Tesis de Maestría

Maestría en la Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Orientación: Matemática

El conocimiento del contenido matemático en la formación inicial de profesores. Un estudio en una asignatura de educación matemática

Prof. Paula Vanesa Leonian

Mg. Patricia Barreiro

Directora de Tesis

Dra. Mabel Rodríguez

Co-Directora de Tesis

Dr. Lisandro Curia

Co-Director de Tesis

Facultad de Ingeniería

Universidad Nacional del Comahue

Resumen

En el Profesorado de Matemática de la Universidad Nacional de General Sarmiento, las materias de Didáctica de la Matemática se ubican aproximadamente a mitad del plan de estudios. En ellas observamos recurrentemente que los estudiantes tienen dificultades para resolver consignas matemáticas de nivel medio.

Por esta razón nos propusimos, para este contexto, *describir el conocimiento matemático de estos sujetos así como identificar, según su perspectiva, cuestiones que podrían impedir o facilitar su adquisición*.

El marco teórico incluye, además de aportes de autores relevantes, un desarrollo teórico propio en el que proponemos indicadores del conocimiento matemático.

El trabajo de campo alcanzó a veinte estudiantes, la totalidad que cursó una materia de Didáctica de la Matemática en el primer semestre de 2017. Los instrumentos utilizados fueron un dispositivo formado por tres trabajos prácticos y entrevistas.

Los resultados muestran con detalle cuáles son las mayores dificultades, entre las que mencionamos: falta de comprensión del lenguaje matemático, imposibilidad de explicar lo que significan conceptos, propiedades y resoluciones; no advertir las diferencias entre dar una definición, explicar un concepto, dar un ejemplo, entre otras.

A modo de cierre, dejamos planteada una perspectiva que se abre sobre la formación matemática, a raíz del enfoque teórico introducido.

Palabras claves

Conocimiento Matemático – Formación inicial de profesores de matemática – Indicadores del conocimiento matemático.

Abstract

In the National University of General Sarmiento, the Mathematic Education courses are located approximately halfway through the curriculum. In them we observe recurrently that the students have difficulties to solve mathematical activities for secondary school.

That is why, we proposed for this context, *to describe the mathematical knowledge of these studentes (future teachers) as well as to identify, according to their perspective, issues that could prevent or facilitate this acquisition*.

The theoretical framework includes, in addition to contributions from relevant authors, a theoretical development in which we propose indicators of mathematical knowledge.

The fieldwork reached twenty persons, the totality of the students attending a Mathematics Education course held in the first semester of 2017. The methodological instruments used were a device, formed by three tests, and interviews.

The results show in detail which are the greatest difficulties, among which we mention: lack of understanding of the mathematical language, impossibility of explaining what concepts, properties and resolutions mean; not noticing the differences between giving a definition, explaining a concept, giving an example, among others.

Finally, we state a perspective that is opened that involves teaching in mathematical courses, based in the theoretical approach introduced.

Keywords

Mathematical knowledge – Initial training of mathematics teachers – Mathematical knowledge indicators

Agradecimientos

Quiero agradecer a toda la gente que hizo posible que lleve a cabo un trabajo de esta envergadura.

A mi directora y amiga personal, Patricia, quien me acompañó en todo el proceso.

A mi familia, que me brinda un invalorable apoyo incondicional y alienta todos mis emprendimientos.

A mis amigos, que pacientemente se acomodaron a mis tiempos.

A mis estudiantes de EM1, quienes colaboraron gentil y desinteresadamente en todos los trabajos prácticos que solicitamos.

Por último, quiero hacer una mención especial a Mabel, mi co-directora, sin ella hubiera sido imposible llevar adelante este trabajo. Pero más allá de eso, agradezco su paciencia y dedicación, y las posibilidades de crecimiento que me ofrece día a día.

Paula

Índice general

Índice de imágenes y cuadros

INTRODUCCIÓN

En Argentina, la mayoría de los planes de estudio de la formación de profesores de matemática no incluye un abordaje específico de temas de matemática de nivel medio. Casi siempre se los da por sabidos y se espera que los estudiantes del Profesorado los pongan en juego en las materias de matemática de la formación inicial. A su vez, en las materias de Didáctica de la Matemática se requiere que los estudiantes puedan resolver situaciones *matemáticas* que involucran contenidos básicos para, posteriormente, pensar en formas posibles para enseñar esos contenidos. Como docentes de estas asignaturas, nos encontramos, en la Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS), con que muchas veces los futuros profesores no pueden resolver actividades que involucran el uso de contenidos de nivel medio. Esta situación nos genera preocupación y nos hace preguntarnos por la *formación matemática* de los futuros docentes. Consideramos que necesitamos describir con cierta precisión qué tipo de saberes matemáticos disponen, pueden poner en juego y ante qué situaciones lo hacen, los estudiantes del Profesorado pues contar con esta información podría ser un excelente punto de partida para repensar la formación matemática de los futuros profesores y, de ser posible, proponer alternativas de mejora.

Dentro de este marco nos preguntamos, ¿cuál es el conocimiento del contenido matemático del que disponen los estudiantes del Profesorado de Matemática? ¿qué aspectos sobre el conocimiento matemático en general son importantes y necesarios adquirir para llevar a cabo un proceso de enseñanza exitoso? ¿qué cuestiones pueden favorecer u obstaculizar la obtención de esos aspectos?

Nuestra investigación se llevó a cabo con estudiantes del Profesorado Universitario de Matemática de UNGS, en la materia Enseñanza de la Matemática 1 (EM1). Dicha materia consta en promedio de veinticinco alumnos, está ubicada a mitad de la carrera, y constituye el primer contacto de los estudiantes con la Didáctica de la Matemática. EM1 introduce a los estudiantes en la problemática de la enseñanza de la Matemática en el nivel medio y superior de educación. Se trabaja a partir de creencias de los estudiantes respecto de la tarea docente con una doble intención. En primer lugar, se pretende ofrecer una perspectiva amplia sobre diversos enfoques de Didáctica de la Matemática, que se complementará en la siguiente materia, Enseñanza de la Matemática 2. En segundo lugar, le permite al estudiante la posibilidad de tomar sus decisiones didácticas particulares. Para ello, éste deberá ser capaz de fundamentar por qué elige lo que decide incluir en sus propuestas didácticas y por qué descarta lo que no irá a considerar, evidenciando de este modo un conocimiento más amplio del que decida utilizar. Para ello, una práctica previa útil para el futuro docente es la de analizar con distintos elementos teóricos diferentes propuestas tanto sea de consignas, secuencias didácticas, libros de texto, registros de clases, etc., para lo que es necesario poder resolver correctamente las actividades que en el material de análisis se encuentre. Uno de los propósitos planteados para esta asignatura es brindar un marco para comenzar la reflexión en torno a la enseñanza de la Matemática que permita a los futuros docentes comprender la complejidad de la tarea, dimensionar la cantidad de decisiones que involucra el ser docente, tanto en decisiones de índole matemática, didáctica y de uso de recursos. No poder resolver las actividades matemáticas obstaculiza el aprendizaje de las cuestiones didácticas.

Teniendo en cuenta los aspectos antes señalados, nos proponemos analizar cuál es el conocimiento matemático que poseen los estudiantes del Profesorado de Matemática de

2

UNGS, poder describirlos, para luego identificar algunos obstáculos y facilitadores en el aprendizaje del contenido matemático.

Consideramos que el trabajo realizado es un punto de partida en el estudio de estas cuesitones, y que los resultados obtenidos están sesgados a esta comisión de EM1, pero nos sirve como comienzo para pensar en nuestro trabajo tanto en estas asignaturas de didáctica, como también las de matemática.

Este trabajo de tesis se organiza de la siguiente manera: en primera instancia hemos dejado plasmado el recorrido que llevamos a cabo al recabar información sobre trabajos existentes sobre el conocimiento de un profesor de matemática. Este primer capítulo, es el *Estado del Arte*. A continuación, se presenta el *Marco Teórico* que utilizamos para realizar nuestra investigación. En él, no solo se toma como punto de partida lo que algunos autores mencionan, sino que también elaboramos una serie de indicadores que permiten analizar el conocimiento matemático de un estudiante de Profesorado de Matemática.

Luego de esto, en el capítulo 3, presentamos la *Metodología de investigación y diseño de instrumentos* que hemos utilizado para lograr los objetivos propuestos. Con los elementos teóricos mencionados, retomamos la problemática de interés descripta anteriormente, y la ajustamos a la terminología logrando precisión en la formulación de nuestros objetivos de investigación. Hemos diseñado dos tipos de instrumentos de trabajo: por un lado, una serie de tres trabajos prácticos que los estudiantes realizaron de manera individual y domiciliaria, y por el otro, entrevistas individuales que se llevaron a cabo con algunos de ellos seleccionados al azar.

Los capítulos 4 y 5 son de *análisis de los datos recabados y resultados.* Los hemos dividido para favorecer la lectura de la evidencia obtenida y su análisis respectivo (de trabajos prácticos escritos realizados por los estudiantes del profesorado en el capítulo 4, y sobre las entrevistas posteriores en el capítulo 5). Finalmente, presentamos *Conclusiones y Perspectivas* y, al cierre de la tesis, los anexos documentales.

Por una cuestión de espacio, hemos incluido los anexos I a VII que constan de las resoluciones de todos los trabajos prácticos entregados por los alumnos, las tablas que utilizamos para el análisis de cada indicador, y los audios correspondientes a las grabaciones de las entrevistas, en un CD que se adjunta a este presente trabajo.

CAPÍTULO 1: ESTADO DEL ARTE

1.1 Introducción

Entre las múltiples investigaciones que focalizan en la formación docente, investigadores del campo de la Educación han sido precursores proponiendo modelos que establecen tipos de conocimientos que un docente debe tener para enseñar una ciencia. Entre ellos mencionamos el Modelo de Shulman (1987) que ha sido largamente utilizado y lo es, aún hoy en día. Ahora bien, al pensar en la formación de profesores de matemática, se ha puesto de manifiesto la necesidad de redefinir conocimientos que muestren la especificidad de la enseñanza de esta ciencia. Es a partir de allí que distintos investigadores de Educación Matemática han ido proponiendo nuevos modelos, que toman como punto de partida producciones anteriores, y marcan algún énfasis o resaltan algún aspecto que consideran crucial para una formación adecuada del profesor de matemática. Proponemos a continuación una breve descripción que muestre este recorrido, partiendo del modelo de Shulman (1987) y llegando al modelo de Carrillo (2013).

1.2 Modelo de Shulman

Como menciona Gómez Torrez (2016), la relevancia del trabajo de Shulman (1987) radica en la importancia que se le da al conocimiento específico del profesor más allá del conocimiento pedagógico general. Shulman (1987) establece seis categorías de conocimientos que el docente debería tener y las agrupa de la siguiente manera:

- *Conocimiento del contenido:* en este caso, la Matemática.

- *Contenido didáctico general:* relacionado con la gestión de la clase, control de normas sociales, relaciones entre los estudiantes y el adulto, estrategias de motivación.
- *Conocimiento del currículum:* organización y secuenciación de contenidos, materiales de trabajo, recursos, planificación, evaluación y seguimiento de los alumnos.
- *Conocimiento de los alumnos:* conocer su contexto, las necesidades, expectativas.
- *Conocimiento de los aspectos teleológicos:* relacionado con características propias de la institución en la que se propone la enseñanza. Estos conocimientos tienen que ver con la finalidad u objetivos que se persiguen desde la enseñanza teniendo en cuenta la institución.
- *Conocimiento pedagógico del contenido:* "entramado entre la disciplina de estudio y la pedagogía; tiene que ver con la didáctica, el uso de estrategias de aprendizaje y los mediadores del proceso de enseñanza y aprendizaje" (Velázquez y Cisneros, 2013, p.2)

1.3 El Modelo MKT

Este modelo es uno de los más reconocidos, toma como base lo propuesto por Shulman (1987) e introduce el concepto de *conocimiento matemático para la enseñanza*, MKT[1], ofreciendo así un categorización de conocimiento observado, o requerido, en la enseñanza de la matemática. En el trabajo de Hill, Ball & Schilling (2008), los autores definen el

[1] Esta sigla, al igual que todas las que se encuentran en este capítulo, representan las iniciales en inglés.

MKT como "el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y desarrollo en el alumno" (p.374). Con esta idea, se hace referencia al conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para enseñar.

Ball, Thames y Phelps (2008) presentan una categorización conformada por dos grandes dominios: el *conocimiento del contenido matemático* y el *conocimiento pedagógico del contenido*. Con respecto al primero, los autores proponen una subdivisión en tres componentes:

- *el conocimiento común del contenido* (CCK): el que posee cualquier persona que sabe matemática,
- *el conocimiento especializado* (SCK): el que se pone en juego al buscar actividades para enseñar un contenido específico a la hora de enseñar y
- *el conocimiento del horizonte matemático* (HCK): conocimiento que le sirve al profesor para establecer relaciones entre los contenidos. Le permite vincular distintos contenidos presentes en el curriculum, o poder estudiar el mismo contenido a diferentes niveles educativos, permitiéndoles decidir la importancia de un determinado contenido.

Con respecto al segundo dominio, el *conocimiento pedagógico del contenido*, también está formado por una subdivisión que mostramos a continuación:

- *el conocimiento del contenido y los estudiantes* (KCS): incluye conocimiento sobre errores, dificultades, estrategias y aprendizaje del alumno,
- *conocimiento del contenido y la enseñanza* (KCT): se refiere a los procedimientos y procesos adecuados para planificar, enseñar y evaluar un tema y

- *conocimiento del contenido y el currículo* (KCC): es una combinación de los saberes sobre el contenido y los saberes sobre los temas específicos que hay que trabajar según el año y la edad.

Podemos observar gráficamente la clasificación que propone este modelo en la siguiente figura:

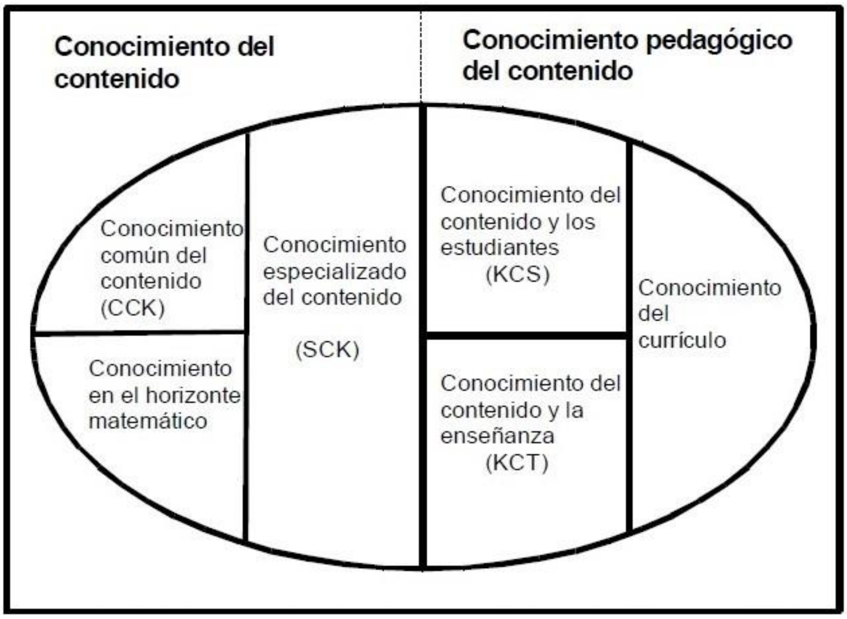


Imagen 1: Modelo MK

Ball, Thames & Phelps (2008) consideran el *conocimiento del contenido especializado* (SCK) como una mejora al CCK porque se incluye, además del “saber hacer”, el saber el porqué de ello, logrando de esta manera explicar el origen de los errores que cometen los alumnos.

Por otra parte, Escudero, Flores y Carrillo (2012) señalan que hay dos elementos importantes en los que Ball *et al.* (2008) se basan:

- La profesión: si bien puede ser un conocimiento presente en otras profesiones, es un rasgo fundamental del profesor de Matemática.
- Pueden confundirse las definiciones de CCK y de SCK. Afirman que el SCK va más allá del CCK pero sin considerar los conocimientos de los alumnos o de los contenidos de enseñanza.

Según los autores, "… la noción de especializado en el MKT responde a que se le define como actividades propias del profesor de matemáticas, es decir, se define en términos de lo que permite hacerla posesión ese tipo de conocimiento" (Escudero, Flores y Carrillo, 2012, p. 38). Es decir, ser poseedor de este tipo de conocimiento le permite al docente decidir, entre otras cuestiones, qué ejemplo utilizar o qué tarea pensar a la hora de enseñar un tema determinado. Como la detección de errores específicos en los desarrollos de los alumnos es una tarea específica de los docentes, el análisis del porqué se produjo forma parte del SCK.

Tener un conocimiento del tipo SCK, implica poder anticipar/leer/detectar errores en los estudiantes y después analizarlos para saber por qué sucedieron. Los autores señalan que es muy delgada la diferenciación entre el CCK y el SCK.

Velázquez Echavarría, Cisneros, Castro Gordillo y Konic (2015) presentan un trabajo de investigación con el objetivo de discutir sobre los conocimientos necesarios en los maestros para poder encarar la tarea de enseñar álgebra (lo vinculado a las generalizaciones) en la escuela primaria. Consideran el MKT como marco teórico, sin embargo, señalan que este modelo falla en la articulación entre estas categorías de conocimientos por lo que proponen lograr una articulación entre ellas. Focalizan en articular el conocimiento especializado del contenido, el conocimiento del contenido y los estudiantes, y el conocimiento del contenido y la enseñanza. Los autores sugieren, a raíz de esa experiencia que, una forma de relacionar estos tres tipos de conocimientos es a través de la identificación de problemas de interpretación o de significados (anticipación/intervenciones).

1.4 Otros aportes

Paralelamente, Godino (2009) sostiene que los modelos teóricos existentes sobre los conocimientos del profesor son importantes tanto en su formación inicial o permanente, como en su uso posterior a la hora de analizar las prácticas docentes. Sin embargo, señala la generalidad de estos modelos y los retoma dentro del Enfoque Ontosemiótico (EOS).

El EOS propone el concepto de *idoneidad didáctica* para reflexionar sobre la pertinencia de lo que realiza el docente a la hora de enseñar un contenido específico. Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006) toman seis criterios para valorar la idoneidad didáctica de los procesos de instrucción matemática, que son tomados por Cisneros y Velázquez (2013) de la siguiente manera:

> *Idoneidad epistémica*: "Conocimientos matemáticos relativos al contexto institucional en el que se realiza el proceso de estudio y la distribución temporal de los diversos componentes del contenido (problemas, lenguajes, procedimientos, definiciones, propiedades, argumentos). Esta idoneidad permite valorar si las matemáticas que se enseñan son unas "buenas matemáticas". (Font, Planas y Godino, 2009, p.14)

> *Idoneidad cognitiva*: conocimientos personales de los estudiantes y progresión de los aprendizajes. Su valoración permite identificar antes de iniciar el proceso de enseñanza, si lo que se quiere enseñar concuerda con los conocimientos de los alumnos y, después de la actividad de

enseñanza, si los aprendizajes logrados se acercan a los que se pretendían enseñar; lo cual permite hacer un paralelo entre lo que se enseña y lo que realmente se aprende.

Idoneidad afectiva: estados emocionales (actitudes, emociones, creencias, valores) de cada alumno en relación con los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido: Permite valorar el interés, motivación y entusiasmo de los alumnos en el proceso de instrucción.

Idoneidad mediacional: recursos tecnológicos y asignación del tiempo a las distintas acciones y procesos. Se valora la adecuación de los recursos materiales y temporales utilizados en los procesos de instrucción.

Idoneidad interaccional: patrones de interacción entre el profesor y los estudiantes y su secuenciación orientada a la fijación y negociación de significados. Se puede valorar si la interacción ha resuelto dudas y dificultades de los alumnos.

Idoneidad ecológica: sistema de relaciones con el entorno social, político, económico y educativo que soporta y condiciona el proceso de estudio. Se valora la adecuación del proceso de instrucción al Proyecto Educativo Institucional (PEI de las escuelas), las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional (p. 4)

Por otra parte, Llinares (2000) se centra en la actividad docente a la hora de trabajar en el aula de secundario en la enseñanza de Matemática. Para ello, toma dos conceptos importantes: *actividad del profesor* y *transparencia* (Lave y Wegner 1991). Pretende describir y analizar la práctica del profesor en el aula, aunque ésta sea considerada como algo que va más allá del aula, y analizar el significado que el profesor le da a los instrumentos que utiliza, y el objetivo con el que los considera, para llevar a cabo su trabajo.

El autor identifica tres etapas en las que se desarrolla su tarea: una previa de diseño/organización/planificación de la clase, una de gestión de la misma, y otra de reflexión sobre lo trabajado. Todo lo que el docente hace en estas etapas, sumado a la comprensión de cómo usar los instrumentos que aplica y con qué objetivos, es lo que denomina *práctica profesional del profesor*. El autor sostiene que estas primeras etapas están fuertemente condicionadas por una *reconstrucción subjetiva* de su experiencia docente (además del contexto escolar en el que se encuentra). Señala la importancia de la relación entre el docente y el contenido a enseñar, y que la forma en que fue aprendido puede traer conflicto a la hora de querer enseñarlo. Por otro lado, remarca que la forma en que el docente aprendió los contenidos matemáticos puede determinar la gestión del proceso de enseñanza incidiendo en el de aprendizaje.

Cisneros y Velásquez (2013) presentan un taller para maestros en formación inicial y continua. Su base teórica fue el modelo de Shulman (1987), el MKT de Ball, Hill, & Bass (2005), y el de Godino (2009). En el taller propuesto se trabajan varias cuestiones, como por ejemplo la diferencia entre el CCK y el SCK y la idoneidad didáctica para analizar consignas que diseñan los asistentes. El texto muestra las consignas dadas y explica cómo respondieron los maestros que están en formación sin experiencia en el aula y cómo lo hicieron aquellos que ya trabajan en eso. A modo de conclusión, los autores sostienen que los alumnos pueden presentar dificultades en el aprendizaje por diversos motivos, como por ejemplo la complejidad del tema, las creencias epistemológicas de los docentes, el diseño y planificación de la clase, entre otros, por lo que es deseable generar espacios de formación continua para docentes donde se reflexiones sobre qué conocimientos son necesarios para afrontar la tarea de enseñanza aprendizaje en matemática. Asimismo, resaltan el valor formativo del análisis de conocimiento didáctico-matemático:

> El análisis del conocimiento didáctico-matemático del maestro que enseña matemáticas, puede contribuir al diseño de programas de formación de maestros, a la implementación de normas y de políticas educativas que podrían ayudar a mejorar el proceso de formación matemática de los niños” (p. 8).

1.5 El Modelo MTSK

Por último, tomamos a Sosa Guerrero, Flores-Medrano y Carrillo Yañez (2016) quienes retoman el modelo de Carrillo, Climent, Contreras & Muñoz Catalan (2013) sobre el Modelo MTSK, pensado para analizar el conocimiento del profesor de matemática. El foco de este modelo es el propio conocimiento del docente cuya actividad profesional está relacionada con la enseñanza de la matemática. Carrillo, Montes, Contreras y Climent (2017) señalan que las creencias y vivencias que tiene un profesor sobre la enseñanza y el aprendizaje en matemática influyen en su conocimiento, afectando así los subdominios del modelo.

Este modelo toma los dos dominios que considera Shulman (1987) y conserva la distinción general que plantean Ball *et al*. (2001), pero reorganiza los subdominios de la siguiente manera:

Conocimiento del Contenido Matemático (MK)

- *Conocimiento de los temas (KoT*): está relacionado con el conocimiento del profesor sobre los contenidos matemáticos. Según Carrillo *et al.* (2017), "conocimiento disciplinar que incluye la fenomenología y aplicaciones de un contenido, los procedimientos, las definiciones, propiedades y sus fundamentos, y los diferentes registros de representación" (p. 7).

- *Conocimiento de la estructura matemática (KSM)*: es el conocimiento de las relaciones matemáticas que realiza el profesor entre distintos contenidos, pensando en el mismo contenido, pero en distintos niveles o bien distintos contenidos en el mismo nivel.
- *Conocimiento de la práctica matemática (KPM)*: es el conocimiento que tiene el profesor sobre la lógica de la materia, cómo se procede y la sintaxis propia de la matemática. Según Carrillo *et al.* (2017), es el "conocimiento de las formas de proceder características del trabajo matemático, incluyendo aspectos de la comunicación, la argumentación y la demostración matemáticas, así como el conocimiento sobre qué es definir y qué características debe tener un enunciado matemático (definiciones, proposiciones…), el conocimiento de los procesos asociados a la resolución de problemas y el de otras prácticas del quehacer matemático (como la modelización)" (p. 8).

Conocimiento Pedagógico del contenido (PCK)

- *Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT)*: es el conocimiento que le permite al profesor seleccionar materiales, representaciones y/o ejemplos para enseñar un concepto o procedimiento matemático.
- *Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM)*: conocimiento relacionado con las características inherentes al contenido a enseñar.

- *Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS)*: es el conocimiento del contenido, desde el punto de vista de los objetivos que se espera lograr en determinados momentos del proceso educativo.

Podemos observar una disposición gráfica de la distribución de los subdominios en la siguiente figura:

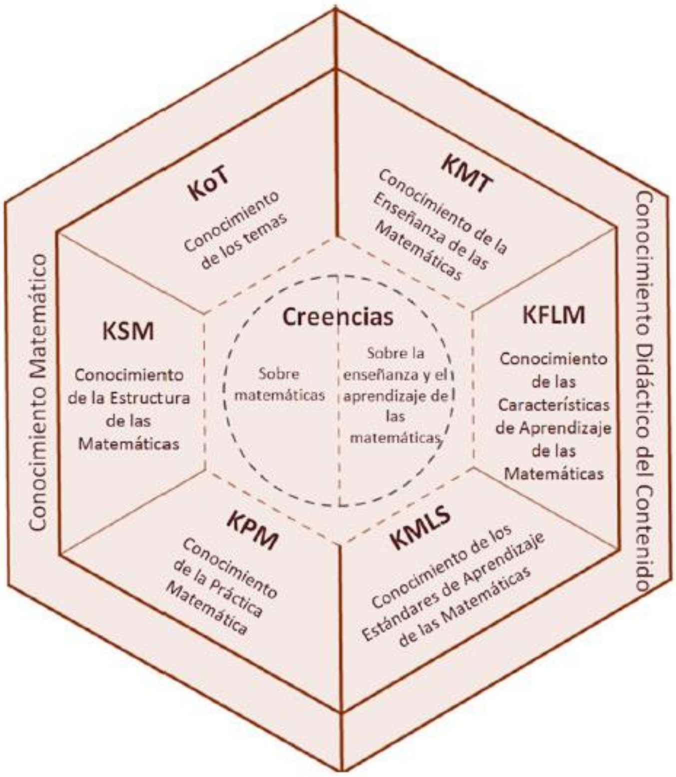


Imagen 2: Subdominios del Modelo MTSK

Carrillo *et al.* (2017) sostienen que lo que los autores de los distintos modelos antes mencionados planteaban se fue refinando en una búsqueda de distinción entre la matemática escolar y la matemática académica. Los objetivos que se persiguieron estaban relacionados con la discusión sobre qué elementos del conocimiento debe tener un profesor para desarrollar su tarea, en relación con su materia, con el foco en la actividad en el aula. Los autores explican el modelo MTSK diciendo que:

> aborda, desde una perspectiva analítica, el conocimiento que el profesor usa y activa en su labor docente profesional en relación con la enseñanza de la matemática, contemplando esta desde una perspectiva amplia, abarcando la preparación de clases, reflexión tras las mismas, y la propia actividad de aula (p. 3).

Por otro lado, teniendo en cuenta el modelo MKT propuesto por Ball *et al.* (2001), Sosa (2011) propone una serie de indicadores para el análisis exhaustivo del contenido matemático en el caso de dos profesores universitarios, en el tema de álgebra lineal. Considera todos los dominios y elabora una lista minuciosa de descriptores para analizar su trabajo. En particular, lo que se refiere a CCC, Sosa (2011, p. 63) deja indicados los siguientes descriptores:

- *Saber o conocer cuando sus estudiantes tienen una respuesta correcta/incorrecta.*
- *Saber usar términos y notación matemática (que aparece en las definiciones formales)*
- *Saber la definición del concepto, regla, propiedad, teorema o método que está presentando.*
- *Saber lo que piden en un ejemplo o ejercicio.*
- *Saber a qué o hasta dónde llegar en un ejemplo o ejercicio.*
- *Saber hacer un ejemplo o ejercicio.*
- *Saber que la notación es muy importante en matemática.*
- *Saber la estrategia para hacer la demostraciónd e una regla o teorema.*
- *Saber hacer la demostración de una regla (Cramer) o teorema.*

Tomando la evolución del modelo, Sosa *et al.* (2016) considera como marco teórico el MTSK con la intención de profundizar el estudio de KMT. Utilizan la investigación realizada por Sosa (2011), pero se enfocan en el subdominio del Conocimiento Didáctico del Contenido y el Conocimiento de la Enseñanza de la Matemática para analizar. La importancia de mencionar este último artículo radica en la observación de cómo utilizan los descriptores mostrados por Sosa (2011), por su exhaustividad, para analizar distintos dominios del MTSK. En distintas oportunidades esta autora toma lo realizado en su tesis para realizar análisis de algún dominio particular del Conocimiento Especializado del Profesor. En todos ellos, la autora trabaja con profesores de Matemática en ejercicio de su profesión.

Por otro lado, podemos observar que Montes, Contreras y Carrillo (2013) realizan un análisis sobre una experiencia real en el tema de "funciones" en bachillerato teniendo en cuenta ambos modelos (MKT y MTSK). En él se muestra debilidad en las delimitaciones de los subdominios del modelo de Ball *et al*. (2008) en comparación a los subdominios del MTSK.

Tomando la evolución del modelo, Sosa *et al.* (2016) considera como marco teórico el MTSK y proponen una serie de indicadores para analizar el Conocimiento de la Enseñanza de la Matemática con los que analizarán lo obtenido en su experiencia sobre el mismo tema. La importancia del análisis de este último artículo radica en la exhaustividad con la que se proponen analizar los resultados de la experiencia.

Nuestro trabajo toma como punto de partida el modelo MTSK de Carrillo *et al.* (2013), utilizado por Sosa *et al.* (2016) para describir el MK en futuros profesores de Matemática. Tal como mostramos en el siguiente capítulo nos fue necesario proponer una serie de indicadores más refinados, e independientes del contenido matemático a trabajar, que forman parte del marco teórico utilizado.

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO

2.1 Introducción

Como parte del marco teórico del trabajo consideramos, de lo presentado en el Estado del Arte: el *Conocimiento del Contenido Matemático* (MK) del Modelo MTSK de Carrillo *et al.* (2013). A esto le sumamos una elaboración propia de indicadores que permiten describirlo detalladamente. Esta propuesta de indicadores fue inspirada en el trabajo de Sosa (2011) y Sosa Guerrero *et al.* (2016).

A continuación, mostraremos primeramente una síntesis de aspectos relevantes del MK, retomando parte de lo expresado en el Estado del Arte, para ubicarlo en el modelo MTSK y luego dar paso a una explicación detallada de los indicadores que elaboramos y utilizamos para llevar a cabo nuestro trabajo.

2.2 El conocimiento del contenido matemático: encuadre teórico

Como mencionamos en el capítulo anterior, el MK se presenta como un dominio del modelo MTSK, el que focaliza en el conocimiento del docente de matemática.

Como explicamos oportunamente en el capítulo 1, el modelo MTSK de Carrillo *et al.* (2013) toma los dos dominios con los que trabajó Shulman (1987) y reorganiza los subdominios que consideró Ball (2001). En particular, el MK consta de tres subdominios:

- *Conocimiento de los temas (KoT*), referido al conocimiento del profesor sobre los temas de matemática.

- *Conocimiento de la estructura matemática (KSM)*, conocimiento de las relaciones matemáticas que tiene el profesor para entablar relaciones entre contenidos de un mismo nivel, entre distintos niveles, y entre diferentes contenidos.
- *Conocimiento de la práctica matemática (KPM)*, aquel que tiene el profesor sobre la propia materia: estructura lógica, sintaxis, formas de proceder propias de la matemática.

Hemos mencionado anteriormente que el trabajo de Sosa (2011) consta de un estudio del conocimiento matemático y didáctico del profesor que pone en juego en su práctica profesional, en clases específicas de Álgebra Lineal. Realiza un trabajo detallado con una gran cantidad de indicadores muy particulares, para el modelo de Ball *et.al* (2008). Por otro lado, Carrillo *et al.* (2017) realiza también un análisis del desempeño de un docente de nivel medio utilizando el modelo MTSK, en un tema de geometría.

Nuestra intención es tomar lo que del trabajo de ellos se desprende, sobre el conocimiento especializado del profesor, ampliándolo para ser utilizado en el estudio del MK de estudiantes del Profesorado de Matemática en cualquier tema específico de la materia. De esta forma, hemos reorganizado y profundizado los indicadores que los autores anteriormente mencionados utilizan. Por lo dicho anteriormente, nos hemos inspirado en ellos y creemos tomar distancia como para verlos de manera independiente, consideramos que son instrumentos de análisis que no son comparables.

Puesto que no hemos encontrado bibliografía que nos brinde información sobre modos de llevar adelante un estudio exhaustivo del MK planteado de manera más amplia, para un contenido general, es que elaboramos los indicadores que presentamos a continuación.

2.3 Indicadores del MK

Los indicadores de MK en estudiantes del profesorado que consideramos para la realización de este trabajo, se encuentran organizados en dos grandes bloques:

- el *conocimiento del contenido matemático puesto en juego ante producciones ajenas* (libro de texto, profesor, compañero, etc.), y
- el *conocimiento del contenido matemático puesto en juego ante producciones propias*.

Nos ha resultado muy útil plantear los indicadores identificando tres tipos de acciones que los futuros profesores, u otros sujetos, podrían poner en juego, ordenadas de menor a mayor complejidad:

- *reproducir o usar* (conceptos, resultados, demostraciones, entre otros),
- explicar (lo realizado),
- *reflexionar* (tanto sobre lo hecho, como sobre lo que ha utilizado).

A continuación, explicamos en detalle qué cuestiones consideramos en cada una de estas acciones que definen a cada indicador. Sobre un total de cuatro indicadores, los dos primeros que consideramos se plantean ante producciones hechas por otro (ya sea un libro de texto, un profesor, un compañero, internet, etc.).

ANTE PRODUCCIONES AJENAS

Indicador I.1.: hace referencia a la comprensión de definiciones, propiedades, teoremas, demostraciones, etc., existentes (es decir de autoría ajena). Consideramos como primer paso el acceso a esos objetos matemáticos, es decir:

- *Reproducir*: una definición, una propiedad, una demostración, etc. existente. La idea es poder expresar una definición, enunciar una propiedad o reproducir una demostración. Es claro que el poder reproducir alguna de estas cuestiones no implica que ella sea comprendida por el sujeto, por esa razón el segundo nivel contempla la explicación, como se indica a continuación.
- *Explicar:* mostrando comprensión, aquellas cuestiones que reprodujo (una definición, propiedad, un teorema, una demostración, etc.). Es importante resaltar que el sujeto no pone de manifiesto su comprensión solo hace una traducción de lenguaje simbólico al natural leyendo los símbolos. Su explicación debe focalizarse en el objeto matemático y mostrar que entiende qué significa lo que está reproduciendo. Cabe aclarar que con estas explicaciones nos referimos a una explicación ante un par experto. No estamos considerando en plano de la explicación que a veces se usa para enseñar un concepto a un aprendiz y que consideramos es posterior al momento de poder explicar para manifestar comprensión. Asimismo, y pasando a un nivel de mayor complejidad, planteamos lo siguiente:
- *Reflexionar:* el sujeto debe ser capaz de reflexionar sobre lo que reprodujo y explicó. Por ejemplo: sobre qué características debe tener un escrito para ser una definición; todo lo que encuentra como "definición", ¿efectivamente lo es?, ¿por qué una demostración que reproduce, y fue capaz de explicar, prueba el resultado, entre otras cuestiones. Esta parte plantea una reflexión metacognitiva que el propio sujeto debe poder hacer sobre su producción anterior.

Indicador I.2: hace referencia al lenguaje matemático, tanto el natural como el simbólico, las convenciones y notaciones propias de la comunidad matemática. Análogamente al indicador anterior, consideramos:

- *Reproducir*: una definición, propiedad, demostración, etc., hecha por otro, utilizando el lenguaje o simbólico o natural. Aquí pondremos el foco en el lenguaje que utiliza.
- *Explicar*: hace referencia a la *explicación del uso del lenguaje* para expresar un objeto matemático y no a la explicación del objeto en sí (que fue considerada en el indicador I.1). El sujeto debe ser capaz de explicar por qué el lenguaje que usa está diciendo lo que quiere decir sobre el objeto.
- *Reflexión*: la reflexión que se hace es sobre el uso del lenguaje, qué lenguaje usa la comunidad matemática, qué lenguajes se utilizan en contextos más informales, qué rigurosidad tiene cada uno de los lenguajes empleados, qué notación elegir y por qué, cuáles son convenciones y su arbitrariedad y cuáles no, etc.

Este indicador tiene una connotación transversal a los demás y es de complejidad alta para sujetos que están aprendiendo matemática.

ANTE PRODUCCIONES PROPIAS

El segundo bloque de indicadores que proponemos considera el conocimiento matemático que el sujeto pone en juego cuando debe hacer una producción propia. Los describiremos como hicimos anteriormente.

Indicador I.3: hace referencia a la actividad que realiza un sujeto ante la resolución de una *actividad simple* (nos referimos por ejemplo a un ejercicio, una aplicación directa de un resultado o procedimiento, etc.). En este caso, para enfrentarse a la realización de la tarea, se debe:

- *Usar*: lenguajes matemáticos, definiciones, procedimientos, propiedades, demostraciones, etc. Más allá de la utilización de distintos recursos para resolver una tarea sencilla y, entendiendo que no es suficiente *usar* objetos matemáticos al resolver para mostrar comprensión, contemplamos lo siguiente.
- *Explicar*: las resoluciones, la comprobación de hipótesis si acaso el sujeto aplicará un teorema, el uso del lenguaje, el uso de las propiedades y su pertinencia, la respuesta, etc. En coherencia con el trabajo reflexivo de los otros indicadores, sumamos lo siguiente.
- *Reflexionar*: sobre el propio trabajo, sobre lo que significa "usar una propiedad", el valor de poder aplicar propiedades reconociendo la posibilidad o no de ser usadas en función de la consigna con la que se esté trabajando, por qué puede utilizar o no cierto método, la interpretación de lo hallado para dar una respuesta, la necesidad de responder a lo pedido, etc.

Indicador I.4: se enmarca en la resolución de tareas cognitivamente exigentes, es decir aquellas en las que el sujeto no sabe cómo resolverlas de manera inmediata. El sujeto se enfrenta con este tipo de tarea cuando queda en sus manos la elaboración de una argumentación que pruebe la validez o falsedad de un resultado, la modelización de situaciones extra o intramatemáticas, la resolución de problemas, etc. En estas situaciones, se debe:

- *Usar*: el lenguaje matemático, definiciones, procedimientos, propiedades, demostraciones, buscar información, dar contraejemplos, etc. Como ya mencionamos, esto no basta para mostrar comprensión por lo que incluimos la explicación, como sigue.
- *Explicar*: su resolución, considerando qué usó, cómo lo puso en juego, en qué pensó, etc.
- *Reflexión*: ser capaz de identificar si lo que realizó responde a lo pedido, si simplificó el enunciado para poder abordarlo, si puso en juego estrategias que fracasaron o no, si produjo una demostración cómo ésta requiere una sucesión coherente de pasos que deben estar bien fundamentados, que pueden o no llevar a concluir la demostración, formas de encarar demostraciones matemáticas (vía directa, método de reducción al absurdo, contra recíproco), etc.

Con el fin de utilizar estos indicadores en nuestro trabajo, elaboramos una tabla que facilita su visualización y su posterior uso:

<table>
<tr><th colspan="2">INDICADOR</th><th>EXPLICACIÓN</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Conocimiento del contenido matemático ante producciones ajenas correctas matemáticamente</td><td>I.1.
Definiciones de conceptos, reglas, propiedades, enunciados de teoremas, procedimientos, demostraciones de resultados, ejercicios resueltos</td><td>- a) Reproducir (definición/propiedad/teorema/demostración/etc. existentes)
- b) Explicar, mostrando comprensión, las definiciones, propiedades, teoremas, demostraciones, etc. anteriormente reproducidas.
- c) Reflexionar sobre las definiciones/propiedades/teoremas que reprodujo y explicó.</td></tr>
<tr><td>I.2.
Lenguajes matemáticos (natural y simbólico), notación matemática, convenciones</td><td>- a) Reproducir una definición, propiedad, demostración, etc., usando lenguajes matemáticos.
- b) Explicar el uso del lenguaje utilizado.
- c) Reflexionar sobre el uso del lenguaje (entendiendo desde la rigurosidad planteada por la comunidad matemática hasta contextos más informales), la notación (y la conveniencia de elegir una u otra, por ejemplo), las convenciones y su arbitrariedad.</td></tr>
</table>

Conocimiento del contenido matemático ante **producciones propias**	**I.3.** Resolución de una consigna, actividad o ejercicio que **no** le resulte cognitivamente exigente.	- Usar lenguaje matemático, definiciones, propiedades, demostraciones, etc., operaciones para resolver una tarea sencilla. - Explicar su resolución (el lenguaje utilizado, las operaciones puestas en juego, las propiedades utilizados, la respuesta, entre otros). - Reflexionar sobre lo que significa "usar una propiedad", reconocer qué propiedades/métodos/reglas/teoremas son factibles de ser usados ante cada consigna que se aborde y según la instancia de resolución que se esté atravesando; la utilidad de los métodos empleados y la pertinencia -o no- de aplicarlos en diferentes contextos, la interpretación de lo hallado para dar la respuesta, la necesidad de responder a lo pedido.
	I.4. Resolución de tareas intelectualmente exigentes (demostrar una proposición no vista, resolver un "problema", modelizar).	- Usar lenguaje matemático, operar, usar propiedades, procedimientos, buscar información, proponer una demostración, dar contraejemplos, etc. - Explicar su resolución y todo aquello puesto en juego en ella. - Reflexionar sobre las heurísticas puestas en juego, si lo hecho responde a lo pedido, si se simplificó el enunciado para poder abordarlo, que las demostraciones requieren una sucesión coherente de pasos que deben estar bien

		fundamentados, que pueden o no llevar a concluir la demostración, formas de encarar demostraciones matemáticas: vía directa, método por reducción al absurdo y el contrarrecíproco.

Tabla 1. Tabla de descripción de indicadores del MK

Una aclaración que nos parece pertinente mencionar aquí es que el concepto de *heurísticas* al que aludimos en la tabla (en I.4., reflexionar), lo tomamos en el sentido expresado por Polya (1981), y hace referencia a las estrategias que los estudiantes ponen en juego a la hora de resolver las consignas. En particular, trabajamos con la lista de *heurísticas* que Pochulu y Rodríguez (2012) incluyen en su libro, donde el lector interesado podrá obtener más información al respecto.

Con estos elementos teóricos retomamos el planteo inicial del trabajo y, en el siguiente capítulo, damos precisiones sobre el problema de investigación, objetivos y metodología desarrollada.

CAPÍTULO 3: METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN Y DISEÑO DE INSTRUMENTOS

En este capítulo presentamos nuestra problemática a la luz de los elementos teóricos precisados en el Marco Teórico, definimos tanto el objetivo general como los objetivos particulares de la investigación realizada. Damos detalles del contexto de trabajo y para los objetivos planteados, presentamos las decisiones metodológicas adoptadas. También detallamos y fundamentamos los instrumentos que diseñamos para recabar los datos requeridos.

3.2 Precisiones sobre el Problema de Investigación

3.2.1 Contexto de trabajo

Como hemos indicado desde el comienzo, situamos nuestro trabajo en el Profesorado Universitario de Matemática de la UNGS, en particular en la materia EM1. Dicha materia se ubica en el plan de estudios, aproximadamente, a mitad de la carrera y constituye el primer contacto de los estudiantes con la didáctica de la matemática. En este apartado nos interesa específicamente explicar por qué una materia en la que los futuros profesores aprenden didáctica de la matemática es un espacio apropiado para estudiar el conocimiento matemático de estos sujetos.

EM1 introduce a los estudiantes en la problemática de la enseñanza de la matemática en el nivel medio y superior. En primer lugar, se pretende ofrecer una perspectiva amplia sobre diversos enfoques de la didáctica de la matemática. En segundo lugar, esta materia le permite al estudiante la posibilidad de tomar decisiones didácticas particulares. Para ello, éste debe ser capaz de fundamentar por qué elige lo que decide incluir en sus propuestas didácticas y por qué descarta lo que no irá a considerar, evidenciando de este modo un conocimiento más amplio del que decide utilizar. Para ello, una práctica previa útil para el futuro docente es la de analizar con distintos elementos teóricos diferentes propuestas tanto sea de secuencias didácticas, libros de texto, registros de clases, etc. En este sentido, se trabaja con un portfolio que consta de distintas tareas donde primeramente deben resolver consignas matemáticas para luego analizarlas a la luz de distintos elementos de didáctica de la matemática. Por este motivo, consideramos que en EM1 se pone en juego el MK que disponen los futuros docentes al momento de resolver consignas que luego deberán analizar.

3.2.2 Objetivos

Teniendo en cuenta el Marco Teórico explicitado en el capítulo anterior y el contexto de trabajo, consideramos los siguientes objetivos de trabajo:

3.2.2.1 *Objetivo General*

Adquirir conocimiento sobre herramientas que favorecen el aprendizaje del conocimiento del contenido matemático en espacios de formación didáctica.

3.2.2.2 *Objetivos Particulares*

Respecto del conocimiento del contenido matemático de nivel medio que se pone en juego en la materia EM1 al momento de planificar su enseñanza, nos proponemos:

a. Describir el MK que poseen los estudiantes.
b. Identificar lo que los estudiantes consideran como facilitadores y obstaculizadores de la adquisición del conocimiento de contenido matemático.

Este último objetivo se relaciona con nuestro propósito de favorecer la adquisición del MK en estudiantes del profesorado sobre contenidos de nivel secundario que desconozcan.

3.3 Aspectos Metodológicos

El trabajo de investigación es de corte cualitativo e interpretativo, ya que se pretendió arribar a una comprensión profunda sobre las actividades llevadas a cabo por los estudiantes del Profesorado en Matemática.

Asimismo, el diseño metodológico escogido lleva a situar la investigación en los siguientes campos:

- *Etnográfico*, dado que se pretendió comprender los acontecimientos tal y como los interpretan los sujetos investigados, a través de una inmersión en su pensamiento y práctica.
- *Longitudinal*, ya que la información fue obtenida en diferentes momentos de la formación profesional que se llevó a cabo con los estudiantes.
- *De campo*, porque la información se obtuvo en el lugar de trabajo de los sujetos investigados.
- *Hermenéutica*, en el sentido de que se hicieron interpretaciones sobre las interpretaciones que hacían los sujetos investigados.

Atendiendo al objetivo de describir el MK de los estudiantes del Profesorado que cursaban la materia EM1, se procedió a la recogida de datos en diferentes etapas de la cursada, a través de la resolución de distintos trabajos prácticos.

Consideramos la totalidad de las entregas de todos los estudiantes del 1º semestre del año 2017 que cumplieran:

- asistir regularmente a clases,

- entregar la totalidad de los trabajos prácticos solicitados.

Planteamos la realización de los trabajos prácticos de manera individual y domiciliaria, y se entregaron a través del aula virtual de la plataforma de la Universidad. Las condiciones planteadas nos permitieron recolectar los trabajos de veinte alumnos de EM1.

Para poder identificar qué condiciones se convierten en facilitadores y obstaculizadores de la adquisición de un buen conocimiento de contenido matemático para los alumnos, relacionado con el segundo de nuestros objetivos, diseñamos y aplicamos una entrevista a una muestra tomada al azar de tres estudiantes de EM1 que habían completado todas las actividades, y tenían disponibilidad horaria para presentarse a la entrevista una vez finalizada la cursada de la materia, en el segundo semestre de 2017.

Tanto los diseños como las fundamentaciones de los instrumentos utilizados (trabajos prácticos y entrevistas), serán expuestos en la siguiente sección.

A partir de la aplicación de estos dispositivos, recabamos los datos que permiten presentar, luego de su análisis, los resultados obtenidos. Los mismos se encuentran en los capítulos 4 y 5.

3.4 Instrumentos

Para llevar a cabo nuestro trabajo, en una primera instancia necesitamos diseñar, para luego implementar, un dispositivo que consta de tres trabajos prácticos (TP1, TP2, y TP3) que todos los alumnos de la materia EM1 debían resolver de manera individual y domiciliaria, durante el primer semestre del año 2017. Para que el análisis de las resoluciones de los trabajos prácticos nos permitiera alcanzar el objetivo de describir el conocimiento matemático de nuestros estudiantes, nos encontramos ante el problema de cómo diseñar, para nuestro marco teórico, esas actividades. Explicamos por qué esto fue un problema y cómo lo resolvimos. Desde el momento del diseño nosotros debíamos ser capaces de fundamentar por qué con ese conjunto de actividades íbamos a contar con datos suficientes para poder describir el MK de cada estudiante. Nuestro Marco Teórico era claro y contamos con los indicadores que Sosa (2011) había propuesto. Sin embargo, al ubicarnos en un único sub-dominio –a diferencia de lo que la autora propone que es trabajar con los seis- los indicadores no resultaron apropiados por ser muy particulares al tema y la clase en que se llevó a cabo. Fue en este punto que debimos ampliar el Marco Teórico y fue este el momento en el que surgió la propuesta de los indicadores que presentamos en la sección 2.3, del capítulo 2. Entendemos que este apartado muestra el rastro de la investigación y como el devenir de la misma obligó en este punto a detenernos para hacer ajustes teóricos.

Respecto al diseño de los trabajos prácticos, mencionamos que cada consigna atiende a algunos de los indicadores que pretendemos estudiar y, entre los tres, se cubre la totalidad de ellos. De este modo, el TP1 y el TP2 atienden a los indicadores I.1, I.2 y I.3, el contenido matemático involucrado en ellos refiere a expresiones algebraicas y ecuaciones cuadráticas, respectivamente. El TP3 atiende a los indicadores I.1, I.2 e I.4 y versa sobre la concavidad y análisis de positividad en funciones polinómicas. A continuación, incluimos una tabla con la distribución de los indicadores según cada trabajo práctico (TP1, TP2 y TP3):

Trabajos Prácticos	Indicadores											
	I.1.			I.2.			I.3.			I.4.		
	a)	b)	c)	a)	b)	c)	a)	b)	c)	a)	b)	c)
TP1	x	x		x	x		x	x				
TP2	x	x	x	x	x		x	x	X			
TP3		x	x		x	x				x	x	x

Tabla 2. Distribución de Indicadores y TPs.

En una segunda instancia, diseñamos una entrevista personal para alumnos de EM1 que completaron las actividades propuestas, y que llevamos a la práctica con una selección de tres estudiantes en el segundo semestre de 2017. Dichas entrevistas tuvieron la intención de lograr que cada estudiante reflexioneara acerca de su trabajo ante la resolución de los trabajos prácticos (TP1, TP2 y TP3) en cuanto al contenido matemático, a su rendimiento en la carrera, y a lo que considera que le sirve o serviría (o que advierte que le obstaculiza) para incorporar el conocimiento matemático de modo de tener un cómodo desenvolvimiento con los contenidos del nivel secundario. De esta manera, atendemos a nuestro objetivo de identificar lo que los estudiantes consideran facilitadores y obstaculizadores de la adquisición del conocimiento del contenido matemático.

A continuación, mostramos el diseño y la fundamentación de cada uno de estos instrumentos a la luz del Marco Teórico.

3.4.1 *Diseño del TP1 y su fundamentación*

La primera de las consignas con la que trabajamos refiere al tema *expresiones algebraicas*. Como mencionamos anteriormente, la modalidad de trabajo fue la misma en las tres instancias: se entregó a la totalidad de los alumnos del curso el TP1 de manera virtual, y se pidió que entregasen su resolución de la misma forma.

Cabe aclarar que este TP1 constaba, además, de otras consignas propias de contenido de didáctica de la matemática, pero que no incluimos en este trabajo por no ser ese el foco.

En esta instancia, los alumnos debieron resolver la siguiente consigna:

Se construye con fósforos una sucesión de figuras como la siguiente:

… … … …

Imagen 3

1) ***¿Puede ser que alguna de las figuras de esta sucesión tenga exactamente 6743 fósforos? ¿Por qué?***
2) ***Si nos dan distintas cantidades de fósforos para que armemos una figura de esta sucesión, tratando de que no sobre ninguno, nos encontramos que a veces no sobran y a veces sí. ¿Podrías explicar cuándo es que sobran fósforos y cuántos fósforos es posible que sobren? Cuando no sobra ningún fósforo, ¿a qué se debe?***
3) ***¿Qué concepto matemático considerás que se trabaja en esta consigna? (si hay más de uno, indicalos). Escribí una definición matemática de ese concepto. Pensá que la vas a dejar escrita en el pizarrón cuando sea trabajada en una clase.***

4) ***Explicá la definición con palabras (como si le hablaras a la clase). Todo esto a lo sumo te insumirá media carilla.***
5) ***¿Qué resultados, propiedades o conceptos matemáticos utilizaste para la resolución de la consigna? Simplemente listalos.***
6) ***Si utilizaste alguna propiedad para resolver, redactala como tal (es decir, tal como se vería en un libro de texto), y demostrala.***

La resolución de esta consigna atiende a los indicadores I.1, I.2 e I.3 según puede observarse en la siguiente tabla en donde incluimos su fundamentación. Cabe aclarar que esta tabla no solo nos permite fundamentar la propuesta, sino que también fue la herramienta con la que analizamos las resoluciones de los estudiantes. Hicimos, como se verá, una para cada uno de los trabajos prácticos (TP1, TP2 y TP3).

DESCRIPTOR			**TP1**
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones ajenas matemáticamente**	**I.1.** Definiciones de conceptos, reglas, propiedades, enunciados de teoremas, procedimientos, demostraciones de resultados,	a) Reproducir b) Explicar c) Reflexionar	a) Para el ítem 3 deberá reproducir la definición de sucesión, ecuación, divisibilidad, función lineal. En el ítem 5 mencionará alguna propiedad como por ejemplo el criterio de divisibilidad por 3, propiedades para resolver ecuaciones (ítem 5) y su redacción (ítem 6) b) ítem 4 al tener que explicar como si tuviera que hacerlo para la clase.

	ejercicios resueltos		c) no está incluido
	I.2. Lenguajes matemáticos (natural y simbólico), notación matemática, convenciones	a) Reproducir b) Explicar c) Reflexionar	a) acá observamos cómo reproducen las definiciones y propiedades mencionadas en el I.1. a): ¿qué lenguajes usa? Acá vemos si hay alguna diferencia entre el ítem 3 en el que deben definir un concepto y el ítem 4 en que deben explicarlos con sus propias palabras. b) Este aspecto podría verse con el ítem 4: si alguno le explicara a los alumnos por qué lo que explica se corresponde con la definición. c) no está incluido.

Conocimiento del contenido matemático ante **producciones propias**	**I.3.** Resolución de una consigna, actividad o ejercicio que **no** le resulte cognitivamente exigente.	a) Usar b) Explicar c) Reflexionar	a) en los ítems 1) y 2) deben seleccionar una notación, encontrar una regularidad, plantear la ecuación utilizando esa notación, y resolver la ecuación llegando a un número periódico como solución. Luego, analizar la posibilidad de que haya una figura con esa cantidad de fósforos dada. Por otro lado, deben también utilizar los criterios de divisibilidad para responder qué sucede con los fósforos que sobran. b) ítem 2) deben explicar cómo construyen la expresión que utilizan (por ejemplo, 3x+1). Deberían decir que “no es posible” que una figura insuma esa cantidad de fósforos porque el número obtenido no es natural. c) no está incluido.

Tabla 3. Fundamentación de TP1

3.4.2 *Diseño del TP2 y su fundamentación*

Una vez puesto en juego y devuelto el primer TP, se les entregó a los estudiantes la siguiente consigna sobre *ecuaciones cuadráticas*:

Si a, b y c son números enteros consecutivos, explicá si hay alguna característica que presenten las raíces de todas las ecuaciones de la forma $4ax^2 + 4bx + c = 0$**.**

1) ***Te pedimos que dejes en una “hoja borrador” los intentos que hagas para resolver (no taches, si podés escribí lo que pensás aunque te hayas dado cuenta que no te sirve, si buscás información indicá qué, etc.) y nos entregues:***

a) tu resolución experta "pasada en limpio",

b) tu "hoja borrador", y

c) una explicación de tu resolución como si se la quisieras pasar a un compañero que tiene tu "resolución pasada en limpio" pero no la entendió. (Estimá media carilla o a tu resolución en limpio agregarle flechas con explicaciones, por ejemplo)

2) ***¿Qué concepto matemático considerás que se trabaja en esta consigna? (si hay más de uno, indicalos). Elegí un concepto matemático que hayas utilizado en la resolución del ítem 1), y escribí su definición. Pensá que la vas a dejar escrita en el pizarrón cuando sea trabajada en una clase.***
3) ***Explicá esa definición con tus palabras (como si le hablaras a la clase). Todo esto a lo sumo te insumirá media carilla.***
4) ***Enunciá un resultado/propiedad matemática que hayas utilizado para resolver la consigna tal como se encontraría en un libro de texto.***
5) ***Demostrá la propiedad/resultado que hayas mencionado en el ítem anterior. Pensá cómo explicarías la demostración, para que luego nos la cuentes o lo entregues por escrito.***
6) ***¿Tenés certeza de que podés usar la propiedad que utilizaste? Si tu respuesta es afirmativa, explicá por qué. Si no lo es, explicá por qué la usaste, si considerás que es válido haberla usado, si tiene restricciones, etc.***

Análogamente al trabajo realizado con el TP1, la consigna del TP2 fue entregada a través del aula virtual. Los alumnos la resolvieron de manera individual y domiciliaria y, al cabo de una semana, debían entregar la resolución a través del aula virtual en la página de la Universidad.

Mostramos a continuación la grilla que primeramente nos permite fundamentar el diseño de la consigna y que, en segunda instancia, utilizamos para el análisis de cada uno de los trabajos entregados.

DESCRIPTOR			**TP2**
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones ajenas correctas matemáticamente**	**I.1.** Definiciones de conceptos, reglas, propiedades, enunciados de teoremas, procedimientos, demostraciones de resultados, ejercicios resueltos	a) Reproducir b) Explicar c) Reflexionar	a) Para el ítem 2 deberá reproducir la definición de números enteros, números enteros consecutivos, ecuación cuadrática o fórmula resolvente. En el ítem 4 mencionará una propiedad como por ejemplo el desarrollo del cuadrado de un binomio y operaciones con expresiones algebraicas (ítem 4) y su redacción (ítem 5) b) ítem 3 (y si pedimos en el 5), también el 5) al tener que explicar al pedirle en el punto 3 que simule hablar con la clase. c) ítem 6, reflexión sobre el análisis de por qué utilizó la propiedad seleccionada
	I.2. Lenguajes matemáticos (natural y simbólico),	a) Reproducir b) Explicar c) Reflexionar	a) acá observamos cómo reproducen las definiciones y propiedades mencionadas en el I.1. a): ¿qué lenguajes usa? Acá vemos si hay alguna diferencia entre el ítem 2 en el que deben definir un concepto y el ítem 3 en que deben explicarlos con sus propias palabras.

	notación matemática, convenciones		b) Este aspecto podría verse con el ítem 3: si alguno le explicara a los alumnos por qué lo que explica se corresponde con la definición. c) no está incluido.
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones propias**	**I.3.** Resolución de una consigna, actividad o ejercicio que **no** le resulte cognitivamente exigente.	a) Usar b) Explicar c) Reflexionar	a) ítem 1) deberían seleccionar una notación, plantear la ecuación utilizando esa notación, y analizar la cantidad de soluciones según el discriminante de la fórmula resolvente y operar para obtener las raíces (para luego explicar). b) ítem 1) explicar que, como el discriminante da siempre 16 independientemente de los valores que tomen los coeficientes en esta ecuación, la ecuación siempre tiene dos soluciones reales distintas y más: una de ellas es 0, independientemente de los a, b y c y que la otra es el inverso y opuesto de *a*. c) Este punto puede observarse en la resolución del ítem 6, donde el alumno debe reflexionar sobre el por qué decidió utilizar la propiedad elegida, reconociendo si es pertinente, si chequeó hipótesis, si observó restricciones, etc.

Tabla 4. Fundamentación del TP2

3.4.3 *Diseño del TP3 y su fundamentación*

Al igual que en los trabajos anteriores, esta actividad se entregó a todos los alumnos de EM1 una vez cerradas las devoluciones de los TP1 y TP2.

En este caso, el TP atiende a los indicadores I.1, I.2 e I.4, y a diferencia de los dos trabajos prácticos anteriores, hacemos notar que en esta oportunidad se evalúa la resolución de los alumnos de EM1 en tareas cognitivamente exigentes.

La consigna entregada a los alumnos tiene dos partes, y se muestra a continuación:

1) **Explicar con palabras y, si te resulta útil, podés ejemplificar con un gráfico, qué significa que una función f verifique la siguiente condición: $\forall\, x_1, x_2 \in (a,b), x_1 < x_2, \forall x \in (x_1, x_2)\colon\ f(x) < \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \,.\, (x - x_1) + f(x_1)$.**

Te pedimos que resuelvas la consigna, y además respondas:

a) ***Sobre la formulación del enunciado de la consigna: ¿corresponde a una definición, a una propiedad, a una demostración, o a otra cosa? Explicá tu respuesta, tratá de indicar qué del enunciado te permite responder esta segunda pregunta.***
b) ***Si pensaras en explicar lo presentado en la consigna a un alumno, ¿harías algún tipo de aclaración respecto del uso del lenguaje simbólico que ahí se plasma en relación con el lenguaje natural que usarías para explicarlo?***
c) ***Te pedimos que reflexiones sobre el uso del lenguaje simbólico y el natural que suele darse en matemática. Como guía (y sin la intención que respondas una por una, te proponemos algunas preguntas como para orientar tu reflexión): ¿tienen la misma rigurosidad?, ¿usarías alguno de manera predominante en clases que estén a tu cargo?, ¿es posible prescindir de alguno de ellos?, etc.***

2) ***Se tienen f y g dos funciones polinómicas distintas que cumplen que toman los mismos valores en x = a y x = b. Responder las siguientes preguntas y explicar las respuestas.***

i) ¿Es posible que f y g coincidan en todos los valores entre a y b?

ii) Si en un punto intermedio entre a y b la f es mayor que g, ¿hay alguna condición que deba cumplirse para que en todos los puntos entre a y b, la f siempre sea mayor que g? Si es así, explicitar la condición, enunciar la proposición que la incluya y probarla. La proposición que deben probar les tendría que quedar algo así: si f y g son dos funciones polinómicas distintas que cumplen que toman los mismos valores en x = a y x = b y que además *acá irá la condición que propongan*, entonces en todos los puntos entre a y b, la f siempre es mayor que g). Si no hay tal condición, justificar por qué.

Sobre esta consigna te pedimos que nos entregues:

a) Todos tus intentos en borrador.

b) La consigna resuelta, es decir, el enunciado completo y la demostración pasada en limpio.

c) Una explicación aparte sobre cómo se la darías a un compañero que no entendió tu escrito (piensen en grabar un audio y enviarlo por mail, o transcribirlo en papel),

d) Una reflexión sobre el proceso que realizaste para lograr la demostración pedida (para ello, tomá tu borrador, tratá de identificar si usaste heurísticas, pensá si estás seguro de que la demostración es matemáticamente correcta y qué te da la pauta de ello, qué forma de encararla te resultó útil y cuál no, etc.). Este punto no te va a insumir más de media carilla.

A continuación, se puede observar la tabla en la que se incluye la fundamentación del tercer TP:

DESCRIPTOR			TP3
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones ajenas matemáticamente**	**I.1.** Definiciones de conceptos, reglas, propiedades, enunciados de teoremas, procedimientos, demostraciones de resultados, ejercicios resueltos	a) Reproducir b) Explicar c) Reflexionar	a) En este caso, no se incluye este aspecto porque la definición viene dada en la consigna. b) en los ítems 1a) y 2c) se pide explicar no solo con respecto a la resolución personal, sino pensando en un destinatario (compañero de clase) c) en el ítem 1a) se pide implícitamente una reflexión sobre qué lo llevó a dar su respuesta. Por otro lado, la segunda parte de la consigna invita a reflexionar sobre la demostración realizada.
	I.2. Lenguajes matemáticos (natural y simbólico), notación matemática, convenciones	a) Reproducir b) Explicar c) Reflexionar	a) no se incluye. b) este aspecto puede verse en los ítems 1b) y 2c): si alguno le explicara a los alumnos por qué lo que explica se corresponde con la definición. c) en el ítem 1c) se pide reflexionar sobre el lenguaje utilizado.

Conocimiento del contenido matemático ante **producciones propias**	**I.4.** Resolución de una consigna, actividad o ejercicio que le resulte cognitivamente exigente.	a) Usar b) Explicar c) Reflexionar	a) en la resolución del ítem 2a) y 2b) deben utilizar contenidos matemáticos para la resolución. b) en el ítem 2b) deben explicar su resolución a un compañero. La idea es que puedan transmitir la idea de lo trabajado y no una traducción literal del escrito. c) este punto puede observarse en la resolución del ítem 2c), donde el alumno debe reflexionar sobre el por qué decidió utilizar la propiedad elegida, qué heurísticas utilizó, si lo realizado corresponde a una demostración, si reconoce la pertinencia del desarrollo, si chequeó hipótesis, si observó restricciones, etc. Más allá de la reflexión sobre el contenido matemático, se pretende una reflexión sobre el proceder en matemática.

Tabla 5. Fundamentación de TP3

3.4.4 *Diseño de la entrevista y su fundamentación*

Como mencionamos anteriormente en este apartado, hemos diseñado y llevado a la práctica unas entrevistas individuales con la intención de lograr nuestro objetivo de identificar lo que los estudiantes consideran como facilitadores y obstaculizadores de la adquisición del conocimiento de contenido matemático. La entrevista se llevó a cabo con una muestra de tres estudiantes seleccionados al azar, teniendo en cuenta la buena predisposición y que tuvieran disponibilidad horaria para asistir en el siguiente semestre de cursada, momento en el que ya no teníamos más vínculo con ellos.

Teniendo en cuenta nuestro objetivo, la confección de la entrevista consta de tres partes y consideramos los siguientes aspectos en su elaboración:

- Ver si los alumnos son conscientes del desempeño que tienen en lo matemático.
- Ver cómo se manejaron a la hora de resolver los TP.
- Ver cómo fue su desenvolvimiento hasta ahora en la carrera, ver qué los llevó a tener estos resultados.
- Ver cómo consideran que deberían seguir trabajando/estudiando en su carrera.
- Ver qué cuestiones consideran que deberíamos, como docentes, tener en cuenta para tratar de favorecer el aprendizaje de contenidos matemáticos.

El diseño de la entrevista es el siguiente:

Presentación de la entrevista

Como te comenté en el mail que te envié, estoy realizando mi tesis de Maestría sobre el conocimiento matemático en los estudiantes del profesorado de matemática. Por este motivo, les pedimos que realicen los tres TP sobre "lo matemático" en la cursada del semestre pasado de EM1.

Tu participación resulta muy valiosa, pues nos permitirá volver a pensar nuestro trabajo en el aula, elaborando propuestas que tengan en cuenta lo que Uds. saben, las dificultades por las que atraviesan a lo largo de su formación, y poder entender qué es lo que nosotros hacemos que a ustedes les resulta útil o no. Por este motivo es que esta entrevista completa el trabajo que estoy realizando.

La idea es conversar sobre algunas cuestiones generales en principio, y luego sobre la resolución de los TP que entregaste el semestre pasado. Nada en particular sobre cómo se resuelve, sino que cómo encaraste y cómo te manejaste con la resolución de cada uno

de los TP. Toda la información que recabemos, nos servirá para poder pensar nuevas estrategias de trabajo tanto en materias de didáctica como en materias específicas de la carrera. Desde ya, reiteramos el agradecimiento por haber aceptado realizar la entrevista. Si nos permitís, grabaremos la charla para poder tener luego un registro fiel de lo que conversamos.

Tabla 6. Parte general de la entrevista

Primera Parte

La primera parte de la entrevista es de carácter general, y está orientada a la reflexión sobre su rol como estudiante del Profesorado de Matemática.

1) ¿Cómo considerás que es tu aprendizaje de contenido matemático en la carrera?
2) ¿Te resulta difícil trabajar/avanzar en las materias específicas de matemática? **Si responde que sí:** ¿tenés alguna idea de por qué sería? Si la respuesta es "*porque además de estudiar, trabajo*", ampliar: - *más allá de las dificultades que mencionás, que son "externas a lo matemático", nos gustaría que trates de focalizarte en el aprendizaje de "lo matemático" como para que podamos entender si "en eso" advertís dificultades*.

Tabla 7. Primera parte de la entrevista

La primera de las preguntas apunta a ver cómo se ven ellos mismos como alumnos del profesorado de matemática, para luego indagar sobre si reconocen dificultades matemáticas al cursar las distintas materias de la carrera (pregunta 2).

Segunda Parte

Esta segunda instancia se focaliza en el trabajo individual que realizaron en la resolución de los tres TP.

<table>
<tr><td rowspan="6">Referido al trabajo en general</td><td>3) ¿Cómo te sentiste resolviendo los TP?, ¿qué impresión te causaron?</td></tr>
<tr><td>4) ¿Cómo viste las consignas que les dimos? (difíciles, fáciles, raras, etc.)</td></tr>
<tr><td>5) ¿Recordás que en varios ítems de los TP, les dejábamos elegir “algo matemático”? (sobre lo que preguntamos o les pedíamos que escriban algo) ¿Podés identificar a qué apuntaban esos trabajos? La pregunta va “más allá del contenido específico”.</td></tr>
<tr><td>6) ¿Cómo encaraste la resolución de los TP?, ¿cómo te organizaste para resolver cada uno de ellos?

En caso de que no sepan qué responder:

¿Resolvieron pensando en lo aprendido en la carrera?, ¿hicieron búsquedas bibliográficas?, ¿dónde?, ¿utilizaron recursos tecnológicos?, ¿lo hicieron solos, con algún compañero?, ¿recurrieron a alguna persona que supiera más que pudiera ayudarlos?)

7) Esto que nos contaste, ¿lo hacés siempre que tenés que resolver algo? O hubo <u>algo</u> “de lo que te pedimos hacer” que hizo que necesitaras… (y acá le repetimos lo que haya dicho).</td></tr>
<tr><td>8) ¿Considerás que tuviste dificultades a la hora de encarar la resolución de los TP? Si es así, ¿cuáles?

Si dice que sí, pasamos a la que viene.

Si dice que no, es que no se dio cuenta. Entonces preguntar:</td></tr>
</table>

	¿Pudiste encarar las consignas de los tres TP con los conocimientos matemáticos que adquiriste en la carrera? Si no es así, ¿recurriste a alguna herramienta extra para poder resolverlos?
	9) ¿A qué creés que se deben esas dificultades?
	10) ¿Considerás importante para tu formación poder desenvolverte cómodamente en este tipo de tareas?
	11) ¿Qué pensás que necesitás (o hubieras necesitado) para desenvolverte exitosamente en este tipo de tareas?

Tabla 8. Segunda parte de la entrevista

El objetivo de la tercera pregunta es ver la primera impresión personal al encarar el trabajo matemático pedido, para luego consultar sobre la primera impresión sobre las consignas de trabajo y ver si las consignas les resultaron difíciles.

Considerando el contenido matemático general, en la quinta pregunta pretendemos ver si reconocen alguno de los Indicadores trabajados. Por ejemplo, era esperable que respondieran "*apuntaban a que conociéramos definiciones o a que pudiéramos explicar un concepto*".

A continuación, el bloque de preguntas 6) y 7) apuntan a ver cómo se manejaron al encarar las actividades; ver si son conscientes de que, ante las dificultades, la posibilidad de recurrir a otro material (textos, internet, consultas con compañeros ó profesores, etc.) ayuda en la resolución del problema.

Por último, las preguntas apuntan a ver si el alumno identifica dificultades matemáticas a la hora de encarar las actividades.

Tercera Parte

Para finalizar, incluimos una tercera parte a modo de conclusión, donde se le pide al alumno que reflexione sobre el trabajo que realiza como estudiante del profesorado de matemática.

Presentación: Te hacemos las dos últimas preguntas: una en la que queremos que "vos te mires" y otra en la que queremos que pienses algo que pueda ser un aporte para "los profesores de matemática que enseñan en la formación inicial en las materias anteriores, las que vos ya cursaste".

12) ¿Te llevás algo del trabajo realizado en estos TPs para otras ocasiones en las que tengas que encarar resolver consignas de ese estilo? (podría darse, por ejemplo, en materias de matemática)
13) Si pudieras conversar con un profe de matemática que tuviste en alguna materia pasada, y teniendo en cuenta el trabajo que realizaste en los TP y la reflexión sobre él, ¿qué le dirías para cuando tenga que preparar su materia?

Tabla 9. Tercera parte de la entrevista

En esta última parte de la entrevista queremos ver qué sugerencias surgen a partir de las actividades realizadas: tomarlo como aporte para la planificación de las materias específicas de matemática en la carrera. Por otro lado, pretendemos indagar sobre qué considera valioso para la enseñanza-aprendizaje de materias de matemática.

Con el permiso de los estudiantes, hemos tomado nota de los puntos relevantes de cada charla y, a la vez, grabado las entrevistas. El material (audio de cada entrevista) se encuentra disponible en el anexo VII, incluido en el CD que adjuntamos con el trabajo.

En el próximo capítulo damos detalles de la implementación de estos instrumentos, el análisis de los datos y los resultados alcanzados.

CAPÍTULO 4: ANÁLISIS DE DATOS Y RESULTADOS

4.1 Introducción

En este capítulo presentamos, en primer lugar, detalles de la implementación de las distintas instancias que constituyen el trabajo de campo. En segundo lugar, analizamos los datos recabados y presentamos resultados obtenidos.

4.2 Trabajo de Campo

Como hemos señalado en el capítulo anterior, y como paso para atender al objetivo de describir el MK en estudiantes del Profesorado de Matemática en el contexto de materias de didáctica de la matemática, primeramente recabamos datos mediante la aplicación de los trabajos prácticos cuyo diseño fue fundamentado en la sección 3.4 del capítulo 3, para luego entrevistar a un grupo de alumnos.

Este trabajo de campo, constó de dos etapas. En la primera, durante la cursada de la materia EM1 en el primer semestre de 2017, los alumnos completaron y entregaron los trabajos prácticos a través de la plataforma virtual de la Universidad. La segunda etapa fue la de las entrevistas. Ésta se realizó en un momento posterior, cuando ya había terminado la materia, y fue llevada a cabo tras concluir el análisis de las producciones entregadas, en términos de nuestros indicadores de MK.

Analizamos la totalidad de producciones de los alumnos que cursaron EM1 asistiendo de manera regular a la materia y que completaron las entregas. La cantidad de estudiantes en esas condiciones fue de veinte. Nos resultó importante incluir, y lo hacemos en el próximo apartado, una descripción detallada del procedimiento que seguimos para realizar el análisis de dichas producciones pues éste incluye un uso diferente de las tablas que presentamos en la fundamentación del diseño de los trabajos prácticos (TP1, TP2 y TP3). Por tal razón, describimos dicho procedimiento e incluimos un ejemplo desarrollándolo en detalle. Como se verá, el análisis se sustenta en la confección de una tabla para cada indicador.

Presentamos entonces el análisis de un caso particular, incluyendo las tablas de los tres trabajos prácticos realizados por el alumno elegido. Las tablas completas de todos los trabajos prácticos de los veinte estudiantes se encuentran en los anexos IV, V y VI, incluido en el CD adjunto (por el tamaño de cada uno de esos archivos). A partir del completado de las tablas con las resoluciones de los estudiantes y nuestras apreciaciones, proponemos una descripción del MK de estos estudiantes avanzados del Profesorado de Matemática.

4.3 Análisis de los trabajos prácticos

4.3.1 Procedimiento para analizar los trabajos prácticos: descripción y ejemplo

Previo a realizar el análisis de los datos, utilizamos como organizador la misma tabla que fue utilizada para fundamentar el diseño de los trabajos prácticos. En ella volcamos, para cada estudiante y para cada consigna, las respuestas, partes de sus resoluciones de cada consigna y nuestras primeras observaciones. Recién con ese insumo, llevamos adelante el análisis. Vamos a incluir a continuación un ejemplo minuciosamente detallado de este procedimiento. Luego, remitimos al lector a los anexos IV, V y VI para ver las tablas y aquí seguiremos con el análisis.

A modo organizativo, y para preservar la identidad de los alumnos, hemos llamado a cada uno de ellos con la letra A, seguida de un número. Es decir, los estudiantes que participaron en estas actividades se mencionan como A1, A2, …, A20.

4.3.1.1 Tabla y análisis de las entregas del Estudiante A13

La forma de trabajo para completar las tablas de análisis consistió en el llenado de dos columnas: en la tercera, indicando en texto resaltado en gris lo que interpretamos/leímos, en texto normal las evidencias que se leen en el trabajo entregado, y en la última columna se pueden apreciar comentarios que realizamos de cara al análisis que completaríamos luego.

A continuación, incluimos cada una de las tablas correspondientes a un estudiante (A13). Al final, con este insumo, mostramos el análisis que realizamos de los datos.

DESCRIPTOR		EXPLICACIÓN	EVIDENCIAS: TP1	EN SÍNTESIS…
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones ajenas correctas matemáticamente**	**I.1.** Definiciones de conceptos, reglas, propiedades, enunciados de teoremas, procedimientos, demostraciones de resultados, ejercicios resueltos	- a) Reproducir (definición/propiedad/ teorema/demostración/ etc.)	**Concepto Matemático:** El concepto matemático que considero que se trabaja en esta consigna es ecuaciones. Definición que voy a dejar escrita en el pizarrón cuando se trabaje este concepto matemático en una clase: Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones que contiene una o más variables, es decir que la misma constituye una igualdad donde aparece como mínimo una incógnita que exige ser develada por quien resuelve el ejercicio. La definición es imprecisa. Utiliza lenguaje natural. Resultados utilizados: Para la resolución de la consigna, utilicé el método de resolución de ecuaciones (despeje de "x"). Demostración pedida: no hay evidencia. Supongo que la aclaración de "despeje de x" hace referencia a la demostración de lo que considera "método de resolución de ecuaciones".	**No saben o no consideran qué es una "definición matemática".** **Al mencionarles que debe dejarla escrita en el pizarrón al terminar la clase es como que todo pierde rigurosidad.** **¿Será que entienden que lo que se trabaja en el aula no es matemáticamente riguroso entonces todo tiene que ser "charlado"?**

				No pueden ir a un libro de texto para copiar definiciones.
		- b) Explicar, mostrando comprensión (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	Explicación de la definición: Una ecuación es una igualdad en la cual se debe hallar un cierto valor que está predeterminado con una letra, generalmente a esa letra de la denota "x". Dicha letra "x" va a representar, en el caso de esta consigna, la cantidad de cuadrados que se pueden formar con los fósforos. Por lo tanto, se deberá hallar el valor de la misma y deberá dar un número natural. Para explicar la definición utiliza lenguaje natural, repite prácticamente lo que escribió como definición. Utiliza la consigna dada para ejemplificar, intenta mostrar comprensión de lo que definió. Solo considera ecuación con solución.	**Considera solo ecuación con solución.** **Definición imprecisa.** **Usar la misma consigna para ejemplificar lo definido implica una intención de "explicar mostrando comprensión"**
		- c) reflexionar		

	I.2. Lenguajes matemáticos (natural y simbólico), notación matemática, convenciones	- a) reproducir “algo” usando lenguajes matemáticos	Explica todo el procedimiento utilizando lenguaje natural (a lo sumo usa una secuencia con números para indicar cómo pensó la resolución). Usa lenguaje simbólico para definir una expresión que luego utilizará al plantear una ecuación.	**El trabajo en general está escrito en lenguaje natural. El lenguaje simbólico se utiliza a la hora de plantear una expresión para usar luego en la ecuación.**
		- b) explicar el uso del lenguaje	Debería poder explicar por qué utilizó lenguaje coloquial a lo largo de todo el trabajo, pero no lo hace.	
		- c) reflexionar	No corresponde.	
Ante **producciones propias**	**I.3.** Resolución de una consigna,	- Usar lenguaje matemático, operar,	La ecuación planteada a partir de la consigna sería la siguiente: **4+3(x-1)** (con x mayor o igual que 1), donde x representa la cantidad de cuadrados que se van formando a medida que agrego 3	**Plantean una expresión (correcta o no) sin indicar**

	actividad o ejercicio que **no** le resulte cognitivamente exigente.	usar propiedades, procedimientos, etc.	fósforos. No aclara x natural, ni cómo pensó la construcción de la expresión, no aclara qué significa la expresión (solo la x). Para realizar la consigna, puedo comenzar resolviendo dicha ecuación y si el valor de "x" da un número natural entonces podré concluir que alguna de las figuras que se forme tendrá 6743 fósforos. No se desprende de lo anterior. Resuelvo la ecuación: 4+3(x-1)=6743 no queda claro qué significa el planteo porque no especificó qué representa la expresión. 4+3(x-1)-4=6743-4 [3(x-1)]:3=6739:3 x-1+1=(6739:3)+1 x=2247,33… Selecciona notación pero no la explica. Plantea una ecuación y llega a que la solución es un número periódico.	**qué representa ni cómo fue pensada.**

		- Explicar su resolución (lenguaje utilizado, las operaciones, propiedades utilizados, la respuesta).	Como “x” (“x: cantidad de cuadrados”) no es un número natural, puedo concluir que ninguna figura tendrá 6743 fósforos. No explica por qué utiliza la expresión presentada, qué significa. Si explica el porqué de la respuesta a la consigna, y es correcto. Sobran fósforos cuando el “x” obtenido no es un número perteneciente al conjunto de números naturales. La cantidad de fósforos que puede sobrar puede ser 1 o 2, ya que con 3 fósforos se podría armar un nuevo cuadrado. En el caso en que no sobre ningún fósforo, se puede decir que se formaron determinada cantidad de cuadrados, es decir que “x”, en este caso, pertenece al conjunto de los números naturales. Explica ok: no hace referencia a divisibilidad.	**Podrían hacer una justificación sin usar el concepto de divisibilidad, solo hablando sobre la cantidad de fósforos que sobran (como un alumno del colegio).**
		- reflexionar		
	I.4.	- Usar	En este TP no corresponde el I.4.	
		- Explicar		

	Resolución de tareas intelectualmente exigentes (demostrar una proposición no vista, resolver un “problema”, modelizar).	- reflexionar		

Tabla 10. Análisis TP1 de A13

Descriptor		Explicación	Evidencias: TP2	En síntesis…
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones ajenas correctas matemáticamente**	**I1** Definiciones de conceptos, reglas, propiedades, enunciados de teoremas, procedimientos, demostraciones de resultados,	- a) Reproducir (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	Conceptos Matemáticos trabajados: Uno de los conceptos matemáticos que se trabaja en esta consigna es **ecuaciones cuadráticas o ecuaciones de segundo grado**. Otros conceptos matemáticos que también se utilizan en la resolución de la consigna son el **cuadrado de un binomio** y la **propiedad distributiva.** Enunciado de definición: Una ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática de una variable es una ecuación que tiene la forma de una suma algebraica de términos cuyo grado máximo es dos, es decir que una ecuación cuadrática puede ser representada por un polinomio de segundo grado o también conocido como polinomio cuadrático. La expresión general de una ecuación cuadrática de una variable es la que se presenta a continuación: $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$ y x es la variable. Además, a es el coeficiente cuadrático (distinto de 0), b el coeficiente lineal y c es el término independiente. Esta ecuación se puede interpretar mediante la gráfica de una función cuadrática, es decir, por una parábola. Esta representación gráfica es útil porque las intersecciones o el punto tangencial	**¿Qué es una definición?** **Se evidencia, en el formato de algunas palabras, que el texto fue extraído de internet.**

	ejercicios resueltos		de esta gráfica (en el caso de existir) con el eje X coinciden con las soluciones de la ecuación. A dichas intersecciones de la gráfica con el eje X se las denomina raíces. Los links que quedaron al copiar evidencian que fue extraído de internet. Enunciado de Propiedad/resultado utilizado: Para resolver la consigna, utilicé la **fórmula resolvente** para obtener las raíces de todas las ecuaciones de la forma: $4ax^2 + 4bx + c = 0$. No redacta la propiedad, la comenta. Falta precisión. Demostración de la propiedad: Demostración de la fórmula resolvente: $\mathbf{f(r) = 0,\ r \in R \leftrightarrow}$ $\mathbf{ar^2 + br + c = 0\ (a\neq 0) \leftrightarrow}$ **¿queda claro dónde usan que a≠0?** $\mathbf{r^2 + \frac{b}{a}r + \frac{c}{a} = 0 \leftrightarrow}$ $\mathbf{r^2 + 2r\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0 \leftrightarrow}$ **¿qué hace? ¿sabe por qué lo hace?** $\mathbf{(r + \frac{b}{2a})^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0 \leftrightarrow}$ $\mathbf{(r + \frac{b}{2a})^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \leftrightarrow}$ $\mathbf{(r + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \leftrightarrow}$ $\mathbf{(r + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2-4ac}{2a} \leftrightarrow}$ $\mathbf{b^2 - 4ac \geq 0}$ Tomando raíz cuadrada: $\mathbf{\lvert r + \frac{b}{2a}\rvert = \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2\lvert a\rvert}}$	

			$\mathbf{r} + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2\lvert a\rvert} = \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $\mathbf{r} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	
		- b) Explicar, mostrando comprensión (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	Explicación de la definición: Una **ecuación cuadrática o ecuación de segundo grado** es aquella que posee (no siempre) un término cuadrático, un término lineal y un término independiente. Con esto me refiero a que en uno de sus términos, la variable (generalmente se usa la letra "x") aparecerá elevada al cuadrado (es decir que tiene grado 2) y acompañada de un coeficiente al cual se lo denomina coeficiente principal. Luego, en otro de sus términos aparecerá la variable, en este caso con grado 1, acompañada por un coeficiente. Y por último, en el término restante, aparecerá únicamente un número (si es que dicho número no es 0) sin la variable en cuestión, y a este término se lo llama término independiente. En el caso en el que alguno de los coeficientes sea el número 1, por ejemplo, en el término cuadrático y en el término lineal, estará presente únicamente la variable ya que dicho coeficiente se encuentra multiplicando a la variable, es decir que hacer 1 por la variable dará como resultado a la variable. Por lo tanto, "no tiene sentido" escribirlo en el caso de los términos mencionados. En cambio, en el término independiente, sí es necesario que ese 1 aparezca ya que no hay variable a la cual dicho número multiplicaría.	**Al definir la ecuación cuadrática menciona que $a \neq 0$, pero no lo considera al explicar la definición. Solo lo toma cuando hace una aclaración al final: no lo toma como restricción del tema.** **Explicación como traducción de lenguaje simbólico al natural: no explicando el por qué lo puede hacer o qué hace, sino traduciendo símbolos.**

			Por otro lado, si alguno de los coeficientes es 0 entonces tanto el término cuadrático como el lineal o el independiente (según donde aparezca dicho coeficiente) se anularían No considera la definición. Es por eso que al principio de la explicación aclaré que no siempre están presentes los tres términos ya que puede suceder que haya uno o dos términos únicamente o, también, que estén involucrados los tres términos en una ecuación. Además, cabe mencionar que, en el caso en el que no esté presente el término cuadrático, entonces se estaría hablando de una ecuación lineal o de grado uno. Para poder trabajar sobre ecuaciones cuadráticas, tiene que estar presente sí o sí el término en el cual la variable se encuentra elevada al cuadrado. Explicación de la propiedad: Comienzo dividiendo a $\mathbf{ar^2 + br + c = 0}$ por a, es decir que divido a cada uno de los términos por a ¿y por qué lo puede hacer? A esto me refería en la pregunta que dejé en la resolución. Una vez hechas las divisiones, completo cuadrados. Luego, al trinomio cuadrado perfecto que se ve a continuación $\mathbf{r^2 + 2r\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2}$ lo “convierto” en un cuadrado de binomio. Por lo tanto, se obtendría lo siguiente $\mathbf{(r + \frac{b}{2a})^2}$. Luego, “paso” del otro lado del igual a $-\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}$ y en el caso	

			del primer término, distribuyo la potencia cuadrada tanto al numerador como al denominador, obteniéndose lo siguiente: $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$. Resuelvo la resta y todo quedaría expresado de la siguiente forma: $(\mathbf{r} + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2-4ac}{2a}$ (si y solo si b^2-4ac es mayor o igual a 0). Luego, a la potencia cuadrada de $\mathbf{r} + \frac{b}{2a}$ la “paso” como raíz cuadrada del otro lado del igual y le aplico módulo a lo que quedó, ya que dicha suma puede tomar un valor positivo o uno negativo. Es por eso mismo que luego se reemplaza al módulo por un $\pm$. Por último, se pasa restando al $\frac{b}{2a}$. Como ambos términos tienen el mismo denominador, puedo juntarlos obteniendo una única fracción como se muestra a continuación: $\mathbf{r} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ La explicación de la demostración consiste en decir de manera coloquial qué quiso hacer en cada paso.	
		- c) reflexionar	No corresponde.	

	I2 Lenguajes matemáticos (natural y simbólico), notación matemática, convenciones	- a) reproducir "algo" usando lenguajes matemáticos	Las definiciones se realizan en lenguaje natural, NO utilizan lenguaje simbólico. En la demostración de la propiedad y resolución de la consigna, sí se utiliza lenguaje simbólico.	
		- b) explicar el uso del lenguaje	Se lee un intento por explicar en lenguaje natural lo que la expresión de la cuadrática incluye. El resto es volver a decir con palabras lo que se realiza con símbolos (a modo de traducción, no de explicación).	
		- c) reflexionar	No corresponde	
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones propias**	**I3** Resolución de una consigna, actividad o ejercicio que **no** le resulte	- Usar lenguaje matemático, operar, usar propiedades, procedimientos, etc.	Selecciona una notación: **a = a** **b = a+1** (como b es el número consecutivo de a, le sumo 1 a a) **c = b+1 = a+1+1 = a+2** (como c es el número consecutivo de b, le sumo 1 a b, es decir que le sumo 2 a a). Pero no considera restricción para el valor de a. Usa propiedades de manera correcta. Opera correctamente.	

	cognitivamente exigente.		Considera el discriminante por un tema de cuenta, no para mencionar una característica de las raíces.	
		- Explicar su resolución (lenguaje utilizado, las operaciones, propiedades utilizados, la respuesta).	Resolución y explicación (explícitamente aclarado) Resolución experta y explicación de la resolución como si se la quisiese pasar a un compañero que tiene mi "resolución pasada en limpio" pero no la entendió: Para comenzar, sé que a, b y c son números enteros consecutivos, por lo tanto los puedo escribir de la siguiente manera: **a = a** **b = a+1** (como b es el número consecutivo de a, le sumo 1 a a) **c = b+1 = a+1+1 = a+2** (como c es el número consecutivo de b, le sumo 1 a b, es decir que le sumo 2 a a).	**No considerar casos especiales (restricción de a), pero tenerlos en cuenta a la hora de cerrar la resolución.**

			No considera en otro orden a los consecutivos. No toma en cuenta restricción para el coef. Ppal. aunque después lo toma al final. Una vez que tengo a los tres números en función de a, voy a reescribir a la ecuación $4ax^2 + 4bx + c = 0$ de la siguiente forma: $\boldsymbol{4ax^2 + 4(a+1)x + (a+2) = 0}$ Luego, voy a buscar las raíces de todas las ecuaciones que tienen la forma anteriormente escrita tal como lo pide la consigna. Para ello, utilizaré la fórmula resolvente que se presenta a continuación (tomando a ≠ 0): $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ Reemplazaré a a, a b y a c por los valores anteriormente obtenidos (a = a, b = a+1 y c = a+2) y realizaré las operaciones correspondientes hasta lograr obtener las dos raíces de todas las ecuaciones de la forma $4ax^2 + 4(a+1)x + (a+2) = 0$, que pueden ser iguales o distintas (serán iguales en el caso en el que la raíz que aparece en la fórmula resolvente de 0 como resultado y al sumar o restar 0 se obtendría un único valor, al cual se lo llamaría raíz doble): $x_1, x_2 = \frac{-[4(a+1)] \pm \sqrt{[4(a+1)]^2 - 4.4a.(a+2)}}{2.4a}$	

Dentro de la raíz, elevo al cuadrado tanto al 4 como al (a+1) y, en el segundo término, multiplico a 4 por 4a. También, en el denominador, multiplico a 2 por 4a y se obtiene lo que se presenta a continuación:

$$x_1, x_2 = \frac{-[4(a+1)] \pm \sqrt{16(a+1)^2 - 16a(a+2)}}{8a}$$

Continúo operando dentro de la raíz, resolviendo un cuadrado de binomio en el caso de $(a+1)^2$ y aplicando la propiedad distributiva cuando aparece a(a+2):

$$x_1, x_2 = \frac{-[4(a+1)] \pm \sqrt{16(a^2+2a+1) - 16(a^2+2a)}}{8a}$$

Como 16 se encuentra multiplicando a los dos términos que aparecen dentro de la raíz, lo puedo "sacar" como factor común de la siguiente forma:

$$x_1, x_2 = \frac{-[4(a+1)] \pm \sqrt{16(a^2+2a+1-a^2-2a)}}{8a}$$

Por propiedad de la radicación, como 16 y lo que se encuentra dentro del paréntesis se están multiplicando, puedo "separar" la raíz, lo cual quedaría así:

$$x_1, x_2 = \frac{-[4(a+1)] \pm \sqrt{16}\sqrt{a^2+2a+1-a^2-2a}}{8a}$$

			Calculo la raíz cuadrada de 16 No lo considera para dar condiciones. Además, se puede observar que el a^2 (que es positivo en el caso del primer término dentro de la raíz) se cancela con el a^2 que aparece restando. Lo mismo sucede con el 2a, ya que uno de los términos es positivo y el otro es negativo. Es decir, que dentro de la raíz solo queda el 1, y su raíz es 1. Por ende, se multiplica al 4 que se obtuvo al realizar la raíz cuadrada de 16 con el 1 antes mencionado. Por lo tanto, se obtendría lo siguiente: $$x_1, x_2 = \frac{-[4(a+1)] \pm 4}{8a}$$ Luego, como el 4 se encuentra en los dos términos que aparecen en el numerador, lo “saco” como factor común, de modo tal de poder simplificarlo con el 8 que se encuentra en el denominador: $$x_1, x_2 = \frac{4[-(a+1) \pm 1]}{8a}$$ $$x_1, x_2 = \frac{-(a+1) \pm 1}{2a}$$ Sobre lo obtenido, aplico la propiedad distributiva entre el (-1) (que está representado por un menos delante del paréntesis) y el (a+1). Se puede observar lo que se presenta a continuación: $$x_1, x_2 = \frac{-a - 1 \pm 1}{2a}$$	

			Una vez que se han realizado todas las operaciones, puedo separar el $\pm$ en dos resultados distintos, donde una de las raíces es: $$\boldsymbol{x_1} = \frac{-a-1+1}{2a} = \frac{-a}{2a} = \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{2}}$$ y la otra es: $$\boldsymbol{x_2} = \frac{-a-1-1}{2a} = \frac{-a-2}{2a} = \frac{-(\boldsymbol{a}+\mathbf{2})}{\mathbf{2}\boldsymbol{a}}$$ Finalmente, puedo concluir diciendo que las raíces de todas las ecuaciones de la forma *$4ax^2$ + 4bx + c = 0* presentan las siguientes características: ❖ $X_1 = \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{2}}$ ❖ $X_2 = \frac{-(\boldsymbol{a}+\mathbf{2})}{\mathbf{2}\boldsymbol{a}}$ En el caso en que a = 0, entonces b = 1 y c = 2 por ser números enteros consecutivos. Por lo tanto, la ecuación quedaría presentada de la siguiente manera: *4x + 2 = 0.* Es decir que habría una única raíz y la misma la voy a averiguar de la siguiente forma: $$4x + 2 = 0$$	

			$4x = -2$ $x = \frac{-2}{4}$ $x = \frac{-1}{2}$ Es la única que lo considera. que justamente coincide con una de las raíces en el caso en que $a \neq 0$. Bien resuelto. Necesitó llegar a la expresión de cada una de las soluciones para poder responder.	
		- reflexionar sobre: lo que significa "usar una propiedad" (que se deben chequear hipótesis), reconocer qué propiedades/métodos/reglas/teoremas son factibles de ser usados ante cada consigna que se aborde y según la	No tengo certeza de que puedo usar la propiedad demostrada anteriormente. La utilicé porque gracias a ella se pueden hallar las raíces de las ecuaciones cuadráticas. Una de sus restricciones es que el valor que tome a debe ser distinto a 0 ya que en el denominador de la misma aparece 2a y si a fuese 0, no sería posible poder dividir por 0. Además, si a fuese 0, esta fórmula no la aplicaría para hallar raíces ya que la ecuación con la que estaría trabajando tendría grado 1 y el valor de la incógnita se podría hallar simplemente haciendo los despejes correspondientes. El no tener certeza se relaciona con la falta de tener en cuenta la condición para aplicar la fórmula resolvente: $a \neq 0$. De haber considerado eso, podría tener la certeza!	**Nadie consideró el caso en que a sea cero. Solo esta chica (incluido en la resolución)** **Por definición de ecuación cuadrática, no puede pasar. ¡Pero en este caso nosotras en el enunciado no lo pusimos! Podría darse el**

		instancia de resolución que se esté atravesando; la utilidad de los métodos empleados y la pertinencia –o no- de aplicarlos en diferentes contextos, la interpretación de lo hallado para dar la respuesta, la necesidad de responder a lo pedido.		**caso a=0 y deben analizarlo separado.** **Digo: los que consideraron que a no era cero, no aclararon que pasaba en ese caso aparte.**
	I.4. Resolución de tareas intelectualmen	- Usar	En este caso no corresponde el I.4.	
		- Explicar		
		- reflexionar		

	te exigentes (demostrar una proposición no vista, resolver un "problema", modelizar).			

Tabla 11. Análisis TP2 de A13

<table>
<tr><th colspan="2">DESCRIPTOR</th><th>EXPLICACIÓN</th><th>EVIDENCIAS: TP3</th><th>EN SÍNTESIS…</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Conocimiento del contenido matemático ante producciones ajenas correctas matemáticamente</td><td rowspan="3">I1
Definiciones de conceptos, reglas, propiedades, enunciados de teoremas, procedimientos, demostraciones de resultados, ejercicios resueltos</td><td>- a) Reproducir</td><td>Esto no se va a dar porque no tienen que “reproducir” nada.</td><td></td></tr>
<tr><td>- b) Explicar, mostrando comprensión (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)</td><td>Que una función f verifique la condición anterior significa que se encuentra debajo de la recta secante a la gráfica que une los puntos (x_1, f(x_1)) y (x_2, f(x_2)) pertenecientes al intervalo (a, b), es decir que estaríamos hablando de una función cóncava hacia arriba o también conocida como función convexa. ok

La formulación del enunciado de la consigna corresponde a la definición de función convexa.

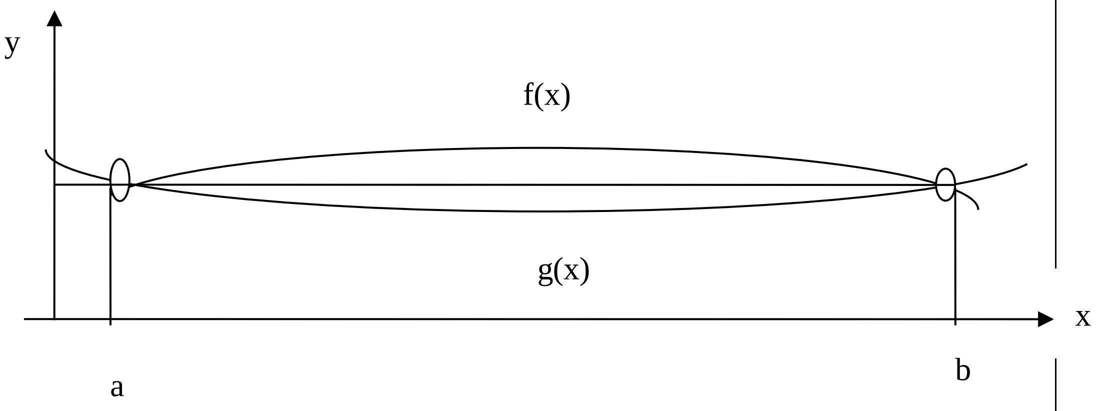
Correcto: comprende lo que se encuentra escrito, lo explica en lenguaje natural. Entiende que se trata de una definición.</td><td></td></tr>
<tr><td>- c) reflexionar sobre las definiciones/propiedades/teorema etc. (qué características debe</td><td>Lo que me permitió darme cuenta que el enunciado se trataba de una definición es la “introducción” que se hace en el enunciado, es decir que algo tiene que suceder tal que suceda la otra parte del enunciado.</td><td>Definición: se da cuenta por la forma en que está escrita.</td></tr>
</table>

		cumplir un enunciado para considerarse una definición/por qué una demostración leída demostró el enunciado que dice demostrar…)	No es claro. Como contraejemplo se puede poner cualquier propiedad!	
	I2 Lenguajes matemáticos (natural y simbólico), notación matemática, convenciones	- a) reproducir “algo” usando lenguajes matemáticos	Esto no se va a dar porque no tienen que “reproducir” nada.	
		- b) explicar el uso del lenguaje	Sobre el ítem 1b), respecto a cómo le explicaría a los alumnos por qué lo que explica se corresponde con la definición: Si pensara en explicar lo presentado en la consigna a un alumno, sí haría algún tipo de aclaración respecto del uso del lenguaje simbólico que ahí se plasma en relación con el lenguaje natural que usaría para explicarlo. Dicha aclaración sería sobre el uso de notaciones que se hacen, ya que aparecen “símbolos”, los cuales los alumnos tal vez no conozcan/recuerden el significado o no	

			los hayan aprendido previamente, como por ejemplo, el símbolo que representa a la palabra *pertenece* o el símbolo que representa a *para todo* Pretende hacer una traducción literal pero no explicar por qué se corresponde con la definición. Sobre el 2c) respecto a cómo se lo explicaría a un compañero: Teniendo f y g dos funciones polinómicas distintas que toman los mismos valores en x = a y en x = b, la consigna pregunta, en el ítem a), si es posible que dichas funciones coincidan en todos los valores entre a y b. Para que eso suceda f y g deberían ser la misma función (y eso no puede suceder ya que en el enunciado dice que ambas son funciones distintas) o, la otra opción, sería que una de ellas sea cóncava hacia arriba y la otra cóncava hacia abajo (que esta sería la respuesta correcta). Es decir que para que se cumpla que f sea mayor que g, tal como lo pide el ítem b), la función f debe ser cóncava hacia abajo y la función g debe ser cóncava hacia arriba tal que queden representadas como se muestra en el gráfico hecho anteriormente, es decir que f debe estar "por encima" de g y es así que se diferencian, por su tipo de concavidad. Explicación utilizando lenguaje natural: trata de decir de otra manera lo escrito en lenguaje simbólico (que no es correcto). Acá sí lo utiliza como "sinónimos".	

		- c) reflexionar sobre el uso del lenguaje (entendiendo desde la rigurosidad planteada por la comunidad matemática hasta contextos más informales), la notación (y la conveniencia de elegir una u otra, por ejemplo), las convenciones y su arbitrariedad.	Con respecto al uso del lenguaje simbólico y natural que suele darse en Matemática y si yo estuviese a cargo de una clase, usaría de forma predominante el lenguaje simbólico para que mis alumnos se acostumbren a escribir de forma adecuada en la materia y no con palabras como sería si usáramos el lenguaje natural. Esto no quiere decir que dejaría de usar el lenguaje natural. Al contrario, en el lenguaje natural hay una intención de comunicación que se da entre partes y además, hay mensajes a transmitir y recibir, ya sea del docente al alumno o viceversa pareciera que con el simbólico no!. En cambio, el lenguaje simbólico incluye una serie de significantes con sus significados para cada contexto comunicacional en el que sean utilizados, es decir que hay palabras que están representadas por "símbolos" que algunas personas conocemos (principalmente las que estudiamos "la rama de las ciencias exactas") o que comenzamos a conocer cuando nos introducimos en "el mundo matemático". Dichos símbolos se utilizan para la formulación de enunciados en definiciones, proposiciones, teoremas, lemas, propiedades, entre otros. Esta alumna no toma a los dos lenguajes para utilizarlos en paralelo, sino que uno para principiantes y otro para los que ya conocen un poco el tema. Reconoce la rigurosidad del lenguaje simbólico, pero lo deja para un nivel superior.	

Conocimiento del contenido matemático ante **producciones propias**	**I3** Resolución de una consigna, actividad o ejercicio que **no** le resulte cognitivamente exigente.	- Usar - Explicar - reflexionar	Esto no se trabaja en el TP3	
	I4 Resolución de tareas intelectualmente exigentes (demostrar una	- Usar lenguaje matemático, operar, usar propiedades, procedimientos, buscar información, proponer una demostración, dar contraejemplos, etc.	f y g dos funciones polinómicas distintas que cumplen que toman los mismos valores en x = a y x = b. Resolución de la consigna: a) Es posible que f y g, funciones polinómicas, coincidan en todos los valores entre a y b. Esto quiere decir que una de las funciones sería cóncava hacia abajo y la otra sería cóncava hacia arriba. De este modo, ambas funciones tomarían los mismos valores, que se encuentran ubicados entre x = a y x = b.	

	proposición no vista, resolver un “problema”, modelizar).		 Tiene la idea, pero resuelve incorrectamente. b) Si f y g son dos funciones polinómicas distintas que cumplen que toman los mismos valores en x = a y x = b y que además f es cóncava hacia abajo y g es cóncava hacia arriba Q entonces en todos los puntos entre a y b, la f siempre es mayor que g. Insiste con un tema de concavidad que no es correcto en esta consigna. **Definición de función convexa**: ¡No es lo que se pide demostrar! Para cualesquiera a, b ∈ I con a < b, la recta secante a la gráfica de f que pasa por los puntos (a, f(a)) y (b, f(b)) tiene la ecuación $y = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.(x-a)$ Por lo tanto, f será convexa cuando, para cualesquiera a, b ∈ I con a < b se tenga que	

$$f(z) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.(z - a) \forall z \in [a, b]$$

O equivalentemente,

$$f(z) \leq \frac{b - z}{b - a} f(a) + \frac{z - a}{b - a} f(b) \ \forall z \in [a, b]$$

Demostración: ¿está demostrando la definición? → porque toma una equivalencia de la definición, demuestra eso.

Dado t ∈ [0, 1] podemos tomar $z = a + t(b - a) \in [a, b]$ y esto nos dice que

$$f\big((1 - t)a + tb\big) \leq (1 - t)f(a) + tf(b) \ \forall t \in [0,1]$$

Pero recíprocamente, dado z ∈ [a, b] podemos tomar

$$t = \frac{z - a}{b - a}, \quad que\ verifica \quad t \in [0,1] \quad y \quad 1 - t = \frac{b - z}{b - a}$$

con lo que $(1 - b)a + tb = z \ \forall \ t \ \in [0,1]$

Finalmente, dado *I* un intervalo no trivial, tenemos que

$$f\big((1 - t)x + ty\big) \leq (1 - t)f(x) + tf(y) \ \ \forall x, y \in I, \ \ \forall t \in [0,1]$$

No demuestra lo pedido.

		- Explicar su resolución	Teniendo f y g dos funciones polinómicas distintas que toman los mismos valores en x = a y en x = b, la consigna pregunta, en el ítem a), si es posible que dichas funciones coincidan en todos los valores entre a y b. Para que eso suceda f y g deberían ser la misma función (y eso no puede suceder ya que en el enunciado dice que ambas son funciones distintas) o, la otra opción, sería que una de ellas sea cóncava hacia arriba y la otra cóncava hacia abajo (que esta sería la respuesta correcta). Es decir que para que se cumpla que f sea mayor que g, tal como lo pide el ítem b), la función f debe ser cóncava hacia abajo y la función g debe ser cóncava hacia arriba tal que queden representadas como se muestra en el gráfico hecho anteriormente, es decir que f debe estar "por encima" de g y es así que se diferencian, por su tipo de concavidad. Está mal. La explicación es coherente con lo que quiso demostrar, pero **NO** es lo pedido.	**Mal resuelto.**
		- reflexionar sobre: heurísticas puestas en juego, si lo hecho responde a lo pedido, si se simplificó el enunciado para poder	Para realizar la demostración utilicé algunas heurísticas, como por ejemplo la que llamamos *trabajar empezando por el final* ya que realicé el "paso a paso" para llegar a lo que quería probar. También *realicé un dibujo* que me sirvió como "guía" para luego poder realizar la demostración. Además, a partir de lo enunciado en la proposición, me pareció adecuado realizar la demostración	**Mal resuelto.** **Relacionó la convexidad de las funciones (parte 1 de la**

		abordarlo, que las demostraciones requieren una sucesión coherente de pasos que deben estar bien fundamentados, que pueden o no llevar a concluir la demostración, formas de encarar demostraciones matemáticas: vía directa, método por reducción al absurdo y el contrarrecíproco…	de una función convexa ya a partir de su enunciado, pude darme cuenta por qué f y g tomaban los mismos valores en un determinado intervalo a, b siendo ambas funciones polinómicas diferentes. Mal uso del concepto de Heurísticas. Plantea/cuenta mal lo que quiso demostrar.	**consigna) con la propiedad de la parte 2.**

Tabla 12. Análisis TP3 de A13

Aunque presentaremos los análisis de los datos organizando la información alrededor de cada indicador, y no por estudiante, incluimos a continuación un breve ejemplo de análisis solo con la intención de mostrar cómo estas tablas son un insumo que facilita analizar el MK.

> Con respecto al indicador I.1., realizamos una lectura a las respuestas del alumno que hemos ubicado en las primeras filas de cada tabla. Eso nos permite tener una visión global (dentro del contexto de nuestro dispositivo) de cómo este estudiante reproduce contenido matemático. Notemos que respecto de "reproducir" una definición, propiedad o demostración, A13 muestra un desarrollo regular al completar esa parte. Esto se debe a que encontramos:
>
> - Falta de precisión al definir un concepto: "Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones que contiene una o más variables, es decir que la misma constituye una igualdad donde aparece como mínimo una incógnita que exige ser develada por quien resuelve el ejercicio."
> - Falta de conocimiento acerca de las características que debe cumplir un enunciado para ser una definición, propiedad o demostración. Esto se evidencia en el TP1[2] cuando explica en lenguaje natural el concepto, sin quedar en claro qué de todo lo que expresa es en sí la definición pedida, y en el TP2[3] cuando para definir ecuación cuadrática necesita incluir información sobre función cuadrática.

[2] Para ver las evidencias aquí mencionadas, remitirse a la Tabla 10.
[3] Para ver las evidencias aquí mencionadas, remitirse a la Tabla 11.

De este mismo modo, es decir considerando los datos organizados por filas, podemos ir construyendo el análisis para cada indicador.

Análogamente podemos considerar los datos por columnas para cada tabla. Esto nos da información sobre diferencias y similitudes entre las resoluciones del estudiante, en comparación con sus compañeros por un lado, y de nuestras apreciaciones (última columna), por el otro.

En particular, en la columna de las evidencias de los trabajos prácticos, podemos notar una diferencia entre la realización de los dos primeros trabajos prácticos: por un lado, se nota una definición de ecuación en el TP1 desde el lenguaje natural, con terminología que nos hace pensar que es una redacción desde el sentido común, desde lo que A13 conoce sobre el concepto. Por otro lado, al copiar la definición de ecuación cuadrática se evidencian los links que responden a un párrafo copiado de internet. Con esta diferencia de desarrollo de las consignas podemos suponer que, de acuerdo al conocimiento sobre el concepto matemático, el estudiante decide redactar desde sus propios conocimientos o bien copiar la definición porque existen dudas sobre el tema.

Siguiendo los elementos del marco teórico, en lo referido a “explicación mostrando comprensión”, notamos que en todos los casos en donde la consigna pide que explique sus respuestas, el estudiante utiliza el lenguaje natural. Podemos ver que al explicar la definición de ecuación repite prácticamente lo mismo que escribió anteriormente y utiliza la misma consigna a modo de ejemplo. En la explicación del concepto de ecuación cuadrática, encontramos que, si bien considera la restricción del coeficiente principal para la definición, no la trae a colación cuando explica el concepto.

Por otro lado, en el mismo TP2, explica también en lenguaje natural qué quiso decir cuando escribió alguno de los pasos de la demostración de la propiedad de la fórmula resolvente. Cabe aclarar que en ninguno de estos casos realiza una "explicación" con la intención de mostrar comprensión de los conceptos, sino con la de mostrarle a otra persona qué es lo que realizó. Recién en el TP3 consideramos que lo que explica de la consigna no está relacionado con una traducción literal de los símbolos.

Con respecto al "reflexionar" sobre las definiciones, propiedades o demostraciones, podemos observar en el TP3 que su escrito es poco preciso: "Lo que me permitió darme cuenta que el enunciado se trataba de una definición es la "introducción" que se hace en el enunciado, es decir que algo tiene que suceder tal que suceda la otra parte del enunciado".

Como vemos en este ejemplo, podemos tomar las resoluciones y respuestas de cada TP de para cada alumno y volcarlas en esta tabla. De este modo tendremos una tabla por cada TP de cada alumno. Aunque en nuestro caso eso nos da 60 tablas (20 estudiantes, 3 trabajos prácticos entregados por cada uno) y ese número podría resultar abrumador para extraer conclusiones generales sobre el MK del grupo de estudiantes, consideramos que este procedimiento nos ha resultado útil para llevar adelante el análisis. Es por eso que incluimos este ejemplo y en el capítulo que viene presentamos el análisis que surgió de replicar este procedimiento organizando la presentación de lo hallado por indicador.

4.3.2 Resultados del análisis de los datos

En esta sección mostramos resultados obtenidos del análisis de todos los trabajos prácticos entregados. Hemos hecho la presentación organizándola por cada uno de los indicadores de conocimiento matemático.

Debemos aclarar que las evidencias aquí citadas son extractos de las resoluciones entregadas por los alumnos. Al ser copias textuales, se pueden observar errores de conceptos matemáticos y/o de tipografía, que no fueron alterados por ser considerados evidencias de trabajo. A modo de indicación para la lectura, aclaramos que en cada una de las citas textuales de los alumnos se puede observar en qué trabajo práctico se encuentra, y a qué estudiante pertenece.

4.3.2.1 Indicador I.1.

En lo referido a **reproducir**, observamos que todos los estudiantes han escrito tanto las definiciones como los enunciados de las propiedades que se piden desde lo que recuerdan del tema. No han recurrido a bibliografía específica para poder responder la consigna. Esto se puede notar en el lenguaje utilizado, los ejemplos empleados que han considerado parte de las definiciones, la información extra que agregan a modo de explicación de lo que pretenden señalar, sin advertir que la explicación no forma parte de una definición o del enunciado de una propiedad.

A continuación, se pueden observar evidencias de este aspecto que señalamos sobre responder sobre definiciones utilizando lo que recuerdan del tema más que realizando una búsqueda bibliográfica, por ejemplo:

Una sucesión es una secuencia de números que comienza con un primer número, siguen con el segundo, uno a continuación del otro **(TP1, A3)**

Definición de Ecuación: Ecuación es la igualdad de dos expresiones algebraicas no equivalentes, o sea, una igualdad que sólo se verifica para determinados valores de las incógnitas. En una ecuación existen una o varias variables a las que se las llama incógnitas. Las incógnitas se acostumbran a representar por las ultimas letras del alfabeto: t,u,v,x,y,z.

Una ecuación lineal de primer grado es del tipo a.x + b = 0, con a ≠ 0, o cualquier otra ecuación en la que, al operar, transponer términos y simplificar adopten esa expresión.

Ejemplo: X – 2 = 10. Tenemos un ejemplo de ecuación lineal de primer grado, ya que esta igualdad sólo se verifica para un determinado valor de x, o sea, X = 12. **(TP1, A5)**

Ecuación de grado 2 (ecuación cuadrática): Es una ecuación que tiene la forma de una suma algebraica de términos, cuyo grado máximo es 2 y puede ser representada por un polinomio cuadrático. Su expresión general es: **aX^2 +b X +c, a= coeficiente cuadrático, b= coeficiente lineal, c= termino independiente**

Definición: Las ecuaciones de segundo grado se resuelven aplicando la siguiente formula:

$$X_{1,2} = \underline{-b +- (b^2 – 4ac)^{1/2}}$$

2*a

Se denomina discriminante a la expresión b^2-4ac. Las ecuaciones de segundo grado o cuadráticas, pueden tener una solución doble, dos soluciones o no tener soluciones , eso depende del valor del discriminante.

Si b^2-4ac > 0, hay dos soluciones

Si b^2-4ac = 0, hay una solución doble.

Si b^2-4ac < 0, no hay soluciones en el conjunto de los reales. **(TP2, A16)**

Una función cuadrática es una función del tipo: $f: IR \rightarrow IR$ / $f(x) = ax^2 + bx + c$ (con a, b y c números reales y a es distinto de 0). Su gráfica se llama parábola.

La forma $y = ax^2 + bx + c$ es la ecuación de la parábola asociada a la función cuadrática. **(TP2, A8)**

Es claro en este ejemplo que los alumnos A5, A8 y A16 utilizan más información ya sea para completar el escrito, o bien a modo de explicación, cuando en realidad solo debían definir el concepto elegido. No tienen en claro hasta donde definir, qué de lo que escriben es parte de uan definición y qué sería parte de características relacionadas con el tema o propiedades que se desprenden a partir de dicha definición.

A continuación, se puede observar un ejemplo de respuesta en el que el hecho de definir algún concepto matemático desde los conocimientos que poseen lleva a cometer errores con los contenidos matemáticos que se trabajan. En este caso, al margen de los problemas que se visualizan en la redacción, no presenta una ecuación cuadrática sino la expresión algebraica, no está escrita de forma canónica, no incluye la condición que el coeficiente principal debe ser distinto de cero, se omite la existencia de raíces múltiples tanto como la identificación de raíces diferentes para el caso del discriminante positivo.

> Definición de fórmula resolvente: Toda ecuación cuadrática expresada de manera canónica, es decir: $ax^2 + bx + c$, en donde a, b y c son números reales. Tiene dos, una o 0 raíces reales. Para hallar las raíces de las ecuaciones cuadráticas expresadas de manera canónica se utiliza la fórmula de la resolvente, la cual es: $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Con esta fórmula podemos averiguar cuáles serán las raíces de nuestra ecuación. Ahora para saber si nuestra ecuación tiene una, dos o ninguna raíz, vemos el valor del discriminante. El discriminante es lo que tenemos dentro de la raíz de la fórmula de la resolvente, es decir $b^2 - 4ac$. Si este valor nos da 0, quiere decir que nuestra ecuación tiene una sola raíz, si el valor que nos da es negativo, la ecuación no tiene raíces, y si el valor es positivo la ecuación tiene dos raíces. **(TP2, A12)**

Con respecto a las copias textuales de internet, en las entregas se hacen visibles los links en el texto pegado. Podemos verlo en la resolución de A13 (utilizada a modo de ejemplo en el apartado 3.2.1), en el siguiente párrafo:

> Una ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática de una variable es una ecuación que tiene la forma de una suma algebraica de términos cuyo grado máximo es dos, es decir que una ecuación cuadrática puede ser representada por un polinomio de segundo grado o también conocido como

polinomio cuadrático. La expresión general de una ecuación cuadrática de una variable es la que se presenta a continuación:

$ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$ y x es la variable.

Además, a es el coeficiente cuadrático (distinto de 0), b el coeficiente lineal y c es el término independiente.

Esta ecuación se puede interpretar mediante la gráfica de una función cuadrática, es decir, por una parábola. Esta representación gráfica es útil porque las intersecciones o el punto tangencial de esta gráfica (en el caso de existir) con el eje X coinciden con las soluciones de la ecuación. A dichas intersecciones de la gráfica con el eje X se las denomina raíces.

En lo referido a reproducir demostraciones, y a diferencia de lo que mencionamos sobre las definiciones, se observan copias textuales de libros de textos (o de páginas de internet).

Por otro lado, encontramos demostraciones reproducidas que están mal copiadas. Por lo que concluímos que no se evidencia una escritura comprensiva de lo que se pide:

Sea $f(x)=ax^2+bx+c$

Como f tiene grado 2, es irreducible si y solo si tiene un factor en los reales de grado 1, que podemos asumir mónico de la forma X-x con x perteneciente a los reales. Así que en este caso f es reducible en los reales si y solo si f tiene una raíz real.

Luego $f= a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}) = a((x+\frac{b}{2a})^2 -\frac{b^2}{4a^2} +\frac{c}{a}) = a((x+\frac{b}{2a})^2 -\frac{b^2-4ac}{4a^2})$

El discriminante de f es $\Delta= b^2 - 4ac$

Si existe w Є reales tal que $w^2 = \Delta$, se tiene que

$f = a((x+\frac{b}{2a})^2 - (\frac{w}{2a})^2) = a(x - \frac{-b+w}{2a})\, a(x - \frac{-b-w}{2a})$

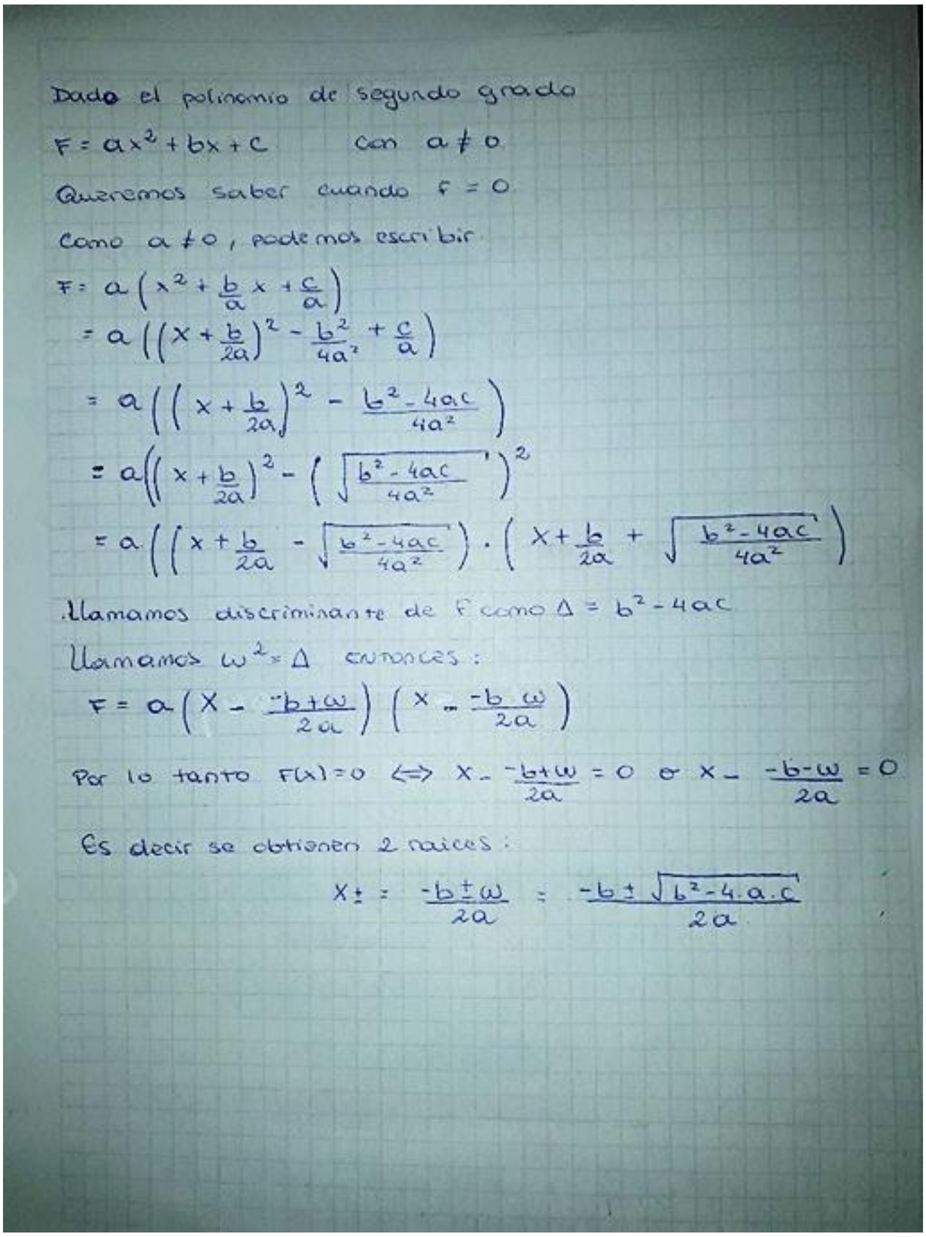
y por lo tanto f(x)=o, las raíces serán

$X1 = a(x - \frac{-b+w}{2a}) = a(x - \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a})$

$X2 = a(x - \frac{-b-w}{2a}) = a(x - \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a})$ **(TP2, A6)**

En este mismo escrito se observa un uso excesivo de notación, intentando demostrar lo que se pide. Notemos que al llegar a la diferencia de cuadrados hubiera sido suficiente considerar la propiedad de reales para asegurar la existencia de las dos soluciones. Sin embargo, el estudiante propone un w, reescribe en términos de esta variable para encontrarlas.

Esto que señalamos se repite en otras producciones, por ejemplo, en la resolución que se muestra a continuación:



Dado el polinomio de segundo grado

$F = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$

Queremos saber cuando $F = 0$

Como $a \neq 0$, podemos escribir

$$F = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right)^2\right)$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right) \cdot \left(x + \frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right)\right)$$

Llamamos discriminante de F como $\Delta = b^2 - 4ac$

Llamamos $\omega^2 = \Delta$ entonces:

$$F = a\left(X - \frac{-b+\omega}{2a}\right)\left(X - \frac{-b\ \omega}{2a}\right)$$

Por lo tanto $F(x) = 0 \Leftrightarrow X - \frac{-b+\omega}{2a} = 0$ o $X - \frac{-b-\omega}{2a} = 0$

Es decir se obtienen 2 raices:

$$X_{\pm} = \frac{-b \pm \omega}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2a}$$

Imagen 4. Extracto de resolución de TP2, A11

Podemos observar en varias de las evidencias mencionadas, que los estudiantes en general mencionan las hipótesis de trabajo (en el caso del TP2, tenemos la condición de que $a \neq 0$) pero que, si bien se entiende su uso al leer el escrito, no son señaladas. Esto puede deberse a dos cosas: solo saben que por definición debe aparecer, entonces lo incluyen (pero no entienden dónde o por qué se usa), o bien consideran que no es necesario escribirlo.

En lo referido a las propiedades, observamos que algunos alumnos consideran como "propiedad" aquellas cuestiones que sirven para resolver la consigna, ya sea la definición de variables, estrategias utilizadas, etc., como por ejemplo puede verse en las dos citas siguientes:

> Para la resolución de la consigna utilice la relación entre las variables fósforos y formas para sacar las expresiones genéricas, el criterio de divisibilidad por 3 y resolución de ecuaciones. **(TP1, A2)**

> Propiedades para resolver ecuaciones de segundo grado:
>
> 1) Se efectúan las operaciones indicadas, si las hay.
> 2) Se hace la transposición de términos, pasando todos los términos a uno de los miembros.
> 3) Se reducen términos semejantes y la ecuación queda igualada a cero.
> 4) Se halla la incógnita: para ello se utiliza la fórmula resolvente: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
>
> Una vez obtenida las soluciones de la ecuación podemos verificar si cumplen con la igualdad, sustituyendo las incógnitas por las soluciones. Después de efectuar las operaciones pertinentes debe llegarse a una igualdad. **(TP2, A5)**

Aunque entendíamos que "reproducir" llevaría a los estudiantes a utilizar fuentes o presentar el conocimiento de un modo matemáticamente correcto, nos encontramos con mucha frecuencia con errores. A modo de ejemplo mostramos a continuación la confusión entre el concepto de expresión algebraica, función y ecuación, o entre codominio e imagen

Una función es una relación entre un conjunto “x” (llamado dominio) y un conjunto “y” (llamado codominio o imagen), de manera que a cada elemento del primer conjunto le corresponde un elemento del segundo conjunto. **(TP1, A6)**

Dominio: conjunto de valores que puede tomar la variable independiente

Imagen: conjunto de valores que puede adoptar la variable dependiente.

(TP1, A18)

En la consigna los conceptos matemáticos que se trabajan son: dominio y co-dominio de ecuaciones lineales, resto de divisiones de números enteros.

Dominio: el dominio en una ecuación nos habla sobre los valores numéricos que puede tomar una variable, que llamaremos en este caso, “n”. Los valores que podrá tomar este “n” dependerán siempre del ejercicio que se nos dé.

Co-domnio: El co-dominio son los valores que va a poder tomar nuestra ecuación dependiendo de lo que valga “n”, es decir el co-dominio de una ecuación serán aquellos resultados que puedo obtener en la ecuación que se me plantea. **(TP1, A12)**

> La fórmula resolvente sirve para hallar las raíces de una función de segundo grado de la forma ax^2+bx+c. **(TP2, A6)**

Debemos señalar que una importante cantidad de los trabajos entregados correspondientes al TP1 incluyen en sus resoluciones todo lo relacionado a "definiciones", pero responden sobre lo que se pide vinculado a "demostraciones". Esto se puede observar en los trabajos de los alumnos A4 – A7 – A8 – A11 – A12 – A13 – A15 – A16 – A17 – A19. Por otro lado, casi la totalidad de los estudiantes que entregaron el TP2 relacionaron sus respuestas a la fórmula resolvente de la ecuación cuadrática.

Respecto de **explicar**, los estudiantes responden contando el tema a un supuesto interlocutor que lo desconoce y no como forma de manifestar su propia comprensión. Se plasma en traducciones literales de las definiciones/propiedades dadas y predomina el lenguaje natural. También se puede apreciar que se mantienen imprecisiones que estaban escritas en sus definiciones/propiedades y en otros casos la explicación suma información no contemplada.

Es importante mencionar que en lo referido a "explicar las demostraciones" presentadas, encontramos que los estudiantes dejaban esos ítems sin responder.

Incluimos a continuación la explicación dada por el alumno que propuso la definición anteriormente citada sobre "*Definición de fórmula resolvente*" **(TP2, A12)**. Al pedirle que explique su definición, un alumno responde lo siguiente:

> Bueno hoy veremos raíces de funciones cuadráticas expresadas de manera canónica, es decir, como: a por x al cuadrado más b por x más c, donde a, b y

> c son números reales que siempre los van a tener, por ejemplo, si tenemos dos por x al cuadrado más cinco x menos seis. Acá nuestros a, b, c serán dos, cinco y menos seis. Para hallar las raíces de esta ecuación o cualquier ecuación cuadrática escrita de esta manera vamos a usar una fórmula, la fórmula de la resolvente, esta fórmula es la que está en el pizarrón. Usando esta fórmula pueden hallar las raíces de una ecuación cuadrática, si volvemos a nuestro ejemplo deberíamos reemplazar las letras a, b, c que aparecen en la formula por los a, b, c de nuestro ejemplo, o sea por dos, cinco y menos seis. Pero si en vez de querer saber cuáles son las raíces de una ecuación cuadrática quisiéramos solo saber si la ecuación tiene una, dos o 0 raíces. Lo que usamos es el discriminante de la fórmula, miremos, si reemplazamos nuestros datos en el discriminante nos da que cinco al cuadrado es veinticinco menos cuatro por dos por menos seis nos queda veinticinco más cuarenta y ocho que es setenta y tres y este número es positivo por lo tanto ya sabemos, usando el discriminante, que la ecuación va a tener dos raíces. **(TP2, A12)**

Encontramos también explicaciones que incluyen un contexto que no corresponde a la resolución del trabajo:

> Las funciones constituyen una herramienta útil para describir, analizar e interpretar diferentes situaciones provenientes de la Matemática y otras áreas. Donde permite expresar relaciones entre variables y construir modelos matemáticos para representar estas relaciones. En este caso veremos la definición de uno de los tipos de funciones: función lineal. La función lineal es un buen modelo para analizar situaciones en las cuales a variaciones

> iguales de una variable corresponden cambios iguales de la otra variable. Donde éstas variables las denotamos con letras, usualmente como se observa en la definición, con X e Y. O también en vez de utilizar Y, usamos el símbolo de función de X (se escribe o se señala f(x)). Como se observa en el pizarrón, la fórmula que la define es: f(x) = mx + b donde m y b son números cualesquiera que tienen nombres. A m definimos como la pendiente y a b la llamamos ordenada al origen. Son conceptos que veremos más adelante al momento de graficar estas funciones. Por ahora nos centraremos en identificar a X como una de las variables que la llamaremos independiente y f(x) = Y adopta los valores que se obtienen a medida que x cambia por lo cual decimos que es una variable dependiente. Ahora para entender mejor este concepto veremos varios ejemplos, donde estaremos aplicando la definición de función lineal teniendo en cuenta su fórmula y la aplicación de la misma a varias situaciones. **(TP1, A16)**

Podemos leer a continuación otro ejemplo de explicación, en el que el alumno intenta explicarle a alguien que no sabe indicando qué pasos realizar para resolver, y no muestra comprensión sobre lo que explica:

> Llamamos raíz de una función cuadrática a aquellos valores pertenecientes al dominio que hacen que la función valga cero. Una función cuadrática en su expresión polinómica es de la forma Ax^2+Bx+C y puede tener una dos o ninguna raíz. Para hallarlas podemos utilizar la resolvente $(-B\pm\sqrt{(B^2-4AC)})/2a$

Por tanto una ecuación cuadrática de la forma $4ax^2+4bx+c$ tendrá $A=4a$, $B=4b$, $C=c$ y sus raíces serán de la forma $(-b\pm1)/2a$ por lo antes analizado. **(TP2, A18)**

Otra de las cuestiones observadas es que suelen incluir conceptos que no están definidos para explicar el concepto:

Tenemos la ecuación de segundo grado: $\mathbf{a\,x^2 + b\,x + c = 0}$. La idea es convertir al polinomio en un cuadrado perfecto. **(TP2, A1)**

En este caso, el alumno utiliza el concepto de polinomio para explicar su definición de ecuación cuadrática, pero no lo incluye en su desarrollo.

Por otro lado, a lo largo de los tres trabajos prácticos que los alumnos entregaron hemos observado la utilización de ejemplos a la hora de explicar, aquí copiamos algunas citas textuales que lo evidencia:

En la consigna se trabaja una sucesión cuyo término general está definido mediante una función lineal cuyo dominio son los naturales y, en este caso, codominio también son los naturales $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f(n) = 3n + 1$. **(TP1, A3)**

Veámoslo con un ejemplo, si tengo la siguiente cuadrática $p(x) = x^2 - 3x - 10$ y me piden hallar las raíces, lo que tengo que hacer es plantear una ecuación: $x^2 - 3x - 10 = 0$

Entonces debo hallar un valor de x que al evaluarlo en $x^2 - 3x - 10$ tiene que dar cero, por ejemplo elijo un número como el 2 y reemplazo $p(x = 2) =$

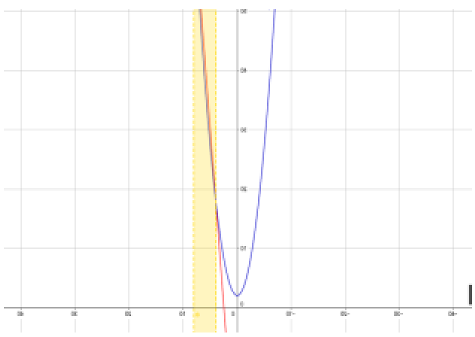
$2^2 - 3.2 - 10 = -12$. Para $x = 2$ no me dio cero entonces 2 no es raíz de $p(x)$. Ahora pruebo con $x = 5$, $p(x = 5) = 5^2 - 3.5 - 10 = 0$. Para este valor si me dió cero, entonces digo que $x = 5$ es una raíz de $p(x)$.

Nuestra motivación para este tema es como saber que número es raíz o no y lo veremos dentro de poco. **(TP2, A17)**

Usando GeoGebra observamos que gr(f(x))>1 porque si f y g son ambas funciones lineales vamos a obtener la misma función. Veamos a continuación algunos ejemplos.

Ejemplo 1: f(x) es una Función Cuadrática

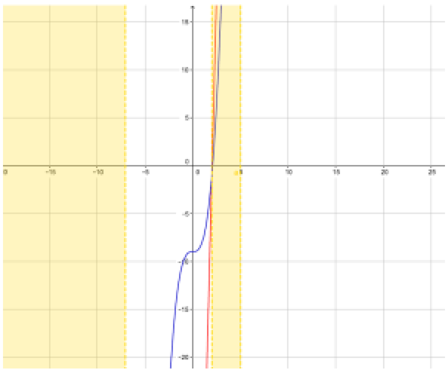
Si $f(x) = x^2 + 2$ entonces la expresión de la recta secante es $g(x) = 12 - 30$. Gráficamente nos queda:



Vemos que efectivamente en el intervalo (4,8) la f<g.

Ejemplo 2: f(x) es una Función Cúbica

Si $f(x) = x^3 - 9$ entonces la expresión de la recta secante es $g(x) = 39x - 79$. Gráficamente nos queda:



En este caso vemos que f<g en los intervalos $(-\infty,-7)$y $(2,5)$.

Observamos que en varios ejemplos que hemos hecho que para funciones polinómicas de grados pares hay un solo intervalo en el que f>g. En cambio, cuando el grado de la función polinómica es impar tenemos dos intervalos. **(TP3, A14)**

.$\forall\, x_1, x_2 \in (a,b),\ x_1 < x_2\,, \forall\, x \in (x_1, x_2)$ Si $f(x) < \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1)$. Entonces la función es convexa en el intervalo (a,b).

Si una función f(x) es menor a la recta secante de la misma, dentro de un intervalo (x_1, x_2), entonces la función resulta convexa en ese intervalo.

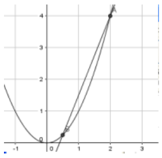
Por ejemplo, tenemos la función x^2. Trabajaremos en el intervalo (1/2; 2)

Primero vemos si verifica

$x^2 < \frac{4-1/4}{2-1/2}(x - 1/2) + 1/4$

$x^2 < 5/2(x - 1/2) + 1/4$

$x^2 < \frac{5}{2}x - 1$



Notamos que en el intervalo la función resulta convexa. La formulación del enunciado de la consigna corresponde a la definición de convexidad.” **(TP3, A6)**

Los ejemplos utilizados, no solo son relacionados con el tema, sino que también encontramos algunos que no eran pertinentes. El siguiente ejemplo evidencia esto que señalamos, el alumno utiliza un contexto de vida cotidiana para explicar el tema de ecuaciones cuadráticas. No solo no está relacionado al TP, sino que no es correcto:

Una función se puede referir a situaciones cotidianas, como por ejemplo el recorrido de un auto con velocidad constante que dependerá del tiempo, el costo de una llamada telefónica que dependerá de su duración o hasta el gasto de la sube que dependerá de la cantidad de viajes realizados. En todos los casos existe una relación entre dos conjuntos, una relación de dependencia. Una función es esta relación que existe entre los conjuntos, en donde a cada elemento de primer conjunto le corresponde un elemento del segundo.

Por ejemplo, tomemos el caso del auto, supongamos que tiene una velocidad de 70 km/h **no aclara constante**. La función seria F(t)= 70.t, en donde t será el tiempo transcurrido. Para cada valor de t le corresponde un valor en F(t), en este caso es el recorrido realizado en el tiempo t.

Si t=1 la distancia recorrida será de 70km.

Si t=5 la distancia recorrida será de 350km.

En una función existirá una variable independiente, que sería el tiempo, y una variable dependiente, en este caso la distancia recorrida en ese tiempo. **(TP2, A6)**

También observamos escritos en los que no se diferencia la "definición" de la "explicación", los alumnos explican el concepto repitiendo lo que anteriormente utilizaron en la definición:

DEFINICIÓN: Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas donde aparece, como mínimo, una incógnita. En esta igualdad hay términos conocidos y términos desconocidos. Este último es llamado incógnita y se representa, generalmente, con las ultimas letras del abecedario (x, y, z). Una **ecuación lineal** o de primer grado es aquella que involucra solamente sumas y restas de variables elevadas a la primera potencia. Son llamadas lineales por que se pueden representar como rectas en el sistema cartesiano.

EXPLICACIÓN: Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones matemáticas que combinan números y letras ligadas por operaciones elementales como la suma, resta, multiplicación, división. Las letras suelen representar cantidades desconocidas llamadas incógnitas. Una ecuación lineal es una igualdad que involucra una o más variables o incógnitas a la primera potencia. Además, esta ecuación solo involucra sumas y restas de una variable a la primera potencia.

(TP1, A1)

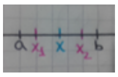
En una ecuación están igualadas dos expresiones algebraicas. Nos referimos con expresiones algebraicas a la combinación de letras y números, en donde las letras representan a la incógnita o variable. Estas expresiones de la ecuación se relacionan a través de ciertas operaciones. **(TP1, A15)**

Si bien en la evidencia del A1 se lee una intención de escribirlo distinto, en ambos casos se lee una explicación que repite la definición anteriormente incluida. Análogamente, tenemos los siguientes ejemplos:

DEFINICIÓN: Una función cuadrática es una función del tipo $f{:}\,R \rightarrow R\,;\, f(x) = ax^2 + bx + c$ (con a, b y c números reales y a distinto de 0). Su grafica se llama parábola.

EXPLICACIÓN: Una función cuadrática es una función que tiene la siguiente forma: $f(x) = ax^2 + bx + c$. Donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$, es decir hay un número que acompaña al x^2 otro que acompaña a la x y un número solo al que denominamos termino independiente. A esta expresión la denominamos forma polinómica. Las funciones cuadráticas también pueden estar expresadas de las siguientes maneras: $f(x) = a(x - xv)^2 + yv$, forma canónica $f(x) = a(x - x1).(x - x2)$, forma factorizada. Su grafico es una parábola. Las parábolas son simétricas y tienen: vértice, eje de simetría, raíces, ordenada al origen. **(TP2, A10)**

A continuación explicaré con palabras qué significa qué $\forall\, \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in (\mathbf{a}; \mathbf{b}), \mathbf{x_1} < \mathbf{x_2}, \forall \mathbf{x} \in (\mathbf{x_1}; \mathbf{x_2})\mathbf{:}\ \mathbf{f(x)} < \frac{\mathbf{f(x_2)} - \mathbf{f(x_1)}}{\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}}(\mathbf{x} - \mathbf{x_1}) + \mathbf{f(x_1)}$**.**

Para todo x_1, x_2 que están dentro del intervalo $(a; b)$, x_1 es menor que x_2 y para todo x que está en el intervalo $(x_{1;}\, x_2)$ resulta que una función f es menor que el cociente de la resta entre la función evaluada en x_2 y x_1 y la resta de x_2 y x_1 por el producto de $(x - x_1)$ sumado a f evaluada en x_1. Veremos en un gráfico la representación de la primera parte, es decir la relación que hay entre los intervalos:  **(TP3, A7)**

Con respecto a lo referido a **reflexionar**, recordamos que no era pertinente para los TP1 y TP2, pero sí en TP3. En esto último de los trabajos, hemos observado que varios de los estudiantes no respondieron a los ítems relacionados con la reflexión (en particular, A1 – A2 – A5 – A6 – A9 – A11 – A15 – A17 – A18).

Entre aquellos que intentaron responder la consigna, podemos notar que lo resuelven mal o bien no entienden qué deben contestar (A3, A8).

Entre las respuestas que se incluyeron, uno de los aspectos que podemos señalar es que no saben qué características tiene que tener un enunciado para que sea una definición o propiedad, lo confirman solo por la forma en que está escrito:

Sobre la formulación del enunciado de la consigna creo que corresponde a una propiedad porque dice explicar con tus palabras si la función f verifica la siguiente condición. La propiedad surge luego de un teorema previamente demostrado. La definición es una forma de simplificar un concepto matemático particular y las demostraciones tratan de probar la verdad de enunciados matemáticos. Un lema es el resultado de un teorema y corolario es la consecuencia de un teorema. **(TP3, A4)**

A mi parecer es una proposición ya que se puede verificar si es verdadera o falsa. Y con las condiciones planteadas verificamos que se cumple en el intervalo indicado. **(TP3, A10)**

Al tener la puntuación ":" podría pensar que se trata de una definición, pero sin los datos precisos de caracterización de la función f introducida, afirmo que una definición no podría ser. **(TP3, A19)**

En el enunciado se pide que f verifique una condición, podríamos cambiar la palabra "condición" por "propiedad" y la idea sería la misma. **(TP3, A20)**

Lo que me permitió darme cuenta que el enunciado se trataba de una definición es la "introducción" que se hace en el enunciado, es decir que algo tiene que suceder tal que suceda la otra parte del enunciado. **(TP3, A13)**

Por último, hemos notado que lo referido a la reflexión en aquellos trabajos que lo tenían completo, no solo tenían cuestiones como las señaladas sino también explicaciones incompletas o imprecisas. Como por ejemplo:

"Considero que sobre la formulación del enunciado se corresponde a una definición, ya que primero se da pautas ($\forall\, \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} \in (\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}), \boldsymbol{x_1} < \boldsymbol{x_2}, \forall \boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{x_1}; \boldsymbol{x_2})$*) para luego definir algo, en este caso que* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) < \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_1}) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1})$*."* **(TP3, A7)**

4.3.2.2 Indicador I.2.

El segundo de nuestros indicadores está relacionado con el lenguaje matemático, tanto el simbólico como el natural. También con la notación usual y la identificación de convenciones, así como su uso adecuado.

Al **reproducir**, en los escritos aparece fuertemente el lenguaje natural por sobre el simbólico en las definiciones, pero no así en las demostraciones ni en las propiedades. Esto se puede ver en la mayoría de las entregas de los estudiantes (del TP1 se observa en las resoluciones de los estudiantes A1, A2, A3, A4, A5, A6, A8, A9, A10, A11, A12, A13, A14, A15, A16, A20; y en el TP2 se lee en A1, A2, A3, A5, A6, A7, A9, A10, A11, A12, A13, A14, A15, A16, A18, A19, A20).

Al resolver las consignas utilizan lenguaje simbólico. En esta instancia también observamos imprecisiones en los conceptos matemáticos que utilizan para resolver, como lo pudimos observar en el apartado anterior.

Al **explicar** las definiciones y propiedades, el estudiante utiliza el lenguaje natural pero no con la intención de mostrar comprensión sino situado en el rol de profesor que le explica a un alumno. A continuación, se puede observar evidencias al respecto:

> Definición: Una ecuación cuadrática es aquella de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{R}\ y\ a \neq 0$, a diferencia de las ecuaciones lineales, puede tener a lo sumo dos soluciones reales, no necesariamente distintas
>
> Y la fórmula para hallar sus soluciones es: $X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
>
> Explicación: Recordemos que cuando trabajamos ecuaciones lineales, eran de la forma $ax + b = 0$ con $a, b \in \mathbb{R}\, y\ a \neq 0$. Estas ecuaciones eran de

grado 1 porque la variable "x" estaba elevada a "la uno" y estas ecuaciones tenían una sola solución.

Cuando hablamos de ecuación cuadrática se suma un término de grado dos. Es decir, se suma un término con "X" elevada al cuadrado. La forma general es $ax^2 + bx + c = 0$ a, b y c son los coeficientes de cada término. B y c pueden ser cualquier número real pero "*a*" nunca puede ser cero porque la ecuación dejaría de ser cuadrática y se convertiría en lineal.

Estás ecuaciones tienen dos soluciones reales distintas o una solución real o pueden llegar a no tener solución.

Las soluciones se pueden encontrar con una fórmula especial que se llama "Fórmula resolvente", para poder utilizarla tenemos que identificar los coeficientes de la ecuación y reemplazarlos en la ecuación con su respectivo signo. **(TP2, A3)**

Definición: Se llama ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática con incógnita x, a la siguiente expresión: $ax^2 + bx + c = 0$, donde *a, b y c* son números reales, *y* $a \neq 0$

Explicación: Una ecuación cuadrática tiene la forma (Señalo en el pizarrón $ax^2 + bx + c = 0$) donde los coeficientes reales son *a, b y c.*

Cuando se pide que el coeficiente *a* sea distinto a cero es porque si esto ocurre, la ecuación quedaría de la forma $bx + c = 0$ que representa a una ecuación lineal. Por ejemplo: $5x+7=0$. Por ejemplo, son ecuaciones cuadráticas: $\frac{1}{2}x^2+2x+4=0 \quad x^2-81=0$.

¿Podrían dar otros ejemplos de una función cuadrática? ¿Cuáles?

La variable x es lo que quiero hallar, o sea, son los valores de x que busco para satisfaga la ecuación cuadrática. Esto quiere decir, encontrar valores que haga que la ecuación dé cero. **(TP2, A4)**

En varios de los trabajos prácticos podemos observar que la explicación se basa en contar una idea de la resolución, sin llegar a mostrarla.

Pensá en dos funciones polinómicas, podemos pensar en una función cuadrática y una cúbica, voy a decir que la polinómica es f y la cúbica es g, fíjate que f y g coinciden en el punto x=a y x=b y además, f es mayor que g en ese intervalo a, b. si elijo un punto p1 veo que f(p1) es mayor que g(p1), ahora elijo p2 y veo f y g evaluadas en ese punto, ves que f(p2) es mayor que f(p2). Fijate que para todos los p que tome entre a y b, f es siempre mayor que g. (Le iría dibujando el esquema en una hoja mientras se lo explico). **(TP3, A7)**

Teniendo f y g dos funciones polinómicas distintas que toman los mismos valores en x = a y en x = b, la consigna pregunta, en el ítem a), si es posible que dichas funciones coincidan en todos los valores entre a y b. Para que eso suceda f y g deberían ser la misma función (y eso no puede suceder ya que en el enunciado dice que ambas son funciones distintas) o, la otra opción, sería que una de ellas sea cóncava hacia arriba y la otra cóncava hacia abajo (que esta sería la respuesta correcta). Es decir que para que se cumpla que f sea mayor que g, tal como lo pide el ítem b), la función f debe ser cóncava hacia abajo y la función g debe ser cóncava hacia arriba tal que queden representadas como se muestra en el gráfico hecho anteriormente, es decir que f debe estar "por encima" de g y es así que se diferencian, por su tipo de concavidad. **(TP3, A13)**

Explicación al compañero

Esto lo veremos gráficamente de la siguiente manera:

- Primer paso: dibujar el plano cartesiano y trazar dos rectas x=a y x=b.
- Segundo paso: graficar f y g.
- Tercer paso: dibujar rectas paralelas entre a y b
- Cuarto paso: chequear que para cada recta f(xi)>g(xi)
- Quinto paso: concluir que f>g

(TP3, A14)

Empiezo contándote como arme la proposición, después de ver un par de ejemplos observe que si era un punto intermedio entre (a,b) selecciono un punto cualesquiera que pertenezca a ese intervalo que se compone por los extremos que coinciden las funciones f y g (x=a y x=b). Ese punto intermedio lo identifico con el nombre "c" y cuando lo evalúas en ambas funciones a una le corresponde un valor en el eje y, y a otra le corresponde otro valor, de esos

> dos me define quien es la mayor y la menor. Es decir, que hago (c, f(c)) y(c, g (c)) y de ahí concluyo cual es la mayor por lo tanto esa sería mi otra condición para la proposición. Además tengo en cuenta que son continuas y derivables ¿por qué? las dos funciones que luego sirven para la demostración. Al momento de la demostración, tengo que llegar a que f es mayor que g en cualquier punto del intervalo por lo tanto comencé con el absurdo es decir que f es igual a g en el intervalo (a,b) para luego mediante propiedades de funciones, concluyo que la diferencia de f - g ≥0 al evaluarla en c, se sigue cumpliendo por lo tanto me queda que f(c)≤g(c). **(TP3, A16)**

Al explicar escritos en lenguaje simbólico, los estudiantes "leen los símbolos" sin mostrar comprensión de lo leído y menos aún explican el uso que hacen de los símbolos. Es decir, no hay ningún tipo de vínculo entre los símbolos y la idea que ellos conllevan.

Se acentúa la idea de que la explicación requiere de ejemplos para ser considerada como tal, y que además debe estar escrita en lenguaje natural. Se pierde así la generalidad de lo que está siendo explicado.

> Definición: Una ecuación cuadrática es aquella de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ $y\ a \neq 0$, a diferencia de las ecuaciones lineales, puede tener a lo sumo dos soluciones reales, no necesariamente distintas
>
> Explicación: Recordemos que cuando trabajamos ecuaciones lineales, eran de la forma $ax + b = 0$ con $a, b \in \mathbb{R}\ y\ a \neq 0$. Estas ecuaciones eran de grado 1 porque la variable "x" estaba elevada a "la uno" y estas ecuaciones tenían una sola solución.

Cuando hablamos de ecuación cuadrática se suma un término de grado dos. Es decir, se suma un término con "X" elevada al cuadrado. La forma general es $ax^2 + bx + c = 0$ a, b y c son los coeficientes de cada término. B y c pueden ser cualquier número real pero "a" nunca puede ser cero porque la ecuación dejaría de ser cuadrática y se convertiría en lineal.

Estás ecuaciones tienen dos soluciones reales distintas o una solución real o pueden llegar a no tener solución.

Las soluciones se pueden encontrar con una fórmula especial que se llama "Fórmula resolvente", para poder utilizarla tenemos que identificar los coeficientes de la ecuación y reemplazarlos en la ecuación con su respectivo signo.

ejemplo

$x^2 - x - 2 = 0$ en esta ecuación vemos que a = 1, b = -1 y c = -2

Ahora reemplacemos en la fórmula resolvente $X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$X_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\ x\ 1\ x\ (-2)}}{2\ x\ 1}$$

manejo algebraico

$$X_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$X_1 = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2\ ,\ X_2 = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

fin del ejemplo **(TP2, A3)**

Otro ejemplo:

> Ustedes trabajaron con este tipo ecuaciones (**se escriben el pizarrón algunos ejemplos de ecuaciones de grado 1)**. Estas ecuaciones se llaman ecuaciones de grado 1 o lineales por que la incógnita x tiene una potencia 1, la cual no se escribe nunca (**momento en el que se inicia una explicación sobre porque $x^1=x$ y se dicen ecuaciones lineales**), ahora vamos a trabajar con ecuaciones donde la incógnita x esta elevada al cuadrado (**se escribe un ejemplo en el pizarrón, como es el caso de:** $2x^2-6x+2$ y luego otros ejemplos similares).
>
> Estas ecuaciones se llaman ecuaciones cuadráticas o de grado 2 (**volvemos a repetir que esto es porque la incógnita esta elevada al cuadrado**).
>
> Pregunta: **¿Cómo se escribiría en general una ecuación así?** Como se pueden ver en estos ejemplos tenemos tres términos (**en general, pero podemos tener menos: mostramos casos donde falten términos**): un número por x^2 más o menos por otro número por x más o menos un número sin incógnita. Escribamos ahora la definición de una ecuación cuadrática. **(TP2, A14)**

Hubo pocos escritos en los que la definición también era dada en lenguaje natural. En esos casos, no había diferencia entre lo definido y su explicación.

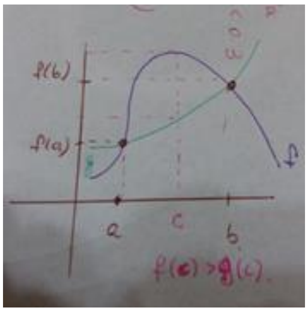
> <u>DEFINICIÓN</u>: Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas, denominadas miembros de la ecuación. Estos miembros se relacionan a través de operaciones matemáticas, números y letras utilizadas como incógnita.

EXPLICACIÓN: En una ecuación están igualadas dos expresiones algebraicas. Nos referimos con expresiones algebraicas a la combinación de letras y números, en donde las letras representan a la incógnita o variable. Estas expresiones de la ecuación se relacionan a través de ciertas operaciones.

(TP2, A15)

En una menor proporción de alumnos, además de los lenguajes natural y simbólico, hemos observado resoluciones que incluían gráficos. Podemos observar esto especialmente en la resolución del tercer trabajo práctico, por ejemplo:

Si las funciones solo se cortan en dos puntos a y b, son distintas y existe un c talque f evaluada en c es mayor que g evaluada en g, entonces no hay otra alternativa de que f sea mayor que g en el intervalo (a,b).



(TP3, A2)

En algunos de los escritos hemos observado que las explicaciones muestran la intención de explicar los símbolos, sin llegar a hacerlo.

Para explicarle a un alumno tendría que explicar bien que significa cada símbolo, como se lee en lenguaje natural, y la significación que tienen como por ejemplo “el para todo” vs “existe alguno”. **(TP3, A2)**

Si tuviera que exponer esto a un alumno, haría aclaraciones del lenguaje simbólico que el alumno tal vez podría no comprender. El pertenece ($\in$) o el "para todo" ($\forall$) y además los intervalos. **(TP3, A3)**

Si explicara lo presentado en una consigna a alumnos sí haría aclaraciones con respecto al lenguaje simbólico puesto que en un ámbito escolar los alumnos no están acostumbrados a este lenguaje, les señalaría qué significa cada símbolo y además aclararía que cuando algo matemático está expresado así es porque vale para todos los números (en el ámbito que estemos trabajando, naturales, enteros, etc) y que los ejemplos sólo sirven en algunos casos. **(TP3, A7)**

Al momento de explicar la consigna a los alumnos aclararía algunos de los símbolos a los alumnos. Quizás la explique oralmente señalando los símbolos que voy nombrando en la oralidad. **(TP3, A8)**

La aclaración que le haría al alumno es que: cuando se habla de x1 y x2 son cualquier número que pertenezcan al dominio de f en el intervalo (a,b), que estos x1 y x2 forman otro intervalo más chico en donde se encuentra x. **(TP3, A12)**

> Si pensara en explicar lo presentado en la consigna a un alumno, sí haría algún tipo de aclaración respecto del uso del lenguaje simbólico que ahí se plasma en relación con el lenguaje natural que usaría para explicarlo. Dicha aclaración sería sobre el uso de notaciones que se hacen, ya que aparecen "símbolos", los cuales los alumnos tal vez no conozcan/recuerden el significado o no los hayan aprendido previamente, como por ejemplo, el símbolo que representa a la palabra *pertenece* o el símbolo que representa a *para todo.* **(TP3, A13)**

En el TP3 se incluye un ítem que induce a **reflexionar** sobre el uso del lenguaje. En general, los estudiantes coinciden en la importancia de ambos (simbólico y natural), pero dando diferentes razones.

Algunos de ellos les dan importancia ambos lenguajes, considerando al simbólico más riguroso, pero no lo toman así a la hora de definir los conceptos.

> Con respecto al lenguaje simbólico y natural, considero que no tienen la misma rigurosidad. El simbólico en este ejercicio es muy riguroso, pero convexidad como tema, se puede explicar de otra manera o definir prescindiendo de esta definición. Tal vez utilizando un gráfico y mostrando la recta tangente. En el lenguaje natural hay más lugar de "escapatoria" es decir, puede ir variando cosas o improvisando un poco más libremente. El lenguaje simbólico no creo que admita tanta versatilidad. **(TP3, A3)**

> El lenguaje simbólico tiene la ventaja de condensar información más eficientemente que el lenguaje cotidiano, se expresa una idea con mínima cantidad de símbolos y sin ambigüedad. Por supuesto, esta se ve como una ventaja cuando uno comienza a dominar, o ya domina, el lenguaje simbólico. Pero para el estudiante que recién se inicia en el área, el precio que hay que pagar por esta ventaja se ve reflejado en un retraso en la comprensión de las ideas que se quieren trasmitir, ya que el simbolismo, en principio, se presenta como una barrea a superar antes que un allanamiento del camino hacia las ideas matemáticas.
>
> En consecuencia, el equilibrio entre tiempo, orden y forma en que se le presentan los contenidos al estudiante es clave para lograr un abordaje "suave" hacia un nivel de conocimiento superior.
>
> El simbolismo es una característica positiva de la disciplina pero que tendrá que venir después de presentar las ideas matemáticas en lenguaje cotidiano y escritura literal. Una vez que el estudiante domine las ideas y haya escrito largas frases para trasmitirla, recién entonces podrá ver al simbolismo como una ventaja, y en base a esta valoración, abocarse a su apropiación. **(TP3, A20)**

Sin embargo, hemos leído resoluciones en donde se considera a ambos lenguajes con la misma rigurosidad, otorgándole un carácter práctico al simbólico.

> Con respecto al uso del lenguaje natural o coloquial y el simbólico, creo que ambos cumplen la misma rigurosidad, aunque es necesario naturalizar el simbólico, o sea, realizar una práctica diaria y constante del mismo, de

manera que no sea una pérdida de tiempo el hecho de entender una consigna escrita en este lenguaje. No creo que sea posible prescindir de alguno de ellos, sin embargo el lenguaje simbólico resulta más práctico al momento de resolver o escribir una consigna, ya que ahorra tiempo de escritura. **(TP3, A1)**

Respecto al lenguaje simbólico y natural considero que es de suma importancia que ambos se den en el aula. El lenguaje natural es importante para que el estudiante pueda comprender los enunciados, definiciones y ejercicios matemáticos. Por otro lado, es necesario que comprenda el lenguaje simbólico para que de manera autónoma logren interpretar los ejercicios, problemas o cualquier enunciado matemático. **(TP3, A6)**

Considero que es necesario enseñar el sistema de representación, el código propio de la matemática, para dar una visión completa de la materia. El simbólico es el lenguaje propio de la matemática, universal, que además concreta de manera concisa lo que uno quiere decir en palabras, modeliza. Y el natural a su vez, traduce y hace más cercano lo que los símbolos representan. Puede que el simbólico se vea más riguroso, pero eso es hasta que se le va dando el sentido y comprendiendo por qué hay ciertas reglas para la escritura en símbolos. Usaría ambos lenguajes según lo que necesite en la clase. **(TP3, A9)**

Por último, varios de los estudiantes señalan que la utilización de un tipo determinado de lenguaje, y su rigurosidad, depende del nivel educativo en el que se lleva a cabo la propuesta, por ejemplo:

> Si bien el uso simbólico es más complicado para los alumnos en una clase, como también el explicarlos, creo que este es más importante que el lenguaje natural (los alumnos están más habituados a este) ya que hace que ellos tengan un más amplio conocimiento sobre lo matemático. En mi caso preferiría utilizar el lenguaje simbólico, no sé si en manera predominante pero siempre presentando todo en este lenguaje para luego pasar al natural. **(TP3, A7)**

> Sobre el uso de ambos lenguajes creo que en una clase con alumnos de secundaria es importante que manejen el lenguaje simbólico, pero no sería tan estricto como si en niveles más avanzados. En mi caso comenzaría utilizando mayormente el lenguaje natural y de a poco introduciría en lenguaje simbólico. Igualmente, al alumno que le interese leer algún libro matemático le va a resultar imprescindible saber el lenguaje simbólico, sobre todo porque este lenguaje es universal. En cambio el lenguaje natural puede variar dependiendo de quién esté hablando sobre alguna cuestión matemática. En esto último me refiero a cuando se usan distintos términos para referirse a un mismo concepto. **(TP3, A8)**

> Sobre el uso del lenguaje simbólico y el natural, considero que ambos son importantes en una clase de matemática, pero considero que cuando los alumnos están teniendo sus primeras aproximaciones a lo que es el lenguaje

simbólico, en las clases debe predominar lo que es el lenguaje natural y a medida que uno avanza en la enseñanza debe ir usando cada vez más el lenguaje simbólico. **(TP3, A12)**

Respecto al uso lenguaje simbólico y el natural que suele darse en matemática, creo que el simbólico es más riguroso que el natural porque si estoy trabajando con alumnos de secundaria no están acostumbrados a trabajar las expresiones tan formalizadas con sus respectivas definiciones y podría llegar a confundirlos, o simplemente no se darían cuenta de que tema estamos tratando cuando por ahí ya es algo que conocen. En cambio, si estoy en un ámbito superior no sería tan riguroso trabajar con el uso del lenguaje simbólico. Como mencione antes, usaría un formato u otro dependiendo del nivel en que este trabajando. **(TP3, A16)**

4.3.2.3 Indicador I.3.

Este indicador tiene que ver con el conocimiento del contenido matemático que se pone en juego ante producciones propias. Nuestro trabajo incluyó la resolución de consignas que **no** les resultaron cognitivamente exigente, lo que permitió que los estudiantes puedan usar conocimiento matemático al resolver estas consignas. En esas resoluciones, en general **utilizan** lenguaje simbólico, pero con imprecisiones como mostramos anteriormente. A continuación, mostramos más evidencias relacionadas con la falta de precisión en la notación utilizada:

$3n + 1 = f(n)$

$3n + 1 = 6743$

$3n = 6743 - 1$

$n = (6742)/3$

$n \approx 2247,33$ *abs!*

Llamamos f(n) a la cantidad de fósforos necesarios para obtener figuras sin que sobren fósforos cuando n es natural. **(TP1, A1)**

Para saber si la figura puede tener 6743 fósforos puedo plantear la siguiente fórmula que me dice si estoy en la figura “n” voy a tener f(n) de fósforos. $f(n) = 3.(n - 1) + 4$. **(TP1, A12)**

Como a,b,c son enteros consecutivos voy a asignarles las siguientes expresiones: a = n-1 ; b = n ; c = n+1. **(TP2, A8)**

Tomo a, b, c son números enteros consecutivos a=a, b=a+1, c=a+2. **(TP2, A10)**

Asimismo, no es común que revisen las condiciones bajo las cuales se pueden aplicar ciertos resultados. A modo de ejemplo, para la misma consigna, incluimos la siguiente resolución.

En principio para hallar las raíces de una función cuadrática basta con usar la fórmula de la resolvente para saber si las raíces reales son 0, 1 o 2: $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Como a, b y c son números enteros consecutivos entonces podemos escribir $b = a + 1$ y $c = a + 2$. Remplazamos en la ecuación dada y obtenemos: $4ax^2 + 4(a + 1)x + a + 2 = 0$, y la resolvente nos queda como: $\frac{-(4a+4) \pm \sqrt{(4a+4)^2-4.4a(a+2)}}{2.4a}$

Para analizar las características de las raíces de la ecuación veo, en principio, cuantas raíces puede llegar a tener la ecuación. Esto lo realizo analizando el discriminante de la fórmula de la resolvente ya que, si este es 0, entonces hay una sola raíz real, si es mayor a 0 hay dos raíces reales y si es menor que 0 la ecuación no tendrá raíces reales. Entonces: $(4a + 4)^2 - 4.4a(a + 2) = 16a^2 + 32a + 16 - 16a^2 - 32a = 16$. El discriminante es 16 por lo tanto la ecuación va a tener dos raíces reales si a, b y c son números enteros consecutivos.

Ahora analizo cuales pueden llegar a ser esas dos raíces reales. $\frac{-(4a+4) \pm \sqrt{16}}{8a} =$

$x1 = \frac{-4a-4+4}{8a} = \frac{-4a}{8a} = \frac{-1}{2}$ y $x2 = \frac{-4a-4-4}{8a} = \frac{-4a-8}{8a} = \frac{4(-a-4)}{8a} = \frac{-a-4}{4a}$

Por lo tanto, no importan cuales sean a, b y c consecutivos, una de las raíces siempre va a ser -0,5. Y la otra raíz va a depender del valor de “a”.

Vemos cómo será la segunda raíz dependiendo de lo que valga a, (aclaramos que a tiene que ser distinto de 0 ya que si no la ecuación no sería una cuadrática).

Si a=-8, la raíz será 0.

Si -8< a<0, (-a-8)<0   y 4a<0, por lo tanto la raíz será positiva.

Si a>0, (-a-8)<0   y 4a>0, por lo tanto la raíz será negativa

Si a<-8, (-a-8)>0   y 4a<0, por lo tanto la raíz será negativa.

Por lo tanto, podemos decir que una raíz siempre será -0,5 y la otra va a depender del valor de a.

$$a \in (-\infty, -8) \cup (0, +\infty) \text{la raiz sera negativa;}$$

$$\text{si } a \in (-8{,}0), \text{la raiz sera positiva;}$$

$$\text{y si } a = -8, \text{la raiz sera } 0.$$

(TP2, A12)

Podemos observar entonces que el alumno no considera restricciones para aplicar la fórmula resolvente (coherente con no haberlo tomado desde la presentación de la propiedad), pero sí necesita mencionarlas al dar la respuesta. Por otro lado, no conforme con haber analizado que la ecuación tendrá dos soluciones reales distintas, necesita hallarlas para poder responder la consigna. Este último aspecto estuvo presente en varios de los trabajos entregados, analizan el valor del discriminante de la ecuación en el TP2 pero sin mostrar con qué intención. Necesitan llegar al valor de la solución para dar la respuesta.

Sea a, b y c números enteros consecutivos cualesquiera. En términos generales tenemos que: a = y; b = y + 1; c = y + 2

Entonces, reemplazando en la ecuación original, nos queda:

$4\ y\ x^2 + 4\ (y + 1)\ x + (y + 2) = 0$

Resolvemos la ecuación cuadrática: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x_{1,2}$ = - 4 (y + 1) ± √ [(4 y + 4)² - 4 . 4 y (y + 2)] / 2 . 4 y

Observemos que sucede dentro de la raíz (discriminante):

√ (16 y² + 32 y + 16 – 16 y² - 32 y) = √ 16 = 4.

Entonces, como el valor obtenido es positivo, tenemos dos soluciones:

x_1 = - 4 y - 4 - 4 / 8 y = -1/2

x_2 = - 4 y - 4 – 4 / 8 y = -1/2 - 1/y **(TP2, A1)**

Aplico la fórmula resolvente para hallar los valores de x que satisfacen la ecuación.

$$x_{1,2} = \frac{-4(a+1) \pm \sqrt{(4(a+1))^2 - 4(4a)(a+2)}}{2(4a)}, \qquad (III)$$

Opero sobre el discriminante $\Delta = 16(\mathrm{a}^2 + 2\mathrm{a} + 1) - 16\mathrm{a}^2 - 32a$, $\Delta = 16\mathrm{a}^2 + 32\mathrm{a} + 16 - 16\mathrm{a}^2 - 32^{\mathrm{a}}$. Entonces $\Delta = 16$.

Vuelvo a la expresión (III) $x_{1,2} = \frac{-4a-4\pm\sqrt{16}}{8a}$ → $x_1 = -\frac{1}{2}$ y $x_2 = -\frac{a+2}{2a}$

Respondiendo a la consigna, podemos decir que una característica que presentan las raíces de las ecuaciones de la forma $4ax^2 + 4bx + c = 0$, (*donde a, b y c son enteros consecutivos),* es que una de las raíces siempre será -1/2, mientras que la otra dependerá del valor que asuma, en este caso, el parámetro "*a*". **(TP2, A20)**

Por otro lado, en varios casos observamos que, si bien, el alumno define la ecuación cuadrática considerando que el coeficiente principal debe ser distinto de cero, no lo considera a la hora de la resolución de la consigna. Si bien toman en cuenta el análisis del discriminante (no para responder), no mencionan la restricción del coeficiente principal a la hora de presentar el desarrollo.

Sea a, b y c números enteros consecutivos cualesquiera. En términos generales tenemos que: a = y; b = y + 1; c = y + 2

Entonces, reemplazando en la ecuación original, nos queda:

$4\ y\ x^2 + 4\ (y + 1)\ x + (y + 2) = 0$

Resolvemos la ecuación cuadrática: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x_{1,2} = -\ 4\ (y + 1) \pm \sqrt{\ } [(4\ y + 4)^2 - 4\ .\ 4\ y\ (y + 2)]\ /\ 2\ .\ 4\ y$

Observemos que sucede dentro de la raíz (discriminante):

$\sqrt{\ } (16\ y^2 + 32\ y + 16 – 16\ y^2 - 32\ y) = \sqrt{\ } 16 = 4.$

Entonces, como el valor obtenido es positivo, tenemos dos soluciones:

$x_1 = -\ 4\ y - 4 - 4\ /\ 8\ y = -1/2$

$x_2 = -\ 4\ y - 4 – 4\ /\ 8\ y = -1/2 - 1/y$ **(TP2, A1)**

$a = n,\ b = n+1$ y $c = n+2$ con $n \in Z$

$$x_1 = \frac{-(n+1)+\sqrt{(n+1)^2 - n(n+2)}}{2n} = \frac{-n-1+\sqrt{\cancel{n^2}+\cancel{2n}+1-\cancel{n^2}-\cancel{2n}}}{2n} = \frac{-n-1+1}{2n} = \frac{-\cancel{n}}{2\cancel{n}} = \frac{-1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-(n+1)-\sqrt{(n+1)^2 - n(n+2)}}{2n} = \frac{-n-1-\sqrt{\cancel{n^2}+\cancel{2n}+1-\cancel{n^2}-\cancel{2n}}}{2n} = \frac{-n-1-1}{2n} = \frac{-n-2}{2n} = \frac{-\cancel{n}}{2\cancel{n}} - \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}n}$$

Las raíces son: $x_1 = -\frac{1}{2}$ y $x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{n}$. **(TP2, A7)**

Como a, b, c son enteros consecutivos voy a asignarles las siguientes expresiones:

a = n-1; b = n ; c = n+1

Ahora como pienso aplicar la formula resolvente para obtener las raíces, primero debo ver qué pasa con el discriminante (para saber qué tipo de raíces tiene el polinomio): $\Delta = b^2 - 4ac$

Notar que en nuestro caso b = n; a = n-1 y c = $\frac{n+1}{4}$ → $\Delta = n^2 - 4\,(n-1)\frac{(n+1)}{4} = n^2 - (n^2 - 1) = 1$

Como el discriminante es 1 concluyo que la ecuación tiene dos raíces reales distintas y además, por tener coeficientes enteros las raíces son racionales. **(TP2, A8)**

En lo referido a **explicar** en la resolución, pudimos apreciar que cuando utilizan el lenguaje natural lo hacen para "leer" (en lenguaje coloquial) su escrito sin aportar más información. Por otra parte, encontramos explicaciones que se basan en mostrar la propia resolución y no para que otra persona entienda lo que realizó. Suelen quedar conformes explicando qué utilizaron para dar la respuesta, pero no por qué pudieron hacerlo.

Sean *a=n, b=n+1 y c=n+2, con a, b y c* números enteros consecutivos, con $n \in Z$. *En* este caso, *con* $n \neq 0$. La forma de la ecuación es*:* $4nx^2 + 4(n+1)x + (n+2) = 0$. Luego, realizo la resolvente*:*

$$x_1, x_2 = \frac{-4(n+1) \pm \sqrt{4^2(n+1)^2 - 4\times 4n \times (n+2)}}{2\times 4\times n} \Leftrightarrow \frac{-(4n+4) \pm \sqrt{16n^2 + 32n + 16 - 16n^2 - 32n}}{8n}$$

$$\Leftrightarrow x_1, x_2 = \frac{-(4n+4) \pm \sqrt{16}}{8n} \Leftrightarrow \frac{-(4n+4) \pm 4}{8n} \Leftrightarrow \; x_1 = \frac{-4n-4+4}{8n} \Leftrightarrow \frac{-4n}{8n} = -\frac{1}{2}$$

$x_2 = \dfrac{-4n-4-4}{8n} \Leftrightarrow \dfrac{-4n-8}{8n} = -\dfrac{4(n+2)}{8n} = -\dfrac{(n+2)}{2n} = -\dfrac{c}{2a}$. Las raíces de todas las ecuaciones de la forma $4ax^2 + 4bx + c = 0$ *son* $x_1 = -\dfrac{1}{2}$ *y* $x_2 = -\dfrac{c}{2a}$. **(TP2, A4)**

Primero factorizo el polinomio para ver si facilita las cuentas: $4\left(a\,x^2 + bx + \frac{c}{4}\right) = 0 \quad ax^2 + bx + \frac{c}{4} = 0$. Por otro lado como a, b, c son enteros consecutivos voy a asignarles las siguientes expresiones: a = n-1; b = n ; c = n+1.

Ahora como pienso aplicar la formula resolvente para obtener las raíces, primero debo ver qué pasa con el discriminante (para saber qué tipo de raíces tiene el polinomio): $\Delta = b^2 - 4ac$

Notar que en nuestro caso b = n; a = n-1 y c = $\frac{n+1}{4}$, $\Delta = n^2 - 4\,(n-1)\,\frac{(n+1)}{4} = n^2 - (n^2-1) = 1$. Como el discriminante es 1 concluyo que la ecuación tiene dos raíces reales distintas y además, por tener coeficientes enteros las raíces son racionales. Ahora pues como el discriminante es 1 puedo usar la formula resolvente: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $x_{1,2} = \frac{-n \pm \sqrt{1}}{2(n-1)}$, $x_1 = \frac{-n+1}{2(n-1)} = -\frac{1}{2}$

La primera raíz que obtengo es constante e igual a - $\frac{1}{2}$ independientemente de los valores de a, b y c. $x_2 = \frac{-n-1}{2(n-1)} = -\frac{1}{2}\frac{(n+1)}{(n-1)}$. **(TP2, A8)**

En general, tal como se puede ver en la cita anterior, los estudiantes presentaron la resolución de la consigna considerando que la respuesta debían ser las soluciones de la ecuación. Aunque hayan analizado condiciones en el desarrollo, no concluían la actividad hasta poder hallar las soluciones de manera explícita. Análogamente, esto se puede observar en las siguientes resoluciones:

$$x_{1,2} = -\frac{4b \pm \sqrt{(4b)^2 - 4(4a)c}}{2(4a)} = -\frac{4b \pm \sqrt{16b^2 - 16ac}}{8a} = \frac{4b \pm \sqrt{16(b^2 - ac)}}{8a} = \frac{4b \pm \sqrt{16}\sqrt{b^2 - ac}}{8a}$$

$$= \frac{-4b \pm 4\sqrt{b^2 - ac}}{8a} = \frac{\cancel{4}(-b \pm \sqrt{b^2 - ac})}{\cancel{8}a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{2a},$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - ac}}{2a}$$

$$a = n,\ \ b = n+1 \text{ y } c = n+2 \text{ con } n \in Z$$

$$x_1 = \frac{-(n+1)+\sqrt{(n+1)^2 - n(n+2)}}{2n} = \frac{-n-1+\sqrt{\cancel{n}^2+\cancel{2n}+1-\cancel{n}^2-\cancel{2n}}}{2n} = \frac{-n-1+1}{2n} = \frac{-\cancel{n}}{2\cancel{n}} = \frac{-1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-(n+1)-\sqrt{(n+1)^2 - n(n+2)}}{2n} = \frac{-n-1-\sqrt{\cancel{n}^2+\cancel{2n}+1-\cancel{n}^2-\cancel{2n}}}{2n} = \frac{-n-1-1}{2n} = \frac{-n-2}{2n} = \frac{-\cancel{n}}{2\cancel{n}} - \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}n}$$

Las raíces son: $x_1 = -\frac{1}{2}$ y $x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{n}$ **(TP2, A7)**

a, b, c son números enteros consecutivos a=a, b=a+1, c=a+2

Reemplazando en $4ax^2 + 4bx + c = 4ax^2 + 4(a+1)x + a + 2 = 4(ax^2 + (a+1)x) + a + 2$ → Igualamos la función a 0 para buscar raíces $ax^2 + (a+1)x + \frac{a+2}{4}$=0

Usamos formula resolvente: $x = \frac{-(a+1)\pm\sqrt{(a+1)^2 - 4a\frac{(a+2)}{4}}}{2a}$ $x = \frac{-(a+1)\pm 1}{2a}$

X1 $= \frac{-a-1-1}{2a} = \frac{-a-2}{2a} = \frac{-(a+2)}{2a} = \frac{-c}{2a}$ X2= $-\frac{a}{2a} = -\frac{1}{2}$

Llegando a la conclusión de que todas las ecuaciones de la forma 4ax2+4bx+c =0 tienen como raíz a x=-1/2 y a x= -c/2a. **(TP2, A10)**

En estos ejemplos de resoluciones, podemos ver cómo de distintas maneras los estudiantes consideran resuelta la consigna cuando pueden hallar las soluciones de la ecuación.

Sean a, b, y c números enteros consecutivos, quiero ver como serán las raíces de todas las ecuaciones de la forma $4ax^2 + 4bx + c = 0$.

Lo primero que hago es utilizar la formula resolvente para ver que expresión tienen sus raíces. Entonces: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Usando los términos de la ecuación me queda: $x_{1,2} = \frac{-4b \pm \sqrt{(4b)^2 - 4.4ac}}{2.4a}$.

Luego voy resolviendo la expresión algebraica hasta obtener la expresión correspondiente a las raíces de la ecuación:

$$x_{1,2} = \frac{-4b \pm \sqrt{(4b)^2 - 4.4ac}}{2.4a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-4b \pm \sqrt{16b^2 - 16ac}}{8a} \rightarrow \text{resolvi la potencia}$$

$$x_{1,2} = \frac{-4b \pm \sqrt{16(b^2 - ac)}}{8a} \rightarrow \text{saque el 16 de factor comun}$$

$$x_{1,2} = \frac{-4b \pm \sqrt{16}.\sqrt{(b^2 - ac)}}{8a} \rightarrow \text{use la distributividad de la raiz y saque afuera } \sqrt{16}$$

$$x_{1,2} = \frac{-4b \pm 4.\sqrt{(b^2 - ac)}}{8a}$$

$$x_{1,2} = \frac{4\left[-b \pm \sqrt{(b^2 - ac)}\right]}{8a} \rightarrow \text{saque el 4 de factor comun y lo simplifique con el 8}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - ac)}}{2a}$$

Ahora nos quedan las raíces de la ecuación de la forma: NO analiza el discriminante.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - ac}}{2a}$$

Ahora pienso en tres números enteros n, n+1 y n+2 (números consecutivos para todo $n \in Z_{\neq 0}$)

Luego reemplazo a=n, b=n+1 y c=n+2 (con n distinto de cero) en las expresiones que obtuve antes y vuelvo a operar algebraicamente:

Raíz x_1:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-(n+1)+\sqrt{(n+1)^2-n(n+2)}}{2n} \rightarrow \text{resuelvo el cuadrado y aplico prop distributiva}$$

$$x_1 = \frac{-n-1+\sqrt{n^2+2n+1-n^2-2n}}{2n} \rightarrow \text{aplico prop cancelativa}$$

$$x_1 = \frac{-n-1+\sqrt{1}}{2n}$$

$$x_1 = \frac{-n-1+1}{2n}$$

$$x_1 = \frac{-n}{2n}$$

$$x_1 = \frac{-1}{2}$$

Raíz x_2:

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-(n+1)-\sqrt{(n+1)^2-n(n+2)}}{2n} \rightarrow \text{resuelvo el cuadrado y aplico prop distributiva}$$

$$x_2 = \frac{-n-1-\sqrt{n^2+2n+1-n^2-2n}}{2n} \rightarrow \text{aplico prop cancelativa}$$

$$x_2 = \frac{-n-1-\sqrt{1}}{2n}$$

$$x_2 = \frac{-n-1-1}{2n}$$

$$x_2 = \frac{-n-2}{2n}$$

Finalmente las raíces de todas las ecuaciones de la forma $4ax^2+4bx+c=0$ con a, b y c enteros consecutivos (donde a=n, b=n+1 y c=n+2): son de la forma: $x_1 = \frac{-1}{2}$ y $x_2 = \frac{-2-n}{2n}$ con $n \neq 0$. **(TP2, A14)**

En este caso, vuelve a aparecer fuertemente la utilización de ejemplos para explicar. Esto sucede en dos direcciones: por un lado, utilizan casos particulares para orientar la resolución, y por el otro, a modo de verificación.

Las soluciones se pueden encontrar con una fórmula especial que se llama “Fórmula resolvente”, para poder utilizarla tenemos que identificar los coeficientes de la ecuación y reemplazarlos en la ecuación con su respectivo signo. *ejemplo* $x^2 - x - 2 = 0$ en esta ecuación vemos que a = 1 , b = -1 y c = -2 . Ahora reemplacemos en la fórmula resolvente $X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$X_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\, x\, 1\, x\, (-2)}}{2\, x\, 1}$

manejo algebraico $X_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$ $X_1 = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$, $X_2 = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$ *fin del ejemplo*. **(TP2, A3)**

Otros ejemplos de la utilización de casos particulares a modo de explicación:

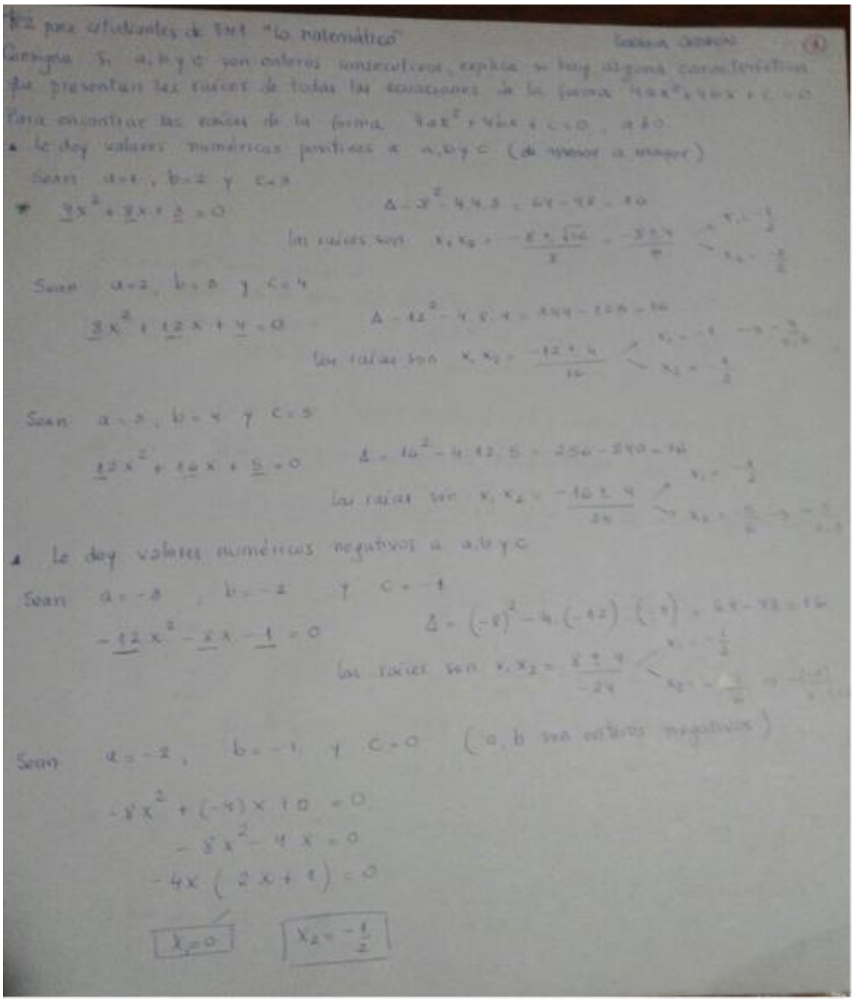


Imagen 5. Extracto de la resolución de **TP2, de A4**

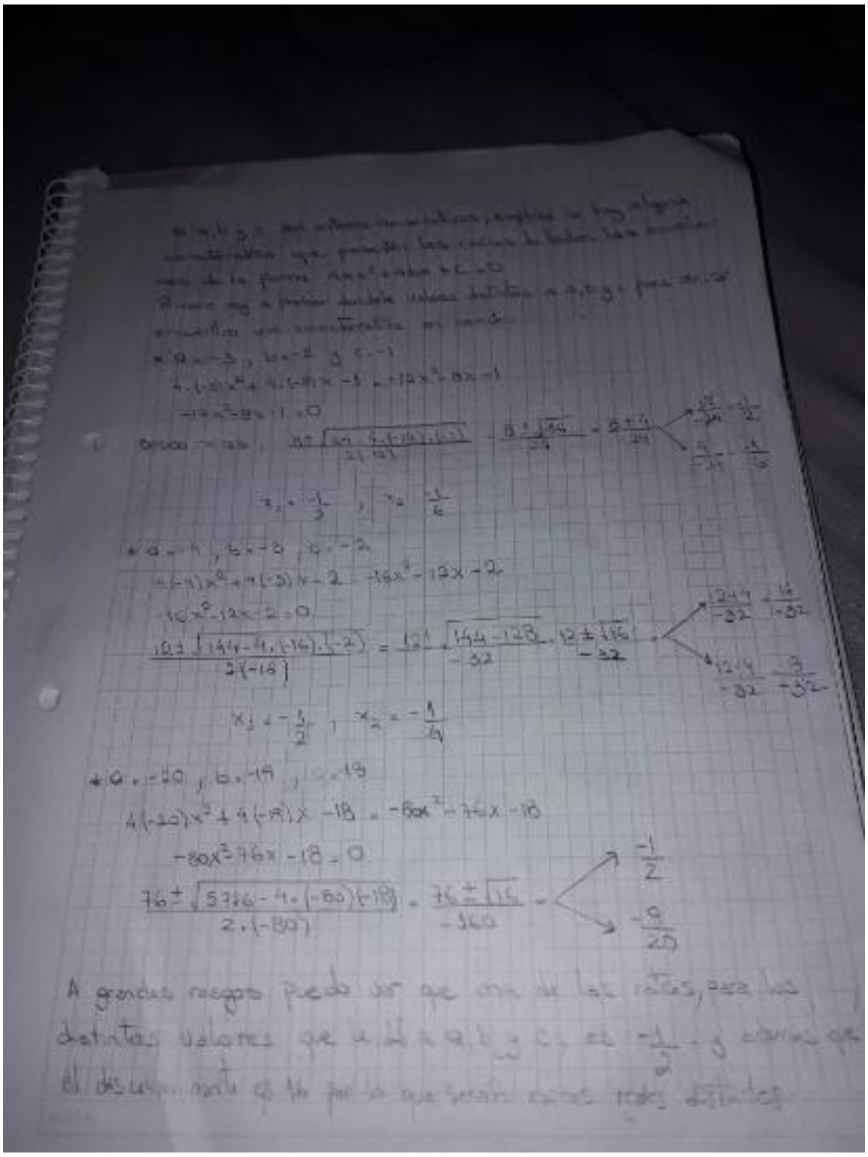
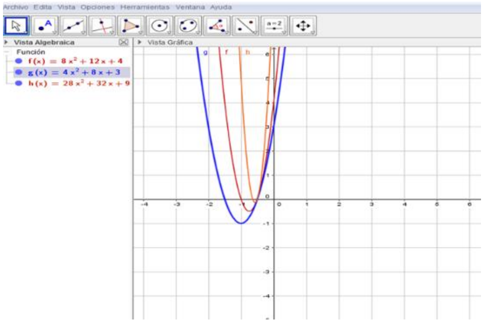
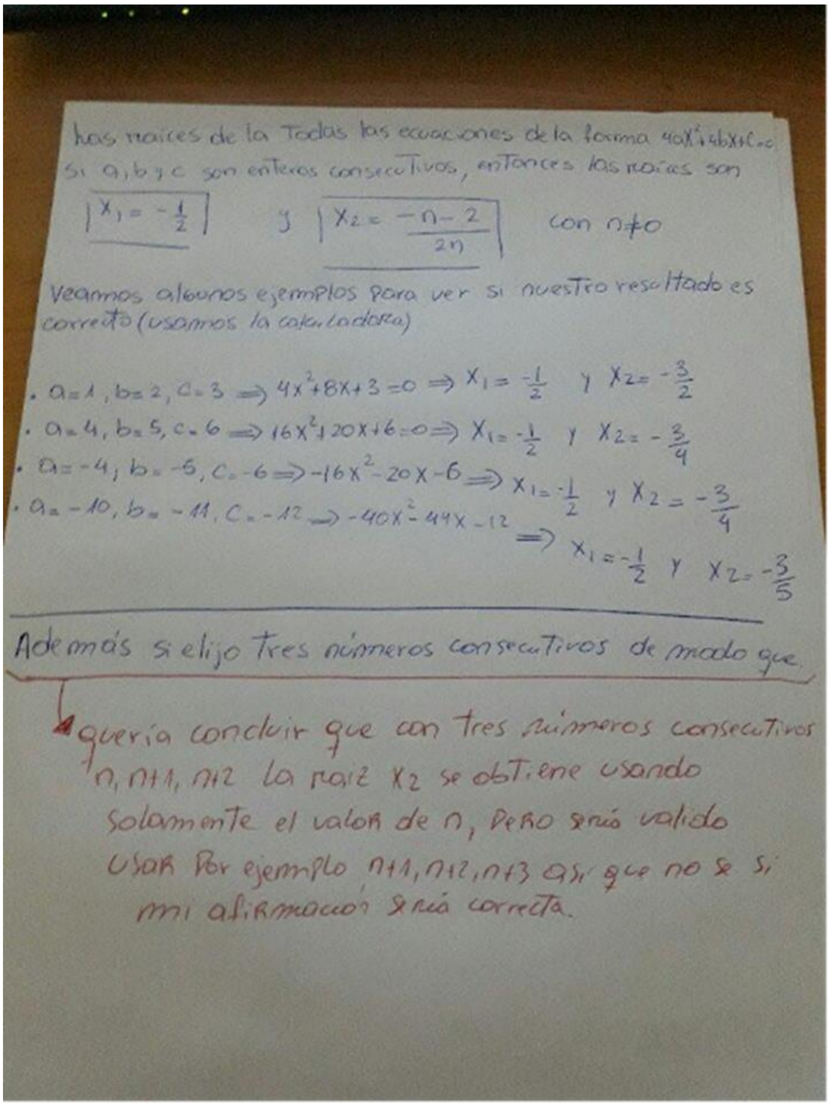


Imagen 6. Extracto de la resolución del **TP2, del A7**

Utilizando Geogebra realicé el grafico con números consecutivos más grandes para ver si seguía cumpliendo que una de las raíces sea x=-1/2. Sin embargo nada se podía deducir a partir del grafico sobre la otra raíz. Por último a partir de un planteo algebraico se pudo llegar a una afirmación más general.



(TP2, A10)


~~las raíces de la~~ Todas las ecuaciones de la forma $4aX^2+4bX+C=0$ si a, b y c son enteros consecutivos, entonces las raíces son $\boxed{X_1 = -\frac{1}{2}}$ y $\boxed{X_2 = \frac{-n-2}{2n}}$ con $n \neq 0$

Veamos algunos ejemplos para ver si nuestro resultado es correcto (usamos la calculadora)

- $a=1, b=2, c=3 \Rightarrow 4x^2+8x+3=0 \Rightarrow X_1 = -\frac{1}{2}$ y $X_2 = -\frac{3}{2}$
- $a=4, b=5, c=6 \Rightarrow 16x^2+20x+6=0 \Rightarrow X_1 = -\frac{1}{2}$ y $X_2 = -\frac{3}{4}$
- $a=-4, b=-5, c=-6 \Rightarrow -16x^2-20x-6 \Rightarrow X_1 = -\frac{1}{2}$ y $X_2 = -\frac{3}{4}$
- $a=-10, b=-11, c=-12 \Rightarrow -40x^2-44x-12 \Rightarrow X_1 = -\frac{1}{2}$ y $X_2 = -\frac{3}{5}$

Además si elijo tres números consecutivos de modo que.

quería concluir que con tres números consecutivos n, n+1, n+2 la raíz X_2 se obtiene usando solamente el valor de n, pero sería valido usar por ejemplo n+1, n+2, n+3 así que no se si mi afirmación sería correcta.

Imagen 7. Extracto de la resolución del TP2, **del A14**

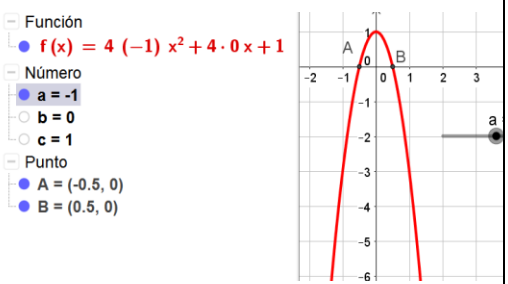
Lo primero que hice fue utilizar el geogebra para explorar el comportamiento de la función al variar los parámetros a, b y c teniendo en cuanta la relación existente entre ellos de acuerdo a la consigna.

1. Cree un deslizador “a”;
2. Definí los parámetros b y c: b = a+1, y c = a+2;
3. Si bien el enunciado dice que a, b y c son números consecutivos, lo cual implica que son enteros y con el software estaríamos realizando una variación continua. Esto no representa ningún problema ya que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. Es decir, si la gráfica muestra cierto comportamiento para a, b y c $\in \mathbb{R}$, entonces también se observará el mismo patrón para a, b y c $\in \mathbb{Z}$.

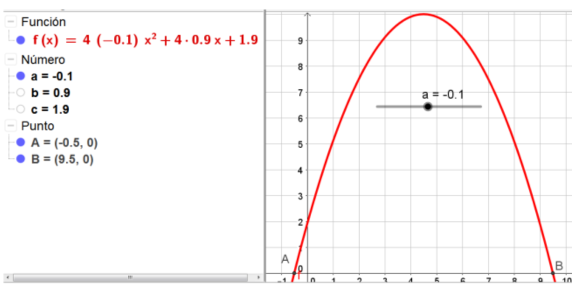
   Introduje la función dada, marqué los puntos de intersección (A y B) de la gráfica con el eje de las abscisas y comencé a variar el parámetro “a”.

Así obtuve los siguientes gráficos:

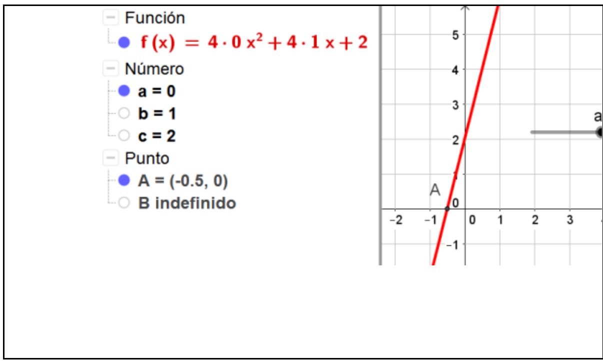
<table>
<tr>
<td>
Gráfico 1

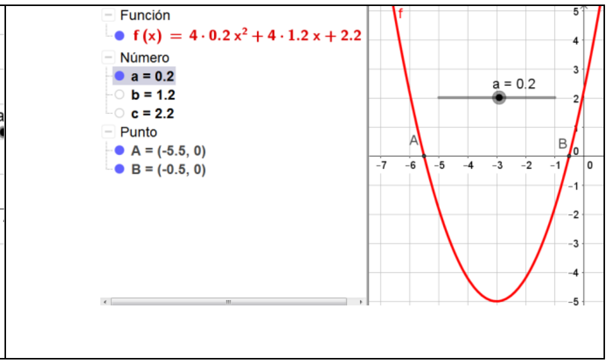


</td>
<td>
Gráfico 2



</td>
</tr>
<tr>
<td>Gráfico 3</td>
<td>Gráfico 4</td>
</tr>
</table>





4. En base a la exploración pude notar que existe una raíz fija (x = -1/2) mientras que la otra se va desplazando conforme van cambiando los valores de a, b y c.

    i. Para a < 0 (gráficos 1 y 2) la raíz x =-1/2 designada por el punto A, no se modificó. En ambos casos las ramas de la parábola van hacia -∞ y el vértice de la parábola queda a derecha del punto A.

    ii. Para a = 0 no tenemos una cuadrática, nos queda la lineal 4bx+c =0 (gráfico 3), esta lineal tiene una raíz en x = -1/2, denotada por el punto A.

    iii. Para a > 0 (gráfico 4), la cuadrática sigue teniendo una raíz en x = -1/2 pero esta vez designada por el punto B. En este caso las ramas de la parábola van hacia +∞ y el vértice se encuentra a izquierda del punto B.

5. A partir de este primer análisis cualitativo me surgieron dos preguntas:

    I. ¿A qué se debe qué esta cuadrática tiene una raíz fija en x = -1/2?

    II. ¿Es posible construir una cuadrática que tenga una raíz fija en cualquier otro punto? Si es así, ¿Cómo lo hacemos?

(TP2 A20)

Por último, lo relacionado a la **reflexión** del trabajo realizado se observa que se centra en el análisis de lo que obtuvo como respuesta y no en la forma de trabajo que eligió.

> Creo que puedo utilizar en este ejercicio la fórmula resolvente, ya que esta fórmula se utiliza para funciones de segundo grado. Y para este ejercicio es importante su utilización. Pude ver al final del ejercicio que las raíces se podían hallar solo obteniendo el valor del coeficiente a, pero hallar las raíces me sirvió para clasificarlas. Dependiendo del valor del coeficiente a, la raíz será positiva, negativa o cero. **(TP2, A6)**

> Dado que queremos hallar las características de las raíces de una función cuadrática es fundamental utilizar la fórmula de Bhaskara para poder así encontrar dichas raíces y ver de las soluciones encontradas cual o cuales características quedan demostradas. **(TP2, A7)**

> Tengo certeza de utilizar la formula resolvente para hallar las raíces cuadráticas de la función dada. Ya que es la única forma para poder resolver ecuaciones cuadráticas completas es decir con a, b y c números reales distintos de cero. **(TP2, A10)**

> Tengo la certeza de utilizar la fórmula en la resolución ya que si quisiera resolver la ecuación de la manera tradicional, como una ecuación lineal,

> quedaría una "solución" dependiendo de la variable, lo que no me daría lo que necesito. Al resolver esta ecuación y tener los tres términos no nulos, es condición necesaria utilizar esta fórmula, además de que la demostración me avala su uso. Al obtener las soluciones de esa manera puedo reemplazar el valor hallado y así verificar si cumple con lo pedido. Como esto pasa y simplifica el "completar cuadrados" para cada ecuación distinta, el uso de la fórmula es factible y muy útil. **(TP2, A19)**

Esto implica también que, si bien hacen una reflexión sobre el desarrollo de la consigna, no reparan en las condiciones necesarias para aplicar propiedades o utilizar resultados específicos.

> Creo que es imprescindible utilizar la fórmula resolvente para resolver ecuaciones cuadráticas, ya que, sin ella no es posible ver, por ejemplo, que en todos los casos, sean cuales sean los números enteros consecutivos utilizados, el discriminante siempre va a ser positivo, por lo cual obtendremos dos resultados distintos de x, y además que una de las raíces siempre será -1/2. **(TP2, A1)**

> Haber aplicado el resultado de la fórmula resolvente para hallar las características de las raíces de todas las ecuaciones de la forma $4ax^2 + 4bx + c = 0$. Fue muy conveniente, tengo certeza de que podía usarla ya que la formula me devuelve las raíces reales de un polinomio cuadrático, quizás tendría restricciones si no supiera que mi polinomio original pertenece a enteros, pues era condición que mis coeficientes sean enteros

consecutivos. De no ser por esto tendría que mirar el discriminante de la formula y pedir condiciones. **(TP2, A2)**

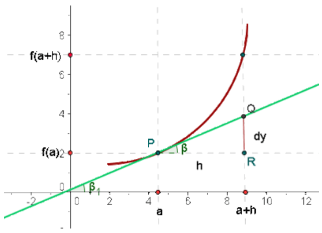
Creo que puedo utilizar en este ejercicio la fórmula resolvente, ya que esta fórmula se utiliza para funciones de segundo grado. Y para este ejercicio es importante su utilización. Pude ver al final del ejercicio que las raíces se podían hallar solo obteniendo el valor del coeficiente a, pero hallar las raíces me sirvió para clasificarlas. Dependiendo del valor del coeficiente a, la raíz será positiva, negativa o cero. **(TP2, A6)**

Si, se puede usar la propiedad. La fórmula resolvente puede ser utilizada siempre que se cumpla que tengas un polinomio de grado dos. En este caso como quería ver que sucedía con las raíces y es un polinomio de grado 2 la pude utilizar. **(TP2, A11)**

Tengo la certeza de que se puede usar la fórmula resolvente dado que se utiliza para hallar las raíces de una ecuación cuadrática. Esta fórmula ayuda a poder analizar las raíces que tengan ya sean positivas, negativas o cero, para los valores que tome n o dependiendo de los coeficientes de la ecuación. Aunque quizás no sea la única forma de resolver esta ecuación o de analizar las raíces. **(TP2, A15)**

4.3.2.4 Indicador I.4.

A diferencia del indicador anterior, éste se enmarca en la resolución de tareas cognitivamente exigentes, es decir, aquellas en las que el sujeto no sabe cómo resolverlas de manera inmediata. Los resultados para este indicador son casi nulos. Ante este nuevo tipo de tareas los estudiantes no **usan** recursos que les sean útiles. Suelen no entender el enunciado y no advertirlo. Por otro lado, encontramos, por ejemplo que *la resolución* que presentan *es* la explicación del enunciado.

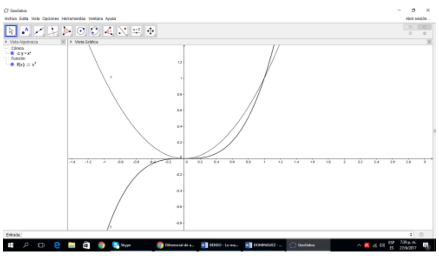
> Consigna 1: Sea f(x) una función derivable. Diferencial de una función correspondiente al incremento h de la variable independiente, es el producto f'(x) · h. Se representa por dy.
>
> $dy = f'(x) \cdot h \quad dy = f'(x) \cdot dx$
>
> 
>
>
> $f'(x) = tg\alpha = \frac{QR}{PR} = \frac{QR}{h}$
>
> $QR = f'(x) \cdot h; \qquad QR = (dy)_{x=a}$
>
> La diferencial en un punto representa el incremento de la ordenada de la tangente, correspondiente a un incremento de la variable independiente. Para una función *y=f(x)* para un valor inicial x_0 se tiene la pendiente de la línea recta tangente en las coordenadas $[x_0, f(x_0)]$, dada por la $m=f'(x_0)$. Cuya

ecuación de la línea recta tangente queda entonces definida como: $y-f(x_0)=m(x-x_0)$.

Sea $y=f(x)$ una función derivable en un intervalo abierto que contiene al número x. Se define a la diferencial de x como dx, cualquier número real diferente de cero. Se define a la diferencial de y como dy, dado por $dy=f'(x)\,dx$. Luego la expresión $(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x2})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x1})/(\boldsymbol{x2}-\boldsymbol{x1}))\,.(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x1})+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x1})$ es la forma de la recta donde $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x2})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x1})/(\boldsymbol{x2}-\boldsymbol{x1})$ es la pendiente y $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x1})$ es la ordenada al origen.

Consigna 2: Sean: $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots+a_nx^n$ y $g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots\ldots+b_mx^m$ con n,m pertenecientes a los números naturales.

Entonces f(a)=g(a) y f(b)=g(b). Supongamos las siguientes funciones polinómicas $f(x)=x^2$ y $g(x)=x^3$ y las graficamos en el geogebra.



En este ejemplo podemos observar como en el intervalo (a,b) la función f es mayor que la función g en todos sus puntos. Supongo que para que todos los valores entre a y b coincidan f=g. Para que en el intervalo (a,b) se cumpla que un punto intermedio f sea mayor que g tiene que pasar f(c) tiene que ser mayor que g(c), con c punto intermedio entre a y b. y cualquier otro punto intermedio entre a y b, debe cumplir lo mismo.

$f(x)=x^2$ y $g(x)=x^3$, f>g

Luego $x^2>x^3$

Luego $x^2(-x+1)>0$

Caso 1: x>0 ó 1>x, solución: (0,1)

Caso 2: x<0 ó 1<x, solución: vacía

Luego en el intervalo (0,1), sucede que f>g.

(TP3, A1)

Si la función coincide en todos los valores de f y g entonces f=g.

Pero f≠g Por lo tanto no es posible que f y g coincidan en todos los valores del intervalo. Sean f y g dos funciones polinómicas distintas que cumplen que toman los mismos valores en $x = a$ y en $x = b$. Si se cumple que

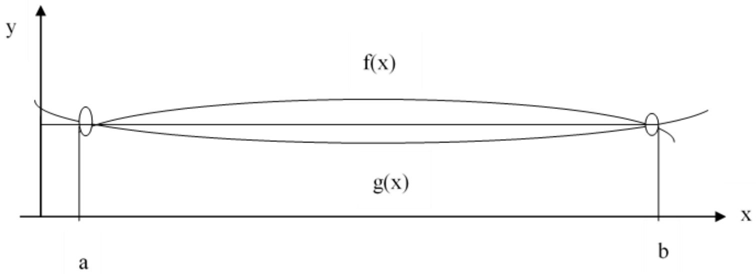
$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f(x_0) > \frac{g(x_1)g(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + g(x_0)$$

Es decir, la recta tangente de f es mayor a la recta tangente de g en el intervalo dado

entonces en todos los puntos entre a y b la f siempre es mayor que g. **(TP3, A6)**

Si f y g son dos funciones polinómicas distintas que cumplen que toman los mismos valores en x = a y x = b y que además f es la recta que contiene a los puntos (a; g(a)) y (b; g (b)), entonces en todos los puntos entre a y b, la f siempre es mayor que g. **(TP3, A10)** f y g dos funciones polinómicas distintas que cumplen que toman los mismos valores en x = a y x = b. Resolución de la consigna:

a) Es posible que f y g, funciones polinómicas, coincidan en todos los valores entre a y b. Esto quiere decir que una de las funciones sería cóncava hacia abajo y la otra sería cóncava hacia arriba. De este modo, ambas funciones tomarían los mismos valores, que se encuentran ubicados entre x = a y x = b.



(TP3, A13)

Proposición: Si f y g son dos funciones polinómicas distintas que cumplen que toman los mismos valores en x=a y x=b y que además f(xi)<g(xi) $\forall\ xi \in \mathbb{N}$, entonces en todos los puntos entre a y b, f siempre es mayor que g.

Demostración: Si f y g son dos funciones polinómicas distintas y además f y g toman los mismos valores en x=a y x=b.

Si trazamos rectas paralelas entre a y b y en cada una se verifica que f(xi)-g(xi)>0 entonces f>g entre a y b. **(TP3, A14)**

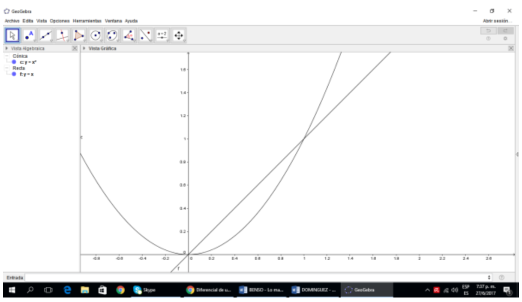
Es posible que dos funciones distintas tomen valores iguales en dos extremos de un intervalo (a,b) y dentro de él también coincidan todos sus valores. Por ejemplo podemos ejemplificar esto con una función cualquiera f(x) y luego otra g(x) función partida determinada por f(x) en un intervalo cerrado [a,b] y h(x) en los demás puntos. Dicha función tomaría los mismos valores en todo el cerrado [a,b]. **(TP3, A18)**

Cuando la consigna exige producir una pequeña demostración propia, reaparece el uso de ejemplos como recurso para demostrar, sin advertir que no están logrando la generalidad exigida en esa tarea o bien realizan ciertos pasos sin concluir.

Sean: $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots+a_nx^n$ y $g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots\ldots+b_mx^m$ con n,m pertenecientes a los números naturales.

Entonces f(a)=g(a) y f(b)=g(b)

Supongamos las siguientes funciones polinómicas f(x)=x y $g(x)=x^2$ y las graficamos en el geogebra.



En este ejemplo podemos observar como en el intervalo (a,b) la función f es mayor que la función g en todos sus puntos.

Supongo que para que todos los valores entre a y b coincidan f=g.

Para que en el intervalo (a,b) se cumpla que un punto intermedio f sea mayor que g tiene que pasar f(c) tiene que ser mayor que g(c), con c punto intermedio entre a y b. y cualquier otro punto intermedio entre a y b, debe cumplir lo mismo.

$f(x)=x$ y $g(x)=x^2$, $f>g$

Luego $x>x^2$

Luego $x(-x+1)>0$

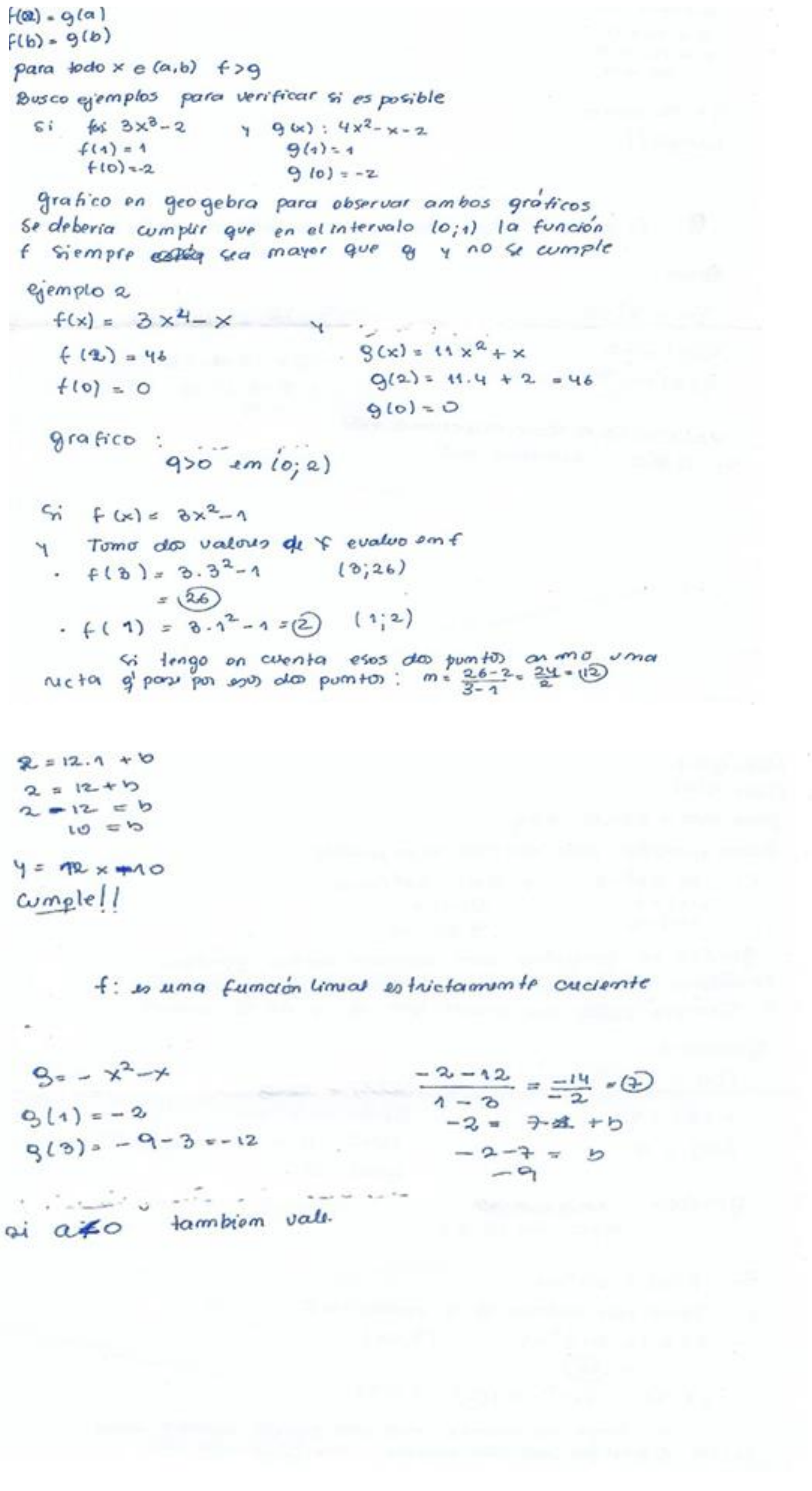
Caso 1: $x>0$ ó $1>x$, solución: $(0,1)$

Caso 2: $x<0$ ó $1<x$, solución: vacía

Luego en el intervalo (0,1), sucede que $f>g$.

(TP3, A5)

A continuación, se puede apreciar otros ejemplos de un estudiante que utiliza los ejemplos a modo de resolución:

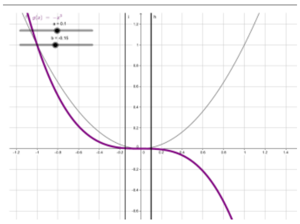


f(a) = g(a)
f(b) = g(b)
para todo x ∈ (a,b) f > g
Busco ejemplos para verificar si es posible
si $f(x)$ $3x^3 - 2$ y $g(x): 4x^2 - x - 2$
$f(1) = 1$ $g(1) = 1$
$f(0) = -2$ $g(0) = -2$
gráfico en geogebra para observar ambos gráficos
se debería cumplir que en el intervalo (0;1) la función f siempre ~~esté~~ sea mayor que g y no se cumple
ejemplo 2
$f(x) = 3x^4 - x$ y $g(x) = 11x^2 + x$
$f(2) = 46$ $g(2) = 11.4 + 2 = 46$
$f(0) = 0$ $g(0) = 0$
gráfico: g>0 em (0;2)
Si $f(x) = 3x^2 - 1$
y Tomo dos valores de f evaluo em f
· $f(3) = 3.3^2 - 1 = 26$ (3;26)
· $f(1) = 3.1^2 - 1 = 2$ (1;2)
Si tengo en cuenta esos dos puntos como una recta q' pase por esos dos puntos: $m = \frac{26-2}{3-1} = \frac{24}{2} = 12$
$2 = 12.1 + b$
$2 = 12 + b$
$2 - 12 = b$
$10 = b$
$y = 12x - 10$
cumple!!
f: es una función lineal estrictamente creciente
$g = -x^2 - x$ $\frac{-2-12}{1-3} = \frac{-14}{-2} = 7$
$g(1) = -2$ $-2 = 7 \cdot 1 + b$
$g(3) = -9 - 3 = -12$ $-2 - 7 = b$
-9
si $a \neq 0$ también vale.

Imagen 8. Extracto de resolución de **TP3, de A10.**

¿Es posible que f y g coincidan en todos los valores entre a y b?

Es posible que f y g coincidan en todos los valores entre a y b. Veamos un ejemplo



Estas funciones son iguales en el intervalo [-0,015; 0,015] . **(TP3, A14)**

Por otro lado, como hemos visto en algunas evidencias anteriormente citadas, hemos observado que los estudiantes utilizan gráficos para resolver lsa consignas (en particular, del TP3), sin darse cuenta que pierden la generalidad y no demuestran lo pedido.

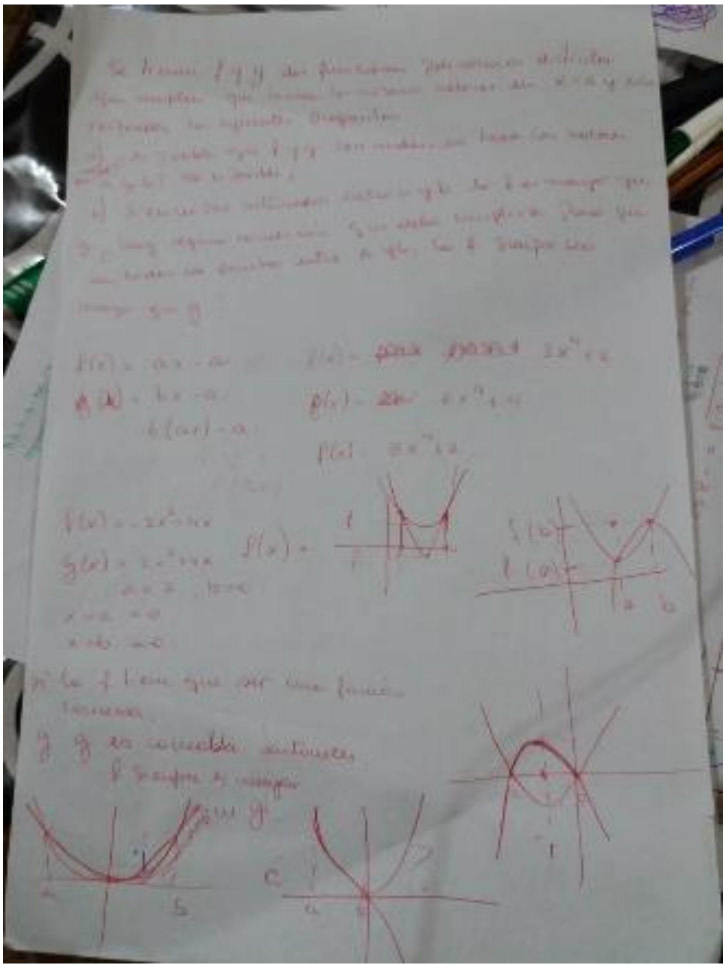


Imagen 9. Extracto de resolución de consigna 2 **TP3, de A2**

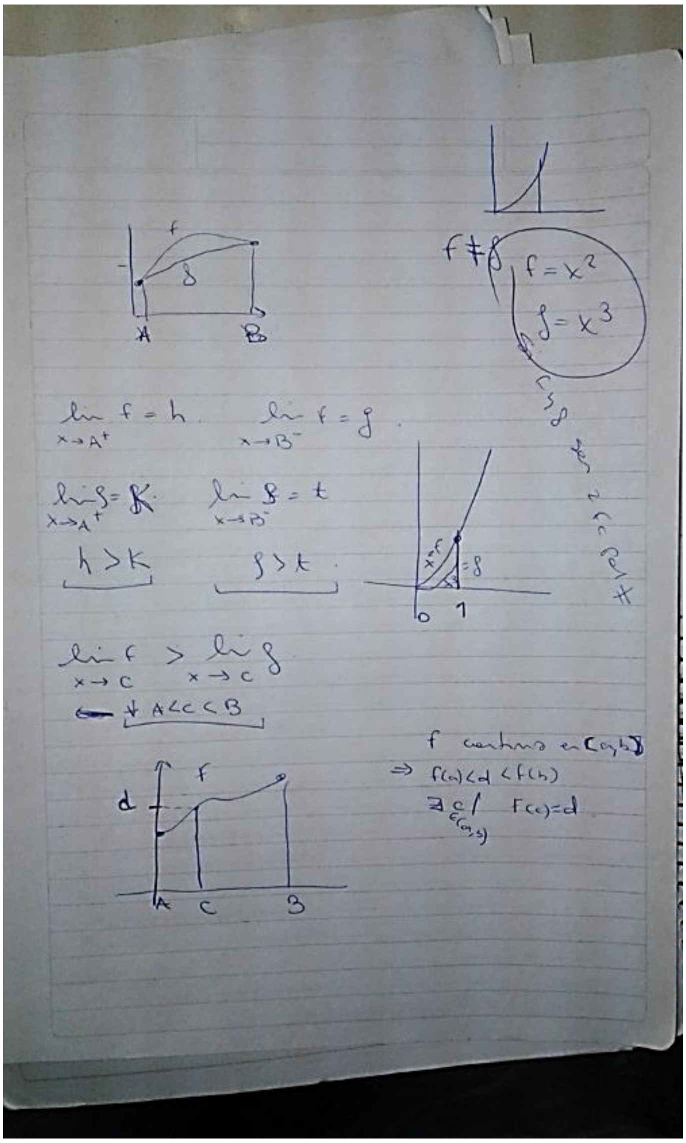


Imagen 10. Extracto de resolución de **TP3, de A6**

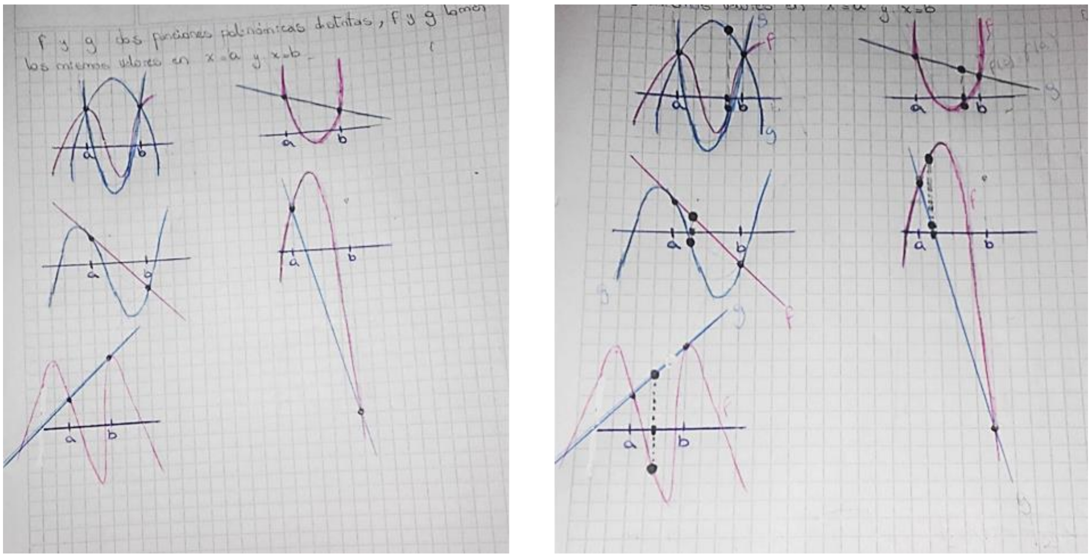


Imagen 11. Extracto de resolución de **TP3, de A2**

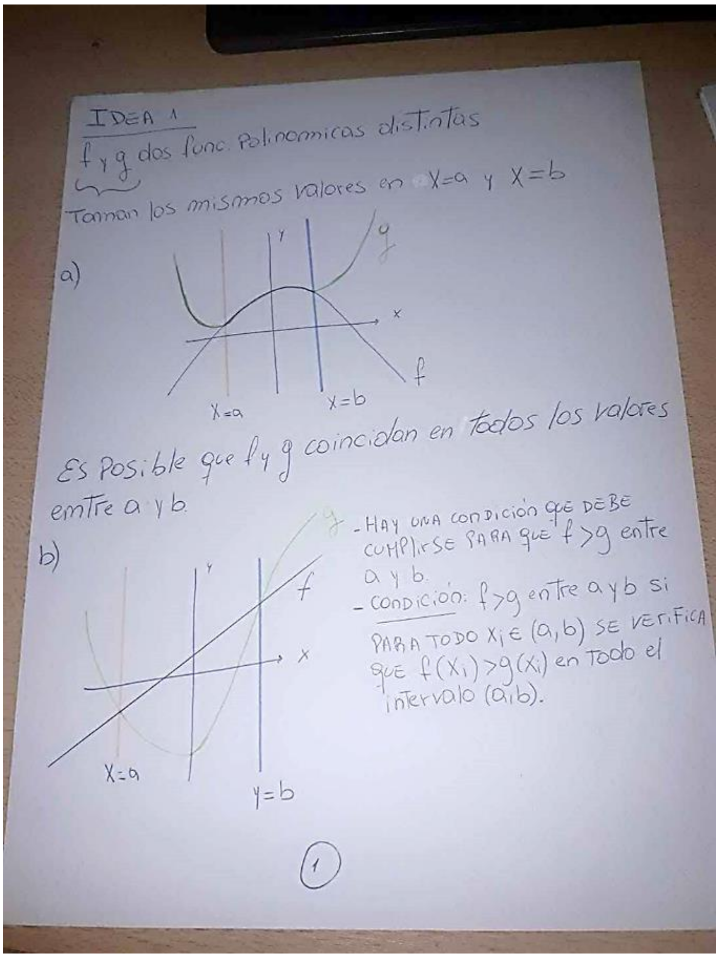


Imagen 12. Extracto de resolución de **TP3, de A2**

> Para la resolución del problema y encontrar una condición para que la propiedad se cumpla use la heurística *trabajar hacia adelante* ya que aborde el problema partiendo de las condiciones iniciales. Luego *realice un dibujo* de dos funciones que cumplían con los datos que me daba el enunciado. Y finalmente considere dos funciones que se intersecan en dos puntos como por ejemplo una lineal y una cuadrática que sirvan para ejemplificar y explorar el problema. **(TP3, A18)**

En la observación de las resoluciones del TP3, hemos notado que los estudiantes hacen un desarrollo considerándolo una demostración, pero no es tal. En todo caso, terminan redactando de una manera diferente lo mismo que dice el enunciado.

> Si quisiera que las funciones coincidan en todos sus puntos entre a y b, estaría pidiendo que f y g sean la misma función, pero si son distintas y cumplen que toman el mismo valor para x=a y x=b no es posible que coincidan en todos los valores entre a y b.
>
> Sean f y g dos funciones polinómicas que cumplen que f(a)= g(a) y f(b)=g(b) y que $f(x) \neq g(x)\ \forall\ x \in (a,b)$ si existe un $c \in (a,b)$ talque f(c)>g(c) y f y g solo se cortan en a y b , entonces $f(x)>g(x)\ \forall x \in (a,b)$
>
> <u>Demostración:</u>
>
> Si las funciones valen lo mismo solo en los extremos y son distintas entre ellas, si existe un c que pertenece al intervalo (a,b) y si f(c) es mayor que g(c)

y como las funciones no se cortan en otro punto necesariamente f(x)>g(x) para todo x perteneciente al intervalo (a,b). **(TP3, A2)**

$\boldsymbol{a}$) $f(a) = g(a)\ y\ f(b) = g(b)$

Supongamos que f y g coinciden $\forall\ c\ \in (a, b)$

Sea $P(x) = f(x) - g(x)$ una función polinómica de grado n, $\forall\ n\ \in\ \mathbb{N}$

Entonces $P(x) = 0\ , \forall\ x \in (a, b)$ lo que daría que tiene infinitas raíces

Pero como es de grado n tiene a lo sumo n raíces no infinitas. Entonces no es posible que f y g coincidan en todos los valores entre a y b.

b) Para que $f(x) >\ g(x)\ ,\ x \in (a, b)$, f y g no deberían cruzarse ya que si esto pasada dentro de (a, b) f dejaría de ser mayor que g.

Si f y g son dos funciones polinómicas distintas que cumplen que toman los mismos valores en x = a y x = b y que además $\nexists\ c\ \in (a, b)$ tal que $f(c) = g(c)$, entonces en todos los puntos entre a y b, la f siempre es mayor que g. **(TP3, A3)**

a) Las funciones f y g podrían coincidir en todos los puntos en un intervalo (a,b). No corresponde

b) la consigna no la pude resolver. La idea era encontrar un punto en el intervalo (a,b) y que se cumpliera que f sea mayor a g, y luego demostrar que vale para todos los puntos de ese intervalo. **(TP3, A4)**

Sean f y g dos funciones polinómicas distintas que cumplen que toman los mismos valores en $x = a$ y en $x = b$. Si se cumple que para todo c∈(a, b) f(c) > g(c), es decir, para todo c que se encuentre dentro del intervalo (a, b) siempre la función f evaluada en c será mayor que la función g evaluada en c. Entonces en todos los puntos entre a y b la f siempre es mayor que g. **(TP3, A6)**

A12: a) Si f y g coincidieran en todos los puntos del intervalo (a,b) entonces f y g serian iguales pero como en el enunciado dice que son distintas no puede pasar que coincidan en todos los puntos del intervalo.

b) Respecto a esta consigna no la pude demostrar pero a través de varios gráficos de funciones polinómicas vi que la condición para que en el intervalo (a,b) f sea siempre mayor que g, debe cumplirse que en ese intervalo f y g no tengan otro punto en común.

a) No es posible que f y g coincidan en todos los valores entre a y b, ya que para que coincidan f y g deben ser iguales en ese intervalo pero como las funciones son distintas salvo en a y en b, aunque puede suceder que coincidan en más de un punto no sucede que coincidan en todos los valores en dicho intervalo.

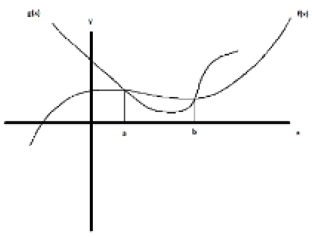
b) si f y g son dos funciones polinómicas distintas que cumplen que toman los mismos valores en $x = a$ y en $x = b$ y que además cumple que

$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1 - x_0}\ (x - x_0) + f(x_0) > \frac{g(x_1)-g(x_0)}{x_1 - x_0}\ (x - x_0) + g(x_0)$ en el puntox_0 y que las funciones f y g son continuas en el intervalo a, b, entonces en todos los puntos entre a y b, la f siempre es mayor que g. **(TP3, A15)**

Dada una función f(x) y g(x) definida en un intervalo (a,b), en el cual existe un punto en el cual f(x) >g(x) es condición para que siempre f >g que la intersección en ese intervalo de ambas funciones sea cero. Esto es necesario ya que de haber intersección podrían cruzarse y g(x) > f(x) y de no ser así, f(x)=g(x) en ese punto de todas formas por lo tanto tampoco f(x) > g(x).

Enunciado

Si f y g son dos funciones polinómicas distintas que cumplen que toman los mismos valores en x1=a y x2=b y además se sabe que f >g en un punto del intervalo (a,b)y son continuas, entonces f >g en todos los puntos de dicho intervalo si y solo si no existe intersección de las funciones en dicho intervalo.



Si tengo dos funciones continuas que tienen los mismos valores en dos puntos a y b, y sabemos que en un punto del intervalo (a,b) f es mayor que g entonces para que todos los valores de f en ese intervalo sean mayor que g no tienen que intersecarse porque podrían pasar dos cosas:

a) Que se crucen entonces habría puntos donde g es mayor que f porque f paso “abajo” y g quedo “arriba”.

b) También podría pasar que no se crucen, sino que solamente se toquen y luego f sea nuevamente mayor a g pero así habría puntos donde f=g y no queremos esto.

Por eso al descartar la intersección nos aseguramos que TODOS los puntos de la función de f son mayores que g en el intervalo (a,b). **(TP3, A18)**

El **explicar**, ante consignas cognitivamente exigentes, no se alcanza pues no obtienen previamente una resolución. En el mejor de los casos, la explicación consta de un complemento de lo escrito como la demostración pedida. En muchos casos, vuelve a aparecer la utilización de ejemplos como herramienta para explicarle a alguien que no sabe el tema, y no a modo de mostrar comprensión.

Pensá en dos funciones polinómicas, podemos pensar en una función cuadrática y una cúbica, voy a decir que la polinómica es f y la cúbica es g, fíjate que f y g coinciden en el punto x=a y x=b y además, f es mayor que g en ese intervalo a, b. si elijo un punto p1 veo que f(p1) es mayor que g(p1), ahora elijo p2 y veo f y g evaluadas en ese punto, ves que f(p2) es mayor que f(p2). Fijate que para todos los p que tome entre a y b, f es siempre mayor que g. (Le iría dibujando el esquema en una hoja mientras se lo explico). **(TP3, A7)**

Si tenemos dos funciones polinómicas f y g distintas que cumple que toman los mismos valores en a y en b es decir que f(a)=g(a) y que f(b)=g(b) y que además también cumple que la recta tangente de f en el punto x_0 es mayor que la recta tangente de g en el punto x_0 , y que además f y g deben ser continuas en el intervalo a, b. Si pasa esto la función f es mayor que la función de g es decir que todos los valores de f en el intervalo son mayores que los valores que toma g en dicho intervalo. **(TP3, A15)**

Empiezo contándote como arme la proposición, después de ver un par de ejemplos observe que si era un punto intermedio entre (a,b) selecciono un punto cualesquiera que pertenezca a ese intervalo que se compone por los extremos que coinciden las funciones f y g (x=a y x=b). Ese punto intermedio lo identifico con el nombre “c” y cuando lo evalúas en ambas funciones a una le corresponde un valor en el eje y y a otra le corresponde otro valor, de esos dos me define quien es la mayor y la menor. Es decir, que hago (c, f(c)) y(c, g (c)) y de ahí concluyo cual es la mayor por lo tanto esa sería mi otra condición para la proposición. Además tengo en cuenta que son continuas y derivables ¿por qué? las dos funciones que luego sirven para la demostración. Al momento de la demostración, tengo que llegar a que f es mayor que g en cualquier punto del intervalo por lo tanto comencé con el absurdo es decir que f es igual a g en el intervalo (a,b) para luego mediante propiedades de funciones, concluyo que la diferencia de f - g ≥0 al evaluarla en c, se sigue cumpliendo por lo tanto me queda que f(c)≤g(c). **(TP3, A16)**

En lo que se refiere a reflexionar, la mayor parte del trabajo se realiza en el TP3. Debemos mencionar que una cierta cantidad de estudiantes entregaron esta parte sin resolver. Entre los que sí hicieron el intento, hemos observado que en algunos casos el alumno necesita convencerse de que la propiedad es verdadera antes de proceder a pensar la demostración.

> Yo creo que la demostración es matemáticamente correcta. Si bien, no es una demostración gráfica, dejo explicitado que lo puedo identificar gráficamente. Si tenemos dos funciones en un intervalo entonces trazamos una recta vertical y vemos así cual es la función mayor. Este razonamiento no es matemáticamente incorrecto.
>
> Para lograr esta demostración realice en GeoGebra distintas funciones polinómicas y pensé de qué forma se podía mostrar que f>g en el intervalo (a, b), la mejor opción que encontré fue trazar rectas verticales y comprobar que f(xi)-g(xi)>0 con lo que efectivamente f>g.
>
> Las heurísticas que use fueron:
>
> -Utilizar un método de expresión o representación adecuado: en este caso gráfico.
>
> -Recurrir a dibujos, esquemas o gráficos.
>
> -Considerar casos particulares.
>
> -Analizar casos particulares para buscar regularidades o patrones y generalizar.
>
> -Introducir un elemento auxiliar: rectas verticales. **(TP3, A14)**

Y en otros casos, el alumno entrega el desarrollo considerando que está demostrado, cuando en realidad no es así. Encontramos que en la totalidad de los trabajos entregados no hubo alguno correctamente desarrollado.

En cuanto a la reflexión sobre estrategias utilizadas, creemos que han respondido sobre heurísticas porque en la consigna se daba como ejemplo de respuesta, pero no pudieron pensar ni elaborar algunas por sus propios medios.

> Para llevar a cabo la resolución fue necesario empezar de cero, empezando por los conocimientos previos, hacer gráficos y buscar generalidades, escribir hipótesis y corregirlas hasta estar maso menos convencida de que la tesis se cumple y poder demostrar porqué. No me sirvió concentrarme solo en las cuadráticas (que era lo que estaba haciendo en un primer momento) ya que las funciones podrían tener grados mayores. Si me sirvieron los gráficos para poder analizar cuando se cumplía lo pedido en las hipótesis y ver que condición era necesaria para que f sea mayor que g siempre en un intervalo (a,b). **(TP3, A2)**

> Utilice varias heurísticas como trabajar hacia adelante, generalmente en todos mis intentos partí de los datos dados. También realice un dibujo para ver que podría pasar entre las funciones. Analice ejemplos y descarte una posible solución. Utilice varias heurísticas para realizar el ejercicio. **(TP3, A6)**

> Para realizar la demostración utilicé algunas heurísticas, como por ejemplo la que llamamos *trabajar empezando por el final* ya que realicé el "paso a paso" para llegar a lo que quería probar. También *realicé un dibujo* que me sirvió como "guía" para luego poder realizar la demostración. Además, a partir de lo enunciado en la proposición, me pareció adecuado realizar la demostración de una función convexa ya a partir de su enunciado, pude darme cuenta por

qué f y g tomaban los mismos valores en un determinado intervalo a, b siendo ambas funciones polinómicas diferentes. **(TP3, A13)**

Para lograr esta demostración realice en GeoGebra distintas funciones polinómicas y pensé de qué forma se podía mostrar que f>g en el intervalo (a, b), la mejor opción que encontré fue trazar rectas verticales y comprobar que f(xi)-g(xi)>0 con lo que efectivamente f>g.

Las heurísticas que use fueron:

-Utilizar un método de expresión o representación adecuado: en este caso gráfico.

-Recurrir a dibujos, esquemas o gráficos.

-Considerar casos particulares.

-Analizar casos particulares para buscar regularidades o patrones y generalizar.

-Introducir un elemento auxiliar: rectas verticales. **(TP3, A14)**

Para la resolución del problema y encontrar una condición para que la propiedad se cumpla use la heurística *trabajar hacia adelante* ya que aborde el problema partiendo de las condiciones iniciales. Luego *realice un dibujo* de dos funciones que cumplían con los datos que me daba el enunciado. Y finalmente considere dos funciones que se intersecan en dos puntos como por ejemplo una lineal y una cuadrática que sirvan para ejemplificar y explorar el problema. **(TP3, A18)**

La demostración realizada utiliza heurísticas a lo largo del planteo. Comienzo planificando la organización de prueba colocando los datos presentados. Procedo a realizar dibujos y gráficos para visualizar el problema o idea a plasmar. Recurro a teoría relacionada ya que las manipulaciones algebraicas y los fundamentos están extraídos de ejercicios resueltos anteriormente donde involucra funciones: sus caracterizaciones y condiciones. En esta manipulación algebraica y teórica, introduzco un elemento auxiliar, el cual sería la función h(x) determinada por los datos. Entiendo que ninguno de los intentos me resultó fácil para llegar a la demostración requerida, pero el primer intento pautó la utilidad del planteo sobre la distancia entre las funciones que se desprendió en la demostración realizada. **(TP3, A19)**

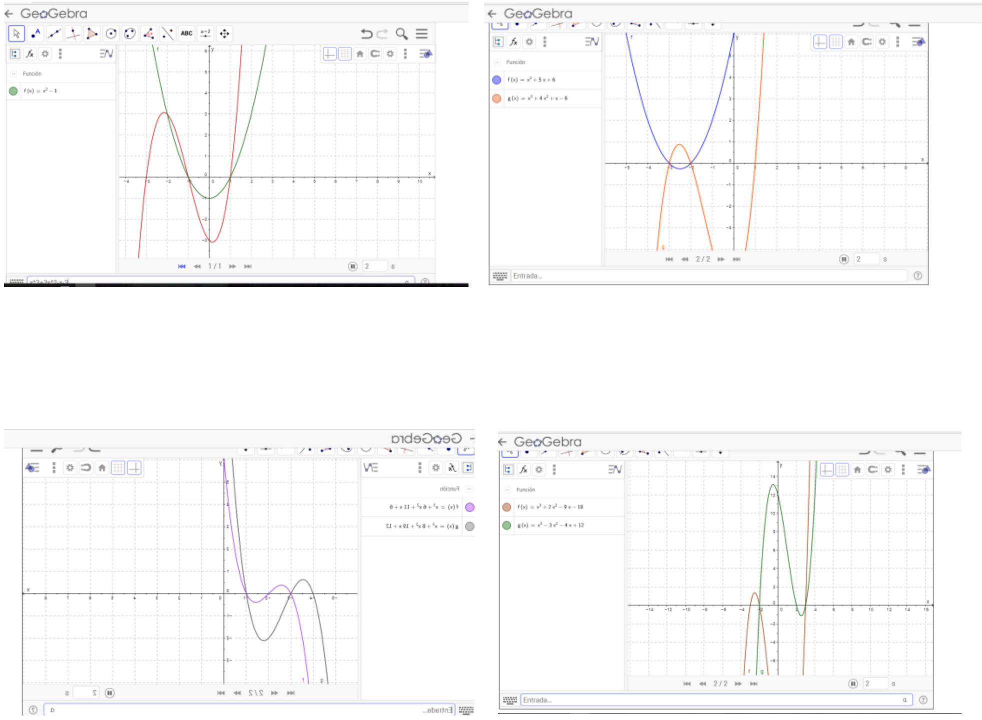
La heurísticas que utilice fueron: Planificar (trabajar hacia adelante), Activar experiencias previas (recurrir a teorías relacionadas, razonar por analogía) y modificar el problema (dividir el problema en sub problemas). Pero de esta tres, creo que la que más utilice fue la de activar experiencias previas al recordar y utilizar las resoluciones hechas en análisis matemático y álgebra. No estoy cien por ciento seguro de que mis demostraciones son correctas, pero tengo confianza en que mi razonamiento, en general, si lo es. Según creo, la seguridad llega con el tiempo y después de mucho trabajo sobre el tema y todavía no me veo en ese lugar. Lo que más me resultó útil es sentarme a pensar, recordar demostraciones, tomarme un tiempo entre resolución y resolución, mis borradores son partes inconclusas de lo que presento aquí.

> También me resulto útil el consultar algunas definiciones en libros y apuntes bajados de internet. **(TP3, A20)**

En el TP3 también se preguntaba sobre la forma en que se encaró la resolución, apuntando a una reflexión sobre estrategias o modos de pensar la consigna. En general, los estudiantes reconocen formas de encarar la consigna que no les resultaron útiles, entendiendo que no pudieron hallar una forma efectiva de resolver lo que se les pedía.

> Al realizar la consigna tuve dificultades en encontrar la solución. Primero trate de relacionarlo con la consigna 1. Pero luego me di cuenta que no me servía, luego pensé en la recta tangente que tenía que ser más grande en f, pero no me gustaba mucho la idea así que decidí desarrollar a f y g como polinomios de grado n, pero no podía llegar a concluir nada. Finalmente me quede con la idea de las rectas tangentes.
>
> También pensé que la condición podría ser que se cumpla para todo c perteneciente al intervalo. La condición que propuse no sé si es correcta, quizá tendría que haber investigado más y probado. **(TP3, A6)**

> En un principio, para resolver esta consigna, realice varios gráficos en GeoGebra que cumpla con lo pedido. Dos funciones polinómicas distintas que cumplen que toman los mismos valores en x=a y x=b. No es posible que f y g coincidan en todos los valores entre a y b. No logro terminar este ejercicio tampoco.



(TP3, A11)

Para realizar la consigna probé con distintas formas, primero platee que los valores que debe tomar f deben ser mayores a los valores que toma g, pero con eso no pude llegar a deducir nada como condición, luego realice gráficos para ver si podía concluir alguna condición y de allí se me ocurrió que, trazando las rectas tangentes a f y a g, el punto por donde pasa la recta tangente de f debería ser mayor al mismo punto por donde trace la tangente a g. No estoy segura de que lo utilizado sea matemáticamente correcto para ello debería investigar sobre si lo es o no. En la realización de la misma utilice algunas heurísticas como trabajar hacia adelante, realizar un gráfico, analizar ejemplos. **(TP3, A15)**

Hasta aquí hemos mostrado los resultados obtenidos en el análisis transversal de nuestros indicadores para describir el conocimiento del contenido matemático de nuestros estudiantes. Seleccionamos evidencias extraídas de todos los trabajos prácticos entregados a modo de ejemplo, se puede ampliar más la lectura al respecto en las tablas que utilizamos para organizar el trabajo (Anexos I, II y II incluyen todas las resoluciones de los alumnos, Anexos IV, V y VI las tablas que utilizamos para realizar el análisis).

En el próximo capítulo incluimos el análisis de las entrevistas que realizamos a tres de los estudiantes que participaron de la experiencia.

CAPÍTULO 5: ANÁLISIS DE LAS ENTREVISTAS

5.1 Introducción

Tal como explicamos en el capítulo 3, sección 3.4.4., luego de la implementación de nuestro dispositivo de trabajos prácticos durante la cursada de EM1 en el primer semestre de 2017, llevamos a cabo entrevistas con la intención de indagar en los estudiantes qué es lo que ellos reconocen de su formación anterior que les favorece, o no, la adquisición de nuevos conocimientos matemáticos.

Incluimos aquí algunos extractos de las entrevistas con los estudiantes, que nos permiten atender a nuestro objetivo.

5.2 Análisis de las entrevistas

La selección de estudiantes a entrevistar se realizó según las pautas que comentamos en el capítulo 3, y resultó que las personas seleccionadas fueron A9, A12 y A13. Los alumnos concurrieron a las entrevistas con muy buena predisposición y nos permitieron no solo tomar nota de sus respuestas, sino grabar la conversación completa. Como mencionamos anteriormente, los audios que surgen de todas las entrevistas se encuentran en el anexo VII, incluido en el CD adjunto.

A continuación, teniendo en cuenta el objetivo mencionado, señalamos algunas respuestas de nuestros estudiantes entrevistados.

5.2.1. Sobre facilitadores y obstáculos que los estudiantes consideran que existen en la adquisición del conocimiento del contenido matemático

En una primera instancia, los alumnos entrevistados pudieron advertir dificultades generales que vivieron durante su desempeño como estudiantes del Profesorado de Matemática. En el siguiente extracto de la entrevista con A9, podemos observar cómo nos señala los problemas que tiene en cuanto a la *interpretación de las consignas*, reconociendo que no entiende lo que la consigna la propone hacer.

> **Entrevistadora (E):** ¿Qué podrías decir de vos como alumna, con respecto al contenido matemático? Con respecto a cómo te ves en tu aprendizaje.
>
> **A9:** (…) en general, con las materias de matemática, si bien me costaron todas, por ahí no trabajamos tanto las definiciones. Pero sí igual empezaron a aportar esa parte a la que yo le escapaba, que es la de los ejercicios teóricos. Más que nada con Álgebra I. Ahí empecé a darle más bolilla.
>
> **E:** ¿Por qué le escapabas?
>
> **A9:** Porque sentía que no tenía las herramientas para afrontarlos. Justamente, porque no entendía lo que me estaban pidiendo. O bien, lo que me están pidiendo ¿es lo que yo considero que me están pidiendo? Entonces con lo teórico trataba de enfrentarlo, iba con algo medianamente resuelto a las consultas, y ahí trataba de cerrar el ejercicio.
>
> **(Entrevista A9, 0:37:50 – 0:40:00)**

Podemos observar en la respuesta de A9 que reconoce dificultades en todas las materias de matemática, y que un obstáculo que reconoce es la *falta de herramientas para encarar* *las actividades propuestas*. Es necesario que tengamos en cuenta que podría ocurrir que tenga las herramientas, pero no sea consciente de ello.

Con respecto a este mismo tema, A12 nos comenta que su primera reacción fue *buscar en internet*, antes incluso de consultar o buscar en libros de texto, y la forma de validar lo que encontraba era si "le sonaba" o no lógico lo que encontraba. Bajo este criterio puede ser muy diverso lo que los estudiantes seleccionen, ya que es casi imposible definir qué es lo que le suena lógico a cada individuo.

> **E:** Vos decís que las consignas de los trabajos prácticos te impactaron, ¿cómo encaraste la resolución?
>
> **A12:** Lo primero que hice fue googlear todo lo que había del tema, después volví al libro del CAU[4] a ver qué tenía, al de IM[5] (…) Yo confiaba en la información que sacaba de internet, me quedaba con algo que me parecía más o menos razonable.
>
> **E:** ¿Te parecía razonable porque sabías que estaba bien?
>
> **A12:** Sí, me parecía que tenía una cierta lógica que tenía que ver con el ejercicio.
>
> **(…)**
>
> **E:** Nos interesa lo que sentiste, las sensaciones. Cuando vos viste que te impactó, nos contaste que fuiste a googlear, ¿hablaste con tus compañeros?

[4] El CAU es el Curso de Aprestamiento Universitario. Es un curso introductorio para todos las personas que aspiran a realizar una carrera en UNGS.

[5] IM es la sigla de Introducción a la Matemática, una materia específica del Profesorado de Matemática de UNGS.

A12: Sí, con algunos compañeros (…) lo hablamos por grupo de whatsapp, con un grupo de compañeros que están más avanzados.

(Entrevista A12, 0:15:42 – 0:19:40)

Conversando con A13 sobre el material al que recurre cuando tiene dudas o no sabe algo, nos comenta que solo utiliza internet.

E: ¿Consultaste libros? ¿O fuiste solo a la computadora?

A13: No, fui solo a la compu.

E: ¿Tenés libros de matemática?

A13: No tengo muchos, hubiera tenido que venir a la biblioteca.

E: Este método que tenés vos, que es recurrir a la computadora porque lo tenés más a mano, ¿lo usás en otras circunstancias? ¿O solo lo usaste para trabajar en estos trabajos prácticos?

A13: No, no lo uso mucho (…) porque no le tengo confianza a lo que encuentro ahí.

(Entrevista A13, 0:14:09 – 0:15:35)

A diferencia de los comentaba A12, en este caso A13 muestra que hace un uso responsable del recurso de internet. Con esto queremos señalar que, lo que para los estudiantes es un facilitador para la adquisición del conocimiento matemático, en realidad puede transformarse en un obstaculizador.

Anteriormente, A9 menciona también como facilitador la *asistencia a clases de consulta*, entendiendo que una vez que *siente que no puede avanzar, realizaba las preguntas* que correspondían consultando las dudas. Por el otro lado, A12 muestra que *la forma de solucionar sus dudas es recurrir a internet*, así como también la consulta con sus compañeros que están más avanzados en la carrera.

También A13 utiliza este recurso, pero a diferencia de A12, este estudiante no confía en lo que encuentra en la red.

Para continuar analizando las entrevistas, mostramos el siguiente diálogo, donde A12 manifiesta su dificultad de *entender las explicaciones de los contenidos matemáticos*.

> **E:** Ahora vos como alumno, ¿cómo te ves?
>
> **A12:** ahora, mucho mejor que antes.
>
> **E:** ¿En qué sentido?
>
> **A12:** Porque antes yo hacía cuentas, porque las primeras materias son de cuentas, uno las hacía, me aprendía los teoremas y hasta ahí… no llegaba a entender bien y no podía explicarlos. Y ahora que lo veo en perspectiva desde estas materias, veo que aprendí. Yo antes podía hacer ejercicios. Si me trababa, ¡ya está! Por ejemplo, ahora ya sé el mecanismo de las integrales… Antes no me salían, ahora que sé el mecanismo ya me salen, ahora ya sé cómo modificar más o menos la fórmula para aplicar tal o cual teorema, las entiendo y puedo aplicar teoremas.
>
> **E:** ¿Qué pasó de esa vez que no entendías nada a "ahora", que ya lo entendés? ¿A qué te referís con "ahora"? ¿A partir de cuándo es "ahora"?

A12: “ahora” es actual, a partir del año pasado que empecé a ver más cosas. Al tener que estar constantemente con el tema de integrales (cálculo I, cálculo II, cursé probabilidad y estadística, ecuaciones diferenciales y geometría). Tantas integrales que ya le cacé la mano. Yo tenía resistencia a eso.

E: O sea, si te salen las técnicas podés resolver más fluido.

A12: Antes las veía como ejercicio y no las podía resolver. Ahora me dan una integral y la puedo graficar, y ver cuánto da.

E: Ahora, independientemente de las integrales, vos habías dicho que ahora te veías mucho mejor que antes (que hacías cuentas y te aprendías procedimientos), ¿en qué otras cosas observás que te sentís mejor?

A12: No puedo decirlo bien… pero es como que yo aprendo más rápido. Ahora me siento en una cursada y entiendo lo que me dice el profesor, antes no (…) Sentía que todas las materias de matemática iba a tener que recursarlas, me costaba. Después empecé a ver que entendía los conceptos. El profesor lo explicaba y, por más que sea un tema nuevo, yo lo entendía (…).

E: Si vos tuvieras que decir cuáles son todas esas dificultades que nos mencionás, ¿qué dirías?

A12: los contenidos matemáticos, yo en secundaria no sabía integrar ni derivar (…) Encontrarme con esas cosas por primera vez en la universidad, yo que venía con la idea de que me iba a encontrar con los mismos contenidos que en secundaria, pero más profundos, impacta un poco y te hace ver que no es la matemática que vos pensabas que venías a aprender.

(Entrevista A12, 5:25 – 11:21)

En el caso de A12, la dificultad mencionada lo lleva al punto de no ser capaz de reproducir una resolución. Como las primeras materias de la carrera se centran en ejercicios de cálculo, el estudiante manifiesta que soluciona sus problemas aprendiendo mecanismos repetitivos para resolver (como lo menciona con el tema de "integrales"). Podemos observar que A12 nos comenta, a modo de facilitador de la adquisición de conocimientos matemáticos, sobre la importancia de *reproducir repetitivamente una gran cantidad de veces el procedimiento a aprender,* lo que por supuesto le funciona por el tipo de consigna que debía resolver. Esta cuestión no necesariamente es advertida por los estudiantes al momento de cursar. Es decir, el alumno considera que sabe cómo manejarse para aprender contenido matemático porque ante ejercicios repetitivos su método le funciona, pero en cuanto cambia el tipo de consigna que debe resolver, ese procedimiento deja de ser útil y probablemente el estudiante no se dé cuenta el por qué.

Por otro lado, podemos notar también que un posible obstaculizador para la adquisición de conocimientos es el *sentimiento de abatimiento y de imposibilidad de llevar exitosamente las materias matemáticas*.

Por último, en esta parte del diálogo con A12, podemos observar la importancia que le otorga a las concepciones previas con las que cursa las primeras materias de matemática. De esta manera, consideramos que constituye otro de los obstaculizadores *una concepción de la matemática como una ciencia de trabajo con métodos, para hacer cuentas.* Esto también se vio reflejado en las otras entrevistas, por ejemplo, en el siguiente párrafo podemos observar cómo A13 menciona sus *dificultades en el ingreso a la Universidad*.

E: ¿Cómo te ves como alumna del profesorado de matemática aprendiendo contenidos de matemática?

A13: Me cuesta… por ejemplo yo cuando ingresé hice el CAU re bien porque tenía buena base del colegio. Me choqué con IM. Me costó, pero la pude promocionar. Pero cuando me choqué con Cálculo I ahí me las vi… Hice tres veces la materia. La primera vez porque me frustré, no la entendía. La segunda vez dije “ahora sí” pero no sé qué pasó, pero no la aprobé. Y la tercera vez sí, pude dar el parcial, el final con 10. Después noto que, si Uds. ven mis notas en general, las materias de matemática tengo menor nota que en las materias de educación, porque me cuestan. Siento como que algunas veces me falta una vuelta de rosca, como cuestión mía.

E: ¿En qué momento te das cuenta que te falta esa “vuelta de rosca”?

A13: Después que la hago… no sé, o capaz viendo una materia de más adelante. (…). Yo hoy en día me veo distinta a lo que era, y siento que me faltan cosas profundizar. (…)

(Entrevista A13, 0:04:06 – 0:05:56)

Es sabido de la incidencia de la parte emocional[6] de un estudiante en su desempeño. Por este motivo, suponemos que *la falta de confianza* constituye otro de los obstaculizadores para la adquisición de conocimiento matemático.

En la entrevista con A12 también observamos cuestiones relacionadas a las *emociones negativas* que surgen al encarar la resolución de una consigna dada.

[6] Creemos que el tema de la parte emocional en el desempeño académico de los estudiantes es muy importante, pero no nos explayaremos sobre esto en este trabajo por no ser el foco de la investigación.

E: Además de nuestros trabajos, ¿te encontraste con una situación similar en otra materia? ¿Algún otro lugar donde te encontrás con un enunciado que te impacta, tanto como te impactaron estos?

A12: Sí, en Álgebra I.

E: ¿y qué hacías en Álgebra I cuando te impactaban las consignas?

A12: Primero buscaba ayuda en mis compañeros para ver cómo lo trataban de resolver... Primero trataba yo de ver si lo podía sacar, una vez que ya mi cabeza no daba, pedía ayuda a otros compañeros que lo entendían.

(Entrevista A12, 0:19:40 – 0:20:14)

En la entrevista a A13 también pudimos observar problemas con respecto a la falta de confianza en su desempeño como estudiante, y en el díalogo con él observamos también cómo se responsabiliza de sus notas en materias de matemática, pero sin hacer referencia a cuestiones de estudio.

A13: Está mal comparar… pero me pasa con una compañera que veo que es muy inteligente y digo… ¿por qué yo no puedo ser así? Pero bueno, cada uno tiene sus tiempos y su forma de aprender. (…) A veces uno se deprime porque no puede, o porque le cuesta más…

(Entrevista A13, 0:07:12 – 0:04:44)

Por otro lado, señalan que uno de los obstáculos que encontraron en su formación es que *el enfoque matemático sumamente estructurado que rigió en las materias que cursaron,* en comparación con el trabajo que realizaron en la secundaria. Remarcan también que es necesario *un cambio de actitud*, y que materias como las de educación matemática ayudan a superar el sentimiento negativo que les generó cursar las materias matemáticas. El estudiante A13 retoma aquí el tema de lo emocional en su desempeño como alumno de la carrera, y relaciona la superación a esos miedos con el cambio del tipo de materia que cursa (pasando de materias de contenido específicamente matemático, a materias de educación matemática).

> **E:** Vos dijiste que te costó resolver las consignas, en qué te costó específicamente? ¿Fue por una cuestión de que no entendías nada, o del contenido matemático?
>
> **A13:** A veces me pasa que, siento que... veo yo la matemática muy estructurada. Entonces siento que me tengo que abrir (…) Me cuesta mucho abrirme y ver la matemática de una manera diferente, porque en el colegio me instalaron esa forma… y no me gusta. (…)
>
> **E:** Cuando llegué acá me di cuenta que no era tan así… tan estructurada. (…) ¿Cuándo te hace el "clic" de decir que no es tan así?.
>
> **A13:** en las Enseñanzas[7]…
>
> **E:** ¿Con lo que hacemos de matemática en las Enseñanzas?
>
> **A13:** sí, la forma en que estaban planteados los ejercicios (…) hicimos un trabajo bastante largo donde teníamos una función cuadrática, para resolver

[7] El estudiante se refiere a las materias Enseñanza de la Matemática 1 y Enseñanza de la Matemática 2.

con TIC, bueno… con ese dije “guau”, porque era abrir la mente y ver diferente.

(Entrevista A13, 0:19:00 – 0:21:30)

Ante la presentación de estas actividades (TP1, TP2, TP3), los estudiantes entrevistados encontraron dificultades para su resolución, pero sabían que deberían poder encarar y resolver las consignas. Ante esta dificultad, y reconociendo el contenido matemático que aparecía en los enunciados, sus reacciones fueron similares y los tres decidieron *buscar información sobre el tema*. En particular, A9 plantea que dudó de sus conocimientos.

A continuación, presentamos un extracto de diálogo en el que, al preguntarle al estudiante cómo se sintió en la realización de nuestras actividades, explica dónde vio el problema y cómo lo solucionó.

E: ¿Qué sentiste cuando viste las consignas de los TP?

A9: En particular, con el de los fósforos, tenía un poquito de miedo de estar armándolo un poquito distinto a lo que se esperaba. Como que entré en dudas… en el TP3, entré a dudar. O sea, con los tres me pasó que me puse a dudar de lo que yo conocía, y no puedo estar dudando en esto matemático… o sea, no me puede estar pasando. Me sentí como en ese lugar de alumno, a pesar de que era sencillo, era cognitivamente exigente pero no imposible de realizar.

E: ¿Y cómo fue tu proceder? ¿Cómo te desenvolviste? ¿Cómo te organizaste?

A9: Bueno, primero traté de mirar sobre el tema que estaba viendo. Por ejemplo, busco todo lo que conozco de función cuadrática, en el caso de los fósforos no me acordaba la relación que tenía con sucesiones (…) Pero sí, iba a los conocimientos que tengo… sé que hay varias cosas por ahí que no me salen en el momento, pero si veo algún libro lo reconozco y lo puedo aplicar.

E: Vos dijiste que no te acordabas de cuadrática y "fuiste a buscar", ¿a dónde fuiste a buscar?

A9: Desde lo más básico que fue lo que aprendí en la secundaria, desde lo que recordaba de memoria.

E: ¿Buscaste en libros?

A9: Con el primero no, con el con el segundo no… con el tercero, sí. Libros y también en internet. Más que libros, las copias teóricas que tengo de las cursadas.

(Entrevista A9, 0:04:45 - 0:08:40)

Consideramos que la *búsqueda bibliográfica* es un proceder que, para estos estudiantes, facilita la adquisición de conocimiento matemático, *al menos en los casos en los que los estudiantes reconocen el contenido* presente en la actividad planteada. Ahora bien, del diálogo con los estudiantes también se desprende la idea de que este facilitador no es una primera opción a la hora de resolver las actividades. El alumno A9 nos comenta que su primera reacción es escribir/resolver con lo que recuerda del tema, y en caso de saber cómo proceder, se remite a libros de textos o internet

E: Entre las definiciones, las propiedades y las demostraciones, ¿algo de eso hiciste vos de tu recuerdo, o algo fuiste a buscar?

A9: ehh… sí, lo que es la definición intenté dar una definición yo de lo que me acordaba. En lo que fue la explicación, lo mismo. Cuando fue lo de la demostración, ahí fui más a las fuentes, a los libros.

E: ¿Por qué fuiste a buscar las demostraciones y usas tu memoria para proposiciones y definiciones?

A: Porque para mí lo que es una demostración es… hay partes en las que no sé si lo matemático que estoy poniendo está correcto. (…) entonces prefiero ir a buscarlo y mirar bien.

E: ¿Y eso no te pasa cuando tenés que definir, cuando ponés una definición de tu recuerdo?

A: No, cuando tengo que definir, no. Bueno, en ese momento no era consciente, pero por ahí ahora con lo que vemos me doy cuenta que cuando uno define, y más si lo hace escribiéndolo en símbolos, lo que uno explica tiene que tener relación con lo que escribe. Por ahí, en ese sentido, mis definiciones fueron poco precisas.

(Entrevista A9, 0:11:18 – 0:13:29)

Podemos observar cómo el trabajo realizado en las materias de educación en general, y con nuestro dispositivo didáctico en particular, significa un cambio en la visión del estudiante a la hora de pensar las resoluciones.

Este tema de recurrir a libros de texto para solucionar las dudas, conlleva la existencia de otro obstaculizador para la adquisición de conocimientos: *la falta de comprensión en la* *lectura de símbolos*. Es frecuente que la lectura de una definición, propiedad o demostración resulta una traducción directa de los símbolos a lenguaje natural, pero eso no implica comprensión de lo que significa.

> **A9:** Identifico que yo, si me daban una definición, leí y pensaba que entendí. Cuando leía, traducía en realidad lo que estaba en lenguaje simbólico… y ahora me doy cuenta que cuando uno lo pone en lenguaje coloquial y lo quiere explicar, lo que está escrito con símbolos dice mucho más que la traducción en símbolos (…) En realidad la primera vez q noté eso fue en Enseñar en la Escuela Secundaria y en Nivel Superior[8]… cuando nos dieron una definición en símbolos, y la mayoría leímos textual: "para todo épsilon…", y la profe nos preguntó "¿Qué está queriendo decir esto?", y otra compañera dio la explicación que hay detrás de eso. (…) Sinceramente, me preocupa mucho el tema (…) ahora, en Enseñanza, en una parte del tema de planificación, dicen que lo ideal cuando uno empieza a dar un tema es mirarlo primero a nivel superior, y desde ahí hacer la transposición didáctica para poder explicarle al alumno. Entonces, yo me doy cuenta que si yo no puedo leer un libro a mi nivel, y entenderlo, hay un montón de cosas que las voy a explicar mal.
>
> **(Entrevista A9, 0:14:05 – 0:17:36)**

De la misma manera, también nos comenta que *cursar materias de didáctica de la matemática*, como por ejemplo Enseñanza de la Matemática 1, le da herramienta para solucionar el tema.

[8] Materia del Profesorado de Matemática de UNGS.

Por otro lado, en la entrevista con A9, el estudiante reconoce el nivel creciente de dificultad de los trabajos prácticos que resolvió, identificando dicha dificultan en el objeto matemático con el que se trabajaba. Al preguntarle si veía alguna relación entre esos trabajos más allá del contenido, responde sobre *la reflexión que realizó ante las estrategias que llevó a cabo para entender y resolver las consignas*. En este sentido, podemos identificar esto como un facilitador de adquisición de contenido matemático por parte del estudiante.

> **E:** En cuanto a lo que se pedía (en los trabajos prácticos), ¿veías alguna relación?
>
> **A9:** sí, reflexionar en las estrategias que uno ponía para lograr entender la consigna y lograr resolverlo. Yo siempre puse mucho la mirada en que nos pedían mucho de lo metacognitivo… de cómo llegaste a resolver esto, qué estrategias usaste. Esto es algo que realmente no usé en lo que fue mi trabajo en la secundaria y una parte de la Universidad (…), nunca me detuve en realidad a pensar en ese sentido.
>
> **(Entrevista A9, 0:02:59 – 0:04:16)**

Para finalizar la entrevista, le preguntamos a A9 qué cuestiones se lleva para utilizar en su desempeño como alumno, y volvió a señalar la reflexión metacognitiva ya mencionada.

E: Pensando en tu recorrido matemático en la facultad, como futura profesora, y considerando todo lo que trabajaste en los tres trabajos prácticos, ¿te llevás algo?

A9: (…) en primer lugar, esto de no solamente resolver sino mirar qué estrategias usé para resolverlo, en qué me paré, qué miré, qué conocimientos tenía, y qué me hizo falta buscar para encararlo. (…) En general, me abrió la mente porque hasta hace poco para mí la matemática era muy de resolver los ejercicios y llegar al resultado… y no de ver el resto. La construcción que uno hace, por qué uno dice "te entrego la respuesta", pero toda la construcción como que la dejaba de lado, no le daba bolilla. Y ahora hago hincapié en eso. Eso es lo que hace reflexionar y entender el para qué de lo que uno está aprendiendo. Eso es lo que espero lograr en mis alumnos.

(Entrevista A9, 0:40:15 – 0:42:00)

En esta parte del diálogo pudimos leer lo que el estudiante A9 sugiere como un facilitador en la adquisición de contenidos matemáticos: *atender y reflexionar sobre no solo el desarrollo numérico o algebraico de una consigna, sino incluir todo lo referido al proceso del mismo*.

Con respecto a esto, A13 nos habla sobre lo que considera que son avances en su desempeño académico, y lo relaciona con haber cursado una materia de didáctica de la matemática. Considera que este tipo de materias ayuda a ver la matemática desde otra óptica. El entrevistador le pregunta a A13 qué supone que debería haber pasado en su carrera para que estos avances se dieran antes. El estudiante responde:

> **A13:** Y… capaz que estas materias estén antes en la carrera. O un cambio también en las matemáticas, en la manera de encarar los ejercicios para hacer algo más que resolver (…). A lo que apuntan, yo creo que tienen que ir por otro lado. Porque capaz uno calcula una derivada pero qué se yo qué es una derivada… (…). Pero está bueno saber qué es lo que uno realmente está calculando.
>
> **(Entrevista A13, 0:23:51 – 0:24:33)**

Tanto A13 como A9 coinciden en que un facilitador de la adquisición de MK es *poder ir más allá de resultados* cuando aprenden cursan una materia de matemática. El "proceso" lo llamó A9, y A13 se refirió al "para qué sirve" ó "qué es", en ambos casos pensando en ir un paso más allá que una simple resolución.

Al hablar de cómo encarar las resoluciones de los trabajos prácticos, A12 nos comentó su forma de trabajo y a partir de qué situación se da cuenta que le sirve. Consideramos que otro facilitador para la adquisición de conocimiento matemático por parte de los alumnos es *la construcción de estrategias personales de resolución y estudio.*

> **A12:** una vez me pasó (…) estuve ocho horas tratando de resolver un ejercicio. Se lo mandé a los chicos… hasta que dije "ya está", y me fui a dormir. Al otro día lo volví a encarar y ahí es como que le encontré la mano. Esto me di cuenta que viene pasando ya, ahí me termine de darme cuenta que lo vengo haciendo, de que cuando no logro salir, porque a veces ya está uno demasiado enredado, entonces aprendí que tengo que parar, dejarlo, me despejo y vuelvo de nuevo a intentar.

(Entrevista A12, 0:20:30– 0:21:43)

En síntesis, a partir de estas tres entrevistas y sin ningún ánimo de exhaustividad, mencionamos obstáculos que estos estudiantes advierten para la adquisición de MK:

- no entender qué hay que hacer ante una consigna de un ejercicio o problema,
- la falta de herramientas para encarar las actividades propuestas,
- sabiendo que deberían ser capaces de resolver, no saber cómo hacerlo,
- no entender las explicaciones de los contenidos matemáticos,
- tener un sentimiento de abatimiento y de imposibilidad de llevar exitosamente las actividades y/o las materias matemáticas,
- una concepción de la matemática como una ciencia de trabajo "metódica",
- dificultades a la hora de encarar el ingreso a la Universidad,
- problemas por falta de confianza en sí mismos,
- un enfoque matemático sumamente estructurado y mecanicista que rigió en las materias que cursaron,
- la falta de comprensión en la lectura de los símbolos.

Y, por otro lado, advierten como ciertos factores o circunstancias que sirven de facilitadores para la adquisición del MK:

- cuando reconocen el tema de una consigna, pero no saben cómo resolverla, la búsqueda bibliográfica les permitiría acercarse y/o superar el problema,
- recurrir no solo a libros de texto, sino también a internet o a un grupo de compañeros,

- reproducir repetitivamente una gran cantidad de veces el procedimiento a aprender (que aplica solo ante actividades de tipo rutinarias),
- realizar un cambio de actitud para con las actividades a llevar a cabo, o la materia a cursar,
- cursar no solo materias de matemática, sino también de educación matemática,
- atender y reflexionar sobre el desarrollo numérico/algebraico de una consigna, y también incluir lo referido al proceso para llegar a la respuesta,
- encontrar estrategias personales de resolución,
- en materias de matemática, poder ir más allá de saber los procesos mecánicos de resolución o la forma de buscar resultados.

Como se verá en el capítulo de Conclusiones y Perspectivas, entendemos que los resultados aquí obtenidos dan un punto de partida y herramientas para pensar en una formación docente inicial que favorezca la adquisición del conocimiento del contenido matemático, insumo fundamental, aunque no el único, para llevar a cabo una buena enseñanza.

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

Las primeras ideas que dieron origen al tema que nos convocó en este trabajo de investigación surgieron a través de nuestra experiencia como docentes en materias de Didáctica de la Matemática, más precisamente en la primera de ellas que cursan los estudiantes del Profesorado de Matemática, EM1. Hemos observado las dificultades que los futuros profesores tienen al intentar resolver consignas correspondientes al nivel medio de enseñanza, y cómo esto los inhabilita para realizar un análisis pertinente en términos de las distintas corrientes teóricas que trabajamos en la materia. Esto no fue un hecho aislado, que lo observamos en un único grupo, ni tampoco en algunos estudiantes. Fue, año tras año, y una situación que fue masiva. La mayoría de los futuros profesores presenta esta dificultad. Esta situación tuvo a todo el equipo docente en un estado de constante vigilia, tratando de dilucidar a qué se debía, si ocurría en un grupo únicamente, si podíamos hacer alguna propuesta desde nuestra materia, si estaba atado a algún contenido conceptual en particular o no dependía de él, etc. Por supuesto que esto se debe a que nos preocupaba no solo lo específico de nuestra materia, sino que advertíamos un serio problema de la formación y para su rol docente, para seleccionar actividades, para decidir si la respuesta de un alumno es o no correcta.

Nuestra preocupación entonces, queda naturalmente encuadrada en la formación inicial de profesores. La perspectiva tanto como docentes de los espacios de Didáctica de la Matemática como de investigadores, es entender cómo formar un profesor que disponga de saberes matemáticos adecuados como para enfrentarse con idoneidad en su trabajo y desarrollo profesional.

Teniendo en cuenta esto es que planteamos el primer objetivo, de *describir el conocimiento del contenido matemático de los futuros profesores*. Consideramos que el dispositivo implementado nos permitió tener una mirada sumamente fina respecto del MK en los estudiantes. Cada una de las actividades fue concebida con el fin de abarcar algunos de los indicadores, logrando trabajar todos ellos en la resolución de los tres trabajos prácticos. Eso nos permitió llegar a una descripción del MK que podríamos haber presentado por estudiante, aunque decidimos hacerlo por indicador para entender lo que ocurría en la globalidad del curso.

A este respecto, hemos identificado un rendimiento parejo y con importantes falencias, muchas de ellas alrededor de cuestiones básicas para un futuro profesor. En general, podemos decir que los futuros profesores que participaron de esta experiencia no reconocen qué características determinan lo que es una definición, las que debe cumplir un enunciado para ser una proposición, o lo que implica demostrar un resultado.

Hemos comprobado, al realizar las entrevistas, que pensar en “definir” un concepto, es entendido como mencionar todo lo relativo al tema que recuerden. De esta manera, solo recurren a alguna fuente de información en caso de no conocer la definición o bien no saber resolver la consigna.

En este sentido, los estudiantes encaran sus resoluciones (ya sean consignas, demostraciones, etc.) sin verificar que se satisfacen las hipótesis del enunciado. En este caso, sostenemos que habría al menos dos posibles razones. Por un lado, está la posibilidad de que no entiendan por qué es necesaria la hipótesis para que se cumpla una proposición o demostración; y por el otro, podría considerar que no es necesario aclarar para qué o por qué es necesaria. Esto último puede observarse en las explicaciones que dan los estudiantes en sus trabajos, no porque expliciten que no lo consideran, sino que al explayarse en lenguaje natural se observa, en algunos casos, que las hipótesis sí fueron consideradas. Esto, a su vez, está relacionado con que los estudiantes no tienen un buen manejo del lenguaje simbólico, y su relación con la traducción al lenguaje natural.

Hemos notado también que, en general, los futuros profesores consideran que "demostrar" es sinónimo de "explicar". Al realizar la explicación de las demostraciones pedidas, los alumnos repetían lo hecho, o parte de ello. Es decir, no pueden leer y hacer una traducción del lenguaje simbólico al natural de modo de evidenciar su comprensión.

Con respecto al lenguaje, también podemos decir que en la resolución de los trabajos prácticos que conformaron nuestro dispositivo utilizaron, en su mayoría, lenguaje natural. En general, el lenguaje simbólico se utilizó en resolución de consignas matemáticas, o bien al transcribir las demostraciones pedidas.

Debemos mencionar que, según lo leído en las entregas, los estudiantes relacionan "explicar" con la explicación que uno puede realizar al referirse a alguien que no conoce el tema, se sitúan en un rol docente. Fueron muy pocos los realizaron una explicación mostrando comprensión con respecto a los conceptos trabajados. Visto de manera global, consideramos que la explicación es un asunto no logrado.

Consideramos también, que manejarse casi exclusivamente con lenguaje natural obedece a que no manejan el lenguaje simbólico.

Con respecto al indicador que se aplica ante resoluciones de tareas con cierta exigencia cognitiva, los datos recabados en las entregas de los trabajos prácticos fueron casi nulos. En principio, porque fueron pocos los estudiantes que pudieron resolver esas tareas cognitivamente exigentes. Pero en realidad, aquellos alumnos que sí entregaron la resolución completa, mostraron serias dificultades con respecto al contenido matemático involucrado.

Respecto de *qué cuestiones identifican los estudiantes como facilitadores y obstaculizadores para adquirir el conocimiento matemático,* tal como indicamos en el capítulo anterior, pudimos identificar algunas de estas cuestiones gracias a las entrevistas con los alumnos seleccionados. Si bien la muestra no es significativa, nos sirve como punto de partida para pensar algunos aspectos de las materias de la formación inicial del profesorado.

Entre los *obstaculizadores* para la adquisición del conocimiento del contenido matemático, los estudiantes mencionan la dificultad de comprensión de lo que piden las consignas, de la lectura de los símbolos, el enfoque estructurado que tienen la mayoría de las materias de matemática, la falta de herramientas para resolver lo que se les pide. Pero principalmente, señalan que todo es por la falta de comprensión de contenidos matemáticos supuestamente ya sabidos o enseñados.

Por último, no es menor la cuestión que señalan referida a los sentimientos que se generan al intentar resolver consignas de matemática, que en general resultan ser negativos por la imposibilidad de llegar a cabo exitosamente las actividades.

En cuanto a los aspectos que estos estudiantes señalan como *facilitadores*, resaltan que cursar un tipo de materia distinta, como lo son las de Didáctica de la Matemática en comparación a las específicas de la carrera, les permite pensar distinto los mismos contenidos, dándole una mirada desde otra perspectiva. Consideran también que darse cuenta que la búsqueda bibliográfica resuelve las dudas es un aspecto que los ayuda a avanzar, y también mencionan la importancia de poner el acento en los “procesos” más que en los resultados. Los alumnos entrevistados coinciden en la importancia de un cambio de actitud, teniendo en cuenta que es necesario una buena predisposición a la hora de encarar las actividades que una primera instancia no son triviales o implican búsqueda de información.

Haciendo una mirada en perspectiva, tomamos como dato saber cuál es el tipo de conocimiento matemático que los estudiantes del Profesorado de Matemática disponen, y en cuáles tienen más dificultades, para pensar en la enseñanza de materias no solo de Didáctica de la Matemática, sino también de matemática. Entendemos que las cuestiones que se plasman en los indicadores son clave para la formación de un futuro profesor. En su trabajo profesional necesitará usar conocimiento matemático, poder explicarlo, utilizar símbolos y lenguaje natural, poder explicar por qué los símbolos plasman las ideas, resolver, etc. Entonces, la formación inicial matemática debería atender a estas cuestiones desde las propuestas de enseñanza. Realizando un trabajo a conciencia sobre lo que estos indicadores señalan, podemos tener un certero punto de partida para lograr que los estudiantes no repitan definiciones, propiedades o demostraciones de memoria y sin comprender qué están utilizando, o por qué pueden hacerlo, podrían interpretar la escritura simbólica sin necesidad de repetir lo que figura escrito como una traducción literal entendiendo así que explican lo que están leyendo o escribiendo, podrían completar un desarrollo o resolución de manera coherente considerando las hipótesis planteadas, y todas aquellas cuestiones que hacen al trabajo matemático. Es por eso que consideramos que los indicadores aquí presentados son un importante aporte teórico y podrían ser una herramienta muy útil para materias de matemática de la formación inicial.

Aunque lo obtenido en esta tesis tiene la limitación que todo trabajo de corte exploratorio conlleva, consideramos que hemos obtenido resultados valiosos que dan buenos indicios para seguir estudiando formas efectivas de favorecer la formación inicial del profesor en cuanto al conocimiento del contenido matemático.

De esta manera, hemos comenzado a capitalizar los resultados de este estudio para diseñar una materia avanzada de matemática del Profesorado de la UNGS y tenemos allí un nuevo desafío que ya comenzó a llevarse a cabo.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Ball, D. (1990). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *The Elementary School Journal*, *90*, 449-466.

Ball, D., Hill, H. & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: ¿Who know mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, 29(1), 14-46.

Ball, D. & Hill, H. (2009). The curious -and crucial case- of mathematical knowledge for teaching. *Phi Delta Kappan*, 91(2), 68-71.

Ball, D., Lubienski, S. & Mewborn, D. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 433-456). New York: Macmillan.

Ball, D., Thames, M. & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education, 59(5),* 389-407.

Carrillo, J. Climent, N., Contreras, L.C. & Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining Specialised Knowledge for Mathematics Teaching. En B. Ubuz, C. Haser & M.A. Mariotti (Eds.). Proceedings of the CERME 8. Middle East Technical University, Ankara, Turquía: ERME. pp. 2985-2994.

Carrillo, J., Montes, M., Contreras, L.C., Climent, N. (2017). El conocimiento del professor desde una perspectiva basada en su especialización: MTSK. *ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES CAGNITIVES*, volume 22 (p. 185-205). IREM de Strasbourg.

Cisneros, J. y Velásquez, H. (2013). Conocimiento didáctico-matemático del maestro que enseña matemáticas. En Morales, Yuri; Ramírez, Alexa (Eds.), *Memorias I CEMACYC* (pp. 1-9). Santo Domingo, República Dominicana: CEMACYC.

Escudero, D., Flores, E. y Carrillo, J. (2012). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Sosa, E. Aparicio y F. M. Rodríguez (Eds.), *Memoria de la XV Escuela de Invierno de Matemática Educativa* (pp. 35-42). México, D.F.: Cinvestav.

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2009). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje, 33* (2), 89-105.

Godino, J. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. *UNION Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.

Godino, J., Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 20, 3-31.

Godino, J., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma, XXVII (2),* 221-252.

Gómez, E., Batanero, C. y Contreras, C. (2013). Conocimiento matemático de futuros profesores para la enseñanza de la probabilidad desde el enfoque frecuencial. *Bolema, 28 (48),* 209-229.

Gómez Torres, E. (2016). Tres modelos de conocimiento del professor para la enseñanza de la estadística y la probabilidad. *XXVI Simposio Internacional de Estadística 2016*. Sucre, Colombia.

Hill, H., Ball, D. & Schilling, S. (2008). Unpacking "pedagogical content knowledge": Conceptualizing and measuring teachers´ topic-specific knowledge of student. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372-400.

Lave, J. & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripherical participation.* Cambridge: Cambridge University Press.

Llinares, S. (2000). Intentando comprender la práctica del profesor de Matemáticas. En J.P. da Ponte & L. Serrazina (coord.). *Educaçao Matemática em Portugal, Espanha e Italia*. Secçao de Educaçao Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciêncas de Educaçao: Lisboa, Portugal, 109-132.

Montes, M., Contreras-González, L., & Carrillo, J. (2013). *Conocimiento del profesor de matemáticas, enfoques del MKT y del MTSK*. Conference: Congress of European Research in Mathematics Education (CERME8). Disponible en https://www.researchgate.net/publication/263025498_MTSK_FROM_COMMON_AND_HORIZON_KNOWLEDGE_TO_KNOWLEDGE_OF_TOPICS_AND_STRUCTURES (2017, 18 de diciembre)

Polya G. (1981). *Mathematical Discovery: On understanding, learning and teaching problem solving*. New York: Wiley.

Pochulu, M. y Rodríguez, M. (comps). (2012). *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos.* Buenos Aires: Ediciones UNGS y EDUVIM.

educación matemática. Los Polvorines: Ediciones UNGS.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.

Sosa, L. (2011). *Conocimiento matemático para la enseñanza en bachillerato: un estudio de dos casos.* Tesis doctoral. Huelva: Universidad de Huelva.

Sosa Guerrero, L., Flores-Medrano, E. y Carrillo Yañez, J. (2015). Conocimiento del profesor acerca de las características de aprendizaje del álgebra en bachillerato. *Enseñanza de las ciencias, 33* (2), 173-189.

Sosa Guerrero, L., Flores-Medrano, E. y Carrillo Yañez, J. (2016). Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas del profesor cuando ejemplifica y ayuda en clase de álgebra lineal. *Educación Matemática*, 28 (2), 151-174. Disponible en https://www.researchgate.net/publication/305937678_conocimiento_de_la_ensenanza_de_las_matematicas_del_profesor_cuando_ejemplifica_y_ayuda_en_clase_de_algebra_ lineal (2016, 12 de agosto)

Velázquez Echavarría, H., Cisneros, J., Castro Gordillo, W., Konic, P. (2015). Análisis de tres categorías del conocimiento matemático para la enseñanza de la generalización en la escuela primaria. *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática. CIAEM.* Chiapas, México. Disponible en: http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/258/145 (2016, 2 de marzo).

Publicaciones y ponencias de autoría propia con vínculo con esta Tesis

Leonian, P., Rodríguez, M. y Barreiro, P. (2017). El conocimiento del contenido matemático de futuros profesores en su formación inicial. *XL Reunión de Educación Matemática, RSME - UMA*. Buenos Aires, Argentina.

ANEXOS