t^{L_B}| > 0,4L_B \right) \geq 1 - 7e^{-\lambda_A \lambda_B k / 80\beta_A^2}.$$

En ambos casos la probabilidad es mayor o igual que

$$1 - 7e^{-\frac{-\lambda_A \lambda_B k}{80\beta_{\max}^2}}$$

□

El corolario 5.2 dice que con una alta probabilidad una estrella *caliente* en  $t = 0$  permanecerá encendida durante un tiempo exponencial. El siguiente resultado es complementario ya que nos permite estimar cuánto tardará en calentarse una estrella una vez que el centro se infecta.

**Lema 5.3.** *Sea  $G$  un grafo estrella con centro  $0$  de tipo  $A$  y hojas  $1, 2, \dots, k$  de tipo  $B$ . Sea  $\delta > 0$  y supongamos que  $(\lambda'_{min})^{2+\delta} k \geq 10$ . Denotemos con  $P_{l,i}$  la probabilidad cuando en  $t = 0$  el centro se está en el estado  $i$  y  $l$  hojas están infectadas. Sea  $\tau_0$  el primer tiempo en que  $0$  se cura, y sea  $T_j$  el primer tiempo en que la cantidad de hojas infectadas es igual a  $j$ . Si  $\gamma = \frac{\delta}{4+2\delta}$  y  $K = \frac{\lambda_A k^{1-\gamma}}{4\beta_B}$ , entonces existe una constante  $k_0(\delta)$  tal que si  $k \geq k_0(\delta)$ :*

$$\begin{aligned} P_{0,1}(T_K > \tau_0) &\leq (\beta_A/\beta_B + 1)k^{-\gamma} \\ P_{K,1}(T_0 < T_{L_A}) &\leq \exp\left(\frac{-\lambda_A \lambda_B k^{1-\gamma}}{16\beta_B^2}\right) \leq k^{-\gamma} \\ E_{0,1}(T_{L_A} | T_{L_A} \leq \infty) &\leq 2/\beta_B. \end{aligned}$$

*Demostración.* Página 59

□

Como consecuencia del lema anterior podemos acotar la probabilidad de que un vértice de tipo  $A$  se caliente luego de haber sido infectado.

**Corolario 5.4.** *Bajo las mismas hipótesis que el lema 5.3 tenemos que si infectamos un vértice de tipo  $A$  de grado  $k \geq k_0(\delta)$ , con  $\left(\frac{\lambda_A}{\beta_B}\right)^{2+\delta} k \geq 10$ , el vértice se calienta en  $t \leq k^{-\gamma}$  con probabilidad*

$$\geq 1 - \frac{2 + 2\beta_B + \beta_A}{\beta_B} k^{-\gamma}.$$

*Demostración.* Página 63 □

Si intercambiamos  $A$  y  $B$  en el corolario anterior tenemos que un vértice de tipo  $B$  se calienta en tiempo menor que  $k^\gamma$  luego de haber sido infectado, con probabilidad mayor o igual que  $1 - \frac{2+2\beta_A+\beta_B}{\beta_A} k^{-\gamma}$ . Juntando las dos probabilidades podemos dar un resultado análogo para un vértice genérico:

**Corolario 5.5.** *Sea  $\lambda'_{min} = \min\{\lambda'_A, \lambda'_B\}$  y  $\beta_{min} = \min\{\beta_A, \beta_B\}$ . Si se infecta un vértice de grado  $k$ , con  $(\lambda'_{min})^{2+\delta} k \geq 10$ , este se calentará en un tiempo menor o igual que  $k^\gamma$  con probabilidad mayor o igual que*

$$1 - \frac{2 + 2\beta_A + 2\beta_B}{\beta_{min}} k^{-\gamma}$$

Ahora buscaremos acotar la probabilidad de que un vértice le transfiera la infección a otro vértice

**Lema 5.6.** *Sea  $v_0, v_1, v_2, \dots, v_m$  un camino en el grafo. Entonces la probabilidad de que  $v_0$  infecte a  $v_m$  en un tiempo menor o igual que  $m$  es  $\geq n^{-b}$ , con  $b > 4(\beta_A + \beta_B)$ .*

*Demostración.* Página 64 □

La cota anterior no depende del largo  $m$  de la cadena, por lo que es una cota para la probabilidad de transmisión de la infección entre cualesquiera dos vértices del grafo. Si  $s_1$  es una estrella caliente, por el corolario 5.2 permanecerá encendida durante un tiempo  $T$ . Durante todo ese tiempo habrá vecinos de  $s_1$  infectados que podrán infectar a una estrella  $s_2$  según el lema 5.6. Finalmente combinando con el lema 5.5 tenemos la probabilidad de que otra estrella  $s_2$  se caliente en presencia de  $s_1$  caliente.

**Definición 5.0.1.** Al conjunto de estrellas del grafo lo denotaremos como  $V_n^\varepsilon$ . Más precisamente:

$$V_n^\varepsilon = \{v \in G : g(v) \geq n^\varepsilon\}.$$

**Lema 5.7.** *Sean  $s_1, s_2 \in V_n^\varepsilon$ , con  $s_1$  caliente en  $t = 0$ . Para  $n$  suficientemente grande la probabilidad de que  $s_2$  se caliente en un tiempo  $t \leq T = \exp[n^{\varepsilon/2}]/\beta_{max}$  es mayor o igual que*

$$1 - 8e^{-\lambda_A \lambda_B n^\varepsilon / 80 \beta_{max}^2}$$

*Demostración.* Página 65 □

El siguiente lema nos da la probabilidad de que una estrella encendida vuelva a calentarse luego de un tiempo exponencial.

**Lema 5.8.** *Sea  $s$  una estrella de tipo  $A$  que está encendida en  $t = 0$ . La probabilidad de que  $s$  se caliente en un tiempo menor que  $2 \exp(n^{\varepsilon/3})/\beta_B$  es mayor o igual que*

$$1 - 5e^{-\lambda_A \lambda_B n^{\varepsilon/3}/16\beta_B^2}$$

*Demostración.* Página 66 □

Si  $s$  es un vértice de tipo  $B$ , intercambiando  $A$  y  $B$  en el lema anterior la probabilidad es

$$\geq 1 - 5e^{-\lambda_A \lambda_B n^{\varepsilon/3}/16\beta_A^2}$$

Tenemos entonces el siguiente corolario para un vértice cualquiera.

**Corolario 5.9.** *Sea  $s$  una estrella que está encendida en  $t = 0$ . La probabilidad de que  $s$  se caliente en un tiempo menor que  $2 \exp(n^{\varepsilon/3})/\beta_{\min}$  es mayor o igual que*

$$1 - 5e^{-\lambda_A \lambda_B n^{\varepsilon/3}/16\beta_{\max}^2}.$$

El siguiente lema afirma que si el proceso comienza con todos los vértices infectados, con alta probabilidad  $\frac{3}{4}$  del total de estrellas permanecerán encendidas por un tiempo exponencialmente largo en el número de vértices.

**Lema 5.10.** *Sea  $I_{n,t}^\varepsilon$  el conjunto de estrellas en  $V_n^\varepsilon$  que están encendidas a tiempo  $t$  en el proceso de contacto  $\{\xi_t^1\}_{t \geq 0}$ . Sean  $t_n = 2e^{n^{\varepsilon/2}}/\beta_{\min}$  y  $M_n = \exp(n^{1-\alpha\varepsilon})$ . Entonces existe un tiempo  $T_n \geq M_n t_n$  y  $C > 0$  tal que*

$$P(|I_{n,T_n}^\varepsilon| \leq (3/4)|V_n^\varepsilon|) \leq e^{-Cn^\varepsilon}.$$

*Demostración.* Página 69 □

El lema 5.6 nos dice que un vértice infectado transmitirá la infección a otro con una probabilidad mayor que  $n^{-b}$ , lo cual tiende a cero con  $n$ , y que esto ocurrirá en un tiempo logarítmico (ver demostración). La primera desigualdad del siguiente lema en cierto modo subsana este inconveniente al brindarnos una cota constante para la probabilidad de que la infección comenzando en un vértice con el grado suficiente alcance a una estrella, y lo hace a costa de considerar un tiempo mucho más largo, a saber, exponencial.

**Lema 5.11.** *Sea  $0 < \varepsilon < 1/20(\alpha_A - 1)$ . Entonces existen constantes  $\lambda_0 > 0$ ,  $n_0 < \infty$ ,  $c_0 = c_0(\lambda, \varepsilon)$  y  $p = p(\beta_A, \beta_B)$  tales que si  $T = n^{c_0}$ ,  $v_2$  es un vértice de grado  $\geq (10/\lambda'_{\min})^{2+\delta}$ , con  $0 < \delta < 1$ ,  $v_1$  es un vecino de  $v_2$  y  $\lambda_{\min} \leq \lambda_0$ , entonces*

$$P\left(\xi_T^{\{v_2\}} \cap V_n^\varepsilon\right) \geq \frac{1}{2}, \quad P\left(\xi_{T+1}^{\{v_1\}} \cap V_n^\varepsilon\right) \geq p\lambda'_{\min}$$

*Demostración.* Página 76 □

El lema 5.11 nos da una cota inferior de la probabilidad de que la infección comenzando desde un vecino de un vértice de grado  $(10/\lambda'_{min})^{2+\delta}$  alcance una estrella. El corolario 5.5 nos dice que con probabilidad tendiendo a 1 esa estrella se calentará. Por lo tanto tenemos la siguiente proposición.

**Lema 5.12.** *Sea  $0 < \varepsilon < 1/20(\alpha_A - 1)$ . Entonces existen constantes  $\lambda_0 > 0$ ,  $n_0 < \infty$ ,  $c_1 = c_1(\lambda, \varepsilon)$  y  $p_1 = p_1(\beta_A, \beta_B)$  tales que si  $T' = n^{c_1}$ ,  $v_2$  es un vértice de grado  $\geq (10/\lambda'_{min})^{2+\delta}$ , con  $0 < \delta < 1$ ,  $v_1$  es un vecino de  $v_2$  y  $\lambda_{min} \leq \lambda_0$ , entonces la probabilidad de que en algún  $t_0 \leq T'$ ,  $\xi_{t_0}^{\{v_1\}}$  contenga una estrella caliente es mayor que  $p_1\lambda'_{min}$*

*Demostración.* Página 84 □

El siguiente resultado afirma que una estrella encendida hace que luego de  $T = 2e^{n^{\varepsilon/2}}/\beta_B$  unidades de tiempo  $3/4$  del total de estrellas estarán encendidas.

**Lema 5.13.** *Sea  $I_{n,t}^\varepsilon$  el conjunto de estrellas que están encendidas en tiempo  $t$  en el proceso de contacto tal que  $|I_{n,0}^\varepsilon| = 1$ , y sea  $T = 2e^{n^{\varepsilon/2}}/\beta_B$ . Entonces*

$$P\left(|I_{n,T}^\varepsilon| < \frac{3}{4}|V_n^\varepsilon|\right) \leq 7 \exp\left(\frac{-\lambda_A \lambda_B n^{\varepsilon/3}}{16\beta_{max}^2}\right)$$

*Demostración.* Página 84 □

El siguiente lema es acerca de dos instancias cualesquiera del proceso de contacto que involucren  $n^\delta$  vértices comenzando desde sendos vértices 1 y 2, con  $0 < \delta \leq 1/8$  y nos dice que con alta probabilidad los eventos serán independientes.

**Lema 5.14.** *Sean  $F$  y  $G$  dos eventos que involucran la infección de  $n^\delta$  vértices comenzando de dos vértices 1 y 2 respectivamente, con  $0 < \delta \leq 1/8$ , entonces*

$$|P(F \cap G) - P(F)P(G)| \leq Cn^{-(1/4-\delta)}$$

*Demostración.* Página 86 □

Enunciaremos y demostraremos a continuación el teorema principal de este trabajo, que establece que si en un grafo bipartito con distribución de grado en forma de ley de potencias comenzamos el proceso con *todos* los vértices infectados, este sobrevivirá por un tiempo *casi* exponencial en la cantidad de vértices  $n$ , o sea que habrá una fracción del número total de vértices que permanecerán infectados, aunque en todo ese tiempo los vértices en cuestión no sean los mismos. Con casi exponencial nos referimos a que el exponente de  $n$  no es estrictamente 1 sino que es  $1 - \delta$ , con cualquier  $\delta > 0$ .

**Teorema 5.15.** *Sea el grafo  $G_n$  bipartito con conjuntos de vértices  $A = \{1, 2, \dots, n_A\}$   $B = \{1, 2, \dots, n_B\}$  con grados  $d_i^A$  y  $d_i^B$  que satisfacen  $P(d_i^A = k) \sim C_A k^{-\alpha_A}$  y  $P(d_i^B = k) \sim C_B k^{-\alpha_B}$  para  $k \rightarrow \infty$  con constantes de normalización  $C_A$  y  $C_B$  y  $\alpha_A, \alpha_B > 3$  y  $P(d_i^A \leq 2) = P(d_i^B \leq 2) = 0$ . Sea  $\{\xi_t^1\}_{t \geq 0}$  el proceso de contacto en el grafo  $G_n$  comenzando con todos los vértices infectados, es decir,  $\xi_0^1 = \{1, 2, \dots, n_A\} \cup \{1, 2, \dots, n_B\}$ . Entonces para cualquier valor de las tasas de infección  $\lambda_A, \lambda_B > 0$  hay una constante positiva  $p$  tal que para todo  $\delta > 0$*

$$\inf_{t \leq \exp(n^{1-\delta})} \left\{ P \left( \frac{|\xi_t^1|}{n} \geq p \right) \right\} \rightarrow 1 \quad \text{para } n \rightarrow \infty$$

*Demostración.* Para  $\delta > 0$  sea  $\varepsilon = \min \left\{ \frac{\delta}{\alpha_A}, \frac{1}{20(\alpha_A - 1)} \right\}$ . Sea  $A_n$  el conjunto de vértices de grado  $\geq \frac{10}{(\lambda'_{min})^{2+\delta}}$ . Para  $x \in A_n$  definamos las variables aleatorias  $Y_x$  como  $Y_x = 1$  si el proceso de contacto comenzando en  $x$  enciende una estrella en un tiempo  $t_0 \leq n^{c_1}$ , o sea si existe algún tiempo  $t_0 \leq n^{c_1}$  con  $c_1$  como en el lema 5.12 y una estrella  $s$  que tiene al menos  $0,4L_{min}$  vecinos infectados en  $t_0$ ; y 0 en caso contrario. Como  $\varepsilon \leq \frac{1}{20(\alpha_A - 1)}$ , el lema 5.12 nos dice que

$$E(Y_x) = P(Y_x = 1) \geq p_1 \lambda'_{min}.$$

Cabe aclarar que el lema 5.12 lo que nos da es una cota inferior para la probabilidad de tener una estrella *caliente* ya que eso es lo que nos permite la aplicación de los lemas anteriores, pero como toda estrella caliente está encendida la cota sigue siendo válida en este caso.

Estimemos la cantidad de vértices involucrados en encender una estrella desde  $x \in A_n$ . Para eso exploremos el grafo por pasos a través de sus aristas partiendo desde  $x$  hasta encontrar una estrella. En general, si  $p_k^A$  es la probabilidad de que un vértice de tipo  $A$  tenga grado  $k$  ( $p_k^B$  para vértices  $B$ ), la cantidad de vértices de grado  $k$  es  $n_A p_k^A$  y la cantidad de muñones que tienen en total esos vértices es  $kn_A p_k^A$ , donde  $n_A$  es el número de vértices de tipo  $A$ . Dividiendo por el total de muñones obtenemos la probabilidad  $q_k^A$  de que un muñón pertenezca a un vértice de grado  $k$ , o lo que es

equivalente, que siguiendo una arista al azar lleguemos a un vértice de grado  $k$ :

$$q_k^A = \frac{kn_A p_k^A}{\sum_j j n_A p_j^A} = C k p_k^A,$$

y análogamente para vértices de tipo  $B$ ,  $q_k^B = C' k p_k^B$ .

En nuestro caso  $p_k^A = C_A k^{-\alpha_A}$ , entonces aplicando propiedad para funciones positivas decrecientes que establece que

$$\sum_{k=a}^b f(k) \geq \int_a^b f(x+1) dx,$$

la probabilidad de encontrar una estrella en un paso cualquiera es

$$\begin{aligned} \sum_{k=n^\varepsilon}^{n_B} q_k^A p_k^A + \sum_{k=n^\varepsilon}^{n_A} q_k^B p_k^B &\geq \sum_{k=n^\varepsilon}^{n_B} q_k^A p_k^A = \sum_{k=n^\varepsilon}^{n_B} C k C_A k^{-\alpha_A} \\ &\geq C C_A \int_{n^\varepsilon}^{n_B} (k+1)^{-\alpha_A+1} dk \\ &= \frac{C C_A}{\alpha_A-2} ((n^\varepsilon+1)^{-\alpha_A+2} - (n_B+1)^{-\alpha_A+2}) \\ &= \frac{C C_A}{\alpha_A-2} ((n^\varepsilon+1)^{-\alpha_A+2} - (\mu_B n+1)^{-\alpha_A+2}) = \textcircled{*}. \end{aligned}$$

Aquí sólo hemos usado la hipótesis de distribución de grado de ley de potencias para los vértices de  $A$ , sin embargo la hipótesis análoga para los vértices de  $B$  es una condición necesaria del lema 7.1, resultado accesorio a este teorema, razón por la cual se lo exige para las dos poblaciones.

Si comparamos los exponentes de los dos términos dentro del paréntesis en la última ecuación tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\mu_B n + 1)^{-\alpha_A+2}}{(n^\varepsilon + 1)^{-\alpha_A+2}} = 0$$

ya que  $-\alpha_A + 2 < 0$ . Entonces para  $n$  suficientemente grande,

$$\textcircled{*} \approx \frac{C C_A}{\alpha_A - 2} ((n^\varepsilon + 1)^{-\alpha_A+2}) = \tilde{C} n^{\varepsilon(-\alpha_A+2)},$$

con  $\tilde{C}$  elegido adecuadamente. Entonces al explorar el grafo desde  $x \in A_n$  tenemos que la probabilidad de encontrar una estrella en a lo sumo  $n^{\alpha_A \varepsilon}$  pasos es

$$1 - P(\text{no encontrar}) = 1 - \left(1 - \tilde{C} n^{\varepsilon(-\alpha_A+2)}\right)^{n^{\alpha_A \varepsilon}} \geq 1 - e^{-\tilde{C} n^{2\varepsilon}}$$

o sea que con probabilidad tendiendo a 1 encontraremos una estrella en a lo sumo  $n^{\alpha_A \varepsilon}$  pasos.

Para encontrar una estrella es necesario encontrar primero un vecino de la misma, por lo que la cota anterior vale también para la probabilidad de encontrar un vecino de un estrella. En el proceso de encender una estrella el caso extremo es que  $n^\varepsilon$  vecinos de la estrella involucrados se infecten por vías disjuntas, y en ese caso la cantidad de vértices involucrados es  $n^{(\alpha_A+1)\varepsilon}$  con probabilidad tendiendo a 1 ( $n^{\alpha_A \varepsilon}$  vértices por cada uno de los  $n^\varepsilon$  vecinos), y si las vías de infección no son disjuntas la cantidad de vértices involucrados sólo puede disminuir. En realidad ni siquiera necesitamos infectar  $n^\varepsilon$  vecinos de la estrella, sino sólo a una fracción de ellos, la cantidad suficiente para que la estrella esté encendida.

Sean  $A_x$  y  $A_z$  los eventos en que se encuentra una estrella en menos de  $n^{\alpha_A \varepsilon}$  pasos, partiendo desde  $x$  y  $z$  respectivamente. Como  $\varepsilon \leq \frac{1}{20(\alpha_A-1)}$ , entonces  $\varepsilon(\alpha_A + 1) \leq \frac{1}{8}$  y podemos aplicar el lema 5.14.

$$\begin{aligned}
& |P(Y_x = 1 \cap Y_z = 1) - P(Y_x = 1)P(Y_z = 1)| = \\
& |P(Y_x = 1 \cap Y_z = 1 \cap (A_x \cap A_z)) + P(Y_x = 1 \cap Y_z = 1 \cap (A_x \cap A_z)^c) \\
& - (P(Y_x = 1 \cap A_x) + P(Y_x = 1 \cap A_x^c)) \cdot (P(Y_z = 1 \cap A_z) + P(Y_z = 1 \cap A_z^c))| \\
& \leq |P(Y_x = 1 \cap Y_z = 1 \cap (A_x \cap A_z)) - P(Y_x = 1 \cap A_x)P(Y_z = 1 \cap A_z)| \\
& + |P(Y_z = 1 \cap A_z^c)| + |P(Y_x = 1 \cap A_x^c)| + |P(Y_z = 1 \cap A_z^c)| + 2|P(Y_x = 1 \cap A_x^c)| \\
& \leq Cn^{-(\frac{1}{4}-\delta)} + 5e^{-C'n^{2\varepsilon}} := \theta_n.
\end{aligned}$$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned}
Var \left( \sum_{x \in A_n} Y_x \right) &= E \left( \left( \sum_{x \in A_n} Y_x \right)^2 \right) - \left( E \left( \sum_{x \in A_n} Y_x \right) \right)^2 \\
&= E \left( \sum_{x, y \in A_n} Y_x Y_y \right) - \sum_{x, y \in A_n} E(Y_x)E(Y_y) \tag{5.7} \\
&= \underbrace{\sum_{x \in A_n} (E(Y_x^2) - E(Y_x)^2)}_{\text{menos de } n \text{ términos}} + \underbrace{\sum_{(x \neq y) \in A_n} (E(Y_x Y_y) - E(Y_x)E(Y_y))}_{\text{menos de } n(n-1) \text{ términos}}.
\end{aligned}$$

Como  $Y_x = 0$  o  $Y_x = 1$ , tenemos que  $Y_x = Y_x^2$ . Por lo tanto  $E(Y_x^2) = E(Y_x) = P(Y_x = 1) \leq 1$ , y entonces

$$E(Y_x^2) - E(Y_x)^2 = E(Y_x) - E(Y_x)^2 \leq 1.$$

Además:

$$E(Y_x Y_y) - E(Y_x)E(Y_y) = P(Y_x = 1, Y_y = 1) - P(Y_x = 1)P(Y_y = 1) \leq \theta_n,$$

entonces reemplazando en (5.7) tenemos

$$\text{Var} \left( \sum_{x \in A_n} Y_x \right) \leq n + n(n-1)\theta_n.$$

Sea  $\gamma > 0$ , entonces aplicando la desigualdad de Chebychev tenemos:

$$\begin{aligned} P \left( \left| \sum_{x \in A_n} (Y_x - EY_x) \right| \geq n\gamma \right) &= P \left( \left| \sum_{x \in A_n} Y_x - E \left( \sum_{x \in A_n} Y_x \right) \right| \geq n\gamma \right) \\ &\leq \frac{1}{n^2\gamma^2} \text{Var} \left( \sum_{x \in A_n} Y_x \right) \leq \frac{1}{n^2\gamma^2} (n + n(n-1)\theta_n) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Entonces

$$-n\gamma + \sum_{x \in A_n} EY_x \leq \sum_{x \in A_n} Y_x \leq n\gamma + \sum_{x \in A_n} Y_x$$

y como por el lema 5.12  $\sum_{x \in A_n} EY_x \geq p_1 \lambda'_{min} |A_n|$ , entonces

$$-n\gamma + p_1 \lambda'_{min} |A_n| \leq \sum_{x \in A_n} Y_x$$

con probabilidad tendiendo a 1 para  $n \rightarrow \infty$ .

De la ecuación (7.8) en la demostración del lema 5.11 sacamos que

$$\frac{|A_n|}{n} \geq C \left( \frac{10}{\lambda'_{min}} \right)^{(-\alpha_B - 2)(2+\delta)}$$

y tomando  $p_l = \frac{p_1}{2} \lambda'_{min} C \left( \frac{10}{\lambda'_{min}} \right)^{(-\alpha_B - 2)(2+\delta)}$  tenemos que

$$-n\gamma + 2np_l \leq -n\gamma + p_1 \lambda'_{min} |A_n| \leq \sum_{x \in A_n} Y_x$$

y si tomamos  $\gamma \leq p_l$  tenemos

$$P\left(\sum_{x \in A_n} Y_x \geq np_l\right) \rightarrow 1 \quad (5.8)$$

para  $n \rightarrow \infty$ , o sea que con probabilidad tendiendo a 1 más de  $np_l$  vértices de  $A_n$  podrán encender una estrella.

Sean  $T_1 = n^{c_1}$  como en el lema 5.12,  $T_2 = 2 \exp(n^{\varepsilon/2})/\beta_B$  como en el lema 5.13 y  $T_3 = \inf\left\{t > \exp(n^{1-\alpha_A\varepsilon}) : |I_{n,t}^\varepsilon| \geq \frac{3}{4}|V_n^\varepsilon|\right\}$ . Por el lema 5.10,  $P(T_3 < \infty) \geq 1 - \exp(-Cn^\varepsilon)$ .

Sea  $\mathcal{S} = \{S \subset V : (\xi_t^1 = S \Rightarrow |I_{n,t}^\varepsilon| \geq (3/4)|V_n^\varepsilon|)\}$ , o sea la familia de todos los subconjuntos de vértices que al estar infectados garantizan que habrá mas de  $\frac{3}{4}$  del total de estrellas encendidas.

Cada subconjunto de vértices encenderá una determinada cantidad de estrellas. Llamemos  $I_A$  al conjunto de estrellas que estarán encendidas cuando todos los vértices de  $A$  están infectados. Sea  $T_2 + T_3 \leq T_0 \leq T_1 + T_2 + T_3$  y sea  $M \subset A_n$  un subconjunto cualquiera de  $A_n$ , entonces:

$$\begin{aligned} P(\xi_{T_0}^1 \supset M, T_3 < \infty) &\geq \sum_{S \in \mathcal{S}} P(\xi_{t \leq T_1 + T_2}^S \supset M) P(\xi_{T_3}^1 = S, T_3 < \infty) \\ &= \sum_{S \in \mathcal{S}} P(\xi_{t \leq T_1 + T_2}^S \supset M) P(\xi_{T_3}^1 = S | T_3 < \infty) P(T_3 < \infty) \\ &\geq \sum_{S \in \mathcal{S}} P(\xi_{t \leq T_1 + T_2}^x \cap S \neq \emptyset, \forall x \in M) P(\xi_{T_3}^1 = S | T_3 < \infty) (1 - \exp(-Cn^\varepsilon)) \\ &\geq \sum_{S \in \mathcal{S}} P\left(\xi_{t \leq T_1 + T_2}^x \cap S \neq \emptyset, |I_{\xi_t^x}| \geq \frac{3}{4}|V_n^\varepsilon|, \forall x \in M\right) \cdot \\ &\quad \cdot P(\xi_{T_3}^1 = S | T_3 \leq \infty) (1 - \exp(-Cn^\varepsilon)) \\ &= \sum_{S \in \mathcal{S}} P\left(\xi_{t \leq T_1 + T_2}^x \cap S \neq \emptyset \mid |I_{\xi_t^x}| \geq \frac{3}{4}|V_n^\varepsilon|, \forall x \in M\right) \cdot \\ &\quad \cdot P\left(|I_{\xi_t^x}| \geq \frac{3}{4}|V_n^\varepsilon|, \forall x \in M\right) \cdot \\ &\quad \cdot P(\xi_{T_3}^1 = S | T_3 \leq \infty) (1 - \exp(-Cn^\varepsilon)) = \circledast \end{aligned} \quad (5.9)$$

En la tercera línea de la ecuación anterior usamos la propiedad de *auto dualidad* (sección 4.3): La probabilidad de que todos los vértices de  $M$  estén infectados cuando el proceso comienza con todos los vértices de  $S$  infectados es igual a la probabilidad de que al comenzar con cualquier vértice de  $M$  infectado infectemos uno de  $S$ .

Cada  $S \in \mathcal{S}$  tiene estrellas *asociadas*, que son las que se encienden cuando todo  $S$  está infectado, y por la definición de  $S$  son siempre más de  $\frac{3}{4}$  del total. Con la notación anterior llamemos  $I_S$  a ese conjunto. Si a tiempo  $t$  hay más de  $\frac{3}{4}$  del total de estrellas encendidas, esto es  $|I_{\xi_t^x}| \geq \frac{3}{4}|V_n^\varepsilon|$ , la intersección  $I_{\xi_t^x} \cap I_S$  contendrá al menos a  $\frac{1}{2}$  del total de estrellas, que van a estar asociadas a  $S$ . Eso no quiere decir que las estrellas vayan a estar encendidas por vértices de  $S$  ya que una estrella puede estar encendida por distintos conjuntos de vecinos, no necesariamente pertenecientes a  $S$ . Sin embargo para un  $S$  fijo podemos calcular la probabilidad de que cuando la estrella está encendida haya algún vértice  $v \in S$  infectado.

Sea  $kn^\varepsilon = 0, 4\lambda_{\min} n^\varepsilon$  la cantidad de vértices necesarios para encender una estrella, y por definición sabemos que  $|S| \geq kn^\varepsilon$ . Hay  $\binom{n^\varepsilon}{kn^\varepsilon}$  maneras de elegir esos vértices, y por otro lado hay  $\binom{n^\varepsilon - |S|}{kn^\varepsilon}$  maneras de elegir esos vértices de manera que ninguno pertenezca a  $S$ , por lo tanto la probabilidad de que entre los vértices elegidos no haya ninguno de  $S$  es

$$\leq \frac{\binom{n^\varepsilon - |S|}{kn^\varepsilon}}{\binom{n^\varepsilon}{kn^\varepsilon}} \leq \frac{\binom{n^\varepsilon - kn^\varepsilon}{kn^\varepsilon}}{\binom{n^\varepsilon}{kn^\varepsilon}} = \frac{(n^\varepsilon - kn^\varepsilon)!^2}{(n^\varepsilon - 2kn^\varepsilon)!n^\varepsilon!}$$

y aplicando la acotación para el factorial  $\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n} < n! < \sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n+1}$  [14], lo anterior es

$$\begin{aligned} &\leq \frac{2\pi(n^\varepsilon - kn^\varepsilon)^{2n^\varepsilon - 2kn^\varepsilon + 1}e^{-2n^\varepsilon + 2kn^\varepsilon + 2}}{(n^\varepsilon - 2kn^\varepsilon)^{n^\varepsilon - 2kn^\varepsilon + 1/2}e^{-n^\varepsilon + 2kn^\varepsilon}n^\varepsilon(n^\varepsilon + 1/2)e^{-n^\varepsilon}} \\ &= 2\pi e^2 \frac{(1-k)}{(1-2k)^{1/2}} \left( \frac{(1-k)^{2-2k}}{(1-2k)^{1-2k}} \right)^{n^\varepsilon} \\ &= 4\pi e^2 \left( \frac{1}{1-2k} - \frac{k}{1-2k} \right)^{(1-2k)n^\varepsilon} \\ &\leq 4\pi e^2 \left( 1 - \frac{k}{1-2k} \right)^{(1-2k)n^\varepsilon} \\ &\leq 4\pi e^2 e^{-kn^\varepsilon} = C' e^{-kn^\varepsilon} \end{aligned}$$

entonces la probabilidad de que al estar encendida la estrella haya algún vértice de  $S$  infectado es

$$\geq 1 - C' e^{-kn^\varepsilon}, \quad (5.10)$$

Si  $Y_x = 1$  el lema 5.12 nos dice que el proceso comenzando en  $x$  calienta una estrella en  $t_0 \leq T_1 = n^{c_1}$ . Por el lema 5.13 luego de  $T_2 = 2e^{n^{\varepsilon/2}}/\beta_B$  unidades de tiempo, o sea en  $t_0 + T_2 \leq T_1 + T_2$ , habrá más de  $\frac{3}{4}$  del total de estrellas encendidas con probabilidad  $\geq 1 - 7 \exp\left(\frac{-\lambda_A \lambda_B n^{\varepsilon/3}}{16\beta_{max}^2}\right)$  y entonces la probabilidad de que esto ocurra para todos los  $x \in M$  es

$$\geq 1 - 7|M| \exp\left(\frac{-\lambda_A \lambda_B n^{\varepsilon/3}}{16\beta_{max}^2}\right) \quad (5.11)$$

Por lo tanto sustituyendo por (5.10) y (5.11) en la ecuación (5.9) y poniendo  $t = t_0 + T_2$  tenemos

$$\begin{aligned} \circledast &\geq \sum_{S \in \mathcal{S}} (1 - C' e^{-kn^\varepsilon}) P(Y_x = 1, \forall x \in M) \cdot \\ &\quad \cdot (1 - 7|M| \exp\left(\frac{-\lambda_A \lambda_B n^{\varepsilon/3}}{16\beta_B^2}\right)) P(\xi_{T_3}^1 = S | T_3 < \infty) (1 - e^{-Cn^\varepsilon}) \\ &= (1 - C' e^{-kn^\varepsilon}) (1 - e^{-Cn^\varepsilon}) P(Y_x = 1, \forall x \in M) \cdot \\ &\quad \cdot (1 - 7|M| \exp\left(\frac{-\lambda_A \lambda_B n^{\varepsilon/3}}{16\beta_B^2}\right)) \sum_{S \in \mathcal{S}} P(\xi_{T_3}^1 = S | T_3 < \infty) \\ &\geq (1 - C' e^{-kn^\varepsilon} - e^{-Cn^\varepsilon}) P(Y_x = 1, \forall x \in M) (1 - 7|M| \exp\left(\frac{-\lambda_A \lambda_B n^{\varepsilon/3}}{16\beta_{max}^2}\right)) \\ &= P(Y_x = 1, \forall x \in M) \text{ en el límite con } n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Como  $\varepsilon \leq \frac{\delta}{\alpha_A}$  entonces  $\exp(n^{1-\delta}) \leq \exp(n^{1-\varepsilon\alpha_A}) \leq T_3$ , y aplicando el teorema (4.4) podemos concluir:

$$\begin{aligned} \inf_{t \leq \exp(n^{1-\delta})} P\left(\frac{|\xi_t^1|}{n} > p_l\right) &\geq \inf_{t \leq T_3} P\left(\frac{|\xi_t^1|}{n} > p_l\right) \geq \inf_{t \leq T_0} P\left(\frac{|\xi_t^1|}{n} > p_l\right) \\ &= P\left(\frac{|\xi_{T_0}^1|}{n} > p_l\right) \geq P\left(\xi_{T_0}^1 \supset \{x \in A_n : Y_x = 1\}, \sum_{x \in A_n} Y_x \geq np_l\right) \end{aligned}$$

$$\geq P \left( \xi_{T_0}^1 \supset \{x \in A_n : Y_x = 1\} \mid \sum_{x \in A_n} Y_x \geq np_l \right) P \left( \sum_{x \in A_n} Y_x \geq np_l \right) = \circledast.$$

Aplicando la ecuación (5.12) para  $M = \{x \in A_n : Y_x = 1\}$  la cual es válida para cualquier conjunto de vértices independientemente de su tamaño, y recordando la ecuación (5.8) tenemos que

$$\circledast = P \left( \xi_{T_0}^1 \supset M \mid |M| \geq np_l \right) P(|M| \geq np_l) \longrightarrow P(Y_x = 1, \forall x \in M) = 1$$

para  $n \longrightarrow \infty$ . □

Hemos demostrado que el proceso de contacto con una configuración inicial de todos los vértices infectados sobrevive durante un tiempo exponencial en una fracción significativa del total de vértices. Para hacer esto hemos estudiado el tiempo que una estrella caliente permanece encendida (lema 5.1) y la probabilidad de que una estrella se caliente (corolarios 5.5 y 5.9). En el lema 5.7 estudiamos la probabilidad de que una estrella caliente le transmita la infección a otra estrella y en el lema 5.10 vimos que habiendo comenzado con todos los vértices infectados, durante un tiempo suficientemente largo  $\frac{3}{4}$  del total de estrellas permanecerán encendidas. Por otro lado, en el lema 5.13 lo que se demuestra es que comenzando con una sola estrella encendida, luego de un tiempo suficientemente largo  $\frac{3}{4}$  del total de estrellas estarán encendidas. De esta manera el lema 5.13 relaja la condición acerca del estado inicial pero a costa de considerar un tiempo mucho menor que el lema 5.10. Finalmente la probabilidad de que la infección comenzando desde un vértice con el grado suficiente haga que una estrella se encienda viene dada por el lema 5.12.

Los lemas y corolarios mencionados nos permiten describir una dinámica de la infección en la que las estrellas juegan un papel vital. Al estar calientes, las estrellas garantizan una alta cantidad de vértices infectados que servirán para propagar la infección por el resto del grafo, y los tiempos en que estas permanecerán encendidas nos garantizan la supervivencia de la infección a lo largo del tiempo.



# Capítulo 6

## Conclusión

Los modelos epidémicos presentan un umbral epidémico para la tasa de propagación de la infección. Para tasas de propagación por encima de ese umbral la infección sobrevivirá en el tiempo e infectará a una porción significativa de la población, mientras que para tasas menores la infección no llegará a infectar a una fracción significativa de la población. El umbral epidémico se puede encontrar analíticamente para los métodos basados en ecuaciones diferenciales y para el método de campo medio (sección 1), mientras que para el proceso de contacto se hace una definición análoga en la cual el umbral epidémico es un valor para la tasa de infección a partir del cual la infección sobrevive durante un tiempo exponencial en la cantidad de vértices en una porción significativa de la población. En particular es de interés cuándo ese umbral es cero, ya que en ese caso la infección sobrevivirá en la población, independientemente de su tasa de propagación. Chatterjee y Durrett [5] demostraron que el umbral epidémico es cero para redes con distribución de grado de ley de potencias en las cuales el proceso comienza con todos los vértices infectados y en el presente trabajo se extendió ese resultado a redes bipartitas, resultado que quedó plasmado en el teorema 5.15.

La dinámica descrita en la demostración del teorema 5.15 abre la puerta a distintos interrogantes acerca de si se pueden relajar ciertas hipótesis, como qué pasará si no se comienza con todos los vértices infectados en el estado inicial, o análogamente qué pasará si además de los  $n$  vértices que están infectados en el estado inicial existe otra cantidad de vértices proporcional a  $n$  que no estén infectados hacia los cuales se puede propagar la infección. Otro interrogante que se plantea es si se puede obtener un resultado análogo si en una de las poblaciones los grados de los vértices siguen otra distribución distinta a la de ley de potencias.

Una última observación es acerca de las tasas de infección y curación. Al comienzo del

capítulo 5 se establece como hipótesis que  $\lambda_i \leq \beta_j$ , con  $i, j = 1, 2$ , o sea que las tasas de curación sean mayores que las tasas de infección. Esto no plantea contradicciones ya que intuitivamente podemos deducir que si la infección sobrevive con tasas de infección menores a las tasas de curación, más aún lo hará si las tasas de infección son mayores. De la misma manera acerca del  $\lambda_{min}$ , el cual en el lema 5.11 necesita ser *suficientemente chico*. Nuevamente no plantea ninguna contradicción ya que este trabajo justamente lo que plantea es que en los grafos estudiados el umbral epidémico es cero, o sea que la infección sobrevivirá independientemente del valor de  $\lambda_{min}$  e intuitivamente podemos deducir que si la infección sobrevive con una tasa muy chica de infección, más aún lo hará si dicha tasa es mayor.

# Capítulo 7

## Apéndice: demostraciones y resultados auxiliares

**Demostración lema 5.3.** Sea  $p_0(t)$  la probabilidad de que una hoja esté infectada a tiempo  $t$  cuando el centro permaneció infectado para todos los tiempos  $s \leq t$

La probabilidad de que una hoja se infecte en  $0 \leq t \leq \Delta t$  es

$$\int_0^{\Delta t} \lambda_A e^{-\lambda_A t} dt = 1 - e^{-\lambda_A \Delta t} \approx \lambda_A \Delta t$$

para  $\Delta t \rightarrow 0$ . Análogamente, una hoja infectada se cura en  $0 \leq t \leq \Delta t$  con probabilidad  $\beta_B \Delta t$ . Entonces

$$p_0(t + \Delta t) = (1 - p_0(t))\lambda_A \Delta t + p_0(t)(1 - \beta_B \Delta t)$$

y haciendo  $\Delta t \rightarrow 0$  tenemos

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = \lambda_A - (\lambda_A + \beta_B)p_0(t)$$

y entonces

$$p_0(t) = \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \beta_B} (1 - e^{-(\lambda_A + \beta_B)t}).$$

**Primera desigualdad:** La cantidad de hojas que se infectan cuando el centro está infectado sigue una distribución binomial ya que por la independencia de las infecciones estudiar  $K$  hojas es equivalente a repetir el experimento  $K$  veces con una sola hoja. Entonces

$$P_{0,1}(T_K \leq \tau_0) \geq P\left(\text{Bin}\left[k, p_0\left(\frac{k^{-\gamma}}{\beta_B}\right)\right] > K\right) P\left(\tau_0 > \frac{k^{-\gamma}}{\beta_B}\right)$$

Sea  $0 \leq x \leq a \leq 1$ , entonces  $e^{-x} \leq 1 - (1 - 2a/3)x$ . Si  $k^\gamma > \frac{8}{3}$ , y como  $\left(\frac{\lambda_A}{\beta_B} + 1\right) < 2$ , entonces  $\left(\frac{\lambda_A}{\beta_B} + 1\right) k^{-\gamma} < \frac{3}{4}$ , y poniendo  $x = \left(\frac{\lambda_A}{\beta_B} + 1\right) k^{-\gamma}$  y  $a = \frac{3}{4}$  tenemos:

$$\begin{aligned} p_0 \left( \frac{k^{-\gamma}}{\beta_B} \right) &= \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \beta_B} \left( 1 - e^{-(\lambda_A + \beta_B) \frac{k^{-\gamma}}{\beta_B}} \right) \\ &\geq \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \beta_B} \left( 1 - \left( 1 - \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \right) \left( \frac{\lambda_A}{\beta_B} + 1 \right) k^{-\gamma} \right) \right) \\ &= \frac{\lambda_A k^{-\gamma}}{2\beta_B} \end{aligned}$$

Sean  $p = p_0 \left( \frac{k^{-\gamma}}{\beta_B} \right)$  y  $\theta > 0$ . Aplicando la desigualdad de Markov tenemos:

$$\begin{aligned} P(\text{Bin}[k, p] \leq K) &= P(e^{-\theta \text{Bin}[k, p]} \geq e^{-\theta K}) \\ &\leq e^{\theta K} E(e^{-\theta \text{Bin}[k, p]}) \\ &= e^{\theta K} \sum_{m=0}^k e^{-m\theta} \binom{k}{m} p^m (1-p)^{k-m} = \textcircled{*}. \end{aligned}$$

Usando el *Teorema del Binomio*  $(x + y)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^{n-j} y^j$  en la ecuación anterior tenemos

$$\begin{aligned} \textcircled{*} &= e^{\theta K} (1 - p + pe^{-\theta})^k \leq e^{\theta K} \left( \exp(e^{-\theta} - 1) \frac{\lambda_A k^{-\gamma}}{2\beta_B} \right)^k \\ &= \exp \left( \theta K + (e^{-\theta} - 1) \frac{\lambda_A k^{-\gamma+1}}{2\beta_B} \right) \quad (7.1) \\ &= \exp \left( \frac{\theta \lambda_A k^{1-\gamma}}{4\beta_B} + (e^\theta - 1) \frac{\lambda_A k^{1-\gamma}}{2\beta_B} \right) \end{aligned}$$

Tomando  $\theta = \frac{1}{2}$  y usando que  $e^{-\frac{1}{2}} - 1 \leq -\frac{1}{3}$  la ecuación (7.1) queda menor o igual que

$$\exp \left( \frac{\lambda_A k^{1-\gamma}}{8\beta_B} - \frac{\lambda_A k^{1-\gamma}}{6\beta_B} \right) = \exp \left( \frac{-\lambda_A k^{1-\gamma}}{24\beta_B} \right) \leq \exp \left( -\frac{k^{\frac{1}{2}}}{8\beta_B} \right),$$

donde en la última desigualdad usamos la condición  $\lambda_A^{2+\delta} k \geq 10$ .

Si  $k^{\frac{1}{2}-\gamma} \geq 8\gamma \log(k)$ , entonces  $\exp\left(-\frac{k^{\frac{1}{2}-\gamma}}{8}\right) \leq k^{-\gamma}$  y entonces

$$P(\text{Bin}[k, p] > K) \geq 1 - \exp\left(\frac{k^{-\frac{1}{2}-\gamma}}{8}\right) \geq 1 - k^{-\gamma} \quad (7.2)$$

Por otro lado tenemos:

$$\begin{aligned} P\left(\tau_0 > \frac{k^{-\gamma}}{\beta_B}\right) &= \int_{\frac{k^{-\gamma}}{\beta_B}}^{\infty} \beta_A e^{-\beta_A t} dt \\ &\geq 1 - \frac{\beta_A}{\beta_B} k^{-\gamma} \end{aligned} \quad (7.3)$$

y juntando las ecuaciones 7.2 y 7.3 tenemos:

$$\begin{aligned} P_{0,1}(T_K < \tau_0) &\geq (1 - k^{-\gamma}) \left(1 - \frac{\beta_A}{\beta_B} k^{-\gamma}\right) \\ &\geq 1 - \left(\frac{\beta_A}{\beta_B} + 1\right) k^{-\gamma}, \end{aligned}$$

o lo que es lo mismo:

$$P_{0,1}(T_K \geq \tau_0) \leq \left(\frac{\beta_A}{\beta_B} + 1\right) k^{-\gamma}$$

**Segunda desigualdad:** Consideremos la supermartingala  $\{e^{\theta Y_t}\}$  como en la demostración del lema 5.1, y sea  $q = P_{K,1}(T_0 \leq T_{L_A})$  la probabilidad de que la cadena  $\{Y_t\}$  alcance el intervalo  $(-\infty; 0]$  antes que el valor  $L_A$ , habiendo comenzado en  $K$ . Sean los *tiempos de paro*  $\tau$  dados por  $Y_\tau = 0$  e  $Y_\tau = L_A$  entonces

$$q \leq q + (1 - q)e^{\theta L_A} = E[e^{\theta \tau}] \leq e^{\theta K}$$

donde en la última desigualdad usamos nuevamente el teorema de paro opcional.

Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} q \leq e^{\theta K} &= \left(1 + \frac{\lambda_B}{2\beta_B}\right)^{-K} \leq \exp\left(-\frac{\lambda_B K}{4\beta_B}\right) = \exp\left(\frac{-\lambda_A \lambda_B k^{1-\gamma}}{16\beta_B^2}\right) \\ &\leq e^{\frac{-k^\gamma}{16}} \leq k^{-\gamma} \end{aligned}$$

Donde la anteúltima desigualdad se cumple ya que  $\left(\frac{\lambda_A}{\beta_B}\right)^{2+\delta} k \geq 10$  y

$\left(\frac{\lambda_B}{\beta_A}\right)^{2+\delta} k \geq 10$ , y la última se cumple si  $k^\gamma \geq 68$ .

Entonces dado que  $\gamma$  por definición es función de  $\delta$  podemos decir que para  $k \geq k_0(\delta)$ :

$$P_{K,1}(T_0 < T_{L_A}) \leq k^{-\gamma}$$

**Tercera desigualdad** Para acotar  $E_{0,1}(T_{L_A} | T_{L_A} \leq \infty)$  recordemos la cadena  $\{Y_t\}$  del lema 5.1. Tenemos

$$\begin{aligned} E(Y_{t+dt} - Y_t) &= -\frac{\lambda_A k}{4} dt + \frac{3\lambda_A k}{4} dt - \sum_{j=0}^{\infty} j P(N = j) \beta_A dt \\ &= \frac{\lambda_A k}{2} dt - \sum_{j=0}^{\infty} j \left(\frac{\beta_B}{\lambda_A + \beta_B}\right)^j \frac{\lambda_B}{\lambda_B + \beta_B} \beta_A dt \\ &= \frac{\lambda_A k}{2} dt - \frac{\beta_B \beta_A}{\lambda_B} dt \\ &= \left(\frac{\lambda_A \lambda_B k - 2\beta_A \beta_B}{2\lambda_B}\right) dt \end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{E(Y_{t+dt} - Y_t)}{dt} = \frac{E(Y_{t+dt}) - E(Y_t)}{dt} = \frac{\lambda_A \lambda_B k - 2\beta_A \beta_B}{2\lambda_B}$$

y tomando límite

$$E'(Y_t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{E(Y_{t+dt}) - E(Y_t)}{dt} = \frac{\lambda_A \lambda_B k - 2\beta_A \beta_B}{2\lambda_B}$$

Por lo tanto

$$E(Y_t) = \left(\frac{\lambda_A \lambda_B k - 2\beta_A \beta_B}{2\lambda_B}\right) t.$$

La cadena  $Z_t = Y_t - \left(\frac{\lambda_A \lambda_B k - 2\beta_A \beta_B}{2\lambda_B}\right) t$  es claramente una martingala. Sea el *tiempo de paro*  $T_{L_A}^Y \wedge t$  donde  $T_{L_A}^Y$  es el tiempo de llegada a  $L_A$  en la cadena  $\{Y_t\}$ , entonces por el *teorema de paro opcional*

$$E(Y_{T_{L_A}^Y \wedge t}) - \left(\frac{\lambda_A \lambda_B k - 2\beta_A \beta_B}{2\lambda_B}\right) E(T_{L_A}^Y \wedge t) = E(Y_0) = 0$$

ya que estamos estudiando el proceso comenzando con cero hojas infectadas.

Por definición de  $T_{L_A}^Y$  sabemos que  $E(Y_{T_{L_A}^Y \wedge t}) \leq L_A$ , entonces

$$\begin{aligned} E(T_{L_A}^Y \wedge t) &= \frac{2\lambda_B}{\lambda_A \lambda_B k - 2\beta_A \beta_B} E(Y_{T_{L_A}^Y \wedge t}) \\ &\leq \frac{2\lambda_B}{\lambda_A \lambda_B k - 2\beta_A \beta_B} \frac{\lambda_A k}{4\beta_B} \\ &\leq \frac{1}{\beta_B} \end{aligned}$$

ya que por hipótesis  $(\lambda'_{\min})^2 k \geq 4$ . Entonces tomando límite con  $t \rightarrow \infty$  tenemos  $E(T_{L_A}^Y) \leq \frac{1}{\beta_B}$ .

Como  $Y_t$  es una cota inferior para el número de hojas infectadas (así lo vimos en el lema 5.1),  $T_{L_A} \mathbf{1}_{[T_{L_A} < \infty]}$ , entonces

$$\begin{aligned} E_{0,1}[T_{L_A} | T_{L_A} < \infty] &= \frac{E_{0,1}(T_{L_A} \mathbf{1}_{[T_{L_A} < \infty]})}{P_{0,1}(T_{L_A} < \infty)} \\ &\leq \frac{E_{0,1}(T_{L_A}^Y)}{P_{0,1}(T_K \leq \tau_0) P_{K,1}(T_{L_A} < T_0)} \\ &\leq \frac{1/\beta_B}{(1 - \beta_A/\beta_B k^{-\gamma} - k^{-\gamma})(1 - k^{-\gamma})} \\ &\leq \frac{2}{\beta_B} \end{aligned}$$

□

**Demostración corolario 5.4.**

$$\begin{aligned}
P_{0,1}(T_{L_A} < \infty) &\geq P_{0,1}(T_{L_A} < T_0) \\
&\geq P_{0,1}(T_K < \tau_0)P_{K,1}(T_{L_A} < T_0) \\
&\geq \left(1 - \left(1 + \frac{\beta_A}{\beta_B}\right) k^{-\gamma}\right) (1 - k^{-\gamma}) \\
&= 1 - k^{-\gamma} - \left(1 + \frac{\beta_A}{\beta_B}\right) k^{-\gamma} + \left(1 + \frac{\beta_A}{\beta_B}\right) k^{-2\gamma} \\
&\geq 1 - \left(2 + \frac{\beta_A}{\beta_B}\right) k^{-\gamma}
\end{aligned}$$

En  $T_{L_A}$  el vértice se calienta, calculemos la probabilidad de que esto ocurra en un tiempo menor o igual que  $k^\gamma$ :

$$\begin{aligned}
P_{0,1}(T_{L_A} \leq k^\gamma) &= P_{0,1}(T_{L_A} \leq k^\gamma | T_{L_A} < \infty) P(T_{L_A} < \infty) \\
&\geq \left(1 - \frac{E_{0,1}(T_L | T_L < \infty)}{k^\gamma}\right) P(T_{L_A} < \infty) \\
&\geq \left(1 - \frac{2}{\beta_B k^\gamma}\right) \left(1 - \left(2 + \frac{\beta_A}{\beta_B}\right) k^{-\gamma}\right) \\
&= 1 - \left(\frac{2}{\beta_B} + 2 + \frac{\beta_A}{\beta_B}\right) k^{-\gamma} + \frac{2}{\beta_B k^\gamma} \left(2 + \frac{\beta_A}{\beta_B}\right) k^{-\gamma} \\
&\geq 1 - \frac{2+2\beta_B+\beta_A}{\beta_B} k^{-\gamma},
\end{aligned}$$

donde en la primera desigualdad usamos la desigualdad de Markov, y en la segunda la tercera desigualdad del lema 5.3. Tenemos entonces que si infectamos un vértice de grado  $k \geq k_0(\delta)$ , con  $\left(\frac{\lambda_A}{\beta_B}\right)^{2+\delta} k \geq 10$ , el vértice se calienta en  $t \leq k^{-\gamma}$  con probabilidad mayor ó igual que  $1 - \frac{2+2\beta_B+\beta_A}{\beta_B} k^{-\gamma}$

□

**Demostración lema 5.6.** Sea  $v_i$  un vértice de tipo  $A$  y  $V_{i+1}$  un vértice de tipo  $B$ . Si comenzamos en tiempo  $t = 0$  con  $v_i$  infectado la probabilidad de que siga infectado hasta  $t = 1$  es

$$P = \int_1^\infty \beta_A e^{-\beta_A t} dt = e^{-\beta_A}$$

La probabilidad de que  $v_i$  le transfiera la infección a  $v_{i+1}$  en tiempo  $t \leq 1$  es

$$1 - \int_1^\infty \lambda_A e^{-\lambda_A t} dt = 1 - e^{-\lambda_A}.$$

la probabilidad de que  $v_{i+1}$  permanezca infectado hasta  $t = 1$  es mayor que la probabilidad de que permanezca infectado una unidad de tiempo, y esta probabilidad es

$$e^{-\beta_B}.$$

Juntando las probabilidades anteriores tenemos que si  $v_i$  está infectado en tiempo  $t = 0$ , la probabilidad de que  $v_{i+1}$  esté infectado en tiempo  $t = 1$  es mayor o igual que

$$e^{-\beta_A} (1 - e^{-\lambda_A}) e^{-\beta_B}.$$

Si  $v_i$  es un vértice de tipo  $B$  y  $v_{i+1}$  un vértice de tipo  $A$ , intercambiando los índices la expresión anterior es

$$e^{-\beta_B} (1 - e^{-\lambda_B}) e^{-\beta_A}.$$

Como hay  $m$  vértices, tendremos a lo sumo uno menos que  $\lceil \frac{m}{2} \rceil$  eventos de transmisión de  $A$  a  $B$  y uno menos que  $\lceil \frac{m}{2} \rceil$  eventos de transmisión de  $B$  a  $A$ . Por lo tanto la probabilidad de que  $v_m$  esté infectado en tiempo  $m$  habiendo comenzado con  $v_0$  infectado es mayor o igual que

$$\begin{aligned} & (e^{-\beta_A} (1 - e^{-\lambda_A}) e^{-\beta_B})^{\lceil \frac{m}{2} \rceil} (e^{-\beta_B} (1 - e^{-\lambda_B}) e^{-\beta_A})^{\lceil \frac{m}{2} \rceil} \\ & \geq (e^{-2(\beta_A + \beta_B)} (1 - e^{-\lambda_A}) (1 - e^{-\lambda_B}))^m \\ & \geq (e^{-2(\beta_A + \beta_B)} (1 - e^{-\lambda_A}) (1 - e^{-\lambda_B}))^{2 \log n} \\ & = n^{-b}, \end{aligned}$$

con  $b = -2 \log (e^{-2(\beta_A + \beta_B)} (1 - e^{-\lambda_A}) (1 - e^{-\lambda_B})) \geq 4(\beta_A + \beta_B)$ , y donde en la segunda desigualdad hemos usado el hecho de que el diámetro del grafo es menor que  $2 \log n$ , resultado probado por Chatterjee y Durrett en 2009 [5] para grafos aleatorios y cuya extensión al caso bipartito tomaremos como conjetura.

□

**Demostración lema 5.7.** Por el corolario 5.2  $s_1$  permanecerá encendida durante un tiempo  $T$  de orden  $\exp(cn^\varepsilon)$  con probabilidad mayor o igual que  $1 - 7 \exp[-\lambda_A \lambda_B k / 80 \beta_{max}^2]$ , ya que el tiempo  $T$  que estamos considerando es menor

que el tiempo del corolario 5.2. Durante todo ese tiempo habrá vecinos de  $s_1$  que estarán infectados y podrán infectar a  $s_2$  según el mecanismo descrito en 5.7 con probabilidad mayor o igual que  $n^{-b}$ .

Dividamos el intervalo  $[0; T]$  en  $T/2n^{\varepsilon/3}$  intervalos de ancho  $2n^{\varepsilon/3}$ . Usando el corolario 5.5 con  $k = n^\varepsilon$  y  $\gamma = \frac{1}{3}$  y el lema 5.6 tenemos que la probabilidad de que en tiempo menor o igual que  $2n^{\varepsilon/3}$   $s_2$  resulte infectada y se caliente es mayor o igual que:

$$n^{-b} (1 - 5n^{-1/3}) \geq Cn^{-b}.$$

Entonces la probabilidad de que  $s_2$  se caliente en alguno de los  $T/2n^{\varepsilon/3}$  intervalos es mayor o igual que

$$\begin{aligned} 1 - (1 - Cn^{-b})^{T/2n^{\varepsilon/3}} &\geq 1 - \exp\left[\frac{-Cn^{-b}e^{n^{\varepsilon/2}}}{2n^{\varepsilon/3}\beta_{max}}\right] \\ &\geq 1 - \exp\left[\frac{-\lambda_A\lambda_B n^\varepsilon}{80\beta_{max}^2}\right] \end{aligned}$$

Por lo tanto la probabilidad de que  $s_2$  se caliente en tiempo menor que  $T$  es mayor o igual que

$$\left(1 - 7 \exp\left[\frac{-\lambda_A\lambda_B n^\varepsilon}{80\beta_{max}^2}\right]\right) \left(1 - \exp\left[\frac{-\lambda_A\lambda_B n^\varepsilon}{80\beta_{max}^2}\right]\right) \geq 1 - 8 \exp\left[\frac{-\lambda_A\lambda_B n^\varepsilon}{80\beta_{max}^2}\right]$$

□

**Demostración lema 5.8.** Como  $s$  está encendida tiene al menos  $\lambda_A n^\varepsilon / 10\beta_B$  vecinos infectados. Supongamos que el centro no está infectado en tiempo 0, y estudiemos la cantidad de hojas infectadas que se curan hasta que el centro se infecta. Nos interesa que sean como máximo  $M = \lambda_A n^\varepsilon / 20\beta_B$ . De la misma manera que en la demostración del lema 5.1, si  $N$  es la cantidad de hojas que se curan cuando el centro está sano,

$$P(N = j) = \left(\frac{\beta_B}{\lambda_B + \beta_B}\right)^j \frac{\lambda_B}{\lambda_B + \beta_B},$$

y entonces

$$P(N > 0, 1L_A) \leq \left(\frac{\lambda_B}{\beta_B} + 1\right)^{-0,1L_A} \leq e^{-\frac{\lambda_B L_A}{20\beta_B}} = e^{-\frac{\lambda_B \lambda_A n^\varepsilon}{80\beta_B^2}}.$$

Calculemos la distribución de los tiempos  $t_i$ , donde  $t_i$  es el tiempo transcurrido entre la  $i$ -ésima curación de hoja y la anterior. Sea  $a > 0$  y  $\tau_0$  el tiempo que tarda el centro

en infectarse. Teniendo en cuenta que en este punto hay más de  $2M - (i - 1)$  vecinos infectados tenemos:

$$\begin{aligned} P(t_i > a, \tau_0 > a) &= P(t_i > a)P(\tau_0 > a) \\ &\geq e^{-\beta_B a(2M-i)} e^{-\lambda_B a(2M-i)} \\ &= e^{-(2M-i)(\lambda_B + \beta_B)a}, \end{aligned}$$

entonces los  $t_i$  tienen media menor o igual que:

$$\frac{1}{-(2M - i)(\lambda_B + \beta_B)} \leq \frac{1}{M\beta_B}.$$

Sea  $T_M$  el tiempo que tardan en curarse  $M$  hojas (con el centro sano).  $T_M = \sum_{i=1}^M t_i$ , y cada  $t_i$  sigue una distribución exponencial de parámetro  $p_i$  mayor o igual que  $M\beta_B$ .

Sea  $S_M = \sum_{i=1}^M p_i t_i$ . Esto es una suma de  $M$  variables aleatorias exponenciales de media 1, y por lo tanto varianza 1, y entonces  $E(S_M) = Var(S_M) = M$ . Además  $S_M \geq M\beta_B T_M$ .

Entonces para  $T_M$  tenemos:

$$\begin{aligned} P(T_M > \exp(n^{\epsilon/3})/\beta_B) &\leq P(S_M \geq M \exp(n^{\epsilon/3})) \\ &\leq \frac{M}{M^2(\exp(n^{\epsilon/3}) - 1)^2} \\ &\leq \frac{4}{M \exp(2n^{\epsilon/3})} \\ &\leq \exp(-\lambda_A \lambda_B n^{\epsilon/3} / 16\beta_B^2), \end{aligned}$$

donde en las tres últimas desigualdades hemos usado la Desigualdad de Chevychev,  $M > 4$ , y  $\lambda_A \lambda_B / \beta_B^2 \leq 32$ , respectivamente.

Nos interesa que el tiempo  $\tau_0$  en que se infecta el centro sea menor o igual que  $t_n = e^{n^{\epsilon/3}}/\beta_B$  y que en ese tiempo se hayan curado menos de  $M$  hojas, calculemos esa probabilidad:

Tenemos que

$$\begin{aligned}
 P(\tau_0 \geq t_n | T_M > \tau_0) &= \frac{P(T_M > \tau_0 > t_n)}{P(T_M > \tau_0)} \\
 &= P(\min\{\tau_0, T_M\} > t_n) \\
 &\leq P(T_M \geq t_n).
 \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 &P(\tau_0 \leq t_n | T_M > \tau_0) P(T_M > \tau_0) \\
 &= (1 - P(\tau_0 \geq t_n | T_M > \tau_0)) P(T_M > \tau_0) \\
 &\geq (1 - P(T_M > t_n)) P(T_M > \tau_0) \\
 &\geq \left(1 - \exp\left(\frac{-\lambda_A \lambda_B n^{\varepsilon/3}}{16\beta_B^2}\right)\right) P\left(N \leq \frac{\lambda_A n^\varepsilon}{20\beta_B}\right) \tag{7.4} \\
 &\geq \left(1 - \exp\left(\frac{-\lambda_A \lambda_B n^{\varepsilon/3}}{16\beta_B^2}\right)\right)^2 \\
 &\geq 1 - 2 \exp\left(\frac{-\lambda_A \lambda_B n^{\varepsilon/3}}{16\beta_B^2}\right)
 \end{aligned}$$

Tomando  $k = n^\varepsilon$  y  $\delta = \frac{1}{3}$  en la segunda desigualdad del lema 5.3 tenemos:

$$P_{K,1}(T_0 < T_{L_A}) \leq \exp\left(\frac{-\lambda_A \lambda_B n^{2\varepsilon/3}}{16\beta_B^2}\right).$$

Ahora bien, si  $\delta = \frac{1}{3}$  tenemos  $K = \frac{\lambda_A n^{2\varepsilon/3}}{4\beta_B}$ , y entonces  $M > K$ . Entonces

$$\begin{aligned}
 P_{M,1}(T_0 < T_{L_A}) &\leq P_{K,1}(T_0 < T_{L_A}) \\
 &\leq \exp\left(\frac{-\lambda_A \lambda_B n^{2\varepsilon/3}}{16\beta_B^2}\right) \tag{7.5} \\
 &\leq \exp\left(\frac{-\lambda_A \lambda_B n^{\varepsilon/3}}{16\beta_B^2}\right),
 \end{aligned}$$

o sea que si  $s$  está infectado y tiene al menos  $M$  vecinos infectados, este se calentará

con probabilidad mayor o igual que

$$1 - \exp\left(\frac{-\lambda_A \lambda_B n^{\varepsilon/3}}{16\beta_B^2}\right).$$

Sea  $T_s$  el tiempo que tarda  $s$  en calentarse una vez que se infectó. Entonces  $E(T_s) \leq E_{0,1}(T_{L_A})$ , y aplicando la desigualdad de Markov, y la tercera desigualdad del lema 5.3 tenemos:

$$P(T_s > t_n) \leq \frac{E(T_s)}{t_n} \leq \frac{E_{0,1}(T_{L_A})}{t_n} \leq 2 \exp(-n^{\varepsilon/3}) \leq 2 \exp\left(\frac{-\lambda_A \lambda_B n^{\varepsilon/3}}{16\beta_B^2}\right) \quad (7.6)$$

Entonces juntando las ecuaciones 7.4, 7.5 y 7.6 la probabilidad de que estando encendida a tiempo 0  $s$  se caliente en un tiempo menor o igual que  $2t_n$  es mayor o igual que

$$\begin{aligned} & \left(1 - 2 \exp\left(\frac{-\lambda_A \lambda_B n^{\varepsilon/3}}{16\beta_B^2}\right)\right) \left(1 - \exp\left(\frac{-\lambda_A \lambda_B n^{\varepsilon/3}}{16\beta_B^2}\right)\right) \\ & \quad \cdot \left(1 - 2 \exp\left(\frac{-\lambda_A \lambda_B n^{\varepsilon/3}}{16\beta_B^2}\right)\right) \\ & \geq 1 - 5 \exp(-\lambda_A \lambda_B n^{\varepsilon/3}/16\beta_B^2) \end{aligned}$$

□

**Demostración del lema 5.10.** Para  $n$  suficientemente grande  $2e^{n^{\varepsilon/3}}/\beta_{\min} \leq t_n/2$ . Entonces, si  $s$  es una estrella encendida a tiempo 0 y  $T_s$  es el tiempo en que se calienta, por el corolario 5.9 tenemos

$$P(T_s \leq t_n/2) \geq 1 - 5e^{-\lambda_A \lambda_B n^{\varepsilon/3}/16\beta_{\max}^2}$$

Sea  $T'_s$  el tiempo que  $s$  permanece encendida una vez que se calentó y  $T$  como en el corolario 5.2. Aplicando el corolario 5.2 con  $k = n^\varepsilon$  tenemos

$$\begin{aligned} P(T'_s \geq t_n) & \geq P(T'_s \geq T) \\ & \geq 1 - 7 \exp(-\lambda_A \lambda_B n^\varepsilon/80\beta_{\max}^2) \end{aligned}$$

ya que  $t_n \leq T$  para  $n$  suficientemente grande.

Juntando las cotas mencionadas tenemos que probabilidad de que una estrella encendida en  $t = 0$  se caliente en  $t \leq t_n/2$  y siga encendida hasta  $t_n$  es

$$\begin{aligned}
& P(T_s \leq t_n/2) P(T'_s \geq t_n) \\
& \geq (1 - 7 \exp(-\lambda_A \lambda_B n^\varepsilon / 80 \beta_{max}^2)) (1 - 5 \exp(-\lambda_A \lambda_B n^{\varepsilon/3} / 16 \beta_{max}^2)) \\
& \geq (1 - \exp(-\lambda_A \lambda_B n^{\varepsilon/3} / 16 \beta_{max}^2)) (1 - 5 \exp(-\lambda_A \lambda_B n^{\varepsilon/3} / 16 \beta_{max}^2)) \\
& \geq 1 - 6 \exp(-\lambda_A \lambda_B n^{\varepsilon/3} / 16 \beta_{max}^2)
\end{aligned} \tag{7.7}$$

Calculemos ahora la probabilidad de que la cantidad de estrellas encendidas a tiempo  $t$  aumente en  $t + t_n$ . Para eso consideremos los siguientes eventos:

- *A*: Todas las estrellas encendidas en  $t = 0$  se calientan en  $t \leq t_n/2$  y siguen encendidas hasta  $t_n$ .
- *B*: Una estrella que no está encendida en  $t = 0$  se calienta en  $t \leq t_n/2$  en presencia de una estrella caliente y permanece encendida por otras  $t_n$  unidades de tiempo.

Entonces por el argumento anterior,

$$\begin{aligned}
P(A) & \geq (1 - 6 \exp(-\lambda_A \lambda_B n^{\varepsilon/3} / 16 \beta_{max}^2))^{|V_n^\varepsilon|} \\
& \geq (1 - 6 \exp(-\lambda_A \lambda_B n^{\varepsilon/3} / 16 \beta_{max}^2))^n \\
& \geq 1 - 6n \exp(-\lambda_A \lambda_B n^{\varepsilon/3} / 16 \beta_{max}^2)
\end{aligned}$$

Usando el lema 5.7 y el corolario 5.2 tenemos:

$$\begin{aligned}
P(B) & \geq \left(1 - 8e^{-\lambda_A \lambda_B n^\varepsilon / 4 \beta_{max}^2}\right) \left(1 - 7e^{-\frac{\lambda_A \lambda_B k}{80 \beta_{max}^2}}\right) \\
& \geq 1 - 15e^{-\frac{\lambda_A \lambda_B k}{80 \beta_{max}^2}}
\end{aligned}$$

Entonces, si  $|I_{n,t}^\varepsilon| < \alpha_n$  la probabilidad de que el número de estrellas encendidas aumente en  $t + t_n$  es mayor o igual que

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \geq 1 - e^{-n^{\varepsilon/4}}$$

para  $n$  suficientemente grande.

Sea  $\alpha_n = |V_n^\varepsilon|$ , tenemos entonces que  $|I_{n,0}^\varepsilon| = \alpha_n$ . Vamos a calcular la probabilidad de que empezando con  $\frac{7}{8}\alpha_n$  estrellas encendidas este número baje a menos de  $\frac{3}{4}\alpha_n$  antes de volver a  $\alpha_n$ . Definamos los tiempos  $\tau_0 = \sigma_0 = 0$ , y para  $i \geq 0$ :

$$\begin{aligned}\tau_{i+1} &:= \inf \{t > \tau_i + \sigma_i t_n : |I_{n,t}^\varepsilon| = (7/8)\alpha_n\} \\ \sigma_{i+1} &:= \min \{s \in \mathbb{N} : |I_{n,\tau_{i+1}+st_n}| \notin ((3/4)\alpha_n, \alpha_n)\}\end{aligned}$$

Estudiemos la cantidad de veces que el proceso vuelve a  $\alpha_n$  antes de llegar a  $\frac{3}{4}\alpha_n$ . Para esto definiremos la caminata aleatoria  $W_r$  como sigue, que servirá de cota para nuestro proceso:

$$\begin{aligned}W_0 &= \frac{7}{8}\alpha_n \\ P(W_{r+1} = W_r - 1) &= e^{-n^{\varepsilon/4}} \\ P(W_{r+1} = W_r + 1) &= 1 - e^{-n^{\varepsilon/4}}\end{aligned}$$

Por lo anterior tenemos la dominancia estocástica  $W_r \preceq |I_{n,\tau_i+rt_n}|$  (sección 2.7) para  $r \leq \sigma_i$ , pues si  $|I_{n,t}^\varepsilon| < \alpha_n$  el número aumenta en  $t + t_n$  con probabilidad  $\geq 1 - e^{-n^{\varepsilon/4}}$ , mientras que  $W_r$  aumenta con probabilidad  $= 1 - e^{-n^{\varepsilon/4}}$ ; y análogamente disminuye con probabilidad  $\leq e^{-n^{\varepsilon/4}}$  mientras que  $W_r$  disminuye con probabilidad  $= e^{-n^{\varepsilon/4}}$ .

Sean  $\theta = \frac{e^{-n^{\varepsilon/4}}}{1 - e^{-n^{\varepsilon/4}}} \leq e^{-n^{\varepsilon/4}/2}$  y  $Z_r = \theta^{W_r}$ , entonces tenemos:

$$\begin{aligned}E(Z_{r+1}|Z_r) &= \theta^{W_r+1} (1 - e^{-n^{\varepsilon/4}}) + \theta^{W_r-1} e^{-n^{\varepsilon/4}} \\ &= \theta^{W_r} \left( \theta - \theta e^{-n^{\varepsilon/4}} + \frac{1}{\theta} e^{-n^{\varepsilon/4}} \right) = \theta^{W_r}\end{aligned}$$

por lo tanto  $Z_r = \theta^{W_r}$  es una martingala.

Sea  $q$  la probabilidad de que  $W_r$  llegue a  $\frac{3}{4}\alpha_n$  antes que a  $\alpha_n$ . Definimos los tiempos de paro  $\sigma$  dados por  $W_\sigma = \frac{3}{4}\alpha_n$  o  $W_\sigma = \alpha_n$ . Entonces

$$E(\theta^{W_r}) = q\theta^{\frac{3}{4}\alpha_n} + (1 - q)\theta^{\alpha_n}$$

Y por el Teorema de Paro Opcional lo anterior es igual a

$$E(\theta^{W_0}) = \theta^{\frac{7}{8}\alpha_n}$$

Por lo tanto

$$q = \frac{\theta^{\frac{1}{8}\alpha_n}}{1 + \theta^{\frac{1}{8}\alpha_n}} \leq \theta^{\frac{1}{8}\alpha_n}$$

Como hay  $\mathcal{O}(n^{1-\varepsilon(\alpha-1)})$  estrellas en el grafo,  $\alpha_n = |V_n^\varepsilon| = cn^{1-\varepsilon(\alpha-1)}$  para alguna constante  $c$ . Entonces

$$q \leq \theta^{\frac{1}{8}\alpha_n} \leq \left(e^{-n^{\varepsilon/4}/2}\right)^{\frac{1}{8}\alpha_n} \leq e^{-\alpha_n} = e^{-cn^{1-\varepsilon(\alpha-1)}}.$$

Consideremos las iteraciones del proceso  $W_r$ , las cuales consisten en comenzar en  $\frac{7}{8}\alpha_n$  y llegar a  $\alpha_n$  o a  $\frac{3}{4}\alpha_n$ , y calculemos la probabilidad de que  $W_r$  llegue a  $\frac{3}{4}\alpha_n$  antes que a  $\alpha_n$  dentro de las primeras  $M_n$  iteraciones, con  $M_n = \exp(n^{1-\alpha\varepsilon})$ .

La probabilidad de que no llegue a  $\frac{3}{4}\alpha_n$  en una iteración es  $1 - q$ , por lo tanto la probabilidad de que no llegue en las primeras  $M_n$  iteraciones es  $(1 - q)^{M_n}$ , y entonces la probabilidad de que llegue a  $\frac{3}{4}\alpha_n$  dentro de las primeras  $M_n$  iteraciones es

$$\begin{aligned} 1 - (1 - q)^{M_n} &\leq 1 - (1 - M_n q) = M_n q \\ &\leq e^{n^{1-\alpha\varepsilon}} e^{-cn^{1-\varepsilon(\alpha-1)}} \\ &\leq e^{-cn^\varepsilon}, \end{aligned}$$

donde hemos usado la desigualdad  $(1 - x)^n \geq 1 - nx$ .

Sea  $K = \min \{i \geq 1 : |I_{n,\tau_i+\sigma_i t_n}^\varepsilon| \leq \frac{3}{4}\alpha_n\}$ , o sea la primera iteración en que baja a menos de  $\frac{3}{4}\alpha_n$ . Entonces

$$P(K \leq M_n) \leq e^{-cn^\varepsilon}.$$

Sea  $T_n = \tau_{M_n} + \sigma_{M_n} t_n$ . Para que se cumpla que  $|I_{n,T_n}^\varepsilon| \leq \frac{3}{4}\alpha_n$  tiene que pasar si o si que  $K \leq M_n$ , ya que  $K$  es el mínimo. Por lo tanto

$$P\left(|I_{n,T_n}^\varepsilon| \leq \frac{3}{4}\alpha_n\right) \leq P(K \leq M_n) \leq e^{-cn^\varepsilon}$$

Como  $\sigma_i \geq 1$  para todo  $i$ , y hay un  $\sigma_i$  por cada  $\tau_i$ , entonces en  $T_n$  ocurrieron  $M_n$  de los  $\sigma_i$ , y entonces

$$T_n \geq \sum_{i=1}^{M_n} \sigma_i t_n = M_n t_n$$

□

Consideremos una variación del procedimiento utilizado en el modelo de configuración descrito en la sección 3.2 [17]:

1. Elegimos dos vértices al azar y formamos una arista con sus muñones.
2. De los dos vértices conectados anteriores elegimos uno al azar y lo conectamos con un tercer vértice también elegido al azar
3. Elegimos uno de los tres vértices conectados y repetimos el proceso

O sea que siempre elegimos un vértice al azar sobre el clúster que tenemos armado y hacemos una conexión al azar entre todos los disponibles, de esta manera vamos haciendo crecer el clúster. Cuando ya no podemos seguir, por haber agotado todos los muñones del clúster elegimos de los demás vértices uno nuevo al azar y comenzamos el proceso nuevamente, formando así un nuevo clúster. Observemos que técnicamente no estamos cambiando ninguna propiedad del grafo ya que al finalizar su construcción lo único que habremos cambiado es el orden en que aparecen las aristas. En el lema siguiente estudiaremos lo que pasa con los clústers hasta tamaño  $n^\delta$ . Cuando alcanzamos ese tamaño en el clúster  $R_1$  nos detenemos y comenzamos la construcción de un nuevo clúster  $R_2$ . En este caso  $R_1$  y  $R_2$  se pueden intersectar, si es que en  $R_1$  quedaban aristas salientes disponibles. Tenemos entonces el siguiente lema.

**Lema 7.1.** *Sea  $0 < \delta \leq \frac{1}{8}$ . La probabilidad de que los clústers que se forman a partir de vértices distintos se intersequen antes de alcanzar tamaño  $n^\delta$  es menor o igual que  $Cn^{\delta-1/4}$ .*

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad podemos suponer  $\alpha_A \leq \alpha_B$ . Veamos primero que con alta probabilidad todos los vértices tendrán grado  $\leq n^{3/(2\alpha_A-2)}$ . Si  $\{d_i^A\}$  y  $\{d_i^B\}$  son las secuencias de grado de cada población tenemos:

$$\begin{aligned}
P\left(\max d_i^B \geq n^{\frac{3}{2\alpha_A-2}}\right) &\leq n_B P\left(d_1^B \geq k_n = n^{\frac{3}{2\alpha_A-2}}\right) \\
&= n_B \sum_{i=k_n}^{n_A} C_B k^{-\alpha_B} \leq n_B \int_{k_n}^{n_A} C_B (k-1)^{-\alpha_B} dk \\
&= \frac{n_B C_B}{\alpha_B - 1} \left( (n^{3/(2\alpha_A-2)} - 1)^{-\alpha_B+1} - (n_A - 1)^{-\alpha_B+1} \right) \\
&\leq \frac{n_B C_B}{\alpha_B - 1} (n^{3/(2\alpha_A-2)} - 1)^{-\alpha_A+1} \leq Cn^{-1/2},
\end{aligned}$$

para alguna constante  $C$  adecuada, y análogamente

$$P\left(\max d_i^A \geq n^{\frac{3}{2\alpha_A-2}}\right) \leq C'n^{-1/2}.$$

Entonces la probabilidad de que en cualquiera de las dos poblaciones haya un vértice de grado  $\geq n^{3/(2\alpha_A-2)}$  es proporcional a  $n^{-1/2}$ , y a partir de ahora trabajaremos bajo la suposición de que todos los vértices tendrán grado menor, evento que denotaremos como  $S$ .

Sea  $Q$  el evento en que  $R_1$  contiene algún vértice de grado  $\geq n^{1/(2\alpha_A-2)} = k_n^{1/3}$ . Si  $e_n^A$  y  $e_n^B$  son las cantidades de aristas que conectan a ese tipo de vértices en cada población.

En general, si  $p_k$  es la probabilidad de que un vértice de tipo  $A$  tenga grado  $k$  la cantidad de vértices de grado  $k$  es  $n_A p_k$  y la cantidad de muñones que tienen en total esos vértices es  $kn_A p_k$ . Dividiendo por el total de muñones obtenemos la probabilidad  $q_k$  de que un muñón pertenezca a un vértice de grado  $k$ , o lo que es equivalente, que siguiendo una arista al azar lleguemos a un vértice de grado  $k$ :

$$q_k = \frac{kn_A p_k}{\sum_j j n_A p_j} = C_A k p_k$$

En nuestro caso  $p_k = C k^{-\alpha_A}$  y entonces

$$\begin{aligned} e_n^A &= \sum_{\frac{k_n^{1/3}}{k_n} p_k}^{k_n} C_A n_A k^{-\alpha_A+1} \leq \int_{\frac{k_n^{1/3}}{k_n}}^{k_n} C_A n_A (k-1)^{-\alpha_A+1} dk \\ &\leq \frac{n_A C_A}{\alpha_A - 2} (n-1)^{\frac{-\alpha_A+2}{2\alpha_A-2}} \\ &\leq C \cdot n \cdot n^{\frac{-\alpha_A+2}{2\alpha_A-2}} = C n^{1-(\alpha_A-2)/(2\alpha_A-2)} \end{aligned}$$

y análogamente,

$$e_n^B \leq C' n^{1-(\alpha_B-2)/(2\alpha_B-2)}.$$

Por lo tanto en un paso cualquiera de la construcción del clúster, y siempre bajo la suposición de que los vértices tienen grado menor que  $n^{\frac{3}{2\alpha_A-2}}$ , la probabilidad de

conectar un vértice de tipo  $A$  a un vértice de grado  $\geq n^{1/(2\alpha_A-2)} = k_n^{1/3}$  es

$$\begin{aligned} &\leq \frac{e_n^B}{\text{aristas disponibles en } B} \leq \frac{C'n^{1-(\alpha_B-2)/(2\alpha_B-2)}}{n_B E(d_i^B) - n^{\delta+3/(2\alpha_A-2)}} \\ &= \frac{C'n^{-(\alpha_B-2)/(2\alpha_B-2)}}{\frac{E(d_i^B)E(d_i^A)}{E(d_i^B) + E(d_i^A)} - n^{\delta+3/(2\alpha_A-2)-1}} \\ &\leq \frac{C'n^{-(\alpha_B-2)/(2\alpha_B-2)}}{\frac{E(d_i^B)E(d_i^A)}{E(d_i^B) + E(d_i^A)} - 1} \leq \tilde{C}n^{-1/4} \end{aligned}$$

para alguna constante  $\tilde{C}$ ; y análogamente, para un vértice de tipo  $B$  esa probabilidad es  $\leq C'n^{-1/4}$ , entonces

$$P(Q|S) \leq n^\delta Cn^{-1/4}$$

y lo que es lo mismo,

$$P(Q^c|S) \geq 1 - Cn^{-1/4+\delta}.$$

Si ocurre  $Q^c$  (con muy alta probabilidad), todos los vértices de  $R_1$  tienen grado  $\leq n^{\frac{1}{2\alpha_A-2}}$ , y entonces al armar  $R_2$  y estando parados en un vértice de tipo  $A$  la probabilidad de elegir un vértice de  $R_1$  es

$$\begin{aligned} &\leq \frac{n^\delta n^{1/(2\alpha_A-2)}}{n_B E(d_i^B) - n^\delta n^{3/(2\alpha_A-2)}} \\ &= \frac{n^{\delta+1/(2\alpha_A-2)-1}}{n_B E(d_i^B)/n - n^{\delta+3/(2\alpha_A-2)-1}} \\ &\leq Cn^{-(1-\delta-1/(2\alpha_A-2))} \end{aligned}$$

para alguna constante  $C$ , y análogamente si estamos parados en un vértice de tipo  $B$  la probabilidad de elegir un vértice de  $R_1$  es  $\leq C'n^{-(1-\delta-1/(2\alpha_A-2))}$ . Como  $R_2$  consta de a lo sumo  $n^\delta$  vértices, llamando  $R$  al evento en que los clústers se intersecan tenemos

$$P(R^c|Q^c) \geq (1 - Cn^{-(1-\delta-1/(2\alpha_A-2))})^{n^\delta} \geq 1 - Cn^{-(1-2\delta-1/(2\alpha_A-2))}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
P(R^c) &\geq P(R^c|Q^c)P(Q^c) \\
&= P(R^c|Q^c)P(Q^c|S)P(S) \\
&= (1 - C_1 n^{-(1-2\delta-1/(2\alpha_A-2))}) (1 - C_2 n^{-1/4+\delta}) (1 - C_3 n^{-1/2}) \\
&\geq 1 - C n^{-1/4+\delta}
\end{aligned}$$

□

**Demostración lema 5.11.** La segunda desigualdad se deduce de la primera. Supongamos que  $v_1 \in A$ . Entonces la probabilidad de que en  $t \leq 1$  se cure o que infecte a  $v_2$  es  $1 - e^{-(\lambda_A+\beta_A)}$  y la probabilidad de que ese evento sea una infección es  $\frac{\lambda_A}{\lambda_A+\beta_A}$  y la probabilidad de que  $v_2$  siga infectado hasta  $t = 1$  es  $\geq e^{-\beta_B}$ . Entonces

$$P(\xi_1^{v_1} \cap \{v_2\}) \geq \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \beta_A} (1 - e^{-(\lambda_A+\beta_A)}) e^{-\beta_B}$$

y entonces

$$\begin{aligned}
P\left(\xi_{t \leq T+1}^{\{v_1\}} \cap V_n^\varepsilon\right) &\geq P\left(\xi_1^{\{v_1\}} \cap \{v_2\}\right) P\left(\xi_{t \leq T}^{\{v_2\}} \cap V_n^\varepsilon\right) \\
&\geq \frac{1}{2} \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \beta_A} (1 - e^{-(\lambda_A+\beta_A)}) e^{-\beta_B} \\
&\geq p_1(\beta_B) \lambda'_{min}
\end{aligned}$$

ya que  $\frac{\lambda_A}{\lambda_A+\beta_A} (1 - e^{-(\lambda_A+\beta_A)}) \geq 0$ .

Análogamente, si  $v_1 \in B$ :

$$P\left(\xi_{t \leq T+1}^{\{v_1\}} \cap V_n^\varepsilon\right) \geq p_2(\beta_A) \lambda'_{min}$$

y la desigualdad se demuestra tomando  $p = \min\{p_1, p_2\}$

Veamos ahora la primera desigualdad. Para eso estudiamos nuevamente la composición estructural del grafo, para después tratar el proceso de infección sujeto a la estructura estudiada.

Nos interesará que la probabilidad dada por el lema 5.1 tienda a cero con  $\lambda'_{min}$ . Una condición necesaria de ese lema es  $\lambda_A \lambda_B k \geq 50 \beta_A \beta_B$  o lo que es lo mismo,  $k \geq \frac{50 \beta_A \beta_B}{\lambda_A \lambda_B}$ . Si  $k = \frac{C}{\lambda_A \lambda_B}$  la probabilidad mencionada es una constante, entonces

para que la probabilidad tienda a cero habrá que pedirle algo más a  $k$ , y se soluciona si hacemos  $k \geq \left(\frac{C}{\lambda'_{min}}\right)^{2+\delta}$ , para alguna constante  $C$  adecuada.

Sea  $\Lambda_m$  el conjunto de vértices de grado  $\geq \nu_m = (10/\lambda'_{min})^{m+\delta}$ , para  $m \geq 2$ . Sea  $\gamma = \frac{\delta}{2(2+\delta)}$  y definamos

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\delta}{2(2+\delta)} & B &= 2(\alpha_B - 1) \log(10/\lambda'_{min}) \\ u &= (e^{-2\beta_A} e^{-2\beta_B} (1 - e^{-\lambda_A})(1 - e^{-\lambda_B}))^{-(B+1)} & w_n &= \log(n^\varepsilon) / \log(10/\lambda'_{min}) - \delta \\ T_m^1 &= (10/\lambda'_{min})^{(m+\delta)\gamma} & T_m^2 &= u^m \\ T_m &= T_m^1 + T_m^2 & n^{c_0} &= \sum_{m=2}^{w_n} T_m \end{aligned}$$

Sea  $E_2 = \left\{ \xi_{T_2}^{\{v_m\}} \cap \Lambda_3 \neq \emptyset \right\}$  y para  $m \geq 3$ , habiendo definido  $E_2, \dots, E_{m-1}$ , definimos

$$E_m = \left\{ \xi_{T_m}^{\{v_m\}} \cap \Lambda_{m+1} \neq \emptyset \right\},$$

con  $v_m \in \xi_{T_{m-1}}^{\{v_{m-1}\}} \cap \Lambda_m$ . O sea,  $E_m$  es el evento en que la infección comenzando en un vértice de grado  $\geq \nu_m$  alcance un vértice de grado  $\nu_{m+1}$ . Entonces en  $E_{w_n-1}$  la infección alcanza una estrella ya que

$$v_{w_n} \in \Lambda_{w_n} \Rightarrow g(v_{w_n}) = \nu_{w_n} = \left(\frac{10}{\lambda'_{min}}\right)^{\log(n^\varepsilon) / \log(10/\lambda'_{min})} = n^\varepsilon.$$

Si se cumplen todos los eventos  $E_m$  tendremos una cadena de vértices, no necesariamente adyacentes, de grado creciente por la que se propagará la infección hasta alcanzar una estrella:

$$v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow \dots \rightarrow v_{w_n}.$$

De los vecinos de cada vértice de la cadena se arma un clúster. Estudiaremos esos clústers hasta que tengan tamaño  $(10/\lambda'_{min})^{(m+\delta+1)(\alpha_B-2)}$ .

Sea  $A_m$  el evento en que en la construcción del grafo los clústers de tamaño  $(10/\lambda'_{min})^{(m+\delta+1)(\alpha-2)}$  comenzando de dos vecinos de  $v_m$  no se intersecan. Si  $m \leq w_n$  el tamaño de los clústers es  $\leq n^{1/10}$ , y entonces podemos usar el lema 7.1 para concluir que la probabilidad de que dos clústers se intersequen es  $\geq Cn^{-1/4+1/10}$

Sea

$$F = \bigcap_{m=2}^{w_n-1} A_m$$

el evento en que los clústers comenzando de los vecinos de cualquier vértice de la cadena no se intersecan.

$$\begin{aligned}
P(F^c) &\leq \sum_{m=2}^{w_{n-1}} P(A_m^c) \leq \sum_{m=2}^{w_{n-1}} \binom{n^\varepsilon}{2} Cn^{-1/4+1/10} \\
&\leq \sum_{m=2}^{w_{n-1}} n^{2\varepsilon} Cn^{-1/4+1/10} \leq w_n n^{2\varepsilon} Cn^{-1/4+1/10} \\
&\leq n^{3/(20(\alpha_A-1))} Cn^{-1/4+1/10} \leq Cn^{-3/40} \leq 1/6
\end{aligned}$$

para  $n \geq n_0 = 6^{40/3}$ .

Para acotar la probabilidad de que efectivamente se dé la cadena mencionada estudiaremos el vecindario de radio  $Bm$  alrededor de cada vértice  $v_m$  de la cadena y la probabilidad de que  $v_{m+1}$  esté en ese vecindario, ya que es una posible manera en que se puede dar la cadena. Para eso necesitamos saber cuántos vértices hay dentro de ese radio, para lo que volvemos a estudiar la construcción del grafo. Lo primero que haremos es ver que el clúster que se forma desde cada vecino de  $v_m$  es un árbol. Cuando armamos el clúster, la probabilidad de elegir un vértice que no haya sido elegido previamente (para vértices de tipo  $A$ ) es:

$$\begin{aligned}
&\frac{\text{total de aristas } A - \text{aristas } A \text{ dentro del clúster}}{\text{total de aristas } A} \\
&\geq \frac{3n_A - n^{1/10} n^{1/(2\alpha_A-2)}}{3n_A} = 1 - \frac{n^{1/10+1/(2\alpha_A-2)}}{3Cn} \\
&= 1 - \frac{1}{3C} n^{1/10+1/(2\alpha_A-2)-1},
\end{aligned}$$

y análogamente se da para los vértices de tipo  $B$ . Entonces la probabilidad de que en ningún paso en la construcción del clúster elijamos un vértice previamente elegido es

$$\begin{aligned}
&\geq \left(1 - \frac{1}{3C} n^{1/10+1/(2\alpha_A-2)-1}\right)^{(10/\lambda'_{min})^{(m+\delta+1)(\alpha-2)}} \\
&\geq \left(1 - Cn^{-13/20}\right)^{n^{1/10}}.
\end{aligned}$$

Finalmente, la probabilidad de que los clústers que se forman desde cada uno de los  $(10/\lambda'_{min})^{(m+\delta)}$  vecinos de  $v_m$  sean todos árboles es

$$\begin{aligned}
&\geq (1 - Cn^{-13/20})^{n^{1/10}(10/\lambda'_{min})^{(m+\delta)}} \geq (1 - Cn^{-13/20})^{n^{1/10+\varepsilon}} \\
&\geq (1 - Cn^{-13/20})^{n^{1/8}} \\
&\longrightarrow 1
\end{aligned}$$

cuando  $n \rightarrow \infty$ , o sea que con probabilidad tendiendo a 1 desde cada vecino de  $v_m$  se formará un árbol.

Si todos los vértices son de grado 3 y un clúster es un árbol, en la  $j$ -ésima generación tenemos  $2^j$  nuevos vértices. Sumando sobre todas las generaciones tenemos que el clúster tiene  $2^{h+1} - 1$  vértices, siendo  $h$  la altura. Como  $B = 2(\alpha_B - 1)(\log(10/\lambda'_{min}))$  y  $\delta \leq 1$  tenemos que

$$2^{Bm} - 1 \geq \left( \frac{10}{\lambda'_{min}} \right)^{(m+\delta+1)(\alpha_B-2)},$$

lo que significa que la altura de nuestro árbol es menor que  $Bm$ , o sea que todos los clústers están contenidos dentro del vecindario de radio  $Bm$  alrededor de  $v_m$ . Por otro lado, si algún vértice tiene grado mayor que 3 la altura del árbol sólo puede disminuir ya que el tamaño es fijo. Si ocurre  $F$  va a haber un árbol por cada vecino de  $v_m$  y entonces la cantidad de vértices en el vecindario es

$$\geq \left( \frac{10}{\lambda'_{min}} \right)^{(m+\delta+1)(\alpha_B-2)+m}.$$

Al armar el clúster la probabilidad de conectar a un vértice de  $\Lambda_{m+1}$  en un paso cualquiera es

$$\begin{aligned}
&c_1 \sum_{k=\nu_{m+1}}^{n_B} k^{-\alpha_A+1} + c_2 \sum_{k=\nu_{m+1}}^{n_A} k^{-\alpha_B+1} \\
&\geq c_1 \int_{\nu_{m+1}}^{n_B} (k+1)^{-\alpha_A+1} dk + c_2 \int_{\nu_{m+1}}^{n_A} (k+1)^{-\alpha_B+1} dk \quad (7.8) \\
&\geq C(\nu_{m+1})^{-\alpha_B+2} = C \left( \frac{10}{\lambda'_{min}} \right)^{(m+\delta+1)(-\alpha_B+2)}
\end{aligned}$$

con  $C \in (0; 2)$ . Entonces si  $G_m$  es la probabilidad de que en el vecindario de radio  $B.m$  alrededor de  $v_m$  haya algún vértice de  $\Lambda_{m+1}$  tenemos

$$\begin{aligned}
P(G_m^c \cap F) &\leq (1 - C(\nu_{m+1})^{-\alpha_B+2})^{\nu_{m+1}^{-\alpha_B+2+m}} \\
&\leq \exp\left(-\left(\frac{10}{\lambda'_{min}}\right)^m\right).
\end{aligned}$$

donde hemos usado la cota para la cantidad de vértices en el vecindario y el hecho de que  $(1 - \frac{c}{x})^x \leq e^{-c}$ .

La probabilidad de que lo anterior se cumpla para todos los vértices de la cadena es

$$\begin{aligned}
\sum_{m=2}^{w_n-1} P(G_m^c \cap F) &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-\left(\frac{10}{\lambda'_{min}}\right)^m\right) \\
&\leq \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda'_{min}}{10}\right)^m \\
&\leq \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^m = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

los eventos  $F \cap G_m$  garantizan la estructura necesaria, o sea la cantidad de vértices en cada vecindario y que ahí dentro se encuentre el siguiente vértice de la cadena. A continuación estudiaremos el proceso de infección. para cada vértice  $v_m$  nos interesa la siguiente dinámica:

1.  $v_m$  infectado en  $t = 0$  se calienta en  $T_s \leq T_m^1$ .
2. una vez que  $v_m$  se calienta sigue encendido hasta  $T_s + T_m^1$ .

Para la parte 1 tenemos

$$k = g(v_m) \geq \left(\frac{10}{\lambda'_{min}}\right)^{m+\delta} \geq \left(\frac{10}{\lambda'_{min}}\right)^{2+\delta}$$

y entonces

$$k^\delta \geq T_m^1 \left(\frac{10}{\lambda'_{min}}\right)^{(m+\delta)\gamma} \geq \left(\frac{10}{\lambda'_{min}}\right)^{2+\delta}$$

y podemos aplicar el corolario 5.5:

$$P(T_s \leq T_m^1) \geq 1 - \frac{2 + 2\beta_A + 2\beta_B}{\beta_{min}} \left(\frac{10}{\lambda'_{min}}\right)^{-(m+\delta)\gamma}.$$

Para la parte 2 usaremos el corolario 5.2, este corolario considera los tiempos

$$T_A = \frac{e^{\lambda_A \lambda_B k / 80 \beta_B^2}}{2(\beta_A + \beta_B)L_A} \quad \text{y} \quad T_B = \frac{e^{\lambda_A \lambda_B k / 80 \beta_A^2}}{2(\beta_A + \beta_B)L_B}$$

y nos dice que la probabilidad de que un vértice caliente siga encendido por  $T = \min\{T_A; T_B\}$  unidades de tiempo es mayor o igual que

$$1 - 7e^{-\frac{\lambda_A \lambda_B k}{80 \beta_{max}^2}}.$$

Claramente  $T_m^2 \leq T$ , entonces la misma cota vale para la probabilidad de que  $v_m$  siga encendido hasta  $T_s + T_m^2$ .

Sea  $E_m^1$  el evento en que estando infectado en  $t = 0$   $v_m$  se caliente en  $T_s \leq T_m^1$  y permanezca encendido hasta  $T_s + T_m^2$ . Combinando la parte 1 y la parte 2 tenemos

$$\begin{aligned} P(E_m^1) &= \left(1 - 7 \exp\left(\frac{-\lambda_A \lambda_B \nu_m}{80 \beta_{max}^2}\right)\right) \left(1 - \frac{2+2\beta_A+2\beta_B}{\beta_{min}} \nu_m^{-\gamma}\right) \\ &\geq \left(1 - \frac{2+2\beta_A+2\beta_B}{\beta_{min}} \nu_m^{-\gamma}\right)^2 \geq 1 - \frac{2(2+2\beta_A+2\beta_B)}{\beta_{min}} \nu_m^{-\gamma} \\ &= 1 - C \lambda_{min}^{(m+\delta)\gamma} \end{aligned}$$

Con seguridad sabemos que durante  $T_m^2$  unidades de tiempo  $v_m$  está encendido. Nos interesa que en ese tiempo se infecte  $v_{m+1}$ , que si ocurre  $G_m$  está a distancia  $\leq Bm$  de  $v_m$ . Calculamos la probabilidad del complemento de ese evento: De la misma manera que hicimos en el lema 5.7, partimos el intervalo  $[0; T_m^2]$  en  $T_m^2/Bm$  intervalos de ancho  $Bm$ . Usando el lema 5.6 la probabilidad de que la infección no ocurra en un intervalo es

$$\leq 1 - \left(e^{-2\beta_A} e^{-2\beta_B} (1 - e^{-\lambda_A})(1 - e^{-\lambda_B})\right)^{Bm}$$

y como hay  $T_m^2/Bm$  de esos intervalos la probabilidad de que no pase en todo  $T_m^2$  es

$$\begin{aligned} &\leq \left(1 - \left(e^{-2\beta_A} e^{-2\beta_B} (1 - e^{-\lambda_A})(1 - e^{-\lambda_B})\right)^{Bm}\right)^{T_m^2/Bm} \\ &= \left(1 - \left(e^{-2\beta_A} e^{-2\beta_B} (1 - e^{-\lambda_A})(1 - e^{-\lambda_B})\right)^{Bm}\right)^{\frac{1}{Bm} \left(e^{-2\beta_A} e^{-2\beta_B} (1 - e^{-\lambda_A})(1 - e^{-\lambda_B})\right)^{(-B+1)m}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \exp\left(-\left(e^{-2\beta_A}e^{-2\beta_B}(1-e^{-\lambda_A})(1-e^{-\lambda_B})\right)^{-m}/Bm\right) \\
&= \exp\left(-\frac{\left(e^{-2(\beta_A+\beta_B)}(1-e^{-\lambda_A})(1-e^{-\lambda_B})\right)^{-m}}{\log(10/\lambda'_{min})^{2m(\alpha_B-1)}}\right) \\
&\leq \frac{\log(10/\lambda'_{min})^{2m(\alpha_B-1)}}{\left(e^{-2(\beta_A+\beta_B)}(1-e^{-\lambda_A})(1-e^{-\lambda_B})\right)^{-m}} \\
&\leq \left((1-e^{-\lambda_A})(1-e^{-\lambda_B})\log(10/\lambda'_{min})^{2(\alpha_B-1)}\right)^m := \eta_m.
\end{aligned}$$

Observemos que  $\eta_m$  tiende a cero con  $\lambda_{min}$  tendiendo a cero.

Sea  $T_m = T_m^1 + T_m^2$ . Recordando la definiciones tenemos:

$$\begin{aligned}
E_m^c &\longrightarrow v_m \text{ no infecta a } v_{m+1} \text{ en } t \leq T_m \\
G_m &\longrightarrow v_{m+1} \text{ se encuentra en el vecindario de radio } Bm \text{ alrededor de } v_m \\
F &\longrightarrow \text{Los clusters que se arman desde los vecinos de cada } v_m \text{ no se intersecan}
\end{aligned}$$

y entonces en la intersección  $E_m^c \cap G_m \cap F$  se dan las condiciones estructurales estudiadas y  $v_m$  no infecta a  $v_{m+1}$ .

Una posible manera en que se de la infección es en la intersección de los siguientes eventos:

1.  $E_m^1$  :  $v_m$  se calienta en  $T_s \leq T_m^1$  y permanece encendido hasta  $T_s + T_m^2$ .
2.  $E_m^2$  : Estando encendido  $v_m$  transmite la infección a  $v_{m+1}$  en un tiempo  $\leq T_m^2$

Para la intersección:  $E_m^1 \cap E_m^2 \subset E_m$ , entonces  $E_m^c \subset ((E_m^1)^c \cup (E_m^2)^c)$ . Acabamos de ver que  $P((E_m^1)^c) \leq C(\lambda'_{min})^{(m+\delta)\gamma}$  y  $P((E_m^2)^c) \leq \eta_m$  entonces

$$\begin{aligned}
P(E_m^c \cap G_m \cap F) &\leq P(E_m^c) \leq P((E_m^1)^c) + P((E_m^2)^c) \\
&\leq \eta_m + C\lambda'_{min}^{(m+\delta)\gamma}
\end{aligned}$$

y entonces tenemos

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=2}^{w_n-1} P(E_m^c \cap G_m \cap F) \\
& \leq \sum_{m=2}^{w_n-1} \left( \eta_m + C \lambda'_{min}{}^{(m+\delta)\gamma} \right) \\
& \leq \sum_{m=1}^{\infty} \eta_m + \sum_{m=1}^{\infty} C \lambda'_{min}{}^{(m+\delta)\gamma} \\
& = \sum_{m=1}^{\infty} \left( (1 - e^{-\lambda_A})(1 - e^{-\lambda_B}) \log(10/\lambda'_{min})^{2(\alpha_B-1)} \right)^m + \sum_{m=0}^{\infty} C \lambda'_{min}{}^{(m+\delta)\gamma} \\
& = \frac{\left( (1 - e^{-\lambda_A})(1 - e^{-\lambda_B}) \log(10/\lambda'_{min})^{2(\alpha_B-1)} \right)}{1 - \left( (1 - e^{-\lambda_A})(1 - e^{-\lambda_B}) \log(10/\lambda'_{min})^{2(\alpha_B-1)} \right)} + \frac{C \lambda'_{min}{}^{\gamma(\delta+1)}}{1 - \lambda'_{min}},
\end{aligned}$$

lo cual tiende cuando  $\lambda'_{min}$  tiende a cero. Entonces

$$\sum_{m=2}^{w_n-1} P(E_m^c \cap G_m \cap F) \leq \frac{1}{6}$$

para  $\lambda_{min}$  suficientemente chico.

Sea  $E = \bigcap_{m=2}^{w_n-1} E_m \cap G_m \cap F$ . Esto es, que la cadena tenga la estructura estudiada y que la infección se propague a través de todos los vértices de la misma desde  $v_2$  hasta  $v_{w_n}$ .

Tenemos

$$\left( F - \bigcup_{m=2}^{w_n-1} G_m^c \cap F - \bigcup_{m=2}^{w_n-1} E_m^c \cap G_m \cap F \right) \subset E$$

y entonces

$$\begin{aligned}
P(E) & \geq P(F) - P\left(\bigcup_{m=2}^{w_n-1} G_m^c\right) - P\left(\bigcup_{m=2}^{w_n-1} E_m^c \cap G_m \cap F \subset E\right) \\
& \geq P(F) - \sum_{m=2}^{w_n-1} P(G_m^c \cap F) - \sum_{m=2}^{w_n-1} P(E_m^c \cap G_m \cap F) \\
& \geq \frac{5}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Además el tiempo requerido en cada paso de la cadena es menor que  $T_m = T_m^1 + T_m^2$ , entonces la infección se propaga a través de toda la cadena en un tiempo menor que  $\sum_{m=2}^{w_n-1} T_m = n^{c_0}$ , con  $c_0$  elegido adecuadamente. La probabilidad de que el proceso  $\{\xi_t^{v_2}\}$  alcance una estrella en un tiempo  $\leq n^{c_0}$  es mayor que la probabilidad de que lo haga siguiendo la cadena  $\{v_m\}_{2 \leq m \leq w_n}$  en un tiempo  $\leq n^{c_0}$ , y eso es mayor o igual que  $\frac{1}{2}$ .

□

**Demostración del lema 5.12.** El lema 5.11 nos dice que con probabilidad  $\geq p\lambda'_{min}$  el proceso comenzando en  $v_1$  alcanza una estrella en  $t \leq T = n^{c_0}$ . Si infectamos una estrella, el corolario 5.5 nos dice esta se calentará en  $t \leq n^{\varepsilon\gamma} \leq n^{\varepsilon/2}$  unidades de tiempo más con probabilidad

$$\geq 1 - \frac{2 + 2\beta_A + 2\beta_B}{\beta_{min}} n^{-\varepsilon\gamma}$$

Sea  $T' = n^{c_1} \geq T + 1 + n^{\varepsilon/2}$ . La probabilidad de que  $\xi_{t_0 \leq T'}^{v_1}$  contenga una estrella caliente es

$$\begin{aligned} &\geq P(\xi_{t_0 \leq T+1}^{v_1} \cap V_n^\varepsilon) P(\text{ la estrella infectada se calienta en } t \leq n^{\varepsilon/2}) \\ &\geq p(\beta_A, \beta_B) \lambda'_{min} \left( 1 - \frac{2 + 2\beta_A + 2\beta_B}{\beta_{min}} n^{-\varepsilon\gamma} \right) \\ &\geq p_1(\beta_A, \beta_B) \lambda'_{min}. \end{aligned}$$

□

**Demostración lema 5.13.** Sea  $s_1$  la estrella encendida en  $t = 0$ . De la misma manera que hicimos en la demostración del lema 5.10, precisamente en la ecuación 7.7,  $s_1$  se calienta en  $t \leq T/2 = \exp(n^{\varepsilon/2})/\beta_B$  y permanece encendida hasta  $T = 2 \exp(n^{\varepsilon/2})/\beta_B$  con probabilidad

$$\geq 1 - 6 \exp\left(\frac{-\lambda_A \lambda_B n^{\varepsilon/3}}{16\beta_{max}^2}\right), \quad (7.9)$$

o sea que en el intervalo  $[T/2; T]$  la estrella está encendida.

Como usamos en la demostración del lema 5.7, mientras  $s_1$  está encendida hace que otra estrella  $s_2$  se caliente en un tiempo  $t_0 \leq 2n^{\varepsilon/3}$  con probabilidad  $\geq C'n^{-b}$ .

Sea  $T' = T$  como en el corolario 5.2. Para  $n$  suficientemente grande tenemos  $T' > T$  ya que  $T' = O(\exp(n^\varepsilon))$  y  $T = O(\exp(n^\varepsilon/2))$ . El corolario 5.2 nos dice entonces que con probabilidad  $\geq 1 - 7 \exp\left(\frac{-\lambda_A \lambda_B k}{80\beta_{max}^2}\right)$   $s_2$  seguirá encendida durante  $T$  unidades de tiempo. Entonces la probabilidad de que  $s_2$  se caliente en tiempo  $\leq 2n^{\varepsilon/3}$  y siga encendida hasta  $t = T$  es mayor o igual que

$$C'n^{-b} \left(1 - 7e^{\frac{-\lambda_A \lambda_B k}{80\beta_{max}^2}}\right) \geq Cn^{-b}$$

para algún  $C > 0$  y  $n$  suficientemente grande. Entonces con probabilidad  $\leq 1 - Cn^{-b}$  el evento anterior no ocurre.

Dividamos el intervalo  $[T/2; T]$  en  $\frac{e^{n^\varepsilon/2}}{2n^{\varepsilon/3}}$  subintervalos de ancho  $2n^{\varepsilon/3}$ . Restringiendo el proceso a la dinámica anterior, esto es que en uno de los subintervalos una estrella se encienda y que siga encendida hasta  $t = T$ , tenemos que la probabilidad de que el evento no ocurra en todo el intervalo  $[T/2; T]$  es igual a la probabilidad de que no ocurra en ninguno de los subintervalos, y esta probabilidad es

$$\leq (1 - Cn^{-b})^{\left(\frac{e^{n^\varepsilon/2}}{2n^{\varepsilon/3}}\right)}.$$

Entonces la probabilidad de que el proceso falle en  $\frac{3}{4}|V_n^\varepsilon|$  es

$$\begin{aligned} \leq \frac{3}{4}|V_n^\varepsilon|P(\text{falle en una estrella}) &\leq \frac{3}{4}|V_n^\varepsilon| (1 - Cn^{-b})^{\left(\frac{e^{n^\varepsilon/2}}{2n^{\varepsilon/3}}\right)} \\ &\leq \frac{3}{4}|V_n^\varepsilon| \exp\left(\frac{-C e^{n^\varepsilon/2}}{2n^{\varepsilon/3+b}}\right) \quad (7.10) \\ &\leq \exp\left(\frac{-\lambda_A \lambda_B n^{\varepsilon/3}}{16\beta_{max}^2}\right) \end{aligned}$$

para  $n$  suficientemente grande.

La ecuación 7.9 nos dice que la probabilidad de que  $s_1$  siga encendida hasta  $t = T$  es  $\geq 1 - 6 \exp\left(\frac{-\lambda_A \lambda_B n^{\varepsilon/3}}{16\beta_{max}^2}\right)$ . La ecuación 7.10 nos dice que la probabilidad de que en el intervalo  $[T/2; T]$  se enciendan  $(3/4)$  de las estrellas y que estas permanezcan encendidas hasta  $t = T$  es  $\geq 1 - \exp\left(\frac{-\lambda_A \lambda_B n^{\varepsilon/3}}{16\beta_{max}^2}\right)$ . Juntando los dos resultados tenemos

$$\begin{aligned}
P(|I_{n,T}^\varepsilon| \geq \frac{3}{4}|V_n^\varepsilon|) &\geq \left(1 - 6 \exp\left(\frac{-\lambda_A \lambda_B n^{\varepsilon/3}}{16\beta_{max}^2}\right)\right) \left(1 - \exp\left(\frac{-\lambda_A \lambda_B n^{\varepsilon/3}}{16\beta_{max}^2}\right)\right) \\
&\geq 1 - 7 \exp\left(\frac{-\lambda_A \lambda_B n^{\varepsilon/3}}{16\beta_{max}^2}\right)
\end{aligned}$$

o lo que es lo mismo,

$$P\left(|I_{n,T}^\varepsilon| < \frac{3}{4}|V_n^\varepsilon|\right) \leq 7 \exp\left(\frac{-\lambda_A \lambda_B n^{\varepsilon/3}}{16\beta_{max}^2}\right)$$

□

**Demostración lema 5.14.** Sean  $R_1$  y  $R_2$  los clústers que se forman por la exposición de  $n^\delta$  vértices comenzando desde 1 y 2 respectivamente, y sea  $A$  el evento en que  $R_1$  y  $R_2$  se intersecan. Por el lema 7.1  $P(A) \leq Cn^{\delta-1/4}$  Por lo tanto si ocurre  $A^c$  los eventos  $F$  y  $G$  serán independientes ya que los respectivos clústers no se intersecan. Aplicando propiedades básicas de probabilidad tenemos

$$\begin{aligned}
P(F \cap G) &= P(A \cap F \cap G) + P(A^c \cap F \cap G) \\
&\leq P(A) + P(A^c \cap F) \cdot P(A^c \cap G), \\
&\leq P(A) + P(F)P(G),
\end{aligned}$$

entonces

$$P(F \cap G) - P(F)P(G) \leq P(A).$$

Análogamente

$$\begin{aligned}
P(A) &\geq P(F^c \cap G) - P(F^c)P(G) \\
&= P(G) - P(F \cap G) - (1 - P(F))P(G) \\
&= -P(F \cap G) + P(F)P(G)
\end{aligned}$$

y entonces

$$P(F \cap G) - P(F)P(G) \geq -P(A).$$

Juntando los dos resultados tenemos

$$|P(F \cap G) - P(F)P(G)| \leq P(A) \leq Cn^{\delta-1/4}.$$

□

# Bibliografía

- [1] Brauer, F.; Castillo-Chavez, C. (2012). *Mathematical models in population biology and epidemiology*. New York: Springer.
- [2] Pastor-Satorras, Romualdo; Vespignani, Alessandro. (2001). *Epidemic Spreading in Scale-Free Networks*. *Physical review letters*. 86. 3200-3. 10.1103/PhysRevLett.86.3200.
- [3] Pastor-Satorras, Romualdo; Vespignani, Alessandro. (2001). *Epidemic dynamics and endemic states in complex networks [J]*. *Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics*. 63. 066117. 10.1103/PhysRevE.63.066117.
- [4] Liggett, Thomas M. *Stochastic Interacting Systems: Contact, Voter and Exclusion Processes*. A series of Comprehensive Studies in Mathematics, Vol. 324, Springer, 1999.
- [5] Chatterjee, Shirshendu; Durrett, Rick. (2009). *Contact processes on random graphs with power law degree distributions have critical value 0*. *Ann Probab.* 37. 10.1214/09-AOP471.
- [6] Caldarelli, G. (2007). *Scale-free networks: Complex webs in nature and technology*. Oxford: Oxford University Press.
- [7] Pastor-Satorras, Romualdo; Vespignani, Alessandro. (2002). *Epidemics and immunization in scale-free networks*. arXiv:cond-mat/0205260v1 [cond-mat.stat-mech]
- [8] Gómez-Gardeñes, Jesus; Latora, Vito; Moreno, Yamir y Profumo, Rosario Elio V.. (2008). *Spreading of sexually transmitted diseases in heterosexual populations*. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. 105. 1399-404. 10.1073/pnas.0707332105.
- [9] Rosenthal, Jeffrey S. *A First Look at Rigorous Probability Theory*. World Scientific, 2016.
- [10] Newman, Mark E.J. *Networks*. Second ed., Oxford University Press, 2019.

- [11] McKay, Brendan; Wang, Xiaoji. (2003). *Asymptotic enumeration of 0–1 matrices with equal row sums and equal column sums*. *Linear Algebra and Its Applications - LINEAR ALGEBRA APPL.* 373. 273–287. 10.1016/S0024-3795(03)00506-8.
- [12] Lanchier, N. (2017). *Stochastic modeling*. New York, NY: Springer New York.
- [13] Liebenau, Anita; Wormald, Nick. (2019). *Asymptotic enumeration of graphs by degree sequence, and the degree sequence of a random graph*. arXiv:1702.08373v3 [math.CO].
- [14] Robbins, Herbert. *A remark on Stirling's formula*. *Amer. Math. Monthly* **62** (1955), 26–29. MR0069328 (16,1020e).
- [15] Liggett, Thomas M. *Interacting Particle Systems*. Springer Berlin Heidelberg, 2005.
- [16] Liggett, Thomas M. *Continuous Time Markov Processes: an Introduction*. Graduate Studies in Mathematics, Vol. 113, American Mathematical Society, 2010.
- [17] Durrett, Rick. *Random Graph Dynamics (Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics)*. Cambridge University Press, 2006.
- [18] Privault, N., 2013. *Understanding Markov Chains*. Singapore: Springer.
- [19] Mourrat, J.; Valesin, D. (2016). Phase transition of the contact process on random regular graphs. *Electronic Journal of Probability*, 21(0). doi:10.1214/16-ejp4476