Tesis de Maestría

Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Procesos de validación en Matemática realizados por estudiantes universitarios

Prof. Carolina Gabriela Pozzebon

Tesista

M.Sc. Prof. Rodolfo Eliseo D´Andrea

Director de Tesis

Mg. Mariela E. Martinez

Codirectora de Tesis

Facultad de Ingeniería

Universidad Nacional del Comahue

Neuquén. Neuquén. Argentina. 2018

Contenido

Resumen

El objetivo principal que esta investigación mixta se propone es realizar un estudio cualitativo sobre el análisis del desempeño de estudiantes universitarios que utilizan Matemática como herramienta en procesos de validación. Los procesos de validación que se estudiarán en esta investigación se focalizan en las diferentes argumentaciones utilizadas por los estudiantes en procesos estrictamente deductivos de prueba. El instrumento utilizado para la realización de las diferentes actividades diseñadas para ser aplicadas a los estudiantes se sustenta en un modelo didáctico delineado específicamente para evitar la memorización y el ritualismo en este tipo de procesos. Este modelo se sostiene en las tres facetas del lenguaje matemático: coloquial, simbólica y visual, y posibilita la autonomía en el estudiante, de poder reproducir y abordar procesos de prueba de proposiciones matemáticas que son propios a Cursos universitarios de Matemática. Su estructura consiste en una serie de estrategias didácticas mostradas como una secuencia de tareas a los efectos de generar un aprendizaje comprensivo; significativo y constructivo con una perspectiva implícita que permite desarrollar un pensamiento lógico que puede ser extrapolado a disciplinas específicas de la Carrera universitaria de grado escogida por los diferentes estudiantes.

El presente documento es el resultado de una investigación que deriva como consecuencia de las dificultades observadas durante muchos años, en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la validación a nivel universitario. Una de las cuestiones observada en estos años de docencia es que muchas veces la justificación a sus propias acciones por parte de los estudiantes es ‘porque usted lo hizo así’, ‘porque la profesora lo dijo’, o el terrible ‘ni idea’, en vez de utilizar la ciencia misma y los conocimientos que provienen de ella, así como sus conocimientos previos de esta, para justificar sus acciones.

Se estudia el lineamiento del Modelo Didáctico propuesto por D’Andrea (2012) para la enseñanza de la validación, se explora con él y se hace una nueva propuesta fundamentada en Neurosicoeducación (se

sigue el Sistema Línea de Cambio), llamada Experiencia Ordenada. También son tomados aportes de la Didáctica y de la teoría A- N- G. En cuanto a la corriente A- N- G-, en virtud de numerosos resultados en Enseñanza de la Matemática a cada grupo de estudiantes con los que trabajo se les informa que las herramientas metacognitivas de aprendizaje también pueden ser utilizadas en matemática y es conveniente que las utilicen al confeccionar sus carpetas. Es decir que como forma de estudio hagan mapas conceptuales, utilicen la v de Gowin del aprendizaje, los registros propuestos por este mismo autor, además de otras técnicas de estudio como cuadros comparativos o sinópticos. Esta propuesta de Experiencias Ordenadas ¡es para estudiar con memorias!, lo que no significa que en ella se proponga el aprendizaje memorístico. Del uso de ellas se han podido rescatar resultados importantes que hacen a las conclusiones de esta Tesis y por lo que es completado el trabajo haciendo una propuesta de Experiencias Ordenadas en distintos contenidos de Matemática con los que se pueda acompañar su aprendizaje.

Palabras claves: Estudiantes universitarios; validación; Experiencias Ordenadas; Neurosicoeducación.

Abstract

The main objective of this mixed research is to carry out a qualitative study on the performance analysis of university students who use Mathematics as a tool in validation processes. The validation processes that will be studied in this research focus on the different arguments used by students in strictly deductive processes of proof. The instrument used to carry out the different activities designed to be applied to students is based on a didactic model specifically designed to avoid memorization and ritualism in this type of process. This model is sustained in the three facets of mathematical language: colloquial, symbolic and visual, and allows the autonomy in the student, of being able to reproduce and approach processes of proof of mathematical propositions that are proper to university courses of Mathematics. Its structure consists of a series of didactic strategies shown as a sequence of tasks in order to generate a comprehensive learning; meaningful and constructive with an implicit perspective that allows to develop a logical thought that can be extrapolated to specific disciplines of the university degree course chosen by the different students. This document is the result of an investigation that derives as a consequence of the difficulties observed during many years, in the teaching and learning process of university-level validation.

One of the issues that I have noticed in these years of teaching is that many times the justification for their own actions by the students is 'because you did it like this', 'because the teacher said it', or the terrible 'no idea', Instead of using science itself and the knowledge that comes from it to justify its actions.

I studied the guideline of the Didactic Model proposed by D'Andrea (2012) for the teaching of validation, I explore with him and I make a new proposal with a lot of foundamentals in Neurosychology, in particular I follow the System Line of Change. I also take contributions from Didactics and the ANG theory. My proposal is for Ordinary Experiences to study with memories! From the use of them I have been able to rescue important results that make to the conclusions of

this Thesis and by what I complete the work making a proposal of Ordained Experiences in different subjects of Mathematics can accompany their learning.

Keywords: University students; validation; Ordered Experiences; Neurosychoeducation

DEDICATORIA Y RECONOCIMIENTOS

A Leonardo, Lucas, Lara y Gina, que llenan de oxitocina mi vida.

A Mariela, que con su conocimiento y dedicación hizo que completara la Tesis en tiempo y forma. Y antes de ser Codirectora brindó el espacio institucional para la Investigación y siempre mostró interés por la misma. Ella tuvo especial atención en las cuestiones referidas a mi discapacidad y doy fe que es así en cada particular caso que hay entre colegas o estudiantes en esta temática.

A mi neurosicoeducadora Marita Castro, apasionada por el conocimiento y la vida saludable.

A todos los que hacen el servicio de Salud Mental del Hospital Regional Castro Rendón, docentes y no docentes, que trabajan incansablemente, con menos de los recursos mínimos necesarios para su funcionamiento, en recursos humanos, en insumos y en las cosas necesarias para tratar las patologías psicosociales de la temática.

A mi ma, q. e. p. d.

A quienes me han formado durante mi vida.

¡A los hinchas de River como Ale y Mau! Los campeones de rally de la familia.

A la Cámara Argentina del Libro por guiarme en mis primeros pasos como autora.

A los estudiantes que me acompañaron, me leyeron, me oyeron, me mejoraron e hicieron útil mi vida todos estos años. Ellos seguían estudiando los domingos, en la Universidad, cuando yo regresaba tipo 21 hs de escribir esta Tesis o preparar clases.

A Marcelo Araoz que leyó y corrigió la Tesis con una mirada Científica e hizo Docencia de Posgrado para acompañarme en esta producción, aunque no pudo figurar en papeles.

A Rodolfo D´Andrea, por orientarme en estos años en esta tarea.

OBJETIVOS

Los objetivos de esta investigación son:

General

Analizar el desempeño de estudiantes ingresantes universitarios en procesos de validación matemática, a los efectos de generar aportes sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de este aspecto particularmente crítico.

Específicos

Indagar qué tipo de estrategias didácticas pueden potenciar o complejizar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la validación.

Indagar la relevancia de los factores emocionales en las tareas de validación matemática.

Comprender las diferentes condiciones de validación matemática según estudiantes de distintas carreras y en distintas materias.

Proponer material didáctico en el que se sigan las pautas establecidas por el Modelo didáctico tomado como referente y adicionalmente, las conclusiones de esta tesis.

LOS MOTIVOS QUE LLEVAN A ESTA INVESTIGACIÓN

Los motivos que propician la realización de esta investigación se generan a partir de las numerosas dificultades con las que nos encontramos los docentes en el utópico intento de querer enseñar procesos de prueba y validación en Matemática y los desalentadores resultados recibidos por parte de los estudiantes a través de los procesos evaluativos en exámenes parciales y finales.

CAPÍTULO I: MARCO TEÓRICO

INTRODUCCIÓN

El objetivo de este capítulo es, en palabras de Logat Grabner (2013), presentar una ‘verdad aproximada’ de los fundamentos teóricos que enmarcan esta tesis. Este investigador habla de una ‘verdad aproximada’ pues la ciencia es dinámica y lo que a esta altura es verdad pura, mañana puede ser ampliado, validado o contradicho por un avance científico. Estudiamos, aprendemos y enseñamos con el cerebro. El cerebro es un órgano que pertenece al sistema nervioso: SN. El SN es uno de los sistemas del cuerpo humano. El cuerpo humano es un componente de la unidad cuerpo-cerebro- mente- medio ambiente, que a partir de ahora llamaremos por las siglas UCCMMA. Este todo tiene un mundo exterior y un mundo interior. Conocer el propio mundo interior se llama autometacognición y conocer el mundo interior de los demás se llama heterometacognición. El concepto de UCCMMA es primordial, pues prácticamente nos define como individuos y es quien responde con las fuerzas del placer o del dolor a los instintos y a las emociones. Las fuerzas placer-dolor de un modo rápido y sencillo catalogan los estímulos entrantes y determinan sin dilación, cuál es la respuesta más adecuada ante los mismos. Así, en caso de que un estímulo se asocie a la fuerza placer, la respuesta inmediata al mismo será de atracción y acercamiento. Por el contrario, en caso de que un estímulo se asocie a la fuerza dolor, la respuesta del sistema o circuito de alarma será vía tálamo- amígdala y de rechazo, o de respuesta de inmovilidad o quietud, de huida o evitación, ataque o lucha defensiva, ataque ofensivo, sumisión, inhibición de acción. Cuando el estímulo se asocia a la fuerza placer, el sistema de recompensa, vía tálamo- núcleo accumbens responde con deseo y anticipación, atención, motivación y entusiasmo, búsqueda de recompensa, exaltación o excitación, ataque o lucha.

LOS MODOS DE DEMOSTRAR

El estudiante universitario de ingeniería a la hora de validar proposiciones actúa, desde diferentes posiciones, atendiendo a la clasificación de Balacheff (2000). Esta clasificación hace un distingo entre la denominada prueba pragmática de la prueba intelectual. Las pruebas pragmáticas están ligadas a lo experimental ya que predomina una presencia de saberes prácticos. Las justificaciones son realizadas a través de la representación de un objeto concreto. Las pruebas pragmáticas distinguen una clasificación en tres tipos, a saber: 1) El Empirismo ingenuo que se produce cuando el estudiante valida la afirmación después de verificarla para algunos casos particulares, sin un criterio formado al hacerlo, como "tanteando". Ejemplo: Álgebra de los límites: Cociente. El estudiante simplemente presenta un ejemplo donde verifica que la propiedad "funciona" para ese ejemplo. En algunos casos, puede presentar dos o tres por inseguridad pensando que más de uno refuerzan la validez. El estudiante no genera conclusión alguna, simplemente realiza la verificación como mecanismo de validación. 2) En el Experimento crucial, el estudiante toma en cuenta la problemática de la generalidad y la "resuelve" mediante el uso de un caso particular que reconoce como «no especial». Es decir que el estudiante verifica con un ejemplo que permite descartar alguna conclusión alternativa. Ejemplo: En el álgebra de los límites: Cociente, el estudiante plantea varios ejemplos de la propiedad, diferentes. Considera que a partir de estos ejemplos puede generalizar el resultado que se quiere demostrar. 3) En el ejemplo genérico, el estudiante justifica la afirmación operando sobre un objeto concreto al que considera representante de todos los pertenecientes al dominio de dicha afirmación. Este intenta plantear una argumentación basada en un ejemplo al que le da carácter de representante general de la clase. Ejemplo: En el álgebra de los límites: Cociente, el estudiante considera un ejemplo concreto pero con cierta carga de abstracción. Considera dos funciones polinómicas, una cuadrática y una lineal, por ejemplo, pero escritas genéricamente. Realiza el cálculo del límite del cociente para un hipotético valor al que se aproxima la variable. Observa que el límite del cociente para este ejemplo más elaborado es igual al cociente de los límites. A partir de este ejemplo genérico se permite concluir la tesis general.

Las pruebas intelectuales provienen de una forma particular de razonar, donde se articulan cadenas argumentativas, con una clara producción en el lenguaje simbólico propio de la Ciencia Matemática. Se dejan de lado los objetos materiales y su relación con la experiencia material. Las pruebas intelectuales, distinguen una clasificación en tres tipos diferentes, a saber: 1) El Experimento mental se produce cuando el razonamiento del estudiante se independiza de la representación del objeto aunque no necesariamente se trate de una prueba con la estructura de una demostración. Aquí los estudiantes interiorizan las acciones realizadas previamente (generalmente observación de ejemplos), las disocian de esas acciones concretas y las convierten en argumentos abstractos deductivos. Ejemplo: El estudiante vuelve a considerar el límite del cociente de dos polinomios, como si fueran los únicos tipos de funciones existentes. Pero esta vez los polinomios son de grado n. Verifica que la propiedad se cumple para este ejemplo generalizado (con una construcción más elaborada que la del ejemplo genérico) y luego concluye que la propiedad en cuestión se cumple para cualquier par de funciones. 2) El Cálculo sobre Enunciados, es una prueba que oscila entre la experiencia mental y la demostración. No tiene la característica de conformar una demostración pero tampoco tiene la característica del experimento mental. Se establecen construcciones intelectuales basadas en teorías más o menos formalizadas o explícitas, que se originan en una definición o propiedad y se basan en la transformación de expresiones simbólicas formales. Ejemplo: El estudiante esta vez, se atreve a plantear el límite del cociente de dos funciones hipotéticas f y g, pensando el cociente como el producto de la primera por la recíproca de la segunda. Luego tiene en cuenta el límite del producto ya probado y lo aplica a este producto. Pero en su argumentación, utiliza el hecho de que el límite de la recíproca de g, existe y es la recíproca del límite. No tiene en cuenta que está aceptando un hecho que está presente en lo que quiere probar y que aún no está validado. 3) La demostración, se produce cuando el razonamiento que utiliza el estudiante tiene la función de explicar en un lenguaje reconocido por la comunidad matemática, y cuyas reglas de debate se sostienen sobre la lógica formal.

El estudiante a la hora de reproducir una prueba expuesta por el docente en clase, lo hace "*como un ritual, un discurso que debe repetir o cuyo estilo debe imitar si se le pide probar un enunciado, más que como una herramienta explicativa basada en un sistema común de validación construido y aceptado por él y su grupo (Balacheff, 1982*)". (Azcárate Giménez, 1995, p.8). En general lo hacen, como una simple repetición memorística, carente de sentido y que en poco tiempo se esfuma y no cumple realmente el objetivo que tiene, sino que resulta un requisito obligatorio que permitirá la promoción de una determinada asignatura. Perkins (1995) es muy claro al referirse a estas cuestiones al denominar "Síndrome del conocimiento frágil" al problema en su totalidad. Dependiendo a qué Carrera va dirigido el curso se hace hincapié en diferentes contenidos. Pero, tanto en su proceso de enseñanza como en el de aprendizaje no debe dejarse de lado su epistemología, ésta es invariante. De lo contrario ya no se está enseñando Matemática, sino un 'recetario' de fórmulas y problemas. En virtud de esto, es atinado pensar que según a qué carrera vaya dirigido el curso de Matemática, ciertas pruebas pueden hacerse más ligeras o bien, directamente pueden obviarse, pero no considerar la posibilidad de la supresión definitiva de las pruebas y la conceptualización teórica. D´Andrea, Lavalle y Curia (2012), proponen un modelo didáctico para la presentación de un teorema a demostrar en el ámbito áulico y su posterior evaluación. Este modelo consiste de una serie de estrategias didácticas mostradas como una secuencia de tareas a los efectos de generar un aprendizaje comprensivo; significativo y constructivo con una perspectiva implícita que permita desarrollar un pensamiento lógico que pueda ser extrapolado a otras disciplinas. El modelo incluye el desarrollo de un capítulo inicial en el primer curso de Matemática acerca del Lenguaje Matemático. El desarrollo del capítulo mencionado contiene una descriptiva de los conectivos esenciales de este lenguaje y los elementos que hacen a la deducción matemática. Como consecuencia de la comprensión de la proposición desde el lenguaje propio del estudiante y la visualización, el acceso al lenguaje que le es propio a la Ciencia Matemática se simplifica. La secuencia de tareas a seguir para el logro del objetivo son las siguientes: 1) Presentación del teorema o proposición verdadera a demostrar; 2) interpretación coloquial; 3) verificación;4) visualización; 5) simbolización; 6) detección de los elementos vitales de la proposición; contenidos implícitos de la proposición; 7) pregunta disparadora de abstracción y 8) Guía Secuenciada de la Demostración.

La Guía Secuenciada consiste de una serie de instrucciones que contemplan el paso a paso de la prueba en cuestión para propiciar la construcción de esos razonamientos de forma autónoma. Esta Guía permitirá observar y también reproducir aproximadamente la demostración una vez realizada y mostrada por el docente, desde una perspectiva global hacia otras más focalizadas. Posibilita la construcción de la prueba generando aprendizajes comprensivos y significativos y no un "conocimiento inerte" (Perkins, 1995), sin interacción. Se recomienda que el docente debe generar la Guía Secuenciada de la totalidad de los teoremas o proposiciones a demostrar de la asignatura que dicta. La redacción de la Guía debe tener la mayor claridad posible y ser equilibrada en la extensión no siendo ni demasiado extensa, ni demasiado breve de modo de evitar generar ambigüedades en el estudiante a la hora de su lectura. Esta Guía es una interesante posibilidad también de sanear el inconveniente de la memorización por parte de los estudiantes a la hora del requerimiento de demostraciones en exámenes finales. La idea de la Guía Secuenciada está inspirada en la siguiente cita textual de Poincaré (1908):

> Una demostración matemática no es más que una simple yuxtaposición de silogismos, de silogismos colocados en cierto orden; y el orden en que están colocados estos elementos es más importante que los elementos mismos. Si tengo el sentimiento, la intuición, por

decirlo así, de este orden, que me permite percibir de una ojeada la totalidad del razonamiento, no debo sentir temor de olvidar ninguno de los elementos, cada uno de los cuales vendrá a colocarse por sí mismo en el cuadro que le está asignado, y sin que me vea obligado a hacer ningún esfuerzo de memoria.

La demostración matemática exige un orden, y ese orden tiene que guiar el proceso del razonamiento. Cuando el proceso no está guiado por lo que Poincaré llama el "sentimiento" o "intuición" de su orden, la sucesión de silogismos conduce a conclusiones verdaderas, pero que no son las que se quiere demostrar.

Se consideran a continuación un par de ejemplos de aplicación de esta Guía.

Ejemplo 1: Demostrar el Teorema de Cauchy o teorema del valor medio generalizado del Cálculo diferencial, cuyo enunciado se detalla a continuación: Sean f, g dos funciones continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b) entonces existe $c \in (a,b) / f'(c)[g(b)-g(a)] = g'(c)[f(b)-f(a)]$.

Guía Secuenciada para la prueba: Considerar la función auxiliar: $h(x) = f(x)[g(b)-g(a)] - g(x)[f(b)-f(a)]$ y aplicarle el teorema de Rolle, previo chequeo de las hipótesis. Chequeadas estas hipótesis, la aplicación del teorema mencionado llevará a establecer la tesis buscada.

Ejemplo 2: Deducir los coeficientes de la función lineal correspondiente a la asíntota oblicua, si existe, de una función racional.

Guía Secuenciada para la prueba: Partir del límite que establece el comportamiento de la asíntota oblicua respecto de la función racional. Para obtener la pendiente, basta con dividir por x en ambos miembros de la igualdad del límite, con el objetivo de generar infinitésimos. Aplicar el álgebra de los límites y despejar la incógnita buscada. Para obtener la ordenada al origen, partir del mismo límite y luego de aplicar el álgebra de los límites, y despejar el valor de la ordenada al origen.

NEUROSICOEDUCACIÓN. OBJETIVOS Y FUNDAMENTOS

Este apartado se fundamenta en Gomez Chacón (1997) y en Vestfrid (2015) en lo referido al cerebro triuno y en Logat Grabner y Rossler (2017) en lo referido a Sistema Lento y Sistema rápido.

Lo que plantea la Neurosicoeducación (el Sistema Línea de Cambio), es que si bien se pueden evidenciar los componentes: cuerpo, cerebro y mente, ellos forman una unidad indivisible que será distinta según el medio ambiente o contexto en el que se encuentre. Es ese ser integral, el sujeto de aprendizaje. Es ese ser cuya mente nace de la acción de cien mil millones de neuronas y de un billón de células gliales, sustento y estructura del cerebro. Es ese ser que puede resolver los conflictos de una mejor manera conociendo con mayor profundidad ambos mundos, el exterior y el interior. Esos mundos a su vez proveen estímulos que llegan por los sentidos al sistema nervioso central. El cerebro es un órgano del sistema nervioso. El sistema nervioso puede dividirse en tres grandes bloques: el sistema nervioso central, el sistema nervioso medular y el sistema nervioso autónomo. Este sistema recibe información del medio ambiente y del cuerpo, a su vez comanda al cuerpo en las funciones que realiza sin pensar como respirar o hacer latir el corazón. El cerebro, a su vez, también está formado por tres componentes individuales pero que forman un todo. Por esta razón, se habla de la naturaleza triuna del cerebro. El cerebro triuno es un privilegio del homo sapiens, es una de las tantas cosas que nos diferencian del resto de los animales. Este cerebro triuno es como si hubiese conservado en él el milagro de responder instintivamente y también responder luego de comparar pasado, presente y lo que quiero como porvenir. En este cerebro, el cerebro con el que aprendemos física, matemáticas o hacemos arma es el que nos hace llorar al ver determinada película o reir sin parar cuando nos cuentan un chiste, es el mismo que nos permite enamorarnos y es tarea de cada uno neurosicoeducarse para comprenderlo y lograr de él su máximo potencial para nuestro bien y el de la humanidad. Este cerebro se dice triuno pues está formado por un cerebro reptiliano e instintivo ubicado en el tronco encefálico y formado por el bulbo raquídeo, la protuberancia y el mesencéfalo, un segundo cerebro paleomamífero y emocional ubicado por encima del anterior y formado por el sistema límbico y un tercer cerebro neomamífero y ejecutivo, ubicado por encima del segundo y formado por la neocorteza. Este tercer cerebro anatómicamente es la corteza cerebral y en ella se localizan la capacidad de analizar, interpretar y almacenar la información que nos permite percibir y comprender lo que sucede a nuestro alrededor. Es el asiento de las funciones cerebrales superiores como el lenguaje, las gnosias 'saber reconocer' (facultad que permite reconocer por los sentidos un objeto, representarlo y deducir el significado) y las praxias 'saber hacer' (habilidades motoras), Vestfrid, (2015). Ellos tres en conjunto intervienen en el proceso de aprendizaje y deben ser tenidos en cuenta en la tarea de enseñanza. Ellos en conjunto hacen que no sólo nos ocupe la supervivencia sino que también lo haga la trascendencia. El cerebro emocional es el que nos puede premiar, es el que libera dopamina cuando logramos recitar versos de memoria, cuando resolvemos un problema matemático o cuando aprobamos un examen, podemos activarlo a voluntad haciendo ejercicios físicos y también con acciones gratificantes, estas pueden variar según cada UCCMMA. Este cerebro emocional puede hacer que nos sintamos motivados a resolver una tarea que requiera gran esfuerzo o sea un obstáculo para obtener una meta. En este cerebro emocional surgen muchos de los dispositivos básicos del aprendizaje: sensopercepción, atención, memoria, motivación y emoción. A manera complementaria podemos decir que el cerebro instintivo está integrado por el tronco cerebral o del encéfalo, cerebelo e hipotálamo. Estas estructuras están relacionadas con los procesos homeostáticos, los que regulan y estabilizan los parámetros biológicos fundamentales para la supervivencia del organismo (glucosa, agua, sales, oxígeno, ritmo respiratorio, latidos cardíacos, etc.) Este sistema está maduro al nacer.

El sistema emocional entra un instante después evolutivamente, en escena. Con él surgen las capacidades de aprender y memorizar nuevos conocimientos. Así, a la memoria genética se le suma una memoria que depende del aprendizaje. Algunas de las áreas de este sistema son el tálamo, la amígdala, el núcleo accumbens y el hipocampo. Actualmente se considera que algunas zonas de los lóbulos prefrontales también intervienen en los procesos emocionales. El sistema emocional tiene funciones tales como: 1) Supervivencia y respuesta rápida para cuidar de la misma, 2) Cambios para generar en el organismo respuestas motoras y cambios autonómicos y hormonales que han probado ser adaptativos (o sea que aumentan la posibilidad de supervivencia), 3) Cuidado de la cría, 4) Capacidad de aprendizaje, 5) Memoria, 6) Recuperación de lo aprendido para aplicar en situaciones parecidas, 7) Emociones que energizan y guían al organismo en sus interacciones con el medio ambiente, 8) Curiosidad, 9) Sociabilidad y 10) Juego.

El sistema neocortical o sistema de los lóbulos prefrontales se integra por último a los dos anteriores. Este sistema formado por el neocortex representa el 85% del volumen total cerebral. Este sistema es el más evolucionado y nos distingue como humanos, pues está presente en otras especies, pero de tamaño menor. Algunas de las capacidades son 1) Razonar, 2) Pensar, 3) Evaluar, 4) Vetar impulsos emocionales, 5) Auto- observarse, 6) Ver a futuro, 7) Hacer planes, 8) Trazar estrategias, 9) Comunicarse a través del lenguaje verbal, 10) Desarrollar valores trascendentes, 11) Automotivarse.

Habíamos hablado del sistema nervioso, pero no de como cada sistema, cuenta con células especializadas. En este sistema las células reciben el nombre de neuronas. Las neuronas se comunican por sinapsis, y las sinapsis pueden ser eléctricas o químicas. Es esta comunicación la que va mejorando y haciendo que aprendamos. Es esa comunicación la que hay que favorecer, mejorar la capacidad de transmisión para poder transitar por ese camino para recuperar la información depositada en la memoria y así en vez de ‘estudiar de memoria’, ‘estudiar con memorias’. Ha leído bien, es estudiar con memorias, pues tenemos memoria sensorial, memoria a corto plazo, memoria a largo plazo y memoria de trabajo según el tiempo que guardan la información y según la tarea que puede requerir guardar información o recuperar información guardada. Podemos decir entonces que contamos con un almacenamiento temporal y un almacenamiento permanente. También podemos hablar de las memorias según qué las estimula o qué información guardan y así la clasificación correspondiente es: memoria perceptiva, memoria operativa o de trabajo, memoria episódica, memoria semántica, memoria procedimental o instrumental, memoria autobiográfica y memoria emocional (Logat Grabner, Rossler, 2017). En alguna de estas memorias tienen que estar los conceptos para conectarlos adecuadamente y lograr aprendizaje significativo según conexiones en vez de aprendizaje memorístico por ausencia de ellas. A modo de integración podemos pensar al aprendizaje desde la neurobiología como un proceso en el que intervienen múltiples factores entre los que cabe destacar la emoción y la motivación, de ellas depende la atención que dediquemos al objeto de estudio y la información que podamos percibir o recibir de él. Esta información será guardada en los almacenes mnésicos y luego evocada. Una de las capacidades del ser humano implicadas en hacer matemática, por ende, en validar, es la toma de decisiones. En los procesos cognitivos influye la forma en que se procesa la información que nos brinda el mundo exterior. Uno de los lugares físicos en los que ocurren los procesos cognitivos es en el cerebelo que también dirige funciones motoras. Una cuestión por la que se vinculan las diferentes oraciones hasta aquí redactadas en este párrafo es porque las emociones y la razón son puestas en juego al tomar decisiones, estas decisiones son en función de la percepción que tengamos del mundo exterior o interior y marcarán que es entonces, lo que vamos a aprender. Lo delicado del tema es que entonces, estaríamos decidiendo con el sistema límbico, es decir, decidimos según comandan las emociones. Creo que en esto fundamento una postura, si no acompañamos la enseñanza de la matemática de motivación, extrínseca e intrínseca podrá ser mucho más complejo que aprendan y muchos ante la frustración continuarán diciendo: 'esto no es para mí' y abandonando el barco.

Esta realidad puede revertirse notablemente si se concientiza al estudiante de que:

- Aunque nos frustremos debemos recomenzar la tarea.
- No es fácil pero es humanamente posible.
- Sus cerebros son máquinas increíbles.
- No deben desanimarse, aunque seguramente cada vez tengan que estudiar más horas.
- Resolver una simple tarea o una gran tarea produce una química única en nuestro organismo y ¡nos la merecemos! (Esta química motiva intrínsicamente a continuar e ir por más, en palabras de Rossler & Logat Grabner, (2017), 'la motivación intrínseca es superadora a todas las motivaciones'.)

Por lo tanto, debemos tener presente de que la toma de decisiones es un proceso que depende de áreas cerebrales involucradas en el control de las emociones. En particular, la toma de decisiones es una función de la cognición altamente compleja si pensamos que el estado de ánimo influye muchísimo en ella. Y es así entonces, que la alfabetización de las emociones es altamente relevante para que los seres humanos de ahora en más se puedan decir educados. Ésta, se llama, alfabetización neurocientífica. ¿Por qué? Pues, porque debemos decidir un valor de verdad, una justificación, un resultado entre un número infinito de números, una función, un dominio o un cuerpo. Recién cuando podamos decidir, habremos hecho matemática. Podríamos decir que hacer matemática es producto de combinar la actividad de centros emocionales; centros cognitivos, que intervienen en el procesamiento de la memoria operativa, la planificación y la atención; y centros racionales. En relación a esto, Manes (2012) explica que los 'procesos que coordinan capacidades cognitivas, emociones y la regulación de respuestas conductuales frente a diferentes demandas ambientales se denominan 'funciones cognitivas'. Estas habilidades pueden dividirse en dos: por un lado, las llamadas 'metacognitivas', que influyen en la resolución de problemas, en el pensamiento abstracto, en la memoria de trabajo, en la planificación, en la estrategia e implementación de acciones; por otro, las emocionales o motivacionales, responsables de coordinar la cognición y la emoción, es decir, de encontrar estrategias socialmente aceptables para los impulsos.' Si bien las neurosciencias cognitivas nos informan que la región prefrontal dorsolateral está asociada a tareas más cognitivas que emocionales y por ello decir que hay áreas del cerebro más intelectuales que emocionales, a partir de las investigaciones esto se ha convertido en un neuromito, se sabe que hay tareas que se desarrollan en otras zonas del cerebro además de las conocidas y que estas nuevas zonas antes se pensaban para otra única tarea y esto no es tan así. A modo de cierre tendríamos que pensar en que hacer matemática, más específicamente validar, implica efectuar razonamientos con emociones y sentido común. Logat Grabner (2013) define 'La Neurosicoeducación, … es un sistema educativo basado en la Capacitación y el Entrenamiento, que tiene como finalidad completar el Desarrollo de la Inteligencia, promover el Crecimiento Personal y expandir la Conciencia Humana, … para que todas las personas logren:

- Comprenderse y conocerse a sí mismas.
- Comprender y conocer a los otros.
- Resolver y prevenir situaciones conflictivas.
- Modelar o cambiar facetas de la personalidad que así lo requieran.
- Definir y alcanzar sus objetivos.
- Actuar con altos valores humanos.
- Prevenir el daño, emocional y cognitivo de las generaciones futuras.'

Este mismo autor señala que tenemos la capacidad de aprender y reaprender, razón por la que la información y la memoria son el centro de la Neurosicoeducación. Estos componentes pueden variar considerablemente con el aprendizaje.

Logat Grabner (2013) señala que el trabajo en la educación para la activación de facultades cognitivas superiores del cerebro, debe posibilitar hacer concientes las respuestas emocionales e instintivas. Esta formación se sostiene en los nuevos conocimientos científicos y permite desarrollar capacidad de comprensión, análisis, evaluación y autodeterminación, y, a su vez, favorece la libertad de pensamiento y el desenvolvimiento con un pensamiento y desempeño que se sostiene más desde lo humano que desde lo estrictamente intelectual. Las principales premisas de la Neurosicoeducación consisten en transformar los complejos enunciados de la ciencia a un lenguaje de más fácil comprensión, accesible a todos y también en la selección, análisis, evaluación y organización de gran cantidad de material científico disperso, con miras a su aplicación práctica en el proceso de mejorar nuestras vidas.

En la actualidad en lugar del cerebro triuno se hablan de dos sistemas de los que solamente presentaré un cuadro comparativo, de ellos mencionan Logat Grabner y Rossler (2017):

Sistema instintivo emocional neocortical implícito.	Sistema neocortical explícito.	Neurosicoeducación.
SIENI.	SINE.	Neurosicoeducación.
Sistema rápido.	Sistema lento.	Khaneman.
125 milisegundos.	375/500 milisegundos.	
Sistema impreciso.	Sistema más preciso.	
Características:	Características:	
*Reactivo.	*Razonamiento conciente.	

*Asociativo.	*Alto costo energético.	
*Cortoplacista.	*Posee control inhibitorio.	
	*Evolutivamente de reciente aparición.	
	*Menos dependiente de los estímulos medioambientales.	
Camino ultracorto. Camino corto.	Camino largo.	
Elefante. Cerebro emocional. Cerebro reptiliano.	Jinete de elefante. Cerebro cognitivo.	Nse. Castro.(2011)
Inteligencia instintiva emocional.	Inteligencia de los lóbulos prefrontales.	
Complejo cerebro mamífero+cerebro de reptil.		Nse. Castro. (2011)
Complejo cerebro emocional+cerebro instintivo.	Sistema de los lóbulos prefrontales.	

Hay resultados en estudios de Matthew Lieberman y Universidades de: Harvad, Princenton, Mit.

DISCIPLINAS QUE SUSTENTAN EL SISTEMA LÍNEA DE CAMBIO

Línea de cambio es básicamente, en sus primeros años, una filosofía de vida basada en las neurociencias, que opta por tomar los principales y más trascendentales hallazgos obtenidos por la psicología experimental, las neurociencias y la pedagogía, con el objeto de permitir que se estreche un puente entre esas tres disciplinas.

El Sistema Línea de Cambio está multidisciplinarmente fundamentado. Las disciplinas que lo sustentan son: Neurociencias, Genética Conductual, Sociobiología, Psicología Evolucionista, Genética, Memética, Evolución, Medicina Preventiva, Nutrición, Sociología, Ecología, Etología, Física Cósmica, Física Cuántica, Política y Economía Internacional.

La Neurosicoeducación propone entonces una manera integral de conocer al ser humano desde distintos puntos de vista científicos y aprender, por ejemplo, los motivos por los cuales nos agotamos, angustiamos, enojamos o desbordamos tan fácilmente. La realidad es que el aprendizaje lo podemos hacer gracias al sistema nervioso (SN), principalmente gracias al cerebro dividido en tres sistemas según su evolución como hemos hablado anteriormente. Nuestro cerebro evalúa por dos caminos los estímulos entrantes. Por un camino corto para garantizar la supervivencia inmediata. Por un camino largo, de evaluación más compleja y completa vía tálamo- corteza. Es un camino largo pues tiene un recorrido neuronal más extenso y le es necesaria más información de la memoria para tal evaluación. Del sistema de amenazas estudiaremos las respuestas físicas que le acompañan: 1) Aumento del ritmo cardíaco, 2) Aumento de la presión arterial, 3) Aumento del ritmo respiratorio, 4) Aumento de la fuerza muscular. Comenzamos estas líneas hablando de que aprendemos por tarea del SN. Los sentidos son la puerta por donde ingresa la información del mundo exterior. Estos datos luego cobran relevancia al ser interpretados por el cerebro y sus bancos de memoria, lo que significa que es reinterpretado según el mundo interior de cada persona. Expresar el mundo interior de cada persona puede no alcanzar para apreciar toda su magnitud. Detallar algunos elementos del mundo interior incluiría: genética personal, conocimientos e información guardada en la memoria, ideas, creencias y convicciones, zonas de seguridad, experiencias de vida propia, experiencias de vidas ajenas, cultura a la cual se pertenece, años, capacidad de afrontamiento si la situación es nueva, estado emocional del momento, mecanismo anticipatorio, horas de descanso, exigencias a las que está o estuvo sometida la UCCMMA y contexto, por mencionar algunos. Al respecto, Logat Grabner, 2005 señala: "*No vemos las cosas tal como son, sino tal como somos*". Las emociones condicionan nuestro aprendizaje. Las áreas del SN involucradas en el control de las emociones, la motivación, la atención, el aprendizaje y la memoria pertenecen al sistema límbico. Este interacciona muy velozmente con el sistema instintivo, endócrino y el sistema nervioso autónomo. Integran este sistema: tálamo, hipocampo, amígdala, área septal, formaciones olfatorias, núcleo accumbens y lóbulos prefrontales (LPF). Nuestra capacidad de aprender es la que nos permite hacer cambios en nuestros modos de ver la vida, de comportarnos, de relacionarnos, de trabajar, y de lograr que nuestra UCCMMA pueda mejorar y expresarse en su máximo potencial. Por ello no quedan dudas de que una de las características que hace al SN tan excepcional es su plasticidad. A las modificaciones que se pueden lograr gracias a esta capacidad se las agrupa bajo la denominación 'plasticidad neuronal'. Éstas se relacionan con la capacidad del SN de reparar lesiones y con los procesos de aprendizaje, es decir, interesan no sólo para comprender que ocurre ante lesiones de diversa etiología, sino para entender el modo en cómo aprendemos y cómo recordamos. Es en la maravillosa conexión de neuronas (sinapsis) y en las redes que estas conforman, que encontramos las bases del aprendizaje, la memoria y la posibilidad de cambios. En los últimos años se han desarrollado innumerables trabajos que presentan que el SN mantiene durante toda la vida la capacidad de modificación anatómica y funcional. Si bien en los adultos la plasticidad cerebral es menor comparada con la de los niños, los cambios plásticos ocurren a cualquier edad.

MINIGLOSARIO EN EL CONTEXTO DIDÁCTICO CONTEMPORÁNEO A LA NEUROSICOEDUCACIÓN

La propuesta es para que el estudiante se guíe por una secuencia de conceptos conocidos o bien la construya él mismo, a los efectos de generar un aprendizaje comprensivo, significativo y constructivo con una perspectiva que permite desarrollar un pensamiento lógico que puede ser extrapolado a otras disciplinas. Pero, ¿qué entendemos por aprendizaje comprensivo, significativo y constructivo?

"*El aprendizaje significativo es un proceso de incorporación no arbitraria, sustantiva, y no literal de nuevos conocimientos en la estructura cognitiva del individuo*." (Ausubel, 1968)

En palabras de Chroback (1998),

> "Según Bruner, el aprendizaje es un proceso activo durante el cual se construyen nuevas ideas y conceptos en base al conocimiento previo. el sujeto selecciona y transforma información, elabora hipótesis y toma decisiones, basado en una estructura cognitiva (o esquema o modelo mental), provee significado y organización, basado en sus experiencias de tal forma de ir más allá de lo que la información obtenida le puede brindar."

Siguiendo este último autor, "*la psicología cognitivista se ocupa del proceso de comprensión, transformación, almacenamiento y uso de la información*." (Chroback, 1998). Se entiende el aprendizaje comprensivo como un proceso de creación mental por el qué, partiendo de la información que recibe una persona crea un significado más o menos profundo de un asunto determinado. (Perkins,1999).

LA TEORÍA ANG Y LA LÍNEA DE LA DIMENSIÓN AFECTIVA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

La teoría de aprendizaje propugnada por Ausubel, Novak y Gowin (ANG), (1988) hace hincapié en una perspectiva cognitiva de la psicología educativa y su relación con el aprendizaje significativo. Adicionalmente establece un correlato con una epistemología constructivista, que postula que el conocimiento es una producción exclusivamente generada por el ser humano. A través de esta teoría, se puede sostener que un docente puede detectar que un estudiante ha comprendido una nueva estructura conceptual cuando es capaz de explicarlo a través de su propio lenguaje. Cuando un estudiante es capaz de explicar un nuevo concepto aprendido a través de su propio lenguaje, entonces ha logrado su apropiación, por ende, se ha generado un aprendizaje significativo. En este tipo de aprendizaje se considera al proceso de enseñanza como un encausamiento deliberado de los procesos de aprendizaje, a través de los lineamientos sugeridos por una teoría del aprendizaje que sea relevante en el ámbito áulico. A este respecto Logat Grabner (2013) y Rossler (2017) enseñan que enunciar en las propias palabras remite a una forma de activación de las memorias, importantísimas en la neurobiología del aprendizaje, aunque no es la única actividad que las hace funcionar. Esta investigación tiene lineamientos de la teoría ANG, teoría que lleva más de cinco décadas de vida muy prolífica y que no ha dejado de brindar opciones que mejoren el proceso de enseñanza y de aprendizaje de cualquier disciplina.

En el aprendizaje se pueden distinguir el uso de estrategias cognitivas, metacognitivas y de las de gestión de los recursos para estudiantes de nivel superior, de quienes se espera que autorregulen su aprendizaje en vías de conseguir la autonomía. Entre las estrategias cognitivas de aprendizaje están la repetición, elaboración, organización, planificación y control de los contenidos en un tiempo, un lugar, con determinadas personas y consigo mismo, es decir que ha autoregulado su aprendizaje. En otros términos, significa que acaecieron acciones que pusieron en evidencia la metacognición, o sea, acciones que reflejan el uso de estrategias y herramientas metacognitivas.

La educación puede ser considerada como toda experiencia que contribuye al potenciamiento de una persona para desenvolverse en la vida diaria. Una experiencia educativa positiva acrecentará su capacidad para pensar, sentir y actuar. En esta experiencia son aceptados cinco elementos: estudiantes, disciplina de estudio, profesores, medio ambiente y evaluación (Chroback, 1998). Los factores tiempo y dinero no se los considera primarios, sino que son el medio para que las ideas promisorias, que si se consideran primarias, puedan llegar a su utilización. Esto da cuenta de que la teoría sigue en formación, que el conocimiento no es una cosa acabada y hay lugar para quienes piensan, y hay espacio para redefinir, consensuar, investigar, templar y generar nuevas hipótesis. Las ideas promisorias incluyen una promesa de futuro mejor para la enseñanza y el aprendizaje, pueden expresar cuestiones no dichas antes, abrir argumentos investigativos como así también explicitar cuestiones implícitas hasta el momento.

Dejar que los estudiantes sean curiosos, fue en su momento una idea promisoria, antes de ella se consideraba un mal hábito que un estudiante sea curioso, era propio de alguien mal educado, mientras que a partir de esa idea se fue viendo que era posible, dejando libre la curiosidad, de manera que el aprendizaje por descubrimiento tenga mayor presencia en la actividad cognitiva.

Se entiende así que el aprendizaje significativo incluye la integración constructiva de los pensamientos, los sentimientos y las acciones. Se entiende por conceptos a las regularidades percibidas en objetos o eventos, o sus registros, designadas por un símbolo rótulo. Éste es el significante antes mencionado.

La mayoría de lo que se sabe como consecuencia del acto de aprender, está constituido a partir de registros sobre eventos u objetos más que a partir de observaciones directas. Estos registros son los hechos y su significado debe ser interpretado por cada individuo y la interpretación puede variar ampliamente.

En este contexto se denominan principios a los enunciados que describen relaciones significativas entre distintos conceptos. En la teoría ANG se menciona el grado de significación que aumenta según posean conocimientos previos relevantes y bien organizados y hacen más fácil la adquisición y uso de conocimientos en ese campo.

En esta tesis, también se hace referencia a la Línea de la Dimensión Afectiva de la Educación Matemática, pues toda validación se narra con la convicción. Esta convicción surge de la vinculación entre eslabones al demostrar, por ejemplo, o de la certeza de construir un ejemplo o contraejemplo y que esto sea posible. Es entonces que la afectividad, las creencias, la motivación, tendrán una influencia en la tarea individual de aprender a validar. Es así que las emociones y los afectos influyen de maneras particulares en cada individuo en esta tarea. A continuación, se detallan algunos fundamentos teóricos de esta Línea de Investigación en Educación Matemática. Ella hace referencia a la consideración que es necesaria de la relación entre afectividad y enseñanza y aprendizaje de la matemática. La consideración es a sentimientos, emociones, creencias, actitudes, valores, apreciaciones, gustos, preferencias, humores, comportamiento moral y ético, desarrollo personal y desarrollo social. Las creencias acerca de la matemática, lo que el estudiante y el profesor creen de esta ciencia, son las componentes subjetivas tácitas, manifiestas, expresadas, sobreentendidas aunque muchas veces no evidentes ni explícitas en el vínculo de los individuos con la ciencia dura en las clases o al realizar tareas.

Se aprecia una componente afectiva en las creencias acerca de la matemática como disciplina, como así también las creencias del estudiante y del profesor acerca de ellos mismos y su relación con esta disciplina. El desafío es entonces tener autoconciencia de la relación de la metacognición con esta componente afectiva en el propio aprendizaje y como consecuencia la autorregulación del mismo.

Entre los conceptos que se utilizan en esta línea investigativa, también están: la actitud; las emociones y las ya nombradas, creencias; entre otros. En este contexto, que no es el contexto principal de la tesis pues ella está principalmente fundamentada en el Sistema Línea de Cambio del que contamos con un glosario de uso primordial, se entiende por actitud a la predisposición evaluativa, es decir, positiva o negativa que determina las intenciones personales e influye en el comportamiento. Consta, por tanto, de tres componentes: una componente cognitiva, una componente afectiva y una componente intencional. Se estudian las actitudes hacia la matemática y las actitudes matemáticas. Asimismo, comparto que los afectos en matemática tienen su significado. Además, se entiende por emociones a las respuestas organizadas mas allá de la frontera de los sistemas sicológicos, incluyendo lo biológico e instintivo, lo cognitivo, lo motivacional y el sistema experiencial. Los afectos tienen significados prácticos. Conocerlos, permite la autorregulación del aprendizaje en el aula. Los afectos indican efectivamente la situación de aprendizaje y la perspectiva del profesor. Son una fuerza de inercia, impulsoras de la actividad matemática, o también fuerzas de resistencia de la misma. Los afectos son también vehículos del conocimiento matemático.

Algunos de los aspectos ya han sido mencionados, fundamentando que se aborde matemática en el currículum. Pero con un desarrollo de la dimensión afectiva que incluye: factores afectivos y creencias acerca de la naturaleza de la matemática, la matemática como conocimiento cultural, la influencia de la historia personal, que determina las actitudes y apreciaciones. Manifestando así, la interacción entre cognición y afecto y trabajando el autoconcepto del estudiante como aprendiz de matemática.

“Las creencias proporcionan contexto de las respuestas actitudinales y emocionales hacia la matemática”. (Mandler, 1984).

Se puede entonces buscar un profesional de la Matemática (Profesor, Licenciado o en el mejor de los casos, con grado de Doctor) o profesional de las Ciencias Económicas (Contador, Economista, Profesor, Licenciado en Administración de Empresas), alfabetizado emocionalmente, es decir, que desarrolla su inteligencia emocional en este contexto, que logra una forma de interaccionar con este ámbito, y que tiene muy en cuenta los sentimientos y emociones propios y ajenos. Tendrá como habilidades el control de los impulsos y fobias en relación a la asignatura (lo cual permite desarrollar la necesaria atención para que se logre el aprendizaje), la autoconciencia, la motivación, el entusiasmo, la perseverancia, la empatía, la agilidad mental, entre otras cuestiones.

La línea de investigación de la dimensión afectiva en educación matemática de siglas LI- DAEM, tiene fundamento en teorías cognitivas, en el construccionismo social, en el interaccionismo simbólico, en el sociocognitivismo, en investigadores hermenéuticos de dimensiones estructurales o de un panorama en que se aúnen todas las dispersiones.

Gomez Chacón (2008) relata, como Mandler (1989) y Weiner (1986) mencionan antes que ella, la relación entre Educación Matemática y afecto. En particular menciono la relación entre resolución de problemas y afecto de Mandler (1989). Las dimensiones del estado emocional del resolutor de problemas son: magnitud, dirección, duración, nivel de conciencia, nivel de control, afecto local, afecto global, escenarios simples y complejos.

Cuando se estudia Matemática, antes de que quede plasmado un resultado en lenguaje matemático uno se vale de conocimiento directo e inmediato, en el que no intervienen la deducción ni el razonamiento, es un conocimiento considerado como evidente. También el aprendiz se vale de imágenes que imagina, gráficos representativos, dibujos sobre ideas, etc. Esto es, en palabras de Gomez Chacón (2013), que "*la matematización tiene un apoyo continuo en la intuición y en lo visual*".

CAPÍTULO II: MARCO METODOLÓGICO

La investigación que permitirá analizar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la validación por el estudiante universitario en Matemática es un estudio de tipo mixto: cualitativo – cuantitativo. El trabajo de campo asociado a esta investigación se realiza en tres etapas. La primera etapa se desarrolla en el primer cuatrimestre del 2014 con estudiantes de la Universidad Nacional del Comahue y específicamente de las carreras de Contador Público Nacional (CPN), Licenciatura en Administración (LADM), Ciclo General de Ciencias Económicas (CGCE) y Profesorado en Ciencias Económicas (PCSE). El estudio es realizado considerando un grupo experimental y un grupo de control. En el grupo en el que se experimenta la enseñanza de la práctica estaba fundamentada en el uso de Experiencias ordenadas. Ellas consisten en enumerar las propiedades, como han sido enseñadas en la clase teórica, de manera previa a la explicación paso a paso de la forma de resolver determinado ejercicio.

Experiencia ordenada: secuenciación de propiedades, lemas, teoremas, corolarios o definiciones, que sean conocimientos previos para lograr un razonamiento válido en una clase teórica, práctica o evaluativa, para resolver un ejercicio o realizar una demostración. También se pueden secuenciar o enumerar acciones posibles o no posibles, nociones lógicas, formas de razonar propias de la ciencia, formas de comenzar o concluir, formas de operar según conjunto y operación, artificios, métodos de demostración, que sean previos o pertinentes en esta oportunidad, de manera de evocar o contextualizar, para tomar decisiones y formular un desarrollo completo del ejercicio o la demostración.

La segunda etapa corresponde al curso de ingreso realizado con el grupo de ingresantes a la Facultad de Ingeniería, Módulo de Ingeniería Civil, de 78 estudiantes con Nivel Medio completo, 36 mujeres y 42 varones. Grupo participativo, dinámico, trabajador. Asistencia de 52 estudiantes a la quinta clase. A la penúltima clase eran 46 los asistentes. Al examen individual escrito eran 63 los asistentes. Finalmente, la tercera etapa se realiza con un grupo de estudiantes de un curso de Álgebra y Geometría de las Ingenierías en la Universidad Nacional del Comahue. Esta experiencia es desarrollada durante el segundo cuatrimestre de ‘14. Se utilizan dos grupos de similares características etarias y de formación. El instrumento utilizado para la experimentación se describe directamente en el capítulo siguiente con el desarrollo de los estudios de campo.

CAPÍTULO III: TRABAJOS DE CAMPO

TRABAJO DE CAMPO INICIAL

En el primer cuatrimestre del 2014 con estudiantes de las carreras de Contador Público Nacional (CPN), Licenciatura en Administración (LADM), Ciclo General de Ciencias Económicas (CGCE) y Profesorado en Ciencias Económicas (PCE) es realizado el siguiente estudio considerando un grupo experimental y un grupo de control. En el grupo experimental (refiriéndome al grupo en el que se experimenta) la enseñanza de la práctica estaba fundamentada en el uso de Experiencias ordenadas. Ellas consisten en enumerar las propiedades, como han sido enseñadas en la clase teórica, de manera previa a la explicación paso a paso de la forma de resolver determinado ejercicio. Pueden ser enunciados lemas, teoremas, corolarios, definiciones, además de propiedades, que permitan decidir una acción posible tendiente a generar un razonamiento válido. También se pueden enunciar acciones no posibles, nociones lógicas o formas de razonar propias de la ciencia, como comenzar o concluir de manera que el desarrollo quede completo, acerca de como operar según conjunto y operación, artificios, métodos de demostración a utilizar o formas propias de determinada demostración también con ese fin.

En esta oportunidad el uso de las Experiencias ordenadas no estuvo en el contexto del modelo didáctico propuesto por D'Andrea (2012), tampoco en el contexto de la actividad de validar solamente, sino en el contexto de todos los ejercicios prácticos evocando la teoría y constituyéndose en el primer repaso de ella en caso de que los estudiantes no hayan tenido tiempo de repasar individualmente. En la práctica, parte del material era un resumen del teórico. Este uso de las Experiencias ordenadas permitió obtener resultados distintos en el grupo experimental. Probablemente la diferencia en los resultados es debida a que el orden ayuda en el estudio con memorias. Otra cuestión es que la teoría no queda desvinculada de la práctica y como algo a estudiar para el final sino como la que proporciona los conceptos y razonamientos que permiten resolver los ejercicios de un trabajo práctico. Entre los resultados obtenidos estuvo el de ampliación de la capacidad de justificar tanto ante el enunciado de justificar, como no estando este. Justificaron más, fundamentaron utilizando los conceptos provenientes de la teoría, como cuando se nos rompe algo en casa y lo arreglamos con lo que hay. Íbamos a la memoria y buscábamos que había quedado ahí luego de la clase teórica y con ello formábamos cadenas de razonamientos con eslabones según el ejercicio a resolver. Digo, 'buscábamos que había quedado' pues el registro del que provenían los ítems de cada Experiencia Ordenada era la Teoría. A partir de los datos empíricos parece observarse una tendencia a obtener mejores resultados en el grupo experimental.

Los ejercicios con los que se armó esta tabla tenían los siguientes enunciados:

4.a. Estudiar la convergencia de la suceción $a_n = \frac{4n^2}{2n^2+1}$.

4.b. Analizar si es creciente o decreciente y si está acotada la sucesión de término general $\frac{n}{2n+1}$. Justificar.

4.c. Encontrar el término a_{17} de la progresión geométrica si $a_3 = \frac{7}{27}$ y $a_2 = \frac{7}{9}$. Encontrar la suma de los primeros 17 términos.

4.d. Decir verdadero o falso. Justificar.

4.d.1. La sucesión $\frac{1}{4} + \frac{7n}{3}$ es aritmética.

4.d.2. La sucesión $(-1)^n \frac{2}{n}$ es creciente.

Tabla de doble entrada. Resultados en ejercicio 4.

	Grupo de Control		Grupo Experimental	
	Media	Desvío	Media	Desvío
Ejercicio 4. a.	4.86	3.7	5.3	3.6

Ejercicio 4. b.	7.6	5.8	8.3	5.3
Ejercicio 4. c.	2.23	2.95	2.2	2.8
Ejercicio 4. d. 1.	1.37	2.2	0.5	1.3
Ejercicio 4. d. 2.	2.7	2.4	2.7	2.1
Totales	42.6	20.4	43.2	20.4

Fuente: Elaboración propia.

En las resoluciones de los parciales se observa mayor producción de los estudiantes del grupo experimental al demostrar, es decir, no sólo pueden justificar más sus razonamientos sino que logran hacer cadenas de más eslabones al razonar, aunque no son la totalidad de los estudiantes que logran hacer completas y bien las demostraciones. Los estudiantes del grupo experimental hacen más matemática que los estudiantes del grupo de control. Podríamos decir que las Experiencias ordenadas son un andamiaje de la resolución de ejercicios y de las demostraciones. Ellas generan contenido a evocar de las memorias. Ellas los hacen estudiar. Leerlas les remite a las definiciones, teoremas y corolarios de la teoría. Aprecio que las Experiencias ordenadas favorecen, no sólo a que más conceptos permanezcan en las memorias sino que, además, estén disponibles para el razonamiento en mayor cantidad que con otras metodologías. Las Experiencias ordenadas vienen a desterrar un mito muy arraigado en los docentes de matemáticas: Debo escribir lo justo, necesario y correctamente, así los estudiantes aprenderán bien matemática. En realidad, es necesario para el aprendizaje significativo que el estudiante disponga de los conocimientos de todos los órdenes de manera explícita por acción del docente o por acción propia, pues una vez comprendidos, generan una escritura de lo justo, necesario y correcto.

En esta experiencia, en el grupo experimental, como se les había mencionado, tenían Registros. Estos Registros tenían todas las definiciones, proposiciones, teoremas, corolarios y propiedades brindadas en las clases teóricas. Si bien la construcción de Registros en las primeras unidades fue mía, luego ellos debían tomar la posta y continuar construyendo sus Registros para el estudio. Un ejemplo de Experiencia ordenada de este grupo experimental es:

Enunciado: Hallar la función inversa de y= f(x). Graficar la función y su función inversa.

Experiencia ordenada para hallar la función inversa:

- Graficar la función.
- Utilizar el Criterio de la Recta Horizontal para determinar intervalo de inyectividad.
- Demostrar que la función es inyectiva.
- Definir la imagen de la función a la que hay que encontrarle la función inversa.
- Definir la función para que sea sobreyectiva.
- Concluir que la función es biyectiva.
- Despejar x en la expresión de la función.
- Intercambiar x e y.
- Definir la función inversa.
- Graficarla verificando simetría axial de recta y=x respecto de la primera función graficada.

Una vez que cada estudiante disponía de la Experiencia ordenada comenzaba la resolución del ejercicio siguiendo su secuencia que muchas veces aparecía en una transparencia, en la pared contigua al pizarrón. En este ejercicio en particular, en el ítem 3, contaba con otra Experiencia ordenada para la Demostración.

Las Experiencias ordenadas no son las Guías Secuenciadas que aparecen en el modelo didáctico propuesto por D'Andrea (2012) como un ítem del mismo, no son un objeto de estudio en sí como ha sido planteado en otras oportunidades en mi investigación. Son una clase de Guía Secuenciada, a manera de subclasificación. Hay Guías Secuenciadas distintas. A su vez, el modelo didáctico propuesto por D'Andrea (2012) es un modelo para la enseñanza de la validación y como hemos visto en este ejemplo, he ordenado el razonamiento que permite resolver un ejercicio de Análisis Matemático básico, lejos de ser propiamente de validación. La Experiencia ordenada para validación que se utilizó para hacer la Demostración del ítem tres iría en clase de Guías secuenciadas u opción al ítem de Guía Secuenciada del modelo didáctico propuesto por D'Andrea (2012). En palabras de D' Andrea (2012), este describe que "*Utilizar una Guía Secuenciada es contar con las hipótesis (explícitas), las hipótesis implícitas relevantes para construir mediante un razonamiento válido una demostración (una justificación, un contraejemplo, un ejemplo, etc). El uso apropiado de ella 'requiere raciocinio y capacidad deductiva como consecuencia y una importante capacidad de abstracción."* Las Guías secuenciadas suelen ser de un solo párrafo a diferencia de la enumeración ordenada que formulo en las Experiencias Ordenadas. En términos de Neurosicoeducación, la Experiencia Ordenada remite a la función ejecutiva de secuenciación. En estas experiencias se pueden secuenciar acciones matemáticas como la aplicación de definiciones, propiedades, teoremas o corolarios que pueden relacionarse o ejemplificarse para resolver determinada cuestión. Esta función tiene lugar en la memoria procedimental. Logat Grabner (2015) considera que esta estructura de la memoria a largo plazo más difícil de olvidar por almacenar las experiencias previas y las emociones, la cognición y la conducta principalmente para y por el desempeño de tareas; esta estructura de la memoria a largo plazo es implícita (la adquisición de la información se realiza de forma inconsciente), por lo cual se encarga de la retención de información estímulo-respuesta por estímulos secuenciales. Podemos mencionar dentro de este grupo a la habituación (un estímulo inocuo al ser repetitivo termina por producir una habituación al mismo), el condicionamiento clásico, los hábitos y las habilidades motoras (las secuencias de conductas con objetivo, un ejemplo de estas secuencias son: el hábito de prender un cigarrillo desarrolla la habilidad de encender un cerillo o un encendedor).' Las 'Categorías de memorias procedimentales' son: ‘1) Memoria procedimental cognitiva; 2) Memoria perceptivo- verbal; 3) Memoria perceptivo-motriz.’

El uso de secuencias es favorable no solamente en la enseñanza de Matemática, el mismo Logat Grabner (2015) las utiliza al enseñar Neurosicoeducación. Por ejemplo, en una clase uno puede rescatar ‘La secuencia sería la siguiente:...’

El uso de la Experiencia Ordenada favorece el repaso, el estudio y la posibilidad de estudiar con memorias. Todos los ítems de la Experiencia Ordenada tienen que estar aprendidos para poder llevar concepto, proposición, propiedad, teorema, corolario al plano del pensamiento concreto, a un caso, que es el que resuelve el ejercicio. Acompaña con orden al funcionamiento de las memorias. Hace ejercitarse al estudiante en la tarea de evocar desde las memorias en cada ejercicio que se resuelve, ya sea de validación como otros ejercicios. No digo que sea la única forma de mejorar los logros, de hecho, Rossler & Logat Grabner (2017) nos enseñan numerosas actividades que hacen que los conceptos lleguen a guardarse por diferentes vías y poder ser evocados de diferentes maneras gracias a la multiforma de guardarlos, pero esta forma es una de las que en matemáticas nos puede ayudar mucho en nuestra tarea de enseñar. En el grupo experimental se notó más confianza en la propia tarea, cosa que en matemática es difícil, ya que lograr que un estudiante que con certeza haga mejor las cosas es un objetivo actual y en el que priman las emociones de cada uno y deben ser tenidas en cuenta y que cada uno de ellas debe aprenderse a manejar las propias pues el aprendizaje y la demostración de que hemos aprendido tiene mejores vías químicas si sentimos certeza y confianza, por ejemplo. En particular, adentrándonos en la actividad de demostrar, en el ejercicio de ‘demostrar’ no hubo ejemplos en el grupo experimental, si aparecieron ejemplos en el grupo de control. Esto es haciendo referencia a que algunos estudiantes construyen un ejemplo que verifica la proposición a demostrar en lugar de demostrarla. Esta falla usual no estuvo en este grupo experimental.

Demostración de convergencia de sucesiones de variable natural con rango real.

Tabla de información dicotómica. Demostración de convergencia.

	Grupo experimental	Grupo de control	Totales Horizontales
No pudo demostrar	1	3	4
Pudo demostrar	5	6	11
Totales Verticales	6	9	15

Fuente: Elaboración propia.

Explicando la tabla se puede decir que el 25% de los estudiantes que no pudieron demostrar convergencia pertenecen al grupo experimental, el otro 75% al grupo de control. El 46% de los estudiantes que pudieron demostrar convergencia pertenecían al grupo experimental y el 54% restante al grupo de control. El 33% del total de los estudiantes observados pertenecían al grupo experimental y pudieron demostrar siendo 40% el respectivo porcentaje en el grupo de control. Se puede concluir entonces que en esta observación la probabilidad de no demostrar disminuye con la enseñanza basada en el uso de Experiencias ordenadas.

Demostración de crecimiento de funciones de variable real con rango real.

Tabla dicotómica. Demostración de crecimiento.

	Grupo experimental	Grupo de control	Totales Horizontales
No pudo demostrar	2	2	4
Pudo demostrar	6	8	14
Totales verticales	8	10	18

Fuente: Elaboración propia.

Explicando la tabla puedo decir que el 50% de los estudiantes que no pudieron demostrar pertenecían al grupo experimental y el otro 50% al grupo de control. El 25% de los estudiantes del grupo experimental no pudieron demostrar mientras que el 75% pudo demostrar. El 20% de los estudiantes del grupo de control no pudo demostrar y el otro 80% pudo demostrar. Respecto del total de observaciones el 33% pudo demostrar y pertenecía al grupo experimental y el 44% pudo demostrar y pertenecía al grupo de control. No parece manifestarse diferencias entre ambos grupos respecto al uso de Experiencias Ordenadas en la enseñanza del Crecimiento de funciones de variable real con rango real.

Demostración de existencia de Cotas de sucesiones de variable natural con rango real.

Tabla dicotómica. Acotamiento.

	Grupo experimental	Grupo de control	Totales Horizontales
No pudo demostrar	4	5	9
Pudo demostrar	3	5	8
Totales verticales	7	10	17

Fuente: Elaboración propia.

En el tema de las cotas se obtuvo 43% de logro en el grupo experimental contra 50% de logro en el grupo de control. En cuanto a hacer explícita una conclusión en los ejercicios de validación los resultados obtenidos fueron que en el 47% de los ítems observados las conclusiones predominaban en el grupo de control, el 37% predominaban en el grupo experimental y en un 16% de ítems hubo empate en las cantidades de estudiantes en porcentaje que escribían conclusión en ambos grupos. Respecto del promedio de eslabones que se usaban en las cadenas de razonamiento en 21 ítems los resultados son los siguientes (ordenados en forma de tabla), teniendo en el primer renglón el promedio de eslabones en el grupo de control y debajo el promedio de eslabones en el mismo ejercicio en el grupo experimental:

Cantidad de eslabones en razonamiento.

Control	0	1	1	1	1	2	2	3	3	3	3	4	4	6	7	8	8	8	8	9	9
Experim.	0	1	2	2	3	3	4	4	5	5	5	5	6	7	7	7	7	8	8	8	8

Fuente: Elaboración propia.

El 48% tienen razonamientos de más eslabones estudiando con las Experiencias Ordenadas. El 22% tienen razonamientos de más eslabones estudiando sin las Experiencias Ordenadas y el 30% empata en el promedio de eslabones. Entre estos eslabones no he contado las conclusiones que fueron estudiadas de manera independiente antes. Además de estos resultados se realiza el cálculo de la correlación lineal entre ambas variables, la cual es igual a 0,942.

Este resultado nos dice que las variables están muy correlacionadas. Es decir, el número de eslabones que utiliza el grupo control está directamente relacionado con el número de eslabones que utiliza el grupo experimental..

Se puede inferir entonces que las Experiencias Ordenadas mejoran las tareas de Demostrar y de resolver ejercicios en los que las cadenas de juicios llevan a la resolución de ellos. Estas cadenas son de más eslabones en los estudiantes que estudian con Experiencias Ordenadas, siendo ellas un verdadero andamiaje para el estudio de la validación y una herramienta para el uso y repaso de los conocimientos previos y teóricos pertinentes y correspondientes.

Otro tema estudiado en este cuatrimestre, del que tenemos resultados dicotómicos en el grupo experimental y en el grupo de control es acerca de las respuestas correctas e incorrectas que dieron al estudiar posible crecimiento, posible decrecimiento, no crecimiento y no decrecimiento.

En este caso el grupo experimental superó notablemente y en tres de los cuatro ítems al grupo de control que rindió sin haber estudiado con Experiencias Ordenadas.

Tabla dicotómica. Sucesión no decreciente ni creciente.

		Posible Crecimiento	Posible Decrecimiento	No Creciente	No Decreciente
Grupo Experimental	Pudo resolver	67%	83%	50%	50%
	No pudo resol.	33%	17%	50%	50%
Grupo de Control	Pudo resolver	50%	33%	0%	83%
	No pudo resol.	50%	67%	100%	17%

Fuente: Elaboración propia.

UNA SEGUNDA EXPERIENCIA

UN CURSO DE INGRESO A LA UNIVERSIDAD SOSTENIDO EN LA DIDÁCTICA DE LA VALIDACIÓN MATEMÁTICA

Este trabajo de campo se realizó en el grupo de ingresantes a la Facultad de Ingeniería, Módulo de Ingeniería Civil, de 78 estudiantes con Nivel Medio completo, 36 mujeres y 42 varones. Grupo participativo, dinámico, trabajador. Asistencia de 52 estudiantes a la quinta clase. A la penúltima clase eran 46 los asistentes. Al examen individual escrito eran 63 los asistentes. Hasta la quinta clase se ha ido implementando el Modelo Didáctico D'Andrea o bien una técnica derivada del mismo por el Pensamiento Analógico. Esto es continuación de la Investigación durante dos cuatrimestres en el año 2014, en los que las Estadísticas Aplicadas a la Investigación Educativa fueron favorables al Modelo y a la Técnica Derivada de él. Se hace durante Febrero de '15 y se observan resultados durante todo el año. El cronograma propuesto por las Coordinadoras basado en clases magistrales enunciaba:

Clase 1. Formación de grupos y crucinúmero como actividad introductoria. Corrección.

Clase 2. Conjuntos numéricos y operaciones (especial énfasis en potenciación y radicación con sus propiedades). Teoría. Práctica. Corrección.

Clase 3. Irracionales. Operaciones. Teoría. Práctica. Corrección.

Clase 4. Intervalos de números reales. Operaciones conjuntistas e intervalos. Teoría. Práctica. Corrección.

Clase 5. Ecuaciones e inecuaciones. Resolución de problemas. Teoría. Práctica. Corrección.

Clase 6. Modelos Matemáticos. Teoría. Práctica. Corrección.

Clase 7. Función Lineal. Función Cuadrática. Teoría. Práctica. Corrección.

Referida a la primera clase, con el crucinúmero hubo trabajo arduo en grupo y los resultados fueron alentadores. Un estudiante solo resolvió hasta tres ejercicios. Un grupo resolvió hasta cinco ejercicios. Cuatro grupos resolvieron entre seis y diez ejercicios. Cuatro grupos resolvieron de once a veinte y seis líneas del crucinúmero completando el total de las mismas en el último caso.

A la hora de la corrección se hizo hincapié en el paso del lenguaje coloquial al lenguaje matemático, traduciendo porciones breves del enunciado de a una línea por vez.

Por ejemplo, la tercera línea horizontal dice ‘Once veces el período de ⅔ ’.

Primero asociamos la fracción ⅔ al número decimal 0,666…

Enunciamos nuevamente entonces ‘Once veces el período de 0,666… ‘.

Estudiamos el período de 0,666… que es seis.

Enunciamos nuevamente la línea horizontal como ‘Once veces seis.’

Ahora traducimos esta última proposición en lenguaje coloquial como: once por seis que es sesenta y seis.

Obteniendo así que sesenta y seis es el número de dos cifras que va en H3, es decir, en la tercera línea horizontal.

Este trabajo del crucinúmero permitió repasar acerca de los elementos que caracterizan a los números racionales, sus operaciones, sus propiedades, su función como "parte de", multiplicando, etc. Además, permitió estudiar los números enteros, sus antecesores y sus sucesores. Los múltiplos naturales de las cantidades. Las operaciones con ángulos escritos en sistema sexagesimal. El pasaje en unidades visto en el nivel medio, longitudinales y de superficie. Conceptos geométricos como área y perímetro de cuadrados, rectángulos, ángulos adyacentes, etc.

En particular se revisó un concepto muy usado en Análisis Matemático, el concepto de Variación. Mostramos la diferencia al buscar un porcentaje comparando totales a buscar porcentajes sobre lo que cambió una cantidad respecto de otra anterior. Se mencionó que revisaríamos la Variación al ver pendiente de una recta y volverían a necesitar el concepto al definir derivada que no es más que el límite del cociente de variaciones.

En el 2014, dictando este mismo curso de ingreso me cuestionaba acerca de la Didáctica a aplicar al enseñar a justificar. En el material didáctico que se sigue en este curso hay bastantes ejercicios en los que se solicita indicar Verdadero o Falso y justificar, ejercicios que se interpretan con un cuantificador universal que no se explicita, pequeñas primeras demostraciones, etc. El Modelo llegaba a mis manos en el transcurso del dictado y su implementación fue a partir del primer cuatrimestre del 2014, no así en Febrero del 2014.

La primera unidad del Módulo de Matemática del Libro para Ingresantes (Castaño, V; Rodríguez, S; 2008) es sobre Conjuntos. Como se puede apreciar no es contenido de ninguna clase, pero lo vimos en la clase dos pues de sus conceptos se derivan muchos otros necesarios en el momento de resolver las Actividades, preguntas de interpretación de lectura y trabajos prácticos con ejercitación sugerida al estudiante. El Módulo cuenta con algunas respuestas en forma de Solucionario.

Siguiendo el Modelo didáctico propuesto por D'Andrea (2012) es que se presenta el concepto clásico de Conjunto. Esto es, no se especifica acerca del Teorema de Goedel y el conflicto Matemático acerca de este concepto. Esto es así pues en este nivel deben incorporar la noción de conjunto como la colección de elementos que tienen determinada característica que los define y los reúne. La noción de Conjunto en este nivel es a fines de estudiar los Conjuntos Numéricos, las sucesivas inclusiones o no, la unión de ellos, su utilización como conjunto solución de inecuaciones bajo la representación de intervalos, la unión de intervalos, la intersección de ellos y los complementos. Otra aplicación de esta noción son los conjuntos solución de ecuaciones: vacíos, finitos o infinitos.

Partiendo de ejemplos, es que se va incorporando la notación que permite definir un conjunto por comprensión o por extensión. La visualización es un elemento histórico en la enseñanza de este tema y continúa siendo parte de su enseñanza. Una vez visto entonces el ejemplo en notación de conjuntos por comprensión, por extensión y en Diagramas de Venn se van dando las definiciones.

Ya en la segunda unidad de Conjuntos Numéricos se presentan otros elementos del Modelo Didáctico. Se enseña que una cosa es ejemplificar y otra diferente es validar. La ejemplificación valida solamente una función proposicional cuantificada existencialmente que sea verdadera. Cuando se les dan las propiedades de las operaciones de suma, multiplicación, potenciación y radicación, en el conjunto de los números reales, se les da la consigna de que ejemplifiquen cada una de ellas. En esta tarea se muestra claramente que lo que hacen es brindar un ejemplo de cada propiedad pero esto no es lo que realmente justifica que dicha propiedad sea verdadera. Pues la demostración es la validación o justificación a una función proposicional cuantificada universalmente que sea verdadera. También se les indica que al principio de cada tabla en la que se enuncian las propiedades de un teórico hay algunos de los elementos vitales, como ser el conjunto de hipótesis, y que no deben dejar de leerlos pues las propiedades se cumplen si las hipótesis se cumplen. A esta altura habían sido escritas nuevamente las propiedades con el uso de cuantificadores universales. Los cuantificadores universal y existencial fueron definidos y leídos. El Modelo Didáctico pondera su utilidad en la enseñanza de la validación. La presentación clara de las funciones proposicionales con cuantificadores universales o existenciales constituyen un hilo conductor que trama y tensa toda la cursada del ingreso y de los dos primeros años de carrera en todas las Ingenierías. Es así entonces que emprendemos el estudio de la Ley de Cierre de la Suma, la Resta, la Multiplicación, la División, la Potenciación y la Radicación como así también la Logaritmación. Por ejemplo: Para todo a número natural y b número natural, se verifica que a^b es un número natural. Esta función proposicional verdadera la deben aceptar como conocimiento Transparente por el momento, la pueden Ejemplificar, pero se supone que no están en condiciones de Demostrarla aún.

Pero, por ejemplo, para todo a número irracional y b número irracional, se verifica que logaritmo en base a de argumento b tiene por resultado un número irracional.

Se introduce entonces un contraejemplo, el logaritmo en base del número irracional es uno, uno es un número que no es elemento del conjunto de los números irracionales.

Se explica que cuando una función proposicional de cuantificador universal falla en un caso, entonces es Falsa y se justifica su falsedad con un Contraejemplo.

Se construyen en el aula ocho de diecinueve Contraejemplos, justificando todos los valores de verdad Falsos, esto es todas las leyes de cierre que no se cumplen en cada uno de los Conjuntos Numéricos incluidos en el Conjunto de los Números Reales.

En la presentación de los Números Racionales y los Números Irracionales, se ve una primera aproximación al concepto de Demostración, se les dice que quizás no puedan comprender todos los eslabones del razonamiento pero que esta es una primera experiencia con la justificación de una función proposicional de cuantificador universal con valor de verdad verdadera. Siguen muchos eslabones de la demostración de que 'raíz cuadrada principal de 2 es un número irracional' basada en la definición de número Racional.

Se mencionan diferentes pasos del Modelo Didáctico, por ejemplo, se enuncia la proposición, se identifican los elementos vitales, se explicita que siempre debe haber una conclusión pero a diferencia del año anterior no se visualizó mediante la construcción de este número en la recta real con regla y compás. Cuestión de tiempo.

Se puede afirmar que es esta la primera demostración en la que se siguieron todos los eslabones de la cadena que constituye el razonamiento válido que construye una demostración, obteniendo como conclusión la Densidad del Conjunto de los Números Racionales. Se enunció, se explicó en lenguaje coloquial, se visualizó la búsqueda del punto medio de todo segmento de extremos racionales, se identificaron los elementos vitales y se razonó a partir de una Experiencia ordenada verbalizada en la que ellos mismos decían que la suma en el conjunto de los números racionales es cerrada entonces al sumar dos números racionales obtengo un número racional y que la división de números racionales se obtiene como resultado un número racional. Estas dos leyes de cierre nos permiten afirmar que la semisuma de dos números racionales da un número racional comprendido entre ellos, y como las leyes de cierre valen para todos los números racionales esta semisuma puede ser hallada 'siempre', obteniendo como conclusión la Densidad del Conjunto de los Números Racionales.

En esta etapa se institucionaliza entonces que cuando el valor de verdad de una función proposicional de Cuantificador Universal es Verdadera la Justificación es con una Demostración. Cuando el valor de verdad de una función proposicional de Cuantificador Universal es Falsa la Justificación es con un Contraejemplo. Cuando el valor de verdad de una Función Proposicional de Cuantificador Existencial es Verdadera la Justificación es con un Ejemplo. Cuando el valor de verdad de una Función Proposicional de Cuantificador Existencial es Falsa la Justificación es con una Demostración.

Se provee al grupo de una tabla análoga a la que contiene las propiedades, en la que cada casilla de dichas propiedades contiene un ejemplo en el que la propiedad se verifica. Se menciona nuevamente al grupo que el contenido de dicha tabla ejemplifica cada una de las propiedades pero NO demuestra a las mismas.

Cuando se van dando los diferentes conceptos, se van retomando, a modo de conocimientos previos, las líneas del Crucinúmero.

Sobre el final de la Unidad hay un Trabajo Práctico, en él hay tareas para justificar en las que se ejercitarán en esta temática además de ejercitarse en la operatoria y todo lo referente a los conjuntos numéricos.

El paso siguiente en la aplicación del Modelo Didáctico es la enseñanza de la demostración de una igualdad, ya sea que se verifique esta o que no se verifique.

Se presenta sólo una forma, la que considera cada lado de la igualdad por separado y luego se cotejan los resultados.

Esto es conocimiento previo imprescindible a la hora de ver la Unidad siguiente en la que se enseñan Ecuaciones e Inecuaciones.

La verificación de una igualdad se fundamenta en un ítem de la tricotomía de los números reales, relacionados por un orden estricto. La no verificación de una igualdad se fundamenta en los otros dos ítems, es decir se los asocia a la desigualdad de menor o a la de mayor, ello hace que sean desiguales.

El uso del Modelo Didáctico trajo luz ante la resolución de un ejercicio que mencionaba 'Completar con igual o desigual y mencionar que propiedades se cumplen o no se cumplen'.

En matemática muchas veces cuando no se especifican los cuantificadores universales se entiende por defecto que es para todo el cuantificador interviniente.

Pero en este caso cuando consideramos que:

Para todo a número real y para todo b número real se verifica que $(a+b)^n = a^n + b^n$. Esta función proposicional tiene contraejemplo para a=1, b=1 y n=2.

Si colocamos desigual estaríamos entendiendo que: Para todo a número real y para todo b número real se verifica que. Pero esta función proposicional también tiene contraejemplo para a=0, b=1, n=2.

Lo que si podemos afirmar es que No existe la propiedad Distributiva de la Potencia respecto de la Suma pues la primera función proposicional tiene Contraejemplo.

Quedando como interrogante y para profundización del estudio si corresponde pedir completar con igualdad o desigualdad a la luz de las funciones proposicionales dadas o hace falta alguna especificación en los Cuantificadores, como sería un Cuantificador Existencial que aclare el uso del desigual y el conocimiento de como negar una función proposicional cuantificada.

Un único ítem de los de este ejercicio es una función proposicional de cuantificador universal con valor de verdad verdadero y se justifica que porque la potenciación es distributiva respecto de la multiplicación en el conjunto de los números reales.

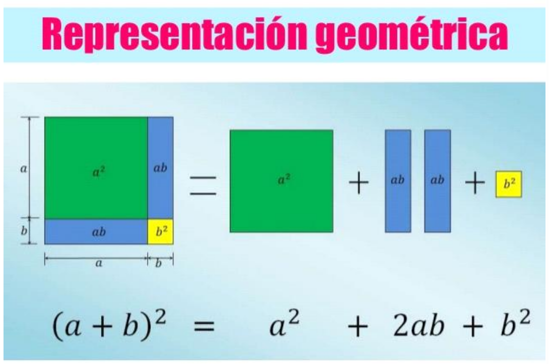
A esta altura ya construyen los contraejemplos, de manera verbal durante el dictado de la Teoría, evidenciando previamente ellos que es necesario la construcción del mismo.

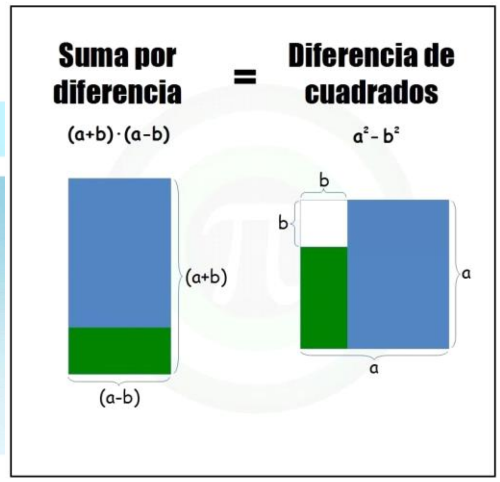
Un ejercicio del Trabajo Práctico brindaba expresiones con dos o más igualdades de las que se pedía enunciar los errores, indicar cuales son y corregirlos.

Para la resolución de este ejercicio, se activa lo aprendido sobre como Justificar una igualdad y surge la necesidad de presentar la Transitividad de la Igualdad pues son al menos dos igualdades por inciso.

En particular se utilizó la visualización en la igualdad de áreas al desarrollar el cuadrado de un binomio como trinomio cuadrado perfecto, al factorizar una diferencia de cuadrados y al desarrollar el cubo de un binomio. En este último caso, se incorporaron las Nuevas Tecnologías mostrando los cubos y prismas en Geogebra 3D.

Imágenes similares para el Trinomio Cuadrado Perfecto (TCP) y la Diferencia de Cuadrados (DDC) siguen:





Ahora, con la incorporación de las nuevas tecnologías, comenzamos a ver de manera interactiva el material de Ecuaciones y de Inecuaciones, luego los Modelos Matemáticos.

Al conocer como se verifica una igualdad, la tarea de verificar soluciones de una ecuación, como la resolución de las mismas no fue tarea difícil. Al venir justificando paulatinamente, el uso de las propiedades de igualdad y de orden, fue menos costoso que otros años. Mostrar la proyección de ciertos textos ayudó a poder ver completas las unidades a pesar de la falta de tiempo.

En el módulo de modelos matemáticos vimos muchas y diversas gráficas de relaciones y de funciones de dominios discretos y de dominios continuos. La diversidad de ejemplos generó interrogantes tendientes a vincular, en un aprendizaje significativo, las diferentes representaciones de una función.

Vimos los diagramas sagitales, las tablas, los gráficos cartesianos y las fórmulas. El material utilizado ha sido provisto por el Ministerio de Educación de la Nación y es el segundo año que se implementa en el curso de Ingreso de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional del Comahue.

Como cierre de muchas páginas de diferentes situaciones problemáticas que ejemplifican el concepto de función, el material didáctico, provee la definición del concepto de función de manera coloquial.

La definición dice: Para toda x perteneciente al conjunto de los números reales se verifica que existe un único número real y tal que y es función de x.

Como conocen los cuantificadores y las funciones proposicionales pudieron leer esta definición en el contexto matemático.

Lo gratamente sorprendente fue que resolviendo los ejercicios en los que se les presentaban cuatro relaciones en diagramas sagitales, de las que tenían que decir si eran o no función surgió del grupo la vinculación con la definición escrita en Matemática.

Por ejemplo, -'profesora', interpeló un estudiante, -'cuando hay en el conjunto de partida algún elemento sin flecha al conjunto de llegada no se está cumpliendo el 'para todo''.

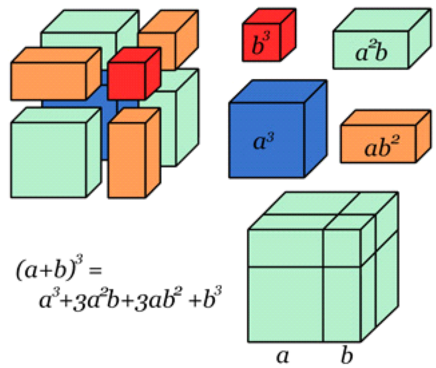
-'Correcto', le respondo, entonces mostramos que existe ese elemento del que no sale flecha para el que no existe un 'y' perteneciente al conjunto de llegada.

Pero entonces profesora, cuando en el conjunto de partida hay un elemento del que salen dos flechas, no se está cumpliendo que el elemento que existe en el conjunto de llegada es único.

'Correcto', le respondo, 'yo no hubiese hecho esa vinculación, felicitaciones'.

Al trabajar con operaciones con funciones observo que pueden en el contexto de la aplicación usar de los conceptos previos de conjuntos, al definir dominio de la función suma, de la función resta, de la función multiplicación y de la función cociente.

Por correo electrónico les envío el archivo .ggb en el que podían ver y rotar el cubo cuyo volumen es suma de dos cubos y seis prismas. El que usamos para visualizar el cuatrinomio cubo perfecto.



La clase siguiente, como se prevé en la tutoría con el uso de TIC, hubieron comentarios acerca del correo electrónico. Algunos estudiantes no habían recibido el correo así que revisamos direcciones. Otros agregaron sus direcciones a la libreta. Un tercer grupo no había podido abrir el archivo. Este último grupo motivó la clase a comenzar con una guía para buscar el software en Internet, descargarlo e instalarlo, pues supuse que esa era la causa por la que no habían podido abrir el archivo. Navegamos en el aula por el proyector y simulamos los pasos a seguir. Luego abrimos el software y desde el buscamos el archivo que habían recibido por e mail. Una vez allí vimos las rectas, las rectas perpendiculares a una dada y las rectas paralelas. El recurso gráfico generó que salga de la clase misma que las pendientes de dos rectas paralelas son iguales. No tuve que exponerlo yo. Construímos una perpendicular por un punto propuesto por ellos e hice una breve exposición de la relación entre las pendientes de dos rectas perpendiculares y de la fórmula punto pendiente de una recta. Continuando con el recurso tecnológico propuse una función de segundo grado de coeficiente principal dos que Geogebra graficó sin dificultad alguna. La tarea era entonces ver como hacer para obtener la información que me permitiese generar ese gráfico sin la ayuda del software.

El método de completar cuadrados tuvo mucho acompañamiento. Habíamos visto esta forma para resolver ecuaciones de segundo grado. Todavía surgen preguntas acerca de porque se iguala al doble producto del primero por el segundo, pero ha aumentado el número de voces que responden acerca del segundo y de su cuadrado.

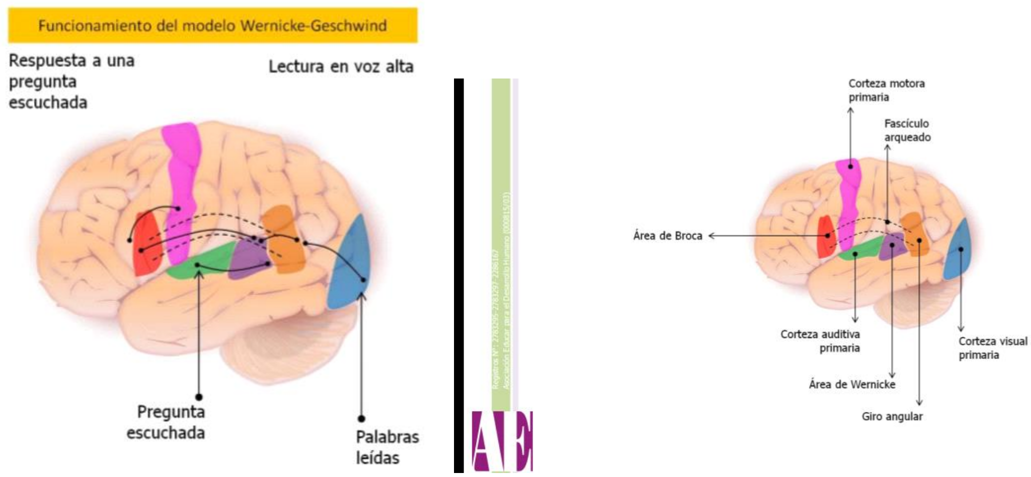
Visualizamos que los coeficientes a, h y k de la forma canónica hallada nos permiten hacer el gráfico aproximado que Geogebra nos brindó inmediatamente.

Con la interacción de Geogebra vemos así las rectas y las parábolas cuadráticas.

Interpelan acerca del lenguaje específico para darle ellos los comandos al software. Les detallo aquellos que les son necesarios en este tema.

Utilizamos este recurso para hacer la primer tarea exhaustiva de buscar los dominios de ocho funciones que incluyen raíz cuadrada en dos casos. Si bien responden sobre los dominios hasta de las funciones racionales, necesitan consultar de manera individual nuevamente este ejercicio.

De esta clase me sorprendió la generalización de un estudiante. El me plantea que si una función lineal tiene pendiente positiva, entonces su inversa tiene pendiente positiva. Y si una función lineal tiene pendiente negativa, entonces su inversa también tiene pendiente negativa. Escribo una función lineal genérica, uso las propiedades de la igualdad necesarias para despejar la variable independiente, hago el cambio de variables correspondiente y comparo la pendiente de una función lineal y de su inversa. Este alumno no sólo pudo generalizar una proposición, sino que estuvo en condiciones de seguir el razonamiento válido, construido con premisas dentro de lo aprendido en clases y demostrar así que su proposición es verdadera. Las conclusiones son usando la regla de los signos. La finalidad del uso de Geogebra está en la visualización. Ésta, según Logat Grabner (2008), es relevante pues nos remite al primer uso histórico del lenguaje escrito en el ser humano, los dibujos, encontrados en los jeroglíficos antes del abecedario y las palabras formadas de letras. En el cerebro, la zona de la visualización es próxima y contigua a la del uso del lenguaje actual. En particular, con lo escrito, el lugar es el mismo. Ilustremos lo antes dicho con estas imágenes de la Formación en Neurosicoeducación de Asociación Educar:



Fuente: Asociación Educar para el Desarrollo Humano.

Llegando al final de la cursada, en la penúltima clase, se provee un Material Didáctico que acompaña la clase y el aprendizaje del cuadernillo. El mismo consta de un archivo dinámico .ggb y un archivo .pdf con modelo didáctico para lograr como fin último dos demostraciones. El contenido del mismo versa a continuación. Éste está construído siguiendo el Modelo didáctico propuesto por D'Andrea (2012) competo en el ítem de Guía Secuenciada hay una Experiencia Ordenada.

Aprendamos a hacer algunas Demostraciones.

En el apunte de Trigonometría hay Demostraciones. Estudiemos junt@s para poder obtenerlas como resultado.

La Identidad Pitagórica.

Una de las Proposiciones a demostrar es que $sen^2\beta + cos^2\beta = 1$.

Lo que esta proposición plantea es que el cuadrado del seno de un ángulo sumado al cuadrado del coseno del mismo ángulo es constante, es igual a uno.

Intente explicar usted también con sus palabras la proposición $sen^2\beta + cos^2\beta = 1$.

Veamos los dos ejemplos gráficos propuestos a continuación. Haga las cuentas utilizando el seno de β y el coseno de β que se ve en la vista algebraica de la imagen.

Ejemplo 1:

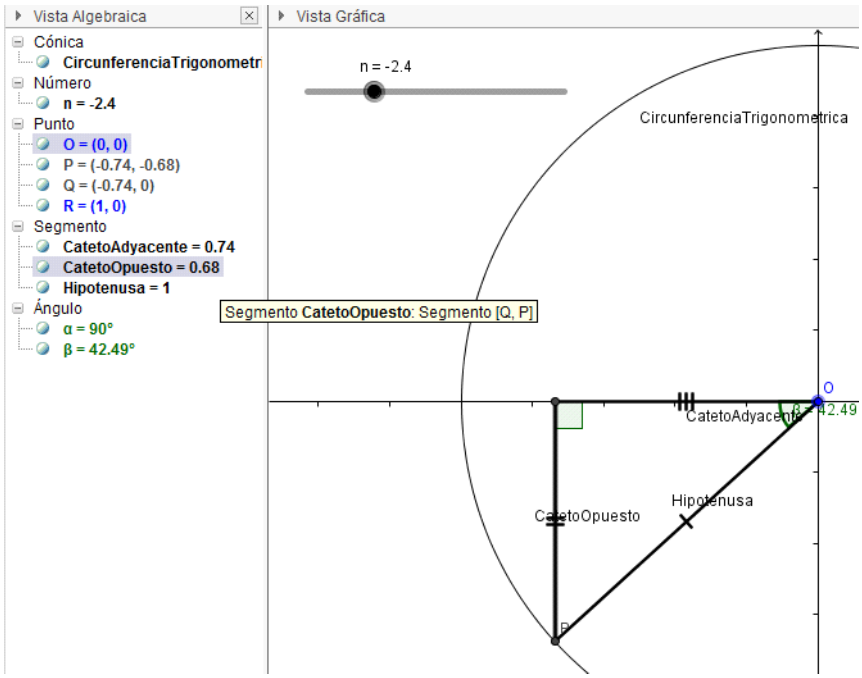


Figura 1. Primer recurso gráfico del que el estudiante extrae la información para ejemplificar algebraicamente. Fuente: Elaboración propia.

En este ejemplo resulta que con error de aproximación a centésimos por los redondeos que tienen los números que se ven en la imagen y que brinda Geogebra.

Ejemplo 2:

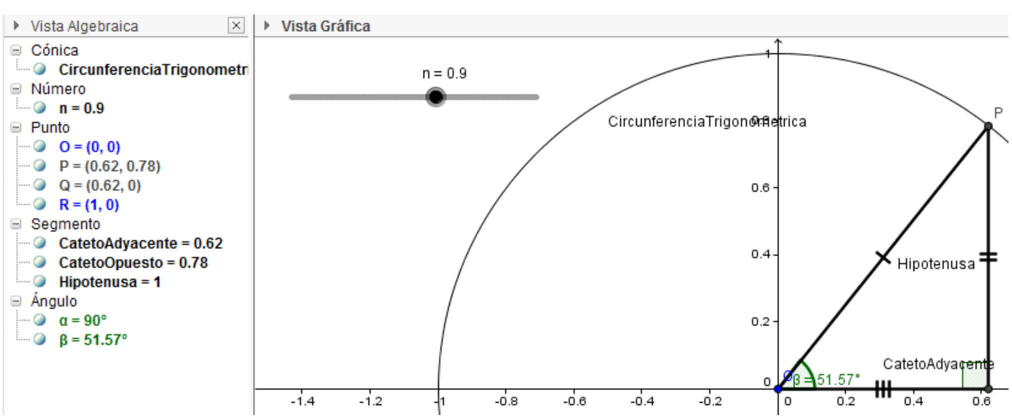


Figura 2. Segundo recurso gráfico del que el estudiante extrae la información para ejemplificar algebraicamente. Fuente: Elaboración propia.

Veamos ahora sin pensar en un ejemplo específico que en la representación gráfica podemos identificar siempre un triángulo rectángulo. Los catetos de ese triángulo rectángulo, de hipotenusa de longitud uno, son de longitud seno de β, con error por redondeo a centésimos.

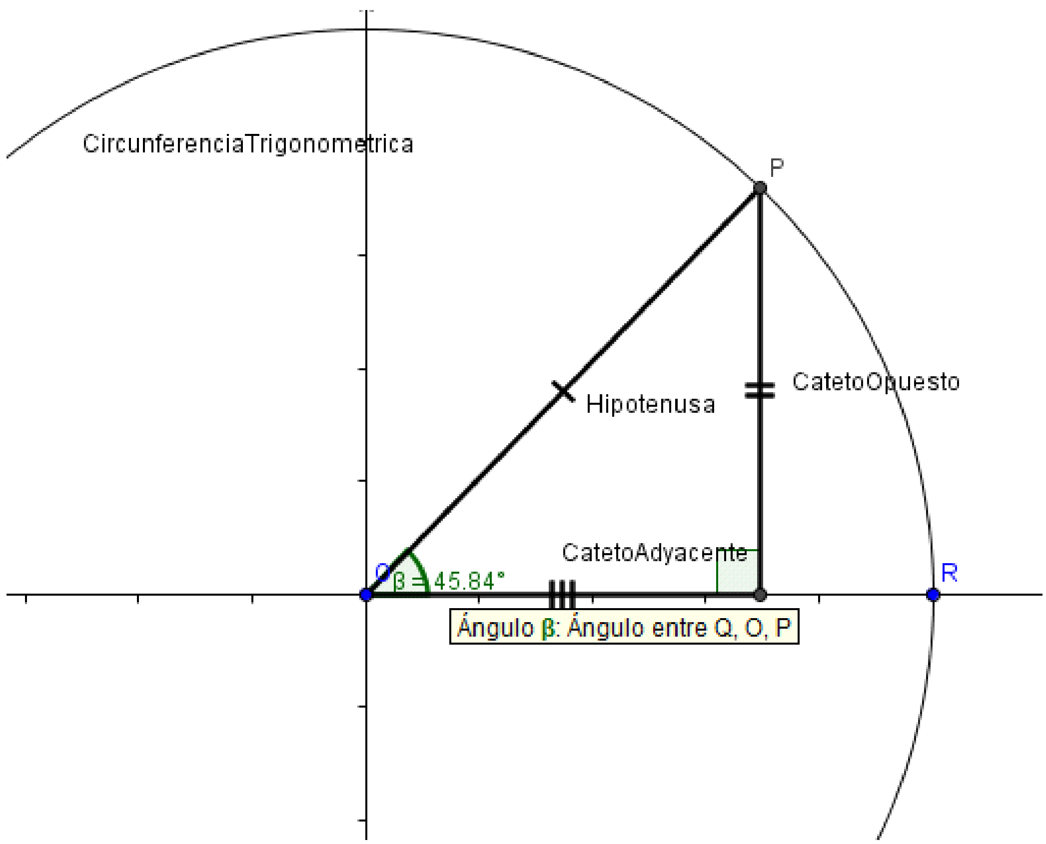


Figura 3. Recurso gráfico para Visualización. Fuente: Elaboración propia.

En este gráfico se puede ver bien el ángulo β, que también está aproximado por Geogebra. En vez de verificar el Teorema con la longitud de los catetos se hará en este caso con las razones trigonométricas que brinda una calculadora, que también, en la mayoría de los casos, hace aproximaciones, con doble error de aproximación, en el segundo redondeando a milésimos.

Pero en todo triángulo rectángulo se verifica el Teorema de Pitágoras.

Los tres gráficos anteriores requieren que se interprete H=1, a la longitud de la hipotenusa.

Llamemos CO= Cateto Opuesto.

Llamemos CA= Cateto Adyacente.

Veamos que x= CA/H= CA/1= CA.

También y= CO/H= CO/1= CO.

Para hacer una Demostración debemos identificar los elementos vitales: Hipótesis y Tesis.

La Hipótesis, es la información que tenemos a priori, la información con la que contamos para iniciar el razonamiento válido que justificará la proposición verdadera.

En este caso la Hipótesis es:

- Un triángulo rectángulo de vértices O= (0, 0), P= (x, y) y Q= (x, 0).
- La hipotenusa de dicho triángulo rectángulo es de longitud 1.
- Definición de relaciones trigonométricas.
- Teorema de Pitágoras.

La Tesis es aquello que quiero demostrar, en este caso es: $sen^2\beta + cos^2\beta = 1.-$

Lea la teoría y los gráficos de este material y vea los conceptos y contenidos que puede vincular para, partiendo del conjunto de hipótesis, razonar válidamente y obtener como resultado la Tesis.

¿El seno de β y el coseno de β son números reales que podría asociar con las longitudes de los catetos del triángulo rectángulo que aparece en todos los gráficos?

A continuación brindo una Experiencia ordenada. Como habíamos hablado, la sigue quien la necesite. No es obligación su utilización. La tarea que debe estar es la Demostración como está en el libro, pero la idea es que estudiemos para lograr este objetivo.

- Asocie los catetos del triángulo rectángulo con las coordenadas x e y de uno de sus vértices.
- Aplique el Teorema de Pitágoras, pues por Hipótesis el Triángulo es Rectángulo.
- Reemplace x e y por las relaciones trigonométricas conocidas y acordes con las Hipótesis.
- Escriba la Conclusión de la Demostración.

- Otra proposición a demostrar enuncia que $|\cos\gamma| = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\gamma}}$.-
- Esta proposición enuncia una relación entre el coseno de un ángulo y la tangente del mismo ángulo.
- Relaciona el valor absoluto del coseno de ϒ y el inverso de la raíz cuadrada del cuadrado de la tangente de ϒ mas uno.

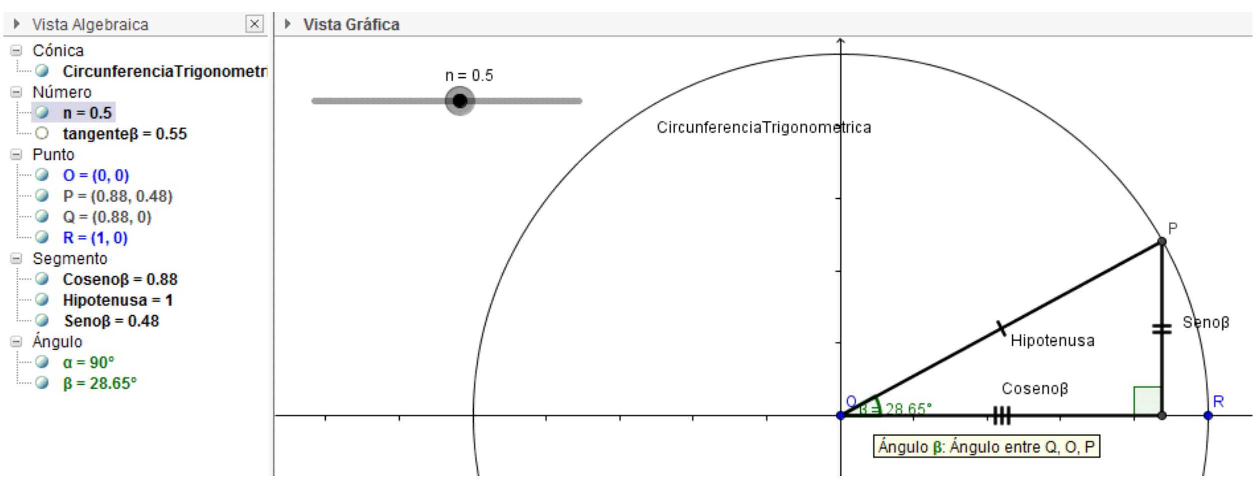


Figura 4. Tercer recurso gráfico del que el estudiante extrae la información para ejemplificar algebraicamente. Fuente: Elaboración propia.

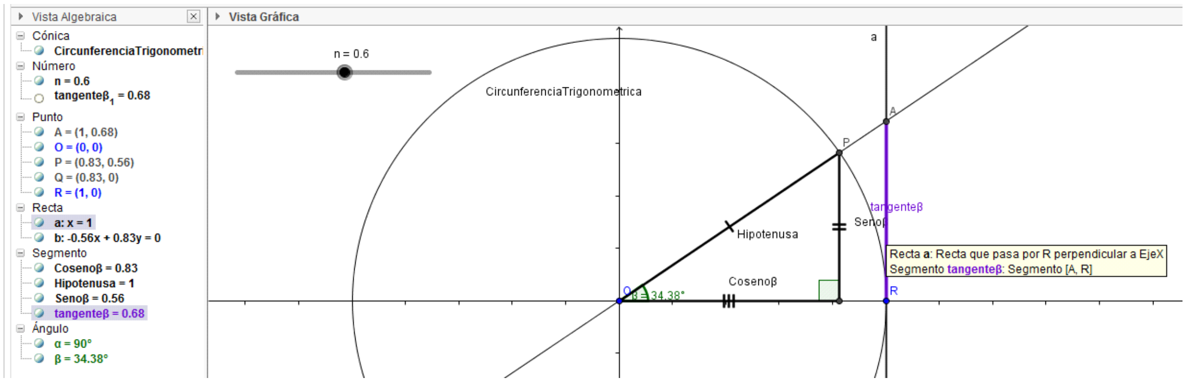


Figura 5. Cuarto recurso gráfico del que el estudiante extrae la información para ejemplificar algebraicamente. Fuente: Elaboración propia.

Al menos en estos dos ejemplos la fórmula funciona. Ya sabemos que no basta un ejemplo o dos para justificar una proposición que es verdadera.

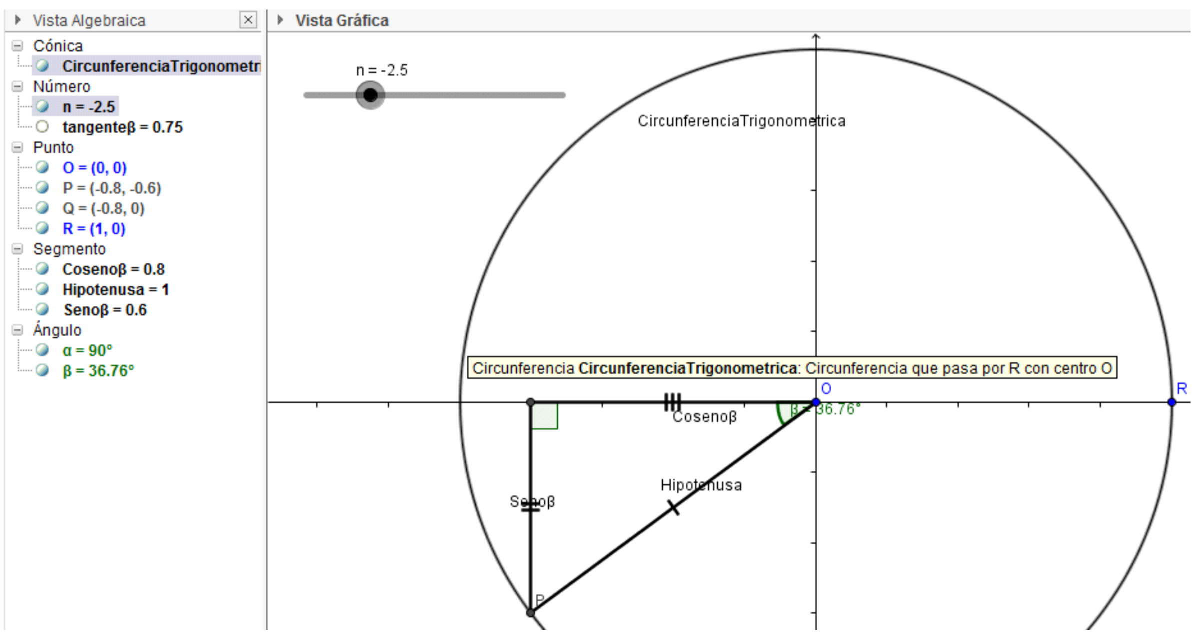


Figura 6. Recurso en el que se muestra gráficamente la Tangente de ϒ, para la Visualización. Fuente: Elaboración propia.

En el gráfico anterior también se visualiza la tangente del ángulo de manera gráfica. Se puede observar en la vista algebraica que el renglón tangente de ϒ con círculo blanco corresponde a lo que nos hubiese podido devolver una calculadora al pedirle la tangente de un ángulo de la medida de ϒ.

Sin embargo, lo que devuelve en la vista algebraica en el renglón de color lila es la longitud del segmento que representa de manera gráfica la tangente de dicho ángulo. No por casualidad son iguales.

Haga una vez más las cuentas de la fórmula que queremos demostrar.

En este caso nos servirá que $tg\, \gamma = \frac{sen\, \gamma}{\cos \gamma}$. Entre otras cosas.

Hipótesis:

- Triángulo rectángulo de Hipotenusa de longitud 1.
- Relaciones trigonométricas como funciones de los catetos del triángulo rectángulo.
- Identidad Pitagórica.
- Propiedades de los Números Reales y de la Igualdad.

Tesis: $|\cos \gamma| = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\gamma}}$

¿El coseno de ϒ o , como su tangente, son números reales que se podrían asociar con divisiones de longitudes que aparecen en los gráficos y generar a partir de igualdades nuevas igualdades por sus propiedades como cuando resolvía, por ejemplo, ecuaciones? Al efectuar la división.

Experiencia ordenada:

- Definición de tangente de un ángulo como cociente del seno y del coseno, del mismo ángulo.

- Elevar al cuadrado una igualdad a ambos miembros no la altera.
- Identidad Pitagórica.
- Distributividad del producto respecto de la suma.
- Monotonía de la suma: a=b entonces a+c=b+c.
- Dos números reales no nulos son iguales, entonces sus inversos son iguales.
- $\sqrt{x}^2 = |x|$
- Escriba la Conclusión de la Demostración.

Con la actividad anterior finaliza el Material Didáctico de la Penúltima clase.

Conclusión:

De esta manera se concluye un Curso de Nivelación impartido íntegramente en las nociones del Modelo D'Andrea y las Experiencias Ordenadas, yendo de manera gradual desde los rudimentos de las justificaciones hasta dos demostraciones, una con muy pocos eslabones en la cadena de razonamientos válidos que la conforman y otra con muchos eslabones. El Modelo, en esta última, permite tener un aprendizaje significativo de la demostración que aparece en el cuadernillo que tienen los ingresantes. La Experiencia ordenada, tipo de Guía Secuenciada parte del Modelo, no hace más que justificar las equivalencias e igualdades que el libro plantea como indiscutibles. La labor de ejemplificar, sabiendo que ello no demuestra, la labor de identificar los elementos vitales, la labor de asociar la Trigonometría con los conocimientos previos de números reales, sus propiedades para con las diferentes operaciones, así como las propiedades de la igualdad y los conocimientos previos de ecuaciones, constituyen una construcción del aprendizaje, un aprendizaje significativo.

Cabe destacar que dos meses después de finalizado el curso de ingreso utilizando esta metodología un estudiante se acerca mostrándome una demostración confeccionada por él. Tenía que demostrar que este estudiante había aprendido a demostrar igualdades en su curso de ingreso y su resolución versa en las siguientes líneas:

En palabras de Bernardo Houssay (1942), nos encontramos con 'el conocimiento previo, correcto y verdadero.' Aunque las demostraciones no fueron evaluadas a los ingresantes, habían podido lograr un aprendizaje significativo de ellas.

UNA TERCERA EXPERIENCIA ACERCA DE LA MOTIVACIÓN

En este sentido el presente laboratorio se propone comunicar resultados acerca de lo importante de la motivación, y lo desafiante que puede ser motivar. A su vez, como la tarea de validación puede ser aprendida o bien desarrollada por un grupo de mini expertos, que con un primer nivel de álgebra aprobado incursionan en cadenas de razonamientos de eslabones encontrados por ellos en sus propios y únicos bagajes de conocimientos.

El grupo en el que se realiza el laboratorio es de estudiantes del último nivel de Álgebra y Geometría de las Ingenierías en la Universidad Nacional del Comahue. Es desarrollada durante el segundo cuatrimestre de '14.

Para adentrarnos en el tema ejemplificaré con dos grupos de similares características etarias y de formación. En el grupo 1 una experiencia puede resultar en un laboratorio de matemáticos mientras que en el grupo 2 no motivar directamente. Recordemos que el grupo 1 y el grupo 2 son de integrantes de iguales edades y similares niveles de capacitación matemática, pues están cursando una materia que tiene una correlativa, que todos los integrantes de estos grupos han aprobado.

La acción motivadora surge en una clase de Álgebra en el segundo cuatrimestre del primer año del ciclo básico de Ingeniería mientras se enseñan a escribir representaciones de rectas y planos en distintas bases. Tema propio del Álgebra Lineal.

En la clase teórica se enseña que para escribir una recta en el espacio en distintas bases consideramos un punto de ella y un director. Con esa información que define a toda recta, hacemos cambio de base, del punto y del director. El resultado es una representación de esa recta en otra base del espacio tridimensional.

Así, habíamos aprendido una forma de resolver ejercicios de este estilo, que sabemos que sobrevive al cambio de base por propiedades enunciadas en la teoría de esta unidad. También habíamos visto que vectores con producto escalar 0 en base canónica podían tener producto escalar no nulo en otras bases. Con lo que deducíamos que no podíamos tener como referencia la perpendicularidad al cambiar de base haciendo el producto escalar. Cuando llega el momento de la práctica representamos un plano en otra base y el ejercicio que sigue propone una recta escrita como intersección de los planos escritos en otras bases. Respondo que lo mejor es remitirnos a las formas vistas en la teoría y que no tenía respuesta en ese momento. Un estudiante insiste con cambiar de base ambos planos y propone como primer fundamento que su compañero lo hizo así y le dio, y como segundo fundamento: Que geométricamente está hablando de los mismos planos en distintas bases, así como la recta que está definida como intersección de ellos. Haciendo referencia a los casos concretos en que al cambiar de base la representación de las rectas hablaba de la misma recta con distintos sistemas de referencia. Esto último referido a rectas en el plano, en donde pudimos verificar cada ejercicio resuelto. Explico al curso que el primer fundamento no nos alcanza para justificar pues se remite a que en un ejemplo le dio al compañero. Es con el segundo fundamento con el que abro el diálogo con la clase, lo comparto y se generan conversaciones y sensaciones bonitas. La propuesta del compañero “motivó”. El grupo se inmiscuyó en la tarea de hacer matemática, en la clase surgió una proposición a validar y el grupo se comprometió en su validación. Hubo en este grupo una motivación que no provino del exterior, una motivación que no fue explícita mía como: “¡Ustedes pueden con esta tarea!”, hubo una motivación que el Dr. Rossler dice que es única y es la mejor, "motivación intrínseca", ellos se motivaron desde el interior, desde sí mismos por una tarea que ellos mismos crearon. El Dr. Rossler explica que no hay motivación del exterior que supere a la motivación que nace del ser, para aprender. Es "la motivación" para quien está aprendiendo. Esto lo pude observar en que entre los integrantes del grupo hay quienes fijan la vista pensando en lo que se dijo, hay quienes asienten la fundamentación, hay quienes se sienten importantes por poder decidir en la matemática que hacen, hay quienes sienten asombro. Emprendemos entonces, con esta forma de resolver propuesta y fundamentada, la tarea del ejercicio. Cambiamos de base ambos planos, de sus respectivas representaciones en la base canónica a sus representaciones en la base B. Resolvemos la intersección de los planos en la base canónica. Rescatamos de esa información un punto y un director de la recta. Intersecamos los mismos planos de representación en la base B. Rescatamos punto y director: **d**. Cambiamos a **d** de la base B a la base Canónica (C) y corroboramos que el director **d** al cambiar de base es paralelo al que rescatamos para la base canónica. Con esto verificamos que conservamos la dirección, imprescindible para definir una recta. Esta tarea también la hicimos con un punto. La verificación fue consensuada también. Pregunté si querían verificar el resultado y ellos estuvieron de acuerdo en ejemplificar lo que geométricamente habían "demostrado". Lo que me resultó asombroso a mí, es que otro grupo, igualmente capacitado, tuvo la propuesta acerca de resolver el ejercicio con el modelo teórico o pensar si es posible hacerlo de otra manera y no quisieron ni ver si era posible de otra manera. La ventaja que veo en este segundo grupo es la conciencia del tiempo por las tareas. Pudimos corregir más ejercicios que en el grupo que tomó como desafío hacer matemática propia.

Una segunda experiencia ejemplificadora surge de la tarea de validación que formulan en el grupo 2 cuando frente a la tarea de escribir rectas en el plano por representaciones en bases canónicas o no, se les hace hacer el producto escalar de vectores perpendiculares escritos en base canónica y posteriormente el producto escalar de los mismo vectores pero esta vez usando sus representaciones en otra base. El planteo es que, aunque no dejan de ser rectas perpendiculares, el producto escalar de los vectores representados por sus coordenadas en otras bases no es siempre 0. Ante este resultado tan contundente se les dice que los recursos y conocimientos geométricos deben utilizarlos en las representaciones en la base canónica y por último representar en otras bases los resultados. A posteriori se les dice que las condiciones de perpendicularidad “no sobreviven” al cambio de base. Inmediatamente un estudiante levanta su mano y agrega “las condiciones de paralelismo si ”y fundamenta “cuando cambiábamos de base a $(cv)_B$ obteníamos $c(v)_B$. La producción del grupo 2 aportó una idea para incorporar una nueva parte teórica a mis clases. El grupo 1 recibe la información esta vez, no busca negarla ni siente motivación por ahondar. Definitivamente los grupos 1 y 2 no son motivados exactamente por las mismas cosas. Cada grupo tiene su “personalidad”.

Usualmente en las clases se utilizan las motivaciones extrínsecas como las de la figura y también hay quienes manifiestan agrado y quienes cuestionan fundamentando que la motivación tiene que provenir de uno mismo.

CAPÍTULO IV: CONCLUSIONES

La Humanidad ha recorrido un largo y sinuoso camino en cuestiones referentes a Validación, que muchos de los actuales docentes recorrimos y que vemos recorrer a los estudiantes. Hay libros antiguos en los que los autores sentían la convicción y creían con esto convencer a los lectores, de haber demostrado una proposición determinada, cuando sólo habían hecho un Ejemplo, varios Ejemplos, una Generalización insuficiente o una Demostración. En los libros de ayer, de hace más de dos mil años se encontraba mucho más lenguaje coloquial, comienzos de lenguaje simbólico y rudimentos del actual Discurso Matemático. En aquellos tiempos un ejemplo constituía una demostración como si históricamente la Humanidad hubiese transitado por la Experiencia mental, el Empirismo ingenuo o la Experiencia crucial que enuncia Balacheff (2000), como en Los Elementos de Euclides aparecidos en el 300 A.C. en Alejandría, Egipto.

En libros más contemporáneos comienzan las teorizaciones acerca de la tarea de enseñar a validar, que no existían en aquellos tiempos, tarea que continua a la fecha. Habiendo así paso de los textos que enunciaban axiomas, proposiciones, teoremas y corolarios, todos fundamentados y en los 3 últimos casos demostrados a textos con más gráficos, más ejemplos y menos demostraciones. Puede apreciarse, por ejemplo, que una proposición cuantificada universalmente que tiene valor de verdad falso tenga en textos actuales escritos por matemáticos, una explicación convincente de que no se cumple, haciendo entonces un matemático una Falsedad Universal o incompleta. Esto no ocurre en libros, también ocurre en clases de docentes altamente formados, pues históricamente no hemos dado el salto a la Falsedad Universal Completa en la que construimos un contraejemplo a la siguiente proposición:

‘Si el resto de dividir ‘a’ por 7 es 3 entonces el resto de dividir ‘a^2-17’ por 7 es 5.’ Por años he visto que validan diciendo que el resto en realidad es 6 y no es 5, siendo que la validación es exhibir un ‘a’ con el se construya un Contraejemplo.

Lo que se va vislumbrando es un mañana en el que las demostraciones sean hechas o evaluadas por ordenador. Instrumentos tecnológicos que nacen de la lógica booleana. En cuanto a la enseñanza coexisten en este momento docentes que por sus prácticas comentan ‘no nos hizo las prácticas de validación de la segunda mitad de la materia’ con quienes comentan que en sus clases promulgan ‘ las demostraciones me las preguntan cuándo preparan el final’. Es en esta coexistencia que D’ Andrea (2012) propone evitar saltos cognitivos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la prueba matemática, generando un aprendizaje constructivo y comprensivo.’ Su modelo didáctico tiene fundamento en lo que él llama la triple procedencia del lenguaje matemático: coloquial, visual y simbólico. El modelo se concibe para ‘incentivar el abordaje de la demostración matemática.’ El modelo se contextualiza en la epistemología en tanto la justificación de una premisa científica es uno de los objetos de su estudio como así los caminos o métodos que puedan conducir a su realización correcta en cada caso. La investigación de esta tesis complementa este trabajo y el vericueto, procedimiento, técnica o red que pueda encauzar al cumplimiento de una tarea de validación acompañada, efectiva, eficiente, eficaz y mejor. Validar es un desafío creativo. La capacidad de validar, de justificar, de demostrar, tan propias de la raza humana, como la matemática misma. Él nos enseña que la razón y la lógica nos hacen humanos y nos diferencian del resto de los animales. Aunque lo emocional supera lo racional todavía en la raza humana, la cognición es una bella interacción entre estos componentes, no un producto único de uno de ellos. En cuanto a la visualización, uno de los ítems que construyen el modelo didáctico propuesto por D'Andrea (2012), tiene también sustento en las neurociencias. Al dibujar, al graficar, usamos el hemisferio derecho del cerebro.

Específicamente, Estanislao lo llama Visualización Creativa y lo define como la conexión de los sentidos con la demostración que estamos tratando de crear y enuncia que tiene una acción muy poderosa en la creación. Una manera de atraer la propia atención es ligándola a las emociones, de esa manera se ayuda a la memoria y a su mejor desempeño sobre la tarea en la que se requiere mayor atención o atención plena.

Podríamos decir entonces que al ejemplificar, al visualizar y al proveer una guía secuenciada se está recompensando al cerebro en su mismo principio de organización. La recompensa sería un gran estímulo a la tarea final de demostrar, por ejemplo. Una conclusión inicial entonces sería que el Modelo didáctico propuesto por D'Andrea (2012) y las Experiencias Ordenadas son un estímulo a la solución creativa al hacer matemática.

En cuánto a los trabajos de campo realizados para esta investigación, se ha alcanzado a analizar el desempeño de estudiantes universitarios ingresantes a carreras de la facultad de Economía y Administración y también ingresantes a la Facultad de Ingeniería. Un resultado observado es que la enseñanza de la validación en el mes de ingreso, como así en el primero o segundo cuatrimestre mejora en algunos aspectos los desempeños en Matemática de estos estudiantes. Si bien hay cuestiones del tema en bibliografías de nivel medio, prácticamente es nuevo para la gran mayoría.

Es notorio que los temas de validación siempre estuvieron pero el uso de Experiencias Ordenadas, en particular, mejora el desempeño al justificar, esto es, el saber hacer.

Las Experiencias Ordenadas son una de las estrategias utilizadas para potenciar o complejizar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la validación. La otra estrategia ha sido utilizar el Modelo didáctico planteado por D’Andrea (2012) de reciente creación. Ambas estrategias han dado resultados positivos en altos porcentajes de alumnos.

Respecto de las Experiencias Ordenadas se puede mencionar que la capacidad de justificación se ha acrecentado sea el ejercicio de validación o no. Aumenta la claridad de las justificaciones y también la cantidad. Aprenden más el porqué. Conectan más con el teórico. El resultado es más significativo en diversidad de formas de ejercitación en las prácticas. Se ha indagado acerca de los factores emocionales en las tareas de validación matemática. Al respecto hay resultados respecto de la motivación. Los grupos han respondido de manera heterogénea tanto a la motivación extrínseca como intrínseca, mostrando cada grupo diferente personalidad. Se ha comprendido también que los resultados son distintos frente a las diferentes condiciones al validar según las distintas carreras y las distintas materias. En ingresantes es claro el uso del contraejemplo en ambas Facultades, pero a la hora de demostrar, en el primer cuatrimestre conectan menos eslabones de una cadena de razonamientos que en el segundo cuatrimestre en el que no solo aumentan los eslabones sino la cantidad de demostraciones que les surgen a un mismo Lema. Respecto de la Facultad de Ingeniería hay producciones muy notables en Álgebra y en Álgebra Lineal mientras que en la Facultad de Economía hay resultados exitosos en demostraciones de Análisis Matemático.

El modelo didáctico utilizado como soporte teórico para esta investigación no puede sanear ciertas discontinuidades inevitables. El estudiante universitario requiere de dos facetas que se hallan siempre presentes en un curso de Matemática. Por un lado, la heurística presente en el desarrollo de las actividades procedimentales, direccionado a la habilidad para desarrollar problemas. Por otro, disciplinar el raciocinio a través de la argumentación presente en el proceso de validación de teoremas, lo que forma la mente para la toma de decisiones y el sostén de las mismas del futuro profesional. Así, es necesario educar a los estudiantes en la justificación y argumentación de lo que aseguran como verdadero o falso en base a resultados y propiedades que ya conocen. Inclusive en la resolución de actividades procedimentales. Esta tarea no es sencilla. Como afirma Dreyfus (2000): “no deberíamos esperar que nuestros estudiantes sean capaces de captar demostraciones sofisticadas y de alto nivel, sin haber estado expuestos durante muchos años al espíritu de la justificación y a la naturaleza del pensamiento matemático.”

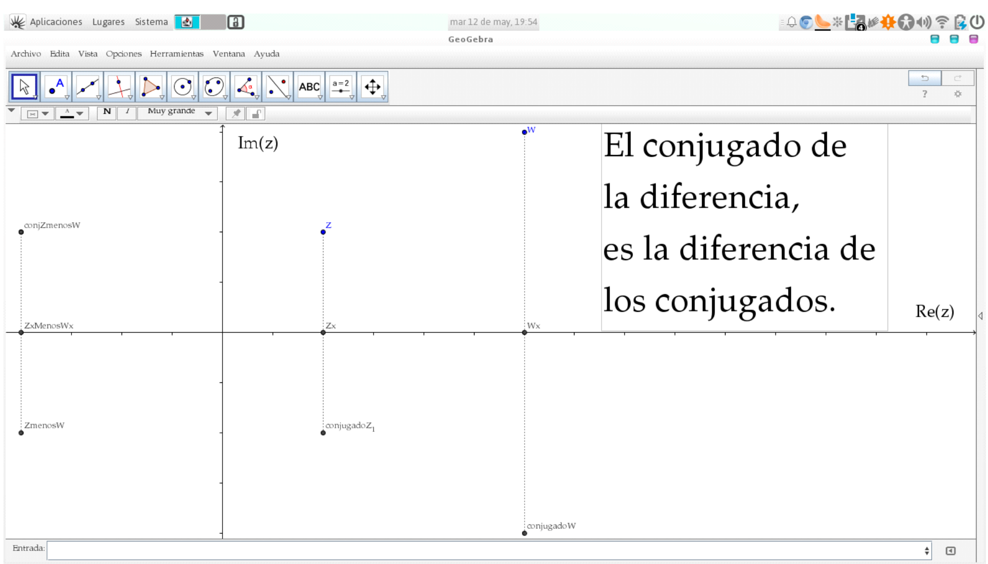
CAPÍTULO V: LA PROPUESTA DIDÀCTICA

Se presentan algunas de las propuestas que se han ido construyendo a lo largo de esta investigación.

Ejemplo 1:

El número complejo conjugado de la diferencia de dos números complejos, es igual a la diferencia de los números complejos conjugados de cada uno de ellos.

Si se consideran casos concretos, se están considerar ejemplos de la propiedad, que sabemos que no validan en absoluto.



Fuente: Elaboración propia.

La Hipótesis para la Demostración es que z y w son números complejos y por tanto cuento con todas las propiedades relativas a la suma y diferencia en este conjunto de referencia.

La Tesis para la Demostración es la igualdad

(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i, siendo a, b, c, d, números reales.

Se define como conjugado de z=a+bi, al número complejo a-bi.

¿Considerando cualesquiera números complejos el número complejo conjugado de una diferencia de números complejos, es igual a la diferencia de los números complejos conjugados de cada uno de los considerados?

Experiencia Ordenada.

- Demostrar igualdad. Considerar el lado del igual que es el número complejo conjugado del número complejo diferencia.
- Definición de diferencia de números complejos.
- Definición de número complejo conjugado.
- Conmutar para obtener el lado del igual que es un número complejo diferencia de dos números complejos conjugados.
- Concluir. Luego, para todos los números complejos se verifica que, el número complejo conjugado del número complejo diferencia, es igual al número complejo diferencia de los números complejos conjugados de los considerados primero.

Ejemplo 2:

El conjugado del producto de dos números complejos es igual al producto de los conjugados de cada uno de ellos.

Geométricamente podemos pensar en los números complejos conjugados como simétricos respecto del eje horizontal de las partes reales de los números complejos. Esta visualización geométrica es la del primer ejercicio. Pensando en la forma polar o en la forma trigonométrica, sabemos que el argumento del producto es suma de los argumentos principales de cada número complejo factor. Cuando hablamos del conjugado del producto de dos números complejos, entonces, geométricamente, sumamos ángulos y multiplicamos módulos y a este número complejo producto le hacemos la simetría axial. La cuestión es que la simetría axial genera como argumento al ángulo opuesto al obtenido como argumento principal del número complejo producto.

En el otro lado del igual, primero hacemos las simetrías axiales a cada número complejo, obteniendo como argumento, los ángulos opuestos a cada argumento principal. Al hacer esta multiplicación, sumamos los argumentos principales correspondientes a estos argumentos y obtenemos el resultado, que no es más que la suma de opuestos que es el opuesto de la suma. Estas líneas, nos dicen geométricamente que tiene sentido demostrar esta proposición, pues hemos razonado válidamente.

Veamos esto en un ejemplo concreto:

Los números complejos factores son z=1+i y w=-1-i.

Al multiplicar z.w, multiplicamos sus módulos y sumamos sus argumentos principales.

El módulo del producto es 2 y no cambia este módulo en su complejo conjugado.

Un argumento del producto es -90° (corresponde a un argumento principal (AP) de 270°, y su opuesto es un argumento del complejo conjugado: 90°.

En este caso primero multiplicamos y luego conjugamos.

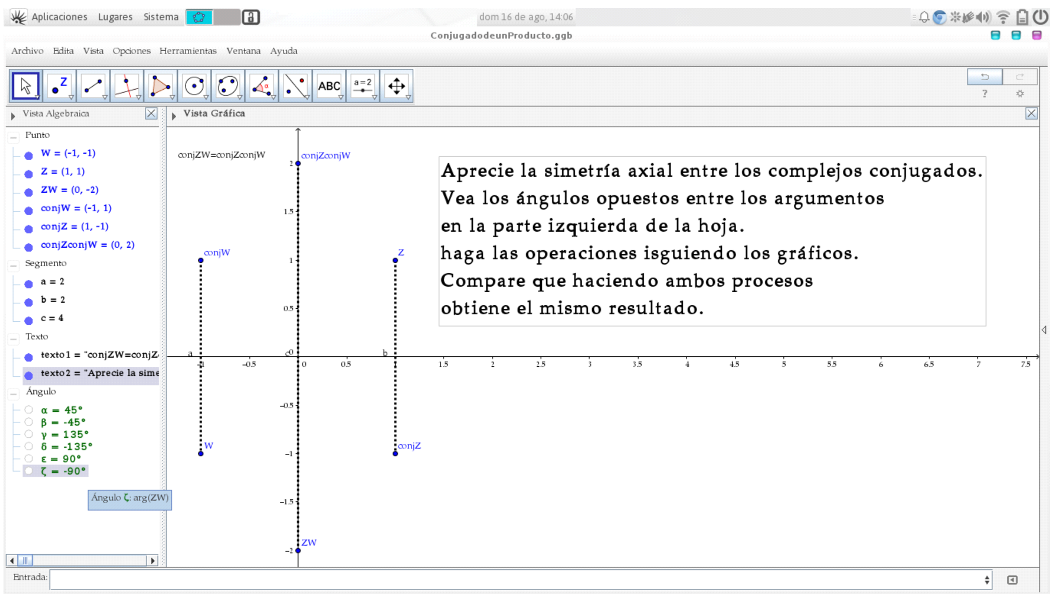
Ahora conjugaremos cada número complejo y luego multiplicaremos.

Dos argumentos de los números complejos son 45° y -135°(AP: 225°). Dos argumentos de sus complejos conjugados son -45° (AP: 315°) y 135°.

Cuando multiplicamos los números complejos conjugados en forma trigonométrica, suma 90°.

Con respecto a los módulos no hay diferencias en los números complejos o sus conjugados. Luego, en este ejemplo, la proposición se cumple.

Visualicemos:



Fuente: Elaboración propia.

Simbolizando la proposición a demostrar escribimos:

Hipótesis: z y w son números complejos.

Tesis: el producto de z y w es otro número complejo

Experiencia Ordenada para la Demostración:

- Definir en forma polar a los números complejos z y w, no nulos.
- Multiplicación de números complejos en forma polar.
- Conjugación de números complejos en forma polar.
- Llamar A al resultado de efectuar operaciones en el primer lado del igual.
- Efectuar operaciones al segundo lado del igual. Conjugación de números complejos a ambos números conocidos.

- Multiplicación de números complejos.
- Llamar B al resultado de efectuar operaciones en el segundo lado del igual.
- Igualdad de números complejos para comparar A y B.
- Escribir conclusión para números complejos no nulos. Demostrar en caso de que al menos un número complejo sea nulo.

Ejemplo 3:

La suma de matrices de orden gxs es conmutativa.

Experiencia Ordenada para la demostración:

- Enunciar Hipótesis: A y B son matrices de orden gxs.
- Enunciar Tesis: A+B=B+A.
- Definición de suma de matrices en el lado izquierdo del igual. Llamar (1).
- Definición de suma de matrices en el segundo lado del igual.
- Conmutatividad de números reales. Llamar (2).
- Definición de igualdad de matrices entre (1) y (2).
- Escribir la conclusión.

Ejemplo 4:

Existe una única matriz que es elemento neutro para la suma.

Experiencia Ordenada para la demostración:

- Enunciar Hipótesis: Sean A y 0, matrices de orden gxs.
- Enunciar Tesis: 0+A=A+0=A.
- Definición de suma de matrices 0+A.
- Existencia de elemento neutro para la suma de números reales. Llamar(1).

- Definición de suma de matrices A+0.
- Existencia de elemento neutro para la suma de números reales. Llamar(2).
- Definición de igualdad de matrices entre (1), (2) y el tercer lado del igual: A.
- Escribir conclusión. Un elemento es neutro, si es neutro a izquierda y a derecha. Hasta acá

demostró que existe elemento neutro para la suma de matrices.

- Demostrar unicidad. Para ello suponer que existe otra matriz B que verifica la propiedad.
- Definición de suma de matrices.
- Definición de igualdad de matrices.
- Definición de matriz nula.
- 0 y B son matrices iguales.
- Escribir conclusión de que existe elemento neutro para la suma de matrices y es único.

Ejemplo 5:

Deduzca la fórmula de distancia entre dos puntos en el plano.

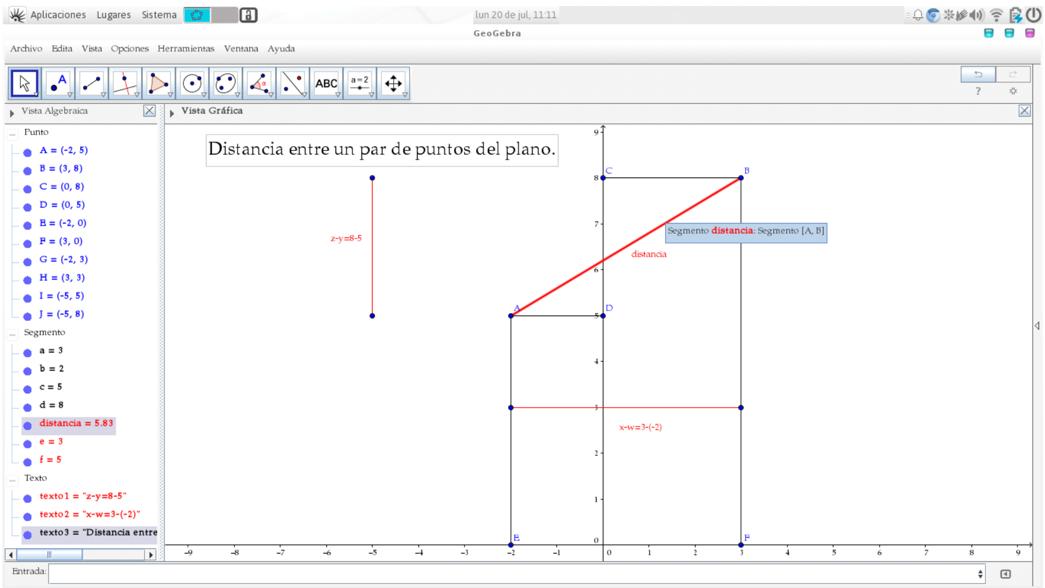
El Teorema que deberá demostrar se enuncia de la siguiente manera:

“Conocidos A=(x, z) y B=(w, y), un par de puntos en el plano. La distancia entre A y B, d(A,B), está definida por la fórmula: . Entendiendo en este caso, la raíz aritmética o principal, de índice dos.”

Si interpretamos coloquialmente las líneas anteriores, podríamos decir que, conocidos dos puntos del plano, existe una fórmula que nos informa la distancia entre ellos. Para hacer dicho cálculo debemos restar las componentes respectivas, las diferencias elevarlas a exponente dos, sumar las dos potencias y a la suma buscarle su raíz principal de índice dos.

Veamos que esto es cierto en algún ejemplo, a manera de verificación. La ejemplificación nos acerca en un caso, los contenidos más abstractos del enunciado.

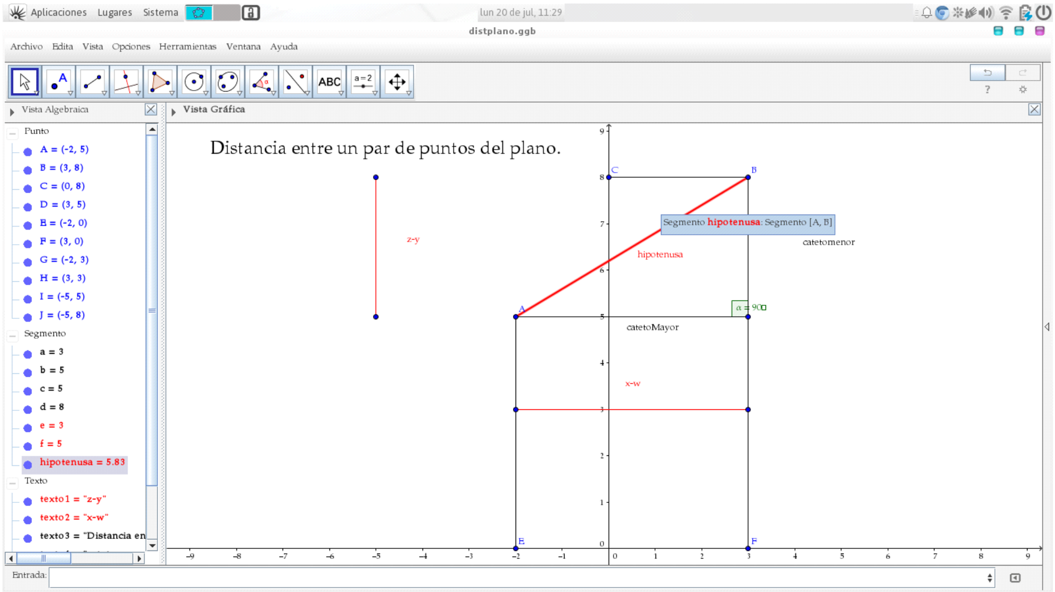
Conocemos A=(-2,5) y B=(3,8). En el gráfico veremos ambos puntos, el segmento que los une cuya longitud es la distancia misma y otros segmentos como los perpendiculares a los ejes coordenados cartesianos desde A y B.



Fuente: Elaboración propia.

Usted puede verificar en otro ejemplo.

Ahora visualicemos el mismo gráfico de manera más abstracta, sin considerar los valores del ejemplo. Vamos a pensar en las coordenadas de A, x, z; en las coordenadas de B: w, y. En la perpendicularidad respecto a los ejes coordenados de los segmentos y por ende, de la perpendicularidad entre dos segmentos que aparecen en el nuevo gráfico y son catetos de un triángulo, que estudiando sobre ejes cartesianos, siempre será rectángulo.



Fuente: Elaboración propia.

Entonces parece tener sentido que al simbolizar busquemos la longitud de la hipotenusa, valiéndonos del Teorema de Pitágoras. La longitud de un cateto es |x-w|, la longitud del otro cateto es |z-y|, las potencias de exponente dos de cada cateto son $(x-w)^2$ y $(z-y)^2$ y la raíz aritmética de índice dos de la suma es, fórmula de la distancia.

La Hipótesis de la proposición a estudiar es que A=(x,z) y B=(w,y) son puntos del plano, considerado este bajo el sistema de coordenadas cartesianas.

La Tesis de la proposición es la fórmula a deducir.

Experiencia Ordenada para efectuar la demostración.

- Enunciar Hipótesis.
- Enunciar Tesis.
- Demostrar por el Método Directo.
- Definir el triángulo rectángulo en término de las coordenadas conocidas.
- Plantear el Teorema de Pitágoras con la información anterior.

- Obtener la fórmula.
- Escribir conclusión.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ausubel, David. (1968). Educational Psychology: A Cognitive View. Holt, Rinehart and Winston. New York.

Azcárate Giménez, C. (1995). Procesos de pensamiento matemático avanzado. Documento interno del Departamento de Didáctica de la Matemática y Ciencias Experimentales de la Universidad Autonóma de Barcelona. Definiciones, demostraciones, ¿Por qué?, ¿Cuándo?, ¿Cómo? p.8.

Balacheff, N. (2000). Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas. Una empresa docente. Bogotá: Universidad de Los Andes.

Brousseau, G. (1995). “Glossaire de didactique des mathèmatiques”, en Thèmes mathèmatiques pour la prèparation du concours CRPE, Copirelem, IREM d’ Aquitaine & LADIST.

Carretero, Mario. (1993). Constructivismo y educación. Buenos Aires: Paidós.

Castaño, V., Rodriguez, S. (2003). Matemática previa para ingresar a las carreras de ingeniería. Educo. Neuquén. Argentina.

Castro, Marita. (2011). Los misterios del cerebro emocional. YouTube.

Chroback, Ricardo. (2012). Carpeta de maestría. Materia: Metodología en la enseñanza de las ciencias. (Manuscrito no publicado). Universidad Nacional del Comahue. Neuquén. Argentina.

Chroback, Ricardo. (1998). Metodologías para Lograr Aprendizaje Significativo. EDUCO. ISBN- 950-9859- 39- 7.

Curso de Neurociencias y Liderazgo "Neuroliderazgo". Registros N.º: 2783295- 2783297- 2286167. Asociación Educar para el Desarrollo Humano. Www.asociacioneducar.com . Sitio web. Registro de propiedad intelectual y actualizaciones. Dirección del Derecho de Autor N.º 5172344.

D' Andrea, R., Lavalle, A. y Curia, L. (2012). Razonamiento Deductivo y Validación en estudiantes universitarios. Un modelo para la didáctica de la demostración matemática. Saarbrücken. Alemania: Editorial Académica Española. ISBN 978-3659021343.

Dreyfus, T. (2000). La demostración como contenido a lo largo del curriculum. En Gorgorió, N.,Deulofeu, A. y Bishop, A. (Coords.). Matemáticas y Educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional. Barcelona. Graó, S.R.L. pp.125–133.

Duval, R. La geometría desde un punto de vista cognitivo. Disponible en: http://fractus.uson.mx/Papers/ICMI/LaGeometria.htm (Último acceso Agosto 2014).

Gómez Chacón, Inés María. (1997). Procesos de aprendizaje en matemáticas con poblaciones de fracaso escolar en contextos de exclusión social. Las influencias afectivas en el conocimiento de las matemáticas. Tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid, España.

Gómez Chacón, Inés María. (2008). Afecto y aprendizaje matemático: causa y consecuencias de la interacción emocional. En J. Carrillo, Reflexiones sobre el pasado, presente y futuro de las Matemáticas. Publicaciones Universidad de Huelva.

Guerrero, E., Blanco, L. J. Y Castro, F. (2001). Trastornos emocionales ante la educación matemática. En García, Aplicaciones de intervención psicopedagógica. Pirámide, 229- 237.

Hernandez Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2010). Metodología de la Investigación. México. Mc Graw Hill.

Logat Grabner, C; Castro, M. (2013). Neurociencias para el cambio. Una guìa general para aquellos que estàn buscando un sentido a su vida. Asociación Educar. Argentina. www.asociacioneducar.com

MacLean, P. D. (1990). The triune brain in evolution: role in paleocerebral functions. Nueva York: Plenum Press.

Mandler, G. (1984). Mind and body: Psychology of emotion and stress. Norton. Estados Unidos de América.

Mandler, G. (1989). Affect and mathematical problem solving: A new perspective. Springer- Verlag. Estados Unidos de América.

Manes, Facundo. (2012). La miopía del futuro. Diario La Nación. (30/6/12)

Martinez Padrón, O. J. (2005). Dominio afectivo en educación matemática. Paradigma, XXIV (2), 7-34.

Montoro, V. (2007). Concepciones de estudiantes de profesorado acerca del aprendizaje de la demostración. Revista electrónica de investigación en educación en ciencias, 2(1), 101- 121.

Novak, J., y Gowin, B. (1988). Aprendiendo a aprender. Barcelona. Ediciones Martinez Roca.

Poincaré, H. (1981). La Ciencia y el Método. México: CONACyT.

Perkins, David. (1999). La Enseñanza para la Comprensión. Compiladora: Wiske, M. Buenos Aires: PAIDÓS.

Rivière Gómez, V. (2001). Convencer y formalizar. Papel y límites de la demostración en secundaria. X JAEM. Ponencia P24. pp. 213- 221.

Vestfrid, M. Alvarez, M. (2012). Aportes de la psiconeurobiología a la enseñanza de las ciencias biológicas (en línea). Trabajo presentado en III Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el campo de las Ciencias Exactas y Naturales. 26, 27 y 28 de Septiembre de 2012. La Plata, Argentina. Disponible en: http://www.memoria.fahce.unlp.edu.ar/trab_eventos/ev.3722/ev.3722.pdf

Vestfrid, M. (2015). Curso de Neurobiología y Plasticidad Neuronal. Registros N.º: 2783295- 2783297- 2286167. Asociación Educar para el Desarrollo Humano. Www.asociacioneducar.com . Sitio web. Registro de propiedad intelectual y actualizaciones. Dirección del Derecho de Autor N.º 5172344.

Weimer, R. C. (2003). Estadística. México. CECSA.

Perkins, D. (1997). La escuela inteligente del adiestramiento de la memoria a la educación de la mente. Barcelona. Gedisa.

Rossler, R., y Logat Grabner, C. (2017). Curso de Formación en Educación Inclusiva. Asociación Educar para el Desarrollo Humano. Www.asociacioneducar.com . Sitio web.

Stone Wiske, M. (compiladora). (1999). La Enseñanza para la comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica. Buenos Aires. Paidós.

Logat Grabner; C. y Rossler, R., dictado por Toiw, D. Formación en Neurosicoeducación. N.º 5069459. Asociación Educar para el Desarrollo Humano. Www.asociacioneducar.com . Sitio web.

Vestfrid, M. Curso de Neurobiología y Plasticidad Neuronal. N°4996557. Asociación Educar para el Desarrollo Humano. Www.asociacioneducar.com . Sitio web.

Weiner, B. (1986). An atributional theory of motivation and emotion. USA: Springer- Verlag.