ANEXO V

En el Anexo V incluye las tablas que utilizamos para completar el análisis de las producciones de los 20 estudiantes que participaron en la experiencia, correspondientes al TP2.

DESCRIPTOR		EXPLICACIÓN	EVIDENCIAS DE A1	EN SÍNTESIS…
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones ajenas correctas matemáticamente**	**I1** Definiciones de conceptos, reglas, propiedades, enunciados de teoremas, procedimientos, demostraciones de resultados, ejercicios resueltos	- a) Reproducir (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	Conceptos Matemáticos trabajados: Ecuación de segundo grado o cuadrática, fórmula resolvente para ecuaciones cuadráticas, expresiones algebraicas, cálculos combinados. No menciona números enteros, ni números consecutivos. No se menciona el cuadrado de binomio ni operaciones con expresiones algebraicas (solo cálculos con números) Definición de ecuación de segundo grado o cuadrática: Una ecuación de segundo grado o cuadrática es una igualdad de dos expresiones algebraicas en la cual el mayor exponente de la incógnita es dos. La forma general de la ecuación cuadrática es: a x^2 + b x + c = 0 Falta precisión, incompleta. Enunciado de Propiedad/resultado utilizado: fórmula resolvente de la ecuación cuadrática. Las ecuaciones cuadráticas cuya forma sea a x^2 + b x + c = 0, siendo a, b y c números reales y a $\neq$ 0, se resuelven aplicando una fórmula, llamada fórmula resolvente. Ella es $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ Bien definida, mal aplicada porque no verifica hipótesis (ver I3)	**La definición que se menciona está redactada desde el sentido común. Agrega notación. Es imprecisa.** **Yo googlée la definición y ni siquiera eso está copiado. NO se molestan en ir a un lugar que contenga la información, sino que la redactan desde sus conocimientos.**
		- b) Explicar, mostrando comprensión (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	Explicación de la definición: Sabemos que una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas (expresiones algebraicas se le llama al conjunto de números y letras ligados entre sí por los signos de las operaciones). Cada una de estas expresiones algebraicas se denomina miembros de la ecuación y se encuentran separadas por el signo igual. En estos miembros aparecen elementos conocidos, llamados datos, y otros desconocidos, llamados variables o incógnitas, relacionados mediante operaciones matemáticas. No aclara que trabaja en una variable. Las incógnitas, representadas generalmente por letras, constituyen los valores que se pretenden hallar. En una ecuación de segundo grado, el mayor exponente que pueden tener las incógnitas es dos. Generalmente una ecuación de segundo grado es de la forma: a x^2 + b x + c = 0, donde a, b y c son números reales. Acá indica cosas que faltaron a la definición. La solución (todo esto es agregado, no explica la definición) de la ecuación será cualquier valor dado a las variables siempre que satisfagan la igualdad. Si bien existen varias formas para su resolución (factorización en un producto de binomios, completación de cuadrados), la forma general para hacerlo, que permite resolver cualquier ecuación de segundo grado, es la siguiente: $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ De la fórmula planteada hallaremos dos valores que satisfagan la ecuación, uno o ninguno dependiendo esto del discriminante ($\sqrt{b^2-4ac}$). Si es positivo, habrá dos soluciones para la ecuación, si es cero, solo habrá una solución y si es negativo, no tendrá solución en los números reales. Problema matemático.	**Explicar la definición implica agregar cosas: por ejemplo para explicar la definición de ecuación cuadrática, también explicó cómo se resuelve.** **También implica dar por sentado el contexto del tema: no aclara que es en una variable, puede ser porque lo entiende por el contexto de la clase.** **Problema matemática: mal concepto de discriminante.**

			La explicación se traduce a dar más datos sobre lo dicho anteriormente: lo mismo dicho de otra manera. Demostración del resultado señalado: Tenemos la ecuación de segundo grado: **$a x^2 + b x + c = 0$**. La idea es convertir al polinomio problemas de definición en un cuadrado perfecto, entonces: • multiplicamos ambos lados de la ecuación por $4 a$, por lo que obtenemos: no toma a distinto de 0. $4 a^2 x^2 + 4 a b x + 4 a c = 0$ • luego sumamos b^2 a ambos lados: $4 a^2 x^2 + 4 a b x + 4 a c + b^2 = b^2$ • si pasamos $4 a c$ al miembro derecho, obtenemos el cuadrado perfecto del lado izquierdo: $4 a^2 b^2 + 4 a b x = b^2 - 4 a c$ Notar que si desarrollo el cuadrado, obtengo lo mismo que en el punto anterior. → $(2 a x + b)^2 = b^2 - 4 a c$ • Ahora eliminamos el cuadrado de la izquierda: $2 a x + b = \pm \sqrt{b^2 - 4 a c}$ Aquí nos queda ± porque, al aplicar raíz para eliminar el cuadrado tenemos dos posibilidades para el miembro de la derecha. Que sea positivo o negativo. • Por último, despejamos x: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ No explica que al eliminar el cuadrado queda el módulo, directamente queda el ± . ¿Sabrá por qué es?	**Problema en definición de “polinomio” “ecuación polinómica” “ecuación cuadrática”** **¡Ver cómo despeja el cuadrado!**
		- c) reflexionar		
	I2 Lenguajes matemáticos (natural y simbólico),	- a) reproducir “algo” usando lenguajes matemáticos	Tanto en el punto 2) como en el 3) (donde hay que definir y donde debe explicar la definición) se utiliza el lenguaje natural. El lenguaje simbólico aparece al encarar la demostración elegida.	

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">notación matemática, convenciones</td><td>- b) explicar el uso del lenguaje</td><td>No explica la definición, repite en lenguaje natural lo que expresa en símbolos (que es la ecuación cuadrática solamente)</td><td></td></tr>
<tr><td>- c) reflexionar</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Conocimiento del contenido matemático ante producciones propias</td><td rowspan="2">I3
Resolución de una consigna, actividad o ejercicio que no le resulte cognitivamente exigente.</td><td>- Usar lenguaje matemático, operar, usar propiedades, procedimientos, etc.</td><td>Selecciona una notación, lo escribe de manera imprecisa → no señala que y distinto 0 sino no se puede aplicar lo que propone.
Sea a, b y c números enteros consecutivos cualesquiera. En términos generales tenemos que:
a = y; b = y + 1; c = y + 2
Entonces, reemplazando en la ecuación original, nos queda:
4 y x^2 + 4 (y + 1) x + (y + 2) = 0 Plantea la ecuación utilizando esa notación.
Resolvemos la ecuación cuadrática: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
$x_{1,2}$ = - 4 (y + 1) ± √ [(4 y + 4)² - 4 . 4 y (y + 2)] / 2 . 4 y
Observemos que sucede dentro de la raíz (discriminante):
√ (16 y² + 32 y + 16 – 16 y² - 32 y) = √ 16 = 4. Analiza qué sucede con el discriminante.
Entonces, como el valor obtenido es positivo, tenemos dos soluciones:
x_1 = - 4 y - 4 - 4 / 8 y = -1/2
x_2 = - 4 y - 4 – 4 / 8 y = -1/2 - 1/y No hace una correcta escritura (uso de paréntesis)</td><td>Escritura imprecisa (define los números consecutivos sin decir quién es y)
El enunciado no aclara en qué orden son los consecutivos.

No definir correctamente y hace que su razonamiento no sea válido: no se cumplen las hipótesis para utilizar la resolvente.</td></tr>
<tr><td>- Explicar su resolución (lenguaje utilizado, las operaciones, propiedades utilizados, la respuesta).</td><td>Por un lado, notemos que, sea cual sea el valor de y, el discriminante siempre será 4, y por otro lado, una de las raíces siempre será -1/2. Ahora bien, como vemos, la otra raíz es de la forma -1/2 - 1/y, está claro que no es posible que y = 0. Veamos que sucede entonces:
Si a = y = 0; b = 1; c = 2, reemplazando, tenemos que: La aclaración y=0 debería haber estado presentada antes, por aplicación de la fórmula resolvente.
4 x + 2 = 0
El término de segundo grado se elimina ya que es igual a cero por lo que deja de ser una ecuación cuadrática y pasa a ser una ecuación lineal. Por ende tendremos una excepción y es que a = y ≠ 0.
Por lo tanto, concluimos que, sean cual sean los tres números enteros consecutivos que se elijan, una de las raíces de la ecuación cuadrática siempre será -1/2, con la excepción de que a = y ≠ 0.
No considera el orden en que los toma.

Explicación de la resolución
Sea a, b y c números enteros consecutivos cualesquiera. En términos generales tenemos que:
a = y; b = y + 1; c = y + 2 No aclara el orden en que toma los consecutivos!</td><td>Ver cuestiones de definición: el discriminante da 16, ella lo toma como 4 → Mal definido “discriminante”
→ No aclara que eso significa que la ecuación tenga 2 raíces reales distintas: analiza las soluciones sin considerarlo.

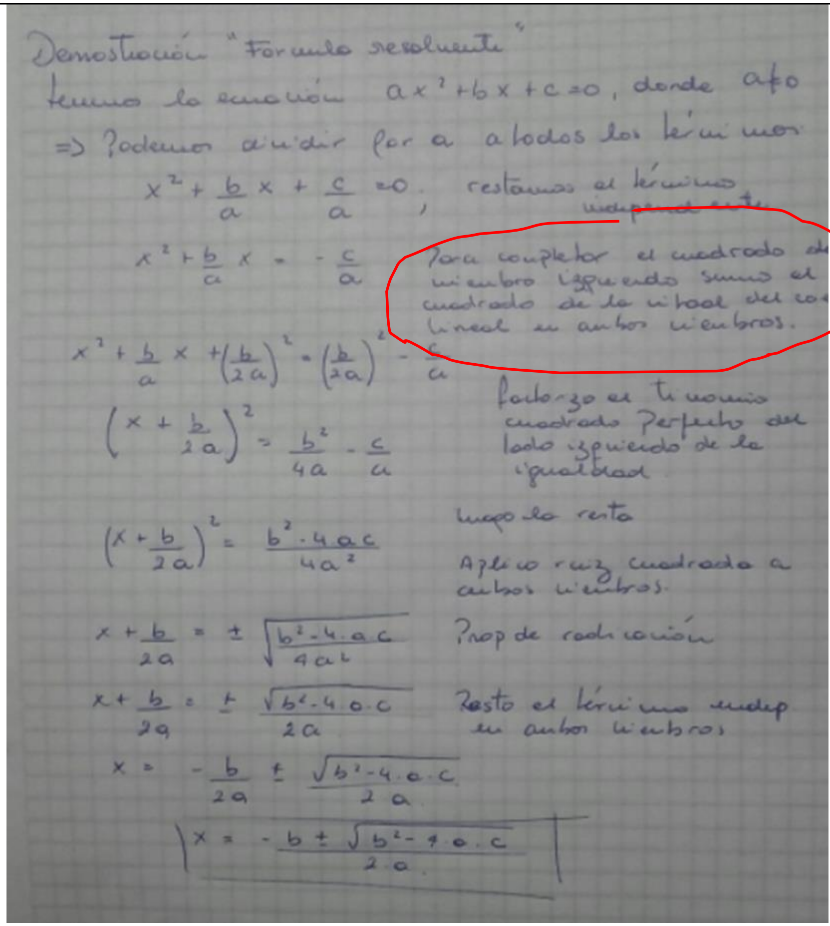
La explicación se reduce a decir qué usó → no explica por qué puede usarlo (hipótesis)</td></tr>
</table>

			Recordar que los números consecutivos son aquellos que siguen el uno al otro, en orden, sin saltos, del menor al mayor. Ver definición de números consecutivos. Entonces, reemplazando en la ecuación original, nos queda: 4 a x^2 + 4 b x + c = 0 4 y x^2 + 4 (y + 1) x + (y + 2) = 0 Resolvemos la ecuación cuadrática: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ **FOR*MULA RESOLVENTE*** $x_{1,2}$ = - 4 (y + 1) ± √ [(4 y + 4)² - 4 . 4 y (y + 2)] / 2 . 4 y Observemos que sucede dentro de la raíz (discriminante): evidentemente "dentro de la raíz" y "discriminante" no son sinónimos. √ (16 y² + 32 y + 16 – 16 y² - 32 y) = √ 16 = 4. Entonces, como el valor obtenido es positivo, se tienen dos soluciones: No considera que son **2 soluc reales distintas**! x_1 = - 4 y - 4 - 4 / 8 y = -1/2 x_2 = - 4 y - 4 – 4 / 8 y = -1/2 - 1/y	
			Si el valor obtenido hubiera sido negativo, no tendríamos raíces reales y si el resultado hubiera sido igual a cero, tendríamos una sola raíz.	
			Por un lado, notamos que, sea cual sea el valor de y, el discriminante siempre será 4, y por otro lado, una de las raíces siempre será -1/2. Ahora bien, como vemos, la otra raíz es de la forma -1/2 - 1/y, está claro que no es posible que y = 0. No lo era por definición! Veamos que sucede entonces: Si a = y = 0; b = 1; c = 2, reemplazando, se tiene que: 4 x + 2 = 0 El término de segundo grado (4 a x^2) se elimina ya que es igual a cero por lo que deja de ser una ecuación cuadrática y pasa a ser una ecuación lineal. Por ende se tendrá una excepción y es que a = y ≠ 0. Por lo tanto, se concluimos que, sean cual sean los tres números enteros consecutivos que se elijan, una de las raíces de la ecuación cuadrática siempre será -1/2, con la excepción de que a = y ≠ 0. La explicación consiste en mostrar qué definiciones usa, qué fórmulas, y qué se refiere con ciertos términos.	

		- reflexionar sobre: lo que significa "usar una propiedad" (que se deben chequear hipótesis), reconocer qué propiedades/métodos/reglas/teoremas son factibles de ser usados ante cada consigna que se aborde y según la instancia de resolución que se esté atravesando; la utilidad de los métodos empleados y la pertinencia –o no- de aplicarlos en diferentes contextos, la interpretación de lo hallado para dar la respuesta, la necesidad de responder a lo pedido.	Creo que es imprescindible utilizar la fórmula resolvente para resolver ecuaciones cuadráticas hace referencia a la resolución de ecuaciones en general, no de esta consigna pero luego lo justifica con la resolución que muestra, ya que, sin ella no es posible ver, por ejemplo, que en todos los casos, sean cuales sean los números enteros consecutivos utilizados, el discriminante siempre va a ser positivo, por lo cual obtendremos dos resultados distintos de x, y además que una de las raíces siempre será -1/2. Recién acá considera que hay dos resultados distintos. Considera solo la raíz fija, no toma en cuenta que la otra raíz también será conocida (por más que dependa del valor de y)	**La reflexión se centra en qué obtuvo como respuesta de la consigna, no en cómo ni por qué llegó a ella → NO responde a la pregunta del punto 6.** **Reconoce a la resolvente es "la" forma de resolver una ecuación cuadrática pero es falso! Solo sirve "seguro" en este caso. No advierte que estaba en condiciones de poder aplicarla.** **¿Saben por qué se puede aplicar? Lo pudo decir, ¿pero lo entiende? Piensa que a distinto de 0 es un tema de definición de la ecuación.**
	I4 Resolución de tareas intelectualmente exigentes (demostrar una proposición no vista, resolver un "problema", modelizar).	- Usar lenguaje matemático, operar, usar propiedades, procedimientos, buscar información, proponer una demostración, dar contraejemplos, etc.	En este caso no corresponde el I4	
		- Explicar		

		- reflexionar		

DESCRIPTOR		EXPLICACIÓN	EVIDENCIAS DE A2	EN SÍNTESIS…
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones ajenas correctas matemáticamente**	**I1** Definiciones de conceptos, reglas, propiedades, enunciados de teoremas, procedimientos, demostraciones de resultados, ejercicios resueltos	- a) Reproducir (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	Conceptos Matemáticos trabajados: los conceptos matemáticos utilizados son: • Raíces de un polinomio • Método para encontrar las raíces de un polinomio cuadrático. Definición de concepto matemático: *El polinomio p(x) es divisible por un polinomio de la forma (x-a) si y solo si p(x=a)=0; al valor x=a se le llama raíz o cero de p(x).* No me queda claro la pertinencia de esta definición en el trabajo. Definición de propiedad: Método para calcular las raíces de un polinomio ver definición de polinomio/ecuación cuadrático: “formula resolvente” No considera las hipótesis para poder utilizarla. Sean x_1 y x_2 las raíces reales de un polinomio, las podemos hallar mediante la fórmula: $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ Donde a, b y c son los coeficientes del polinomio. Demostración de la propiedad:	**No distingue entre definición y propiedad. No sabe qué es una definición.** **Ver qué implica “aplicar raíz cuadrada miembro a miembro”: utilizan el $\underline{+}$ y no usan módulo.** **En el circulado dice “para completar el cuadrado en el miembro izquierdo” → nunca dijo que quería hacer eso. Entonces: no anticipan qué van a hacer, no explican qué quieren hacer ni a dónde llegar, solo dicen paso a paso qué hacen.**

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td>


Demostración "Fórmula resolvente"

tenemos la ecuación $ax^2+bx+c=0$, donde $a\neq 0$

⇒ Podemos dividir por a a todos los términos

$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$, restamos el término independiente

$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$

Para completar el cuadrado del miembro izquierdo sumo el cuadrado de la mitad del coef lineal en ambos miembros.

$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$

Factorizo el trinomio cuadrado perfecto del lado izquierdo de la igualdad

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a}-\frac{c}{a}$

Luego la resto

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$

Aplico raíz cuadrada a ambos miembros.

$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4\cdot a\cdot c}{4a^2}}$ Prop de radicación

$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2a}$ Resto el término indep en ambos miembros

$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2a}$

$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}}$
</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>- b) Explicar, mostrando comprensión (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)</td>
<td>
Explicación de la definición:
Como tengo una doble implicación voy a empezar de atrás para adelante, si yo consigo un valor "a" que me anula el polinomio p(x) ese valor es raíz de mi polinomio, eso significa que mi polinomio evaluado en x=a da cero, y más aún; el polinomio (x-a) divide a mi polinomio p(x).
Por ejemplo: si mi p(x)=x^2-4 en x=2 mi polinomio se hace cero, esto ocurre si y solo si 2 es raíz de mi polinomio, más aun (x-2) divide a x^2-4. Utiliza un ejemplo para explicar, pero no es pertinente (mal utilizado: intenta mostrar la propiedad con el ejemplo, no ejemplificar la explicación como se propuso).

Demostración del resultado señalado: como puede verse en la imagen antes incluida, la explicación de la demostración consiste en decir paso a paso qué es lo que está aplicando.
</td>
<td>
La doble implicación como la posibilidad de empezar por donde quiera, no que vale en ambos sentidos.

El uso del ejemplo para explicar.

La explicación de una demostración implica
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="6"></td><td rowspan="2"></td><td></td><td></td><td>decir qué se hace paso a paso: no anticipan qué van a hacer, no explican qué quieren hacer ni a dónde llegar, solo dicen paso a paso qué hacen (ver imagen en I1)</td></tr>
<tr><td>- c) reflexionar</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">I2
Lenguajes matemáticos (natural y simbólico), notación matemática, convenciones</td><td>- a) reproducir “algo” usando lenguajes matemáticos</td><td>Utiliza en general el lenguaje natural. El simbólico aparece en la demostración, y en algún punto en el enunciado → ver si entra la utilización de ejemplos: acá si usa lenguaje simbólico, tratando de hacer más claro la explicación, pero no atiende a ella.</td><td></td></tr>
<tr><td>- b) explicar el uso del lenguaje</td><td>No explica el uso del lenguaje: intenta explicar qué dice la propiedad seleccionada utilizando el lenguaje natural, pero: no explica la utilización de símbolos y no entiende qué significa “sii”.</td><td></td></tr>
<tr><td>- c) reflexionar</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>I3
Resolución de una consigna, actividad o ejercicio que no le resulte cognitivamente exigente.</td><td>- Usar lenguaje matemático, operar, usar propiedades, procedimientos, etc.</td><td>Llamo $a = n - 1, b = n$ y $c = n + 1$; enteros. La definición de las variables está incompleta: no aclara que la opción de tomar a los coeficientes de esa manera no es única, y además en este caso no aclara que n es distinto de 1.

No analiza la cantidad de soluciones, solo se detiene en cuáles son ellas (opera para encontrarlas). Se puede ver en la imagen pegada en I1.</td><td>No analiza que la ecuación tiene 2 soluciones distintas, solo en cuáles son ellas → se detienen en la conclusión a la que llegan luego de hacer cuentas, no en lo que obtienen durante el proceso.</td></tr>
</table>

Conocimiento del contenido matemático ante **producciones propias**

- Explicar su resolución (lenguaje utilizado, las operaciones, propiedades utilizados, la respuesta).

No llega a que la ecuación tiene 2 soluciones reales distintas independientemente de cómo tome sus coeficientes (ni en el caso particular que se plantea): llega a que una de ellas es -1/2 y la otra depende de a y de c → ver que depende solo de a, está incompleto.

Está incompleto el paso entre renglón y renglón: da por sabida algunas cuentas (no evidentes)

Llamo $a = n - 1, b = n \; y \; c = n + 1$; enteros.
Entonces la ecuación

$$4ax^2 + 4bx + c = 0$$

Tendrá solución $x_1 = \frac{-(n+1)}{2(n-1)}$ y $x_2 = -\frac{1}{2}$

Aplico la fórmula resolvente

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ no considera a distinto de 0 (o n distinto de 1)

Entonces

$$x_{1,2} = \frac{-4n \pm \sqrt{(4n)^2 - 4[4(n-1)(n+1)]}}{2[4(n-1)]}$$

Donde $2[4(n-1)] \neq 0$

$$x_{1,2} = \frac{-4n \pm \sqrt{16n^2 - 4[4n^2 - 4]}}{8(n-1)}$$

Entonces

$$x_{1,2} = \frac{-4n \pm \sqrt{16}}{8(n-1)}$$

Entonces mis raíces son:

$$x_1 = -\frac{(n+1)}{2(n-1)} \; \textit{problema de signo}: \frac{-n+1}{2(n-1)} \qquad x_2 = -\frac{1}{2}$$

Conclusión: para todas las ecuaciones de la forma
$4ax^2 + 4bx + c = 0$ siempre $-\frac{1}{2}$ es raíz y mi otra raíz me queda en función de los números a y c o sea $-\frac{1}{2} * \frac{c}{a}$

Explica su respuesta en función de lo que obtuvo (arrastra error)

- Muestra otras formas de resolver. Ver anexos.

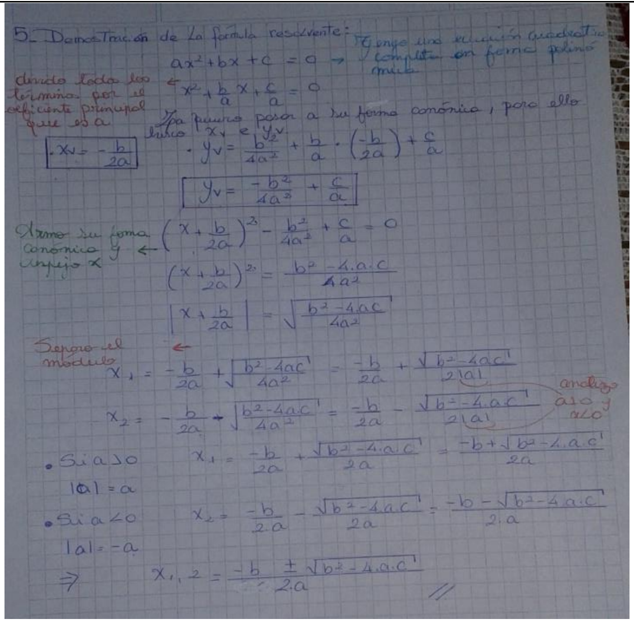
Explicación para un compañero:
a, b y c son números consecutivos no considera restricciones para los parámetros que los llamé n-1,n y n+1 respectivamente pero como la ecuación es $4ax^2 + 4bx + c = 0$ entonces me queda $4(n-1)x^2 + 4nx + (n+1)$=0
Donde los coeficientes que reemplazo en la resolvente son:
a= 4(n-1)
b=4n
c=n+1

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x_{1,2} = \frac{-4n \pm \sqrt{(4n)^2 - 4[4(n-1)(n+1)]}}{2[4(n-1)]}$$

			(Mismos comentarios)	
		- reflexionar sobre: lo que significa "usar una propiedad" (que se deben chequear hipótesis), reconocer qué propiedades/métodos/reglas/teoremas son factibles de ser usados ante cada consigna que se aborde y según la instancia de resolución que se esté atravesando; la utilidad de los métodos empleados y la pertinencia –o no- de aplicarlos en diferentes contextos, la interpretación de lo hallado para dar la respuesta, la necesidad de responder a lo pedido.	A lo largo de su trabajo nunca menciona que para la definición de función cuadrática se toma a distinto de cero: ni al mencionarla ni al utilizar la fórmula resolvente. La interpretación de lo obtenido como respuesta se reduce a lo que obtuvo simbólicamente, no pudo leer que son 2 soluciones reales distintas. Sobre el punto 6: ¿tenés certeza de que podés usar la propiedad que utilizaste? Haber aplicado el resultado de la fórmula resolvente para hallar las características de las raíces de todas las ecuaciones de la forma $$4ax^2 + 4bx + c = 0$$ Fue muy conveniente, tengo certeza de que podía usarla ya que la formula me devuelve las raíces reales de un polinomio cuadrático, quizás tendría restricciones si no supiera que mi polinomio original pertenece a enteros, pues era condición que mis coeficientes sean enteros consecutivos. De no ser por esto tendría que mirar el discriminante de la formula y pedir condiciones. La reflexión es incorrecta: no consideró nunca la condición de $a \neq 0$ para aplicar la fórmula resolvente. Además, mezcla las características de la consigna a la propiedad matemática.	
	I4 Resolución de tareas intelectualmente exigentes (demostrar una proposición no vista, resolver un	- Usar	En este caso no corresponde el I4	

	“problema”, modelizar).	- Explicar		
		- reflexionar …		

DESCRIPTOR		EXPLICACIÓN	EVIDENCIAS DE A3	EN SÍNTESIS…
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones ajenas correctas matemáticamente**	**I1** Definiciones de conceptos, reglas, propiedades, enunciados de teoremas, procedimientos, demostraciones de resultados, ejercicios resueltos	- a) Reproducir (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	Conceptos Matemáticos trabajados: Los conceptos matemáticos que se trabajan en esta consigna son: Ecuación cuadrática Soluciones de ecuaciones cuadráticas Inecuaciones y conjunto solución Expresiones algebraicas Enunciado de definición: Una ecuación cuadrática es aquella de la forma $ax^2+bx+c=0$ con $a,b,c\in\mathbb{R}\ y\ a\neq 0$, a diferencia de las ecuaciones lineales, puede tener a lo sumo dos soluciones reales, no necesariamente distintas Y la fórmula para hallar sus soluciones es: $X_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ¿cuándo termina la definición? Hay un agregado que no corresponde. Lo que está en amarillo es un agregado? Enunciado de Propiedad/resultado utilizado: ¿Cómo hallar las raíces de $f(x)=ax^2+bx+c$? Hallar las raíces significa encontrar las x que verifican $ax^2+bx+c=0$. Tenemos una Fórmula que resuelve este problema que es: $X_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, (Carnelli et al, 2006, pp 200-201) La reproducción está incompleta: cita al libro dejando toda la responsabilidad al lector, pero está mal presentada porque no aclara hipótesis (que antes había mencionado en la definición). Demostración de la propiedad:	**¿Qué es una definición? ¿Cuándo termina?** **¿Es necesario agregar la fórmula resolvente en este caso?**

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td>


5_ Demostración de La fórmula resolvente:

Tengo una ecuación cuadrática completa en forma polinómica

$ax^2+bx+c=0$

divido todos los términos por el coeficiente principal que es a

$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$

Ya puedo pasar a su forma canónica, para ello busco x_v e y_v.

$\boxed{x_v=-\frac{b}{2a}}$

$y_v=\frac{b^2}{4a^2}+\frac{b}{a}\cdot\left(\frac{-b}{2a}\right)+\frac{c}{a}$

$\boxed{y_v=\frac{-b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}}$

Armo su forma canónica y despejo x

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0$

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4.a.c}{4a^2}$

$\left|x+\frac{b}{2a}\right|=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$

Separo el módulo

$x_1=-\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\frac{-b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2|a|}$

$x_2=-\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\frac{-b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4.a.c}}{2|a|}$

analizo $a>0$ y $a<0$

• Si $a>0$ $|a|=a$ $x_1=\frac{-b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4.a.c}}{2a}=\frac{-b+\sqrt{b^2-4.a.c}}{2a}$

• Si $a<0$ $|a|=-a$ $x_2=\frac{-b}{2.a}-\frac{\sqrt{b^2-4.a.c}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{b^2-4.a.c}}{2.a}$

$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4.a.c}}{2.a}$ //

El x_v e y_v los saca de la 1ra ecuación, no de la que tiene a=1? Bueno, queda poco claro.
Utiliza bien el módulo → no indica qué usa para calcular las coordenadas del vértice.
</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>- b) Explicar, mostrando comprensión (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)</td>
<td>
Explicación de la definición:

Recordemos que cuando trabajamos ecuaciones lineales, eran de la forma $ax+b=0$ con $a,b\in\mathbb{R}$ $y\ a\neq 0$. Estas ecuaciones eran de grado 1 porque la variable “x” estaba elevada a “la uno” y estas ecuaciones tenían una sola solución.

Cuando hablamos de ecuación cuadrática se suma un término de grado dos. Es decir, se suma un término con “X” elevada al cuadrado. La forma general es $ax^2+bx+c=0$ a, b y c son los coeficientes de cada término. B y c pueden ser cualquier número real pero “a” nunca puede ser cero porque la ecuación dejaría de ser cuadrática y se convertiría en lineal.

Estás ecuaciones tienen dos soluciones reales distintas o una solución real o pueden llegar a no tener solución.

Las soluciones se pueden encontrar con una fórmula especial que se llama “Fórmula resolvente”, para poder utilizarla tenemos que identificar los coeficientes de la ecuación y reemplazarlos en la ecuación con su respectivo signo.

ejemplo

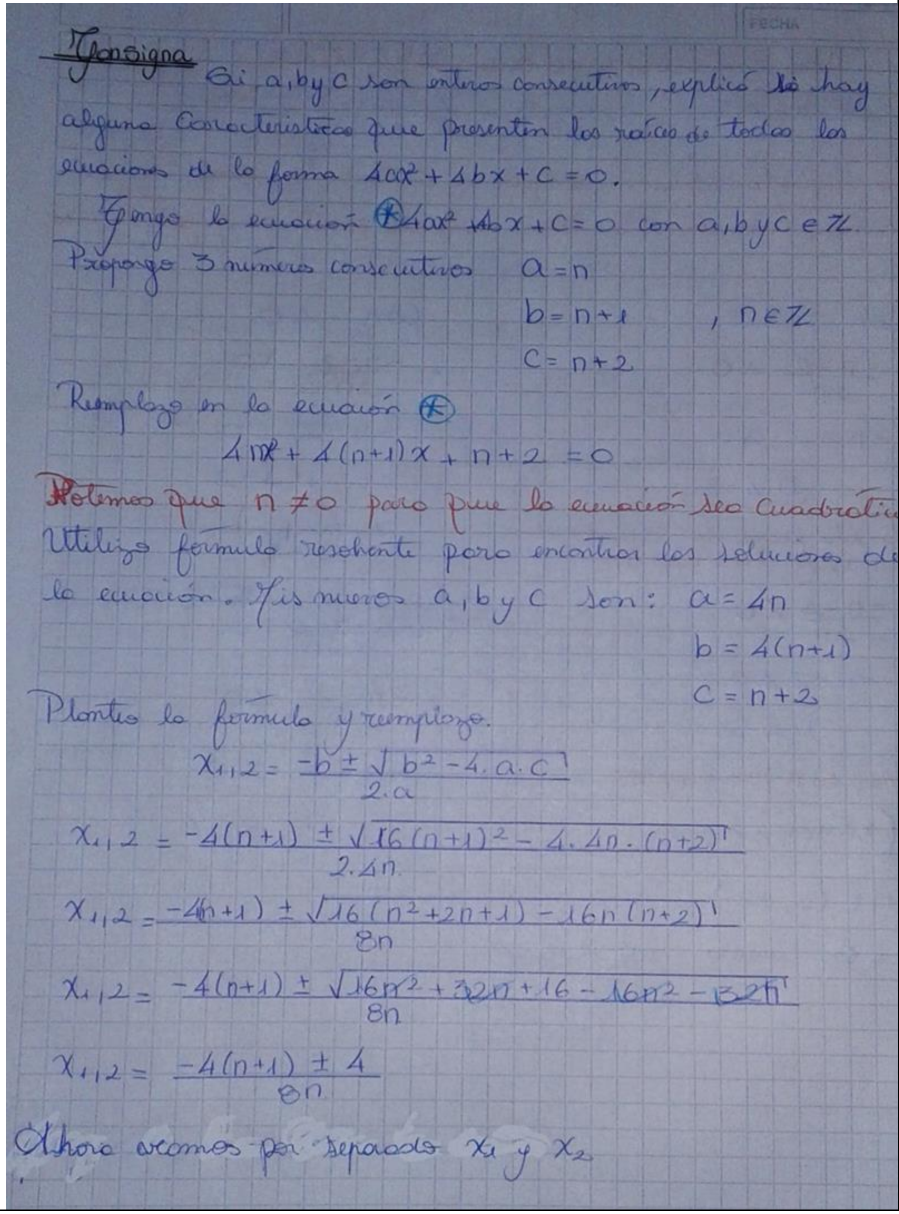
$x^2-x-2=0$ en esta ecuación vemos que a = 1 , b = -1 y c = -2

Ahora reemplacemos en la fórmula resolvente $X_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

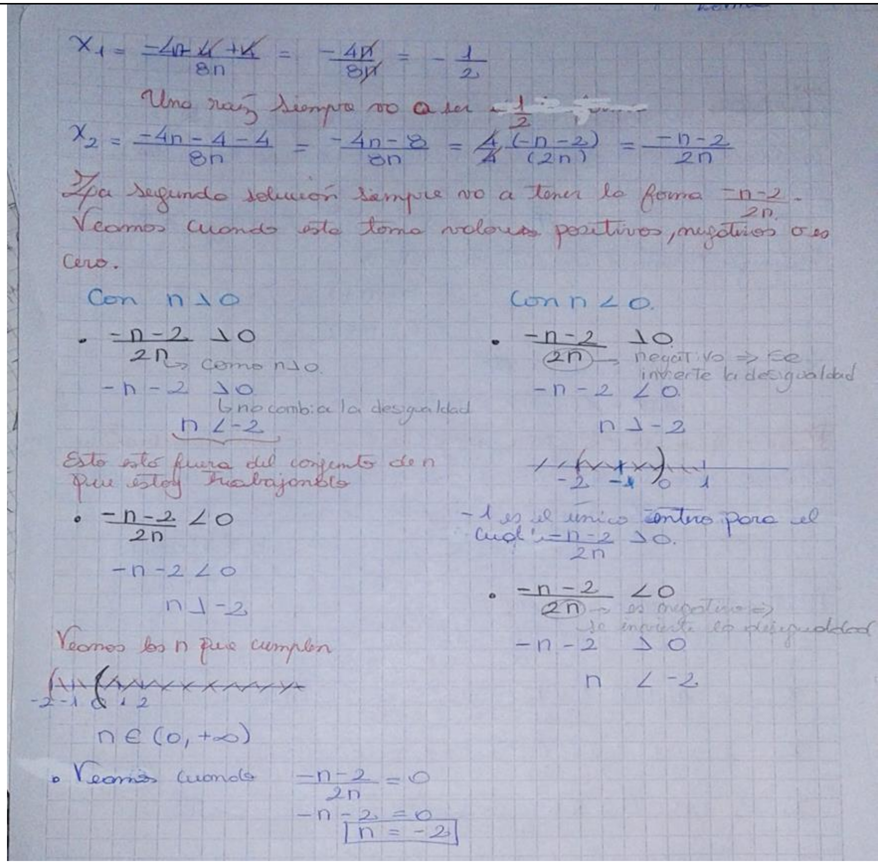
$$X_{1,2}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\ x\ 1\ x\ (-2)}}{2\ x\ 1}$$

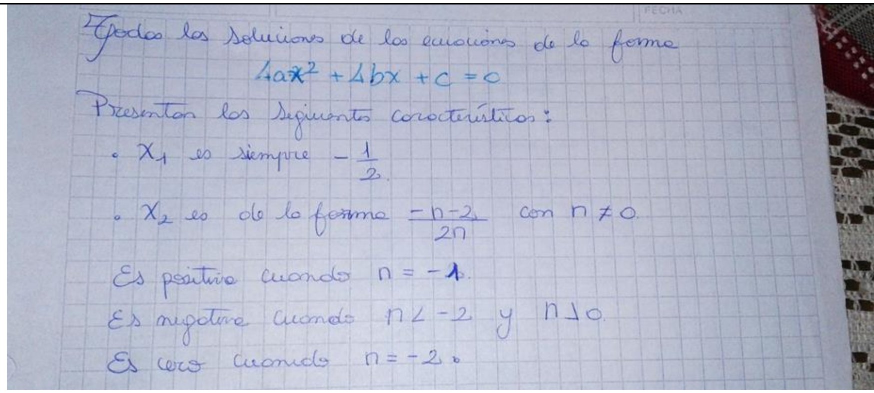
manejo algebraico
</td>
<td>Ver conjunto solución/cantidad de soluciones de ecuación lineal.</td>
</tr>
</table>

			$$X_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}$$ $$X_1=\frac{1+3}{2}=\frac{4}{2}=2\,,\ X_2=\frac{1-3}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$ *fin del ejemplo* Explicación de la demostración del resultado señalado: explica en algunos pasos qué es lo que hace (no anticipa, no desarrolla) → no explica por qué puede hacerlo	**En la explicación de la demostración indica qué hace en cada paso: pero no por qué lo hace ni qué le permite hacerlo.**
		- c) reflexionar		
	I2 Lenguajes matemáticos (natural y simbólico), notación matemática, convenciones	- a) reproducir "algo" usando lenguajes matemáticos	Utiliza lenguaje simbólico para lo que plantea como definición, y lenguaje natural para explicar lo que definió.	
		- b) explicar el uso del lenguaje	Para la explicación de la definición, observamos el uso del lenguaje natural: trata de contar con palabras qué dice la definición, y lo refuerza mostrando un ejemplo. El problema es que se centra más en lo que anexa a la definición (fórmula resolvente) que en la definición misma.	
		- c) reflexionar		
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones propias**	**I3** Resolución de una consigna, actividad o ejercicio que **no** le resulte cognitivamente exigente.	- Usar lenguaje matemático, operar, usar propiedades, procedimientos, etc.	Selecciona una notación, determina la restricción para que el coeficiente principal sea distinto de cero: utiliza lo decidio para plantear la resolución. Opera utilizando el lenguaje algebraico. Utiliza lenguaje natural y simbólico.	

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>- Explicar su resolución (lenguaje utilizado, las operaciones, propiedades utilizados, la respuesta).</td>
<td>No toma en cuenta que el discriminante es 16, continúa con las cuentas.

Consigna: Si a, b y c son enteros consecutivos, explicá si hay alguna característica que presenten las raíces de todas las ecuaciones de la forma $4ax^2 + 4bx + c = 0$.
Tengo la ecuación (*) $4ax^2 + 4bx + c = 0$ con a, b y $c \in \mathbb{Z}$.
Propongo 3 números consecutivos $a = n$
$b = n+1$, $n \in \mathbb{Z}$
$c = n+2$
Reemplazo en la ecuación (*)
$4nx^2 + 4(n+1)x + n + 2 = 0$
Notemos que $n \neq 0$ para que la ecuación sea cuadrática
Utilizo fórmula resolvente para encontrar las soluciones de la ecuación. Mis números a, b y c son: $a = 4n$
$b = 4(n+1)$
$c = n+2$
Planteo la fórmula y reemplazo.
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$
$x_{1,2} = \frac{-4(n+1) \pm \sqrt{16(n+1)^2 - 4.4n.(n+2)}}{2.4n}$
$x_{1,2} = \frac{-4(n+1) \pm \sqrt{16(n^2+2n+1) - 16n(n+2)}}{8n}$
$x_{1,2} = \frac{-4(n+1) \pm \sqrt{16n^2 + 32n + 16 - 16n^2 - 32n}}{8n}$
$x_{1,2} = \frac{-4(n+1) \pm 4}{8n}$
Ahora vemos por separado x_1 y x_2</td>
<td>Esta tanda de trabajos falla en la interpretación de lo que obtiene para responder la consigna: no se dan cuenta que tiene 2 soluciones reales distintas! Solo reparan en lo obtenido algebraicamente.

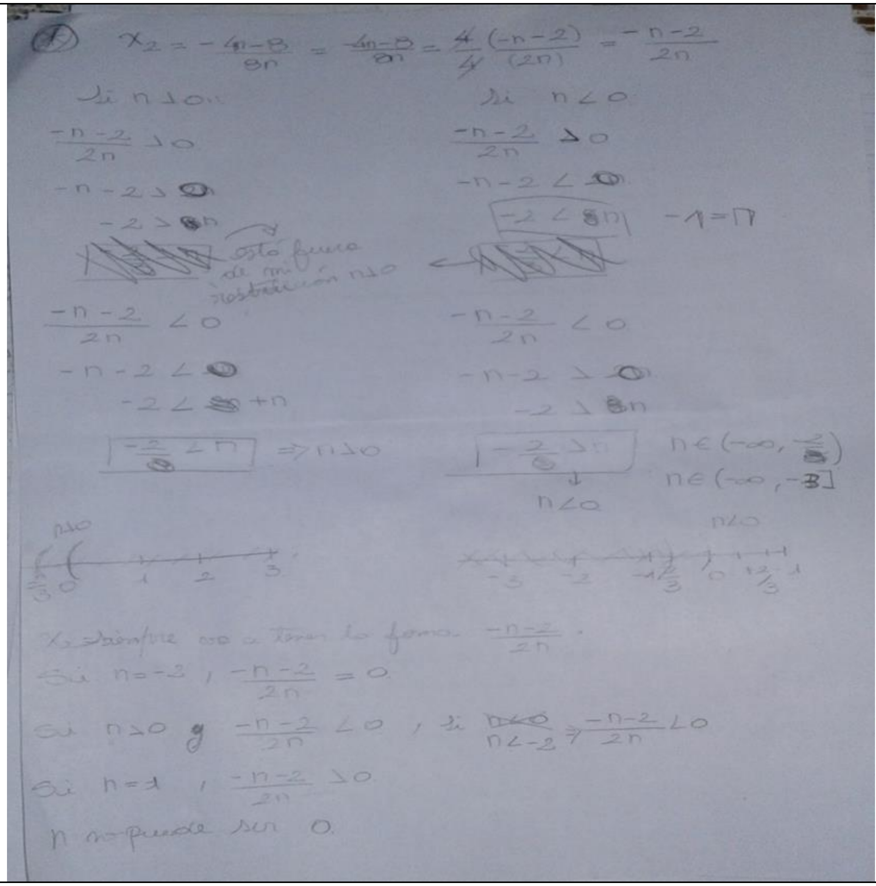
¿Qué significa explicar una resolución? Hay trabajos que añaden explicaciones de qué hicieron o porqué, en este caso la explicación pasa por un desarrollo lo más completo posible, sin aclaraciones extra.</td>
</tr>
</table>

			 $x_1 = \frac{-4n\cancel{k}+\cancel{k}}{8n} = -\frac{4\cancel{n}}{8\cancel{n}} = -\frac{1}{2}$ Una raíz siempre va a ser $-\frac{1}{2}$ $x_2 = \frac{-4n-4-4}{8n} = \frac{-4n-8}{8n} = \frac{4(-n-2)}{4(2n)} = \frac{-n-2}{2n}$ La segunda solución siempre va a tener la forma $\frac{-n-2}{2n}$. Veamos cuando esta toma valores positivos, negativos o es cero. Con $n > 0$ • $\frac{-n-2}{2n} > 0$ → como $n > 0$ $-n-2 > 0$ → no cambia la desigualdad $n < -2$ Esto está fuera del conjunto de n que estoy trabajando • $\frac{-n-2}{2n} < 0$ $-n-2 < 0$ $n > -2$ Veamos los n que cumplen $n \in (0, +\infty)$ • Veamos cuando $\frac{-n-2}{2n} = 0$ $-n-2 = 0$ $\boxed{n = -2}$ Con $n < 0$. • $\frac{-n-2}{2n} > 0$ → $2n$ negativo ⇒ se invierte la desigualdad $-n-2 < 0$ $n > -2$ -1 es el único entero para el cual $\frac{-n-2}{2n} > 0$. • $\frac{-n-2}{2n} < 0$ → $2n$ es negativo ⇒ se invierte la desigualdad $-n-2 > 0$ $n < -2$ Problemas de resolución de inecuaciones racionales → tiene errores en su conclusión. En el anexo, donde hay una imagen con los cálculos auxiliares, se puede observar que al resolver las inecuaciones no puede analizar qué pasa cuando una restricción le condiciona lo obtenido. Por eso en lo que presenta como resolución experta no lo considera. **(*)**	

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>
Todas las soluciones de las ecuaciones de la forma
$4ax^2 + 4bx + c = 0$
Presentan las siguientes características:
• x_1 es siempre $-\frac{1}{2}$.
• x_2 es de la forma $\frac{-n-2}{2n}$ con $n \neq 0$.
Es positivo cuando $n = -1$.
Es negativo cuando $n < -2$ y $n > 0$.
Es cero cuando $n = -2$.

La explicación de la solución para por hacer los pasos lo más explícitos posible: no hay aclaraciones extra.

(*)</td><td></td></tr>
</table>

			 (4) $x_2 = -\frac{4n-8}{8n} = \frac{-4n-8}{8n} = \frac{4}{4}\frac{(-n-2)}{(2n)} = \frac{-n-2}{2n}$ Si $n>0$: $\frac{-n-2}{2n} > 0$; $-n-2 > 0$; $-2 > n$ — está fuera de mi restricción $n>0$ $\frac{-n-2}{2n} < 0$; $-n-2 < 0$; $-2 < n$; $\boxed{-2 < n} \Rightarrow n>0$ Si $n<0$: $\frac{-n-2}{2n} > 0$; $-n-2 < 0$; $\boxed{-2 < n}$ $\frac{-n-2}{2n} < 0$; $-n-2 > 0$; $-2 > n$; $\boxed{-2 > n}$; $n<0$ $n \in (-\infty, -2)$ x_2 siempre va a tener la forma $\frac{-n-2}{2n}$. Si $n=-2$, $\frac{-n-2}{2n} = 0$ Si $n>0$ y $\frac{-n-2}{2n} < 0$, si $n<-2 \Rightarrow \frac{-n-2}{2n} < 0$ Si $n=1$, $\frac{-n-2}{2n} > 0$ n no puede ser 0.	
		- reflexionar sobre: lo que significa “usar una propiedad” (que se deben chequear hipótesis), reconocer qué propiedades/métodos/reglas/teoremas son factibles de ser usados ante cada consigna que se aborde y según la instancia de resolución que se esté atravesando; la utilidad de los métodos empleados y	Tengo la certeza de que puedo usar la propiedad ya que es la fórmula con la que se pueden resolver ecuaciones cuadráticas y está demostrado en el ítem anterior. Es coherente la respuesta: analiza la definición de ecuación cuadrática, propone la resolvente como “propiedad” para demostrar y es lo que utiliza para resolver la consigna. Sobre la respuesta: busca “sacarle el jugo” lo máximo posible a lo que obtiene como respuesta, pero pasó por alto el hecho de que son dos soluciones reales distintas.	

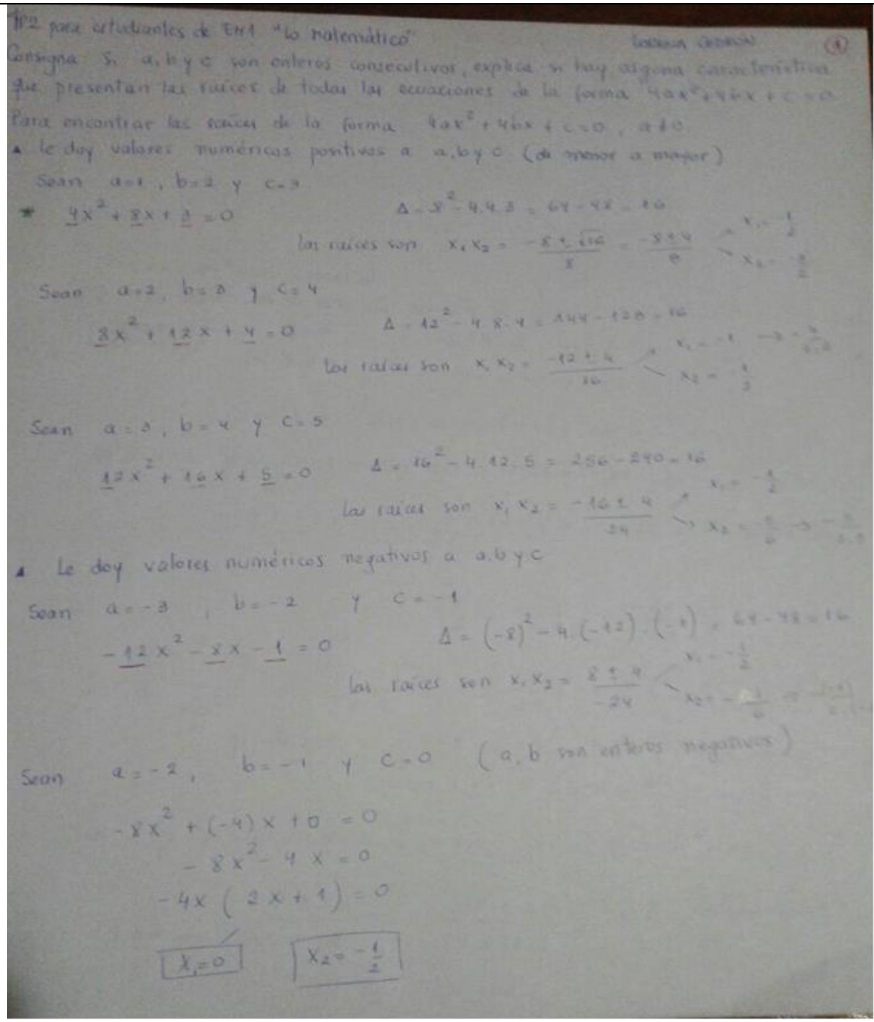
		la pertinencia –o no- de aplicarlos en diferentes contextos, la interpretación de lo hallado para dar la respuesta, la necesidad de responder a lo pedido.		
	I4 Resolución de tareas intelectualmente exigentes (demostrar una proposición no vista, resolver un "problema", modelizar).	- Usar	En este caso no corresponde el I4	
		- Explicar		
		- reflexionar		

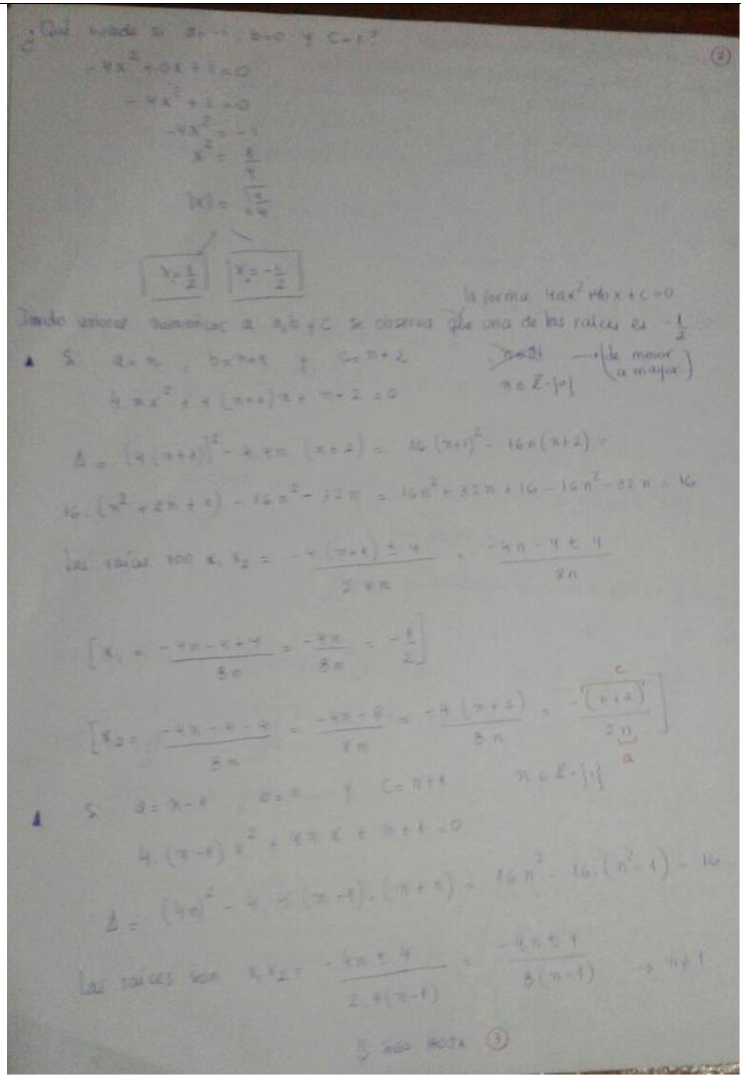
DESCRIPTOR		EXPLICACIÓN	EVIDENCIAS DE A4	EN SÍNTESIS…
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones ajenas correctas matemáticamente**	**I1** Definiciones de conceptos, reglas, propiedades, enunciados de teoremas, procedimientos, demostraciones de resultados, ejercicios resueltos	- a) Reproducir (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	Conceptos Matemáticos trabajados: Uno de los conceptos matemáticos de esta consigna es la ecuación cuadrática y la fórmula de la resolvente. Enunciado de definición: Se llama ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática con incógnita x, a la siguiente expresión: $ax^2+bx+c=0$, donde *a, b y c* son números reales, *y a≠ 0* Pueden ser completas o incompletas, la anterior es completa, las incompletas se producen cuando *b=0* o cuando *c=0.* Está de más como definición. Enunciado de Propiedad/resultado utilizado: La propiedad matemática utilizada en la resolución de la consigna es la fórmula de la resolvente. Las raíces de una ecuación cuadrática pueden obtenerse mediante la siguiente fórmula: $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ Demostración de la propiedad: La ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática es de la expresión: $ax^2+bx+c=0$*, con a≠0* Primero despejo c de la ecuación, obteniendo*:* $ax^2+bx=-c$ Luego, saco factor común *a*, $a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)=-c \rightarrow$ *Por definición a≠0* Después, despejo *a* $x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$ Sumo a ambos miembros $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ para completar cuadrados en el primer miembro de la igualdad: $x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$ Manipulo aritméticamente en el segundo miembro de la igualdad: $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{-4ac+b^2}{4a^2}$	**¿Cuál es la definición de una "definición"?** **Necesitan agregar información para completar la definición.**

			Despejo, obteniendo: $x+\frac{b}{a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$ Finalmente, $x=-\frac{b}{a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \Leftrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ Por lo tanto, las raíces de la ecuación cuadrática se calculan con esta fórmula. Ver definición de raíces de una función y de soluciones de una ecuación.	
		- b) Explicar, mostrando comprensión (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	Explicación de la definición: Una ecuación cuadrática tiene la forma (Señalo en el pizarrón $ax^2+bx+c=0$) donde los coeficientes no incluye explicación de terminología! reales son *a, b y c*. Cuando se pide que el coeficiente *a* sea distinto a cero es porque si esto ocurre, la ecuación quedaría de la forma $bx+c=0$ que representa a una ecuación lineal. Por ejemplo: $5x+7=0$ Por ejemplo, son ecuaciones cuadráticas: $\frac{1}{2}x^2+2x+4=0$ $x^2-81=0$ $6x-x^2+9=0$ ¿Podrían dar otros ejemplos de una función cuadrática? ¿Cuáles? La variable x es lo que quiero hallar, o sea, son los valores de x que busco para satisfaga la ecuación cuadrática. Esto quiere decir, encontrar valores que haga que la ecuación dé cero. ¿Está incluyendo más cosas que lo que quiere explicar: conjunto solución o soluciones de una ecuación? La explicación en la demostración implica hacer un desarrollo completo de todos los pasos: no agrega explicación en lenguaje natural ni aclaraciones extra.	**Una explicación implica dar ejemplos → señal de "intentar" mostrar comprensión.** **No reparan en que la explicación del concepto también requiere explicación de los términos específicos.**
		- c) reflexionar		
	I2 Lenguajes matemáticos (natural y simbólico), notación	- a) reproducir "algo" usando lenguajes matemáticos	Usa lenguaje simbólico para definir y demostrar, y lenguaje coloquial para referirse a la clase cuando explica.	

	matemática, convenciones	- b) explicar el uso del lenguaje	Más allá de repetir la ecuación escrita, al explicar traduce en lenguaje natural qué significan las condiciones que se mencionan en la definición mostrando qué quiere decir cada una de ellas.	
		- c) reflexionar		
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones propias**	**I3** Resolución de una consigna, actividad o ejercicio que **no** le resulte cognitivamente exigente.	- Usar lenguaje matemático, operar, usar propiedades, procedimientos, etc.	Utiliza lenguaje simbólico, usa la propiedad que señaló en el trabajo. Selecciona una notación, aclara que podría tomarse de otra forma aunque no la utiliza para resolver la consigna. Utiliza la fórmula resolvente, acorde a lo señalado en los otros ítems. Opera correctamente utilizando lenguaje simbólico.	**No aclaran que la elección de los símbolos no es única.** **La coherencia entre lo que utilizan en la resolución y lo que nosotras analizamos en I1 e I2 es razonable porque primero resuelven y luego ven qué usaron.**
		- Explicar su resolución (lenguaje utilizado, las operaciones, propiedades utilizados, la respuesta).	Sean *a=n, b=n+1 y c=n+2, con a, b y c* números enteros consecutivos, con $n \in Z$. *En* este caso, *con* $n \neq 0$ No aclara el porqué de esta restricción. La forma de la ecuación es*:* $4nx^2 + 4(n+1)x + (n+2) = 0$. Luego, realizo la resolvente*:* no la usan como herramienta, ¿qué significa “realizo”? $x_1, x_2 = \frac{-4(n+1) \pm \sqrt{4^2(n+1)^2 - 4 \times 4n \times (n+2)}}{2 \times 4 \times n} \Leftrightarrow \frac{-(4n+4) \pm \sqrt{16n^2 + 32n + 16 - 16n^2 - 32n}}{8n}$ $\Leftrightarrow x_1, x_2 = \frac{-(4n+4) \pm \sqrt{16}}{8n} \Leftrightarrow \frac{-(4n+4) \pm 4}{8n} \Leftrightarrow$ $x_1 = \frac{-4n-4+4}{8n} \Leftrightarrow \frac{-4n}{8n} = -\frac{1}{2}$ $x_2 = \frac{-4n-4-4}{8n} \Leftrightarrow \frac{-4n-8}{8n} = -\frac{4(n+2)}{8n} = -\frac{(n+2)}{2n} = -\frac{c}{2a}$	No considera que el discriminante es 16 y lo que eso significa. La explicación en su resolución experta se reduce a la secuencia de pasos correctamente hecha. No ve que la segunda solución está relacionada con la primera: $x_2 = \frac{-1}{2} - \frac{2}{n}$ (son 3 características comunes en los trabajos analizados)

			Las raíces de todas las ecuaciones de la forma $4ax^2 + 4bx + c = 0$ *son* $x_1 = -\frac{1}{2}$ *y* $x_2 = -\frac{c}{2a}$ No considera que el discriminante es 16 y lo que eso significa. La explicación en su resolución experta se reduce a la secuencia de pasos correctamente hecha. No ve que la segunda solución está relacionada con la primera: $x_2 = \frac{-1}{2} - \frac{2}{n}$ En la explicación/borrador de la resolución:	

			 TP2 para estudiantes de EM1 "lo matemático" Consigna: Si a, b y c son enteros consecutivos, explica si hay alguna característica que presentan las raíces de todas las ecuaciones de la forma $4ax^2+4bx+c=0$. Para encontrar las raíces de la forma $4ax^2+4bx+c=0$, $a\neq 0$. ▲ Le doy valores numéricos positivos a a, b y c (de menor a mayor) Sean $a=1$, $b=2$ y $c=3$ $4x^2+8x+3=0$ $\quad \Delta=8^2-4.4.3=64-48=16$ las raíces son $x_1 x_2 = \frac{-8\pm\sqrt{16}}{8} = \frac{-8\pm4}{8}$ $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{3}{2}$ Sean $a=2$, $b=3$ y $c=4$ $8x^2+12x+4=0$ $\quad \Delta=12^2-4.8.4=144-128=16$ las raíces son $x_1 x_2=\frac{-12\pm4}{16}$ $x_1=-1$, $x_2=-\frac{1}{2}$ Sean $a=3$, $b=4$ y $c=5$ $12x^2+16x+5=0$ $\quad \Delta=16^2-4.12.5=256-240=16$ las raíces son $x_1 x_2=\frac{-16\pm4}{24}$ $x_1=-\frac{1}{2}$ ▲ Le doy valores numéricos negativos a a, b y c Sean $a=-3$, $b=-2$ y $c=-1$ $-12x^2-8x-1=0$ $\quad \Delta=(-8)^2-4.(-12).(-1)=64-48=16$ las raíces son $x_1 x_2=\frac{8\pm4}{-24}$ $x_1=-\frac{1}{2}$ Sean $a=-2$, $b=-1$ y $c=0$ (a, b son enteros negativos) $-8x^2+(-4)x+0=0$ $-8x^2-4x=0$ $-4x(2x+1)=0$ $\boxed{x_1=0}$ $\boxed{x_2=-\frac{1}{2}}$ El desarrollo de las ideas implica el uso de ejemplos para ver qué puede decir sobre la respuesta.	



¿Qué sucede si $a = -1$, $b = 0$ y $c = 1$?

$-4x^2 + 0x + 1 = 0$

$-4x^2 + 1 = 0$

$-4x^2 = -1$

$x^2 = \frac{1}{4}$

$|x| = \sqrt{\frac{1}{4}}$

$\boxed{x_1 = \frac{1}{2}}$ $\boxed{x_2 = -\frac{1}{2}}$

Dando valores numéricos a a, b y c se observa que una de las raíces es $-\frac{1}{2}$ la forma $4ax^2 + 4bx + c = 0$

▲ Si $a = n$, $b = n + 1$ y $c = n + 2$ $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ → (de menor a mayor)

$4nx^2 + 4(n+1)x + n + 2 = 0$

$\Delta = (4(n+1))^2 - 4 \cdot 4n(n+2) = 16(n+1)^2 - 16n(n+2) =$

$16(n^2 + 2n + 1) - 16n^2 - 32n = 16n^2 + 32n + 16 - 16n^2 - 32n = 16$

Las raíces son $x_1 x_2 = \frac{-4(n+1) \pm 4}{2 \cdot 4n} = \frac{-4n - 4 \pm 4}{8n}$

$\left[x_1 = \frac{-4n - 4 + 4}{8n} = \frac{-4n}{8n} = -\frac{1}{2}\right]$

$\left[x_2 = \frac{-4n - 4 - 4}{8n} = \frac{-4n - 8}{8n} = \frac{-4(n+2)}{8n} = -\frac{\overbrace{(n+2)}^{c}}{2\underbrace{n}_{a}}\right]$

▲ Si $a = n - 1$, $b = n$ y $c = n + 1$ $n \in \mathbb{Z} - \{1\}$

$4(n-1)x^2 + 4nx + n + 1 = 0$

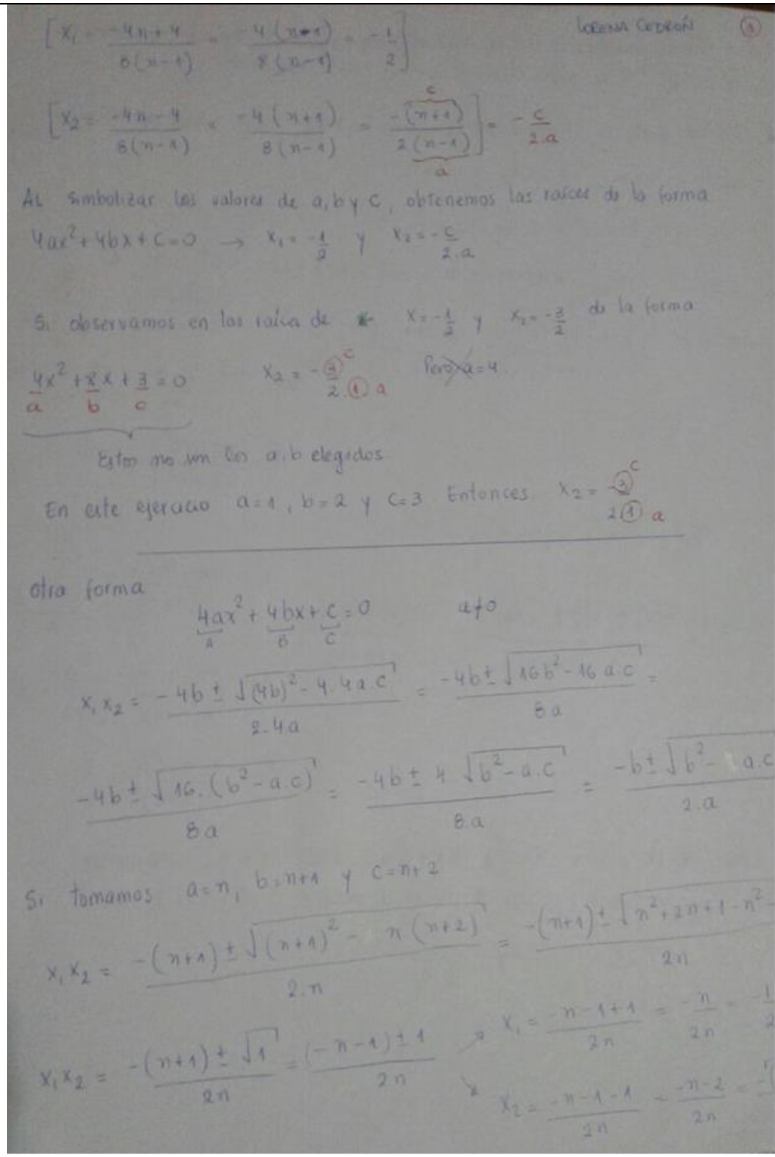
$\Delta = (4n)^2 - 4 \cdot 4(n-1)(n+1) = 16n^2 - 16(n^2 - 1) = 16$

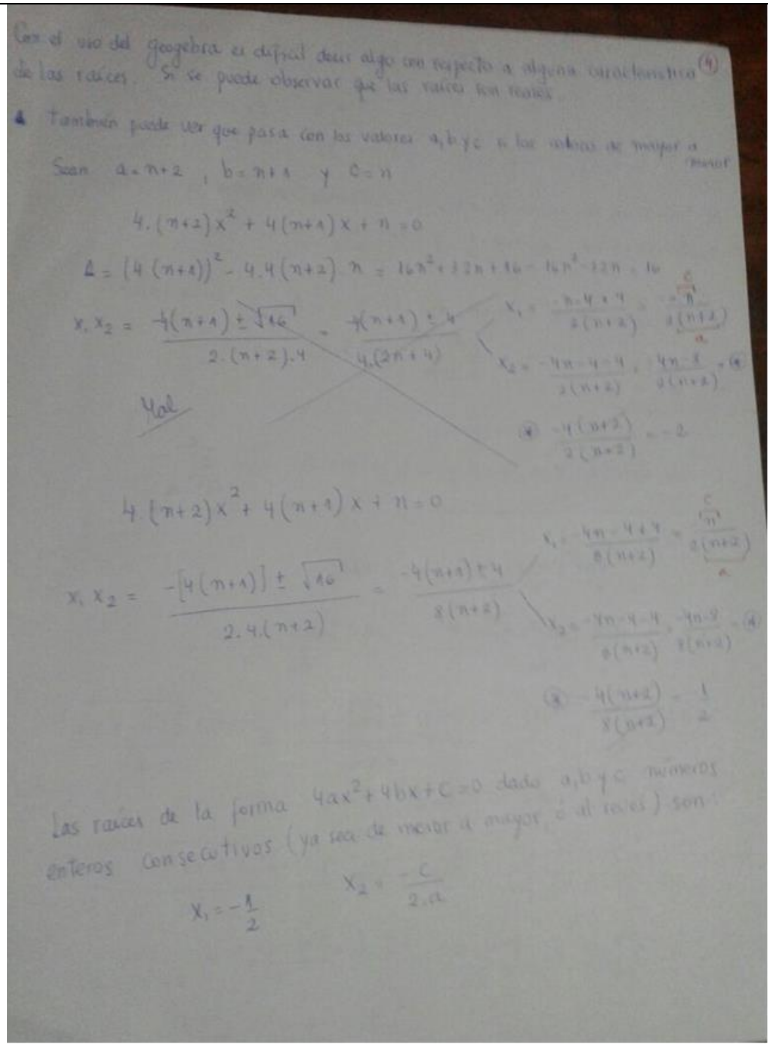
Las raíces son $x_1 x_2 = \frac{-4n \pm 4}{2 \cdot 4(n-1)} = \frac{-4n \pm 4}{8(n-1)}$ → $n \neq 1$

Sigo hoja 3

Toma la condición de n distinto de cero que no consideró en la resolución experta, luego repite todo los pasos.

Atención: hace un análisis al margen del discriminante pero no lo considera para obtener respuestas.

			 Lorena Cedeño (3) $x_1 = \frac{-4n+4}{8(n-1)} = \frac{-4(n-1)}{8(n-1)} = -\frac{1}{2}$ $x_2 = \frac{-4n-4}{8(n-1)} = \frac{-4(n+1)}{8(n-1)} = \frac{-\overbrace{(n+1)}^{c}}{\underbrace{2(n-1)}_{a}} = -\frac{c}{2.a}$ Al simbolizar los valores de a, b y c, obtenemos las raíces de la forma $4ax^2+4bx+c=0 \rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}$ y $x_2 = -\frac{c}{2.a}$ Si observamos en las raíces de * $x_1=-\frac{1}{2}$ y $x_2=-\frac{3}{2}$ de la forma $\underbrace{4}_{a}x^2+\underbrace{8}_{b}x+\underbrace{3}_{c}=0$ $x_2 = -\frac{3^{c}}{2.(1)\,a}$ Pero ~~a~~=4 Esto no son los a, b elegidos En este ejercicio a=1, b=2 y c=3 Entonces $x_2 = -\frac{(3)^{c}}{2(1)\,a}$ otra forma $\underbrace{4a}_{A}x^2+\underbrace{4b}_{B}x+\underbrace{c}_{C}=0$ $a\neq 0$ $x_1x_2 = \frac{-4b \pm \sqrt{(4b)^2-4.4a.c}}{2.4a} = \frac{-4b\pm\sqrt{16b^2-16a.c}}{8a} =$ $\frac{-4b\pm\sqrt{16.(b^2-a.c)}}{8a} = \frac{-4b\pm 4\sqrt{b^2-a.c}}{8.a} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-a.c}}{2.a}$ Si tomamos $a=n$, $b=n+1$ y $c=n+2$ $x_1x_2 = \frac{-(n+1)\pm\sqrt{(n+1)^2-n(n+2)}}{2.n} = \frac{-(n+1)\pm\sqrt{n^2+2n+1-n^2}}{2n}$ $x_1x_2 = \frac{-(n+1)\pm\sqrt{1}}{2n} = \frac{(-n-1)\pm 1}{2n}$ $\rightarrow x_1 = \frac{-n-1+1}{2n} = \frac{-n}{2n} = -\frac{1}{2}$ $\rightarrow x_2 = \frac{-n-1-1}{2n} = \frac{-n-2}{2n}$ Intenta utilizar GGB pero la única información que obtiene es que “las raíces son reales”, no repara en el hecho de que sean distintas (ni el signo ni alguna otra característica).	

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>

Utiliza distintos tipos de formas para encarar el desarrollo, pero siempre termina utilizando la algebraica con lo que eso implica (no hace mención a que ya fue hecho anteriormente).</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>- reflexionar sobre: lo que significa “usar una propiedad” (que se deben chequear hipótesis), reconocer qué propiedades/métodos/reglas/teoremas son factibles de ser usados ante cada consigna que se aborde y según la instancia de resolución que se esté atravesando; la utilidad de los métodos empleados y la pertinencia –o no- de aplicarlos en diferentes contextos, la interpretación de lo hallado para dar la respuesta, la necesidad de responder a lo pedido.</td>
<td>

Si a, b y c son enteros consecutivos, explicá si hay alguna característica que presenten las raíces de todas las ecuaciones de la forma: $4ax^2+4bx+c=0$, *con* $a\neq 0$.

Sean a=n, b=n+1 y c=n+2, con a, b y c números enteros consecutivos, con $n\in Z$ *y* $n\neq 0$ *.A continuación, reemplazo estas expresiones de número consecutivos en la fórmula de la resolvente para hallar las raíces.* No aclara el porqué de la condición sobre n.

También podemos comprobar con a=n-1, b=n y c=n+1, en este caso $n\in Z$ *y* $n\neq 1$
Explica otra forma de tomar los consecutivos pero no lo usa.

La forma de la ecuación es: $4nx^2+4(n+1)x+(n+2)=0$. *Luego, realizo la resolvente:*

$$x_1,x_2=\frac{-4(n+1)\pm\sqrt{4^2(n+1)^2-4\times 4n\times(n+2)}}{2\times 4\times n}\Leftrightarrow\frac{-(4n+4)\pm\sqrt{16n^2+32n+16-16n^2-32n}}{8n}$$

$$\Leftrightarrow x_1,x_2=\frac{-(4n+4)\pm\sqrt{16}}{8n}\Leftrightarrow\frac{-(4n+4)\pm 4}{8n}\Leftrightarrow$$

$$x_1=\frac{-4n-4+4}{8n}\Leftrightarrow\frac{-4n}{8n}=-\frac{1}{2}$$ *Una de las raíces va hacer* $-\frac{1}{2}$ → Ojo la escritura.

$$x_2=\frac{-4n-4-4}{8n}\Leftrightarrow\frac{-4n-8}{8n}=-\frac{4(n+2)}{8n}=-\frac{(n+2)}{2n}=-\frac{c}{2a}$$ *Esta raíz quedo expresada en términos de los valores de c y a.* no reconoce la relación con la otra raíz, ni que son distintas.

Las raíces de todas las ecuaciones de la forma $4ax^2+4bx+c=0$ *son* $x_1=-\frac{1}{2}$ *y* $x_2=-\frac{c}{2a}$ *. Ambas son raíces reales.*

Con respecto al punto 6 (la posibilidad de utilización de la fórmula usada)
Tenía certeza de usar esta propiedad ya que la ecuación de segundo grado tenía coeficientes reales.

No reconoce la hipótesis que se debe cumplir para poder aplicarla: pero sí lo consideró en la resolución.

</td>
<td>

No utiliza que el discriminante es 16 (fijo y positivo) para dar una condición sobre las soluciones de la ecuación.

No reconoce la relación entre las raíces, solo la que utiliza los coeficientes de la ecuación.

La explicación implica agregar frases en lenguaje natural que explican qué obtiene, no durante el proceso de manipulación simbólica (de qué hace ni por qué)

Hipótesis para la utilización de la fórmula resolvente: $a\neq 0$
La utiliza y la menciona pero no la considera a la hora de justificar la utilización (punto 6, teórico)

</td>
</tr>
</table>

	I4 Resolución de tareas intelectualmente exigentes (demostrar una proposición no vista, resolver un “problema”, modelizar).	- Usar	En este caso no corresponde el I4	
		- Explicar		
		- reflexionar		

<table>
<tr><th colspan="2">DESCRIPTOR</th><th>EXPLICACIÓN</th><th>EVIDENCIAS DE A5</th><th>EN SÍNTESIS…</th></tr>
<tr>
<td>Conocimiento del contenido matemático ante producciones ajenas correctas matemáticamente</td>
<td>I1
Definiciones de conceptos, reglas, propiedades, enunciados de teoremas, procedimientos, demostraciones de resultados, ejercicios resueltos</td>
<td>- a) Reproducir (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)</td>
<td>Conceptos Matemáticos trabajados: Los conceptos matemáticos que se trabajan en esta consigna son:
• Resolver ecuaciones cuadráticas.
• Encontrar raíces de una ecuación.
• Formula resolvente.
• Definición de número consecutivo.
• Operaciones de expresiones algebraicas y cálculos combinados.
• Sustitución.

Enunciado de definición: <u>Definición de ecuación:</u>
Ecuación es la igualdad de dos expresiones algebraicas no equivalentes, o sea, una igualdad que sólo se verifica para determinados valores de las incógnitas. En una ecuación existen una o varias variables a las que se las llama incógnitas.
Las incógnitas se acostumbran a representar por las ultimas letras del alfabeto: t,u,v,x,y,z. ¿Dónde termina la definición?
Una ecuación cuadrática, o sea de segundo grado, es del tipo $ax^2 + bx + c = 0$, con a $\neq 0$, con a,b,c números reales, o cualquier otra ecuación en la que al operar, transponer términos y simplificar adopten esa expresión. No consideran la cantidad de variables que puede tener una definición.
Hay tres formas de hallar las raíces (el o los valores de la variable) de las ecuaciones cuadráticas:
1. Factorización Simple → no considera el despeje directo!
2. Completando el Cuadrado
3. Fórmula Cuadrática o Resolvente.
<u>Ejemplo:</u>
$x^2 = 4$
Tenemos un ejemplo de ecuación cuadrática, ya que esta igualdad se verifica para los siguientes valores de x.
$x_1 = 2$ y $x_2 = -2$

Enunciado de Propiedad/resultado utilizado:
<u>Propiedades para resolver ecuaciones de segundo grado:</u> Solo explica los pasos a seguir para resolver una ecuación cuadrática!
1) Se efectúan las operaciones indicadas, si las hay.
2) Se hace la transposición de términos, pasando todos los términos a uno de los miembros.
3) Se reducen términos semejantes y la ecuación queda igualada a cero.
4) Se halla la incógnita: para ello se utiliza la fórmula resolvente: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
Una vez obtenida las soluciones de la ecuación podemos verificar si cumplen con la igualdad, sustituyendo las incógnitas por las soluciones. Después de efectuar las operaciones pertinentes debe llegarse a una igualdad.

Demostración de la propiedad:</td>
<td>¿Qué es una definición?

¿Dónde buscar una definición?

Definen en función de lo que saben o se acuerdan, no recurren a material bibliográfico para copiarla.

Se manejan con ecuaciones en una variable pero no lo definen así, lo toman como sabido (quizás por el nivel en el que se incluye la actividad)

Utilización de ejemplos en la definición.

¿Qué es una propiedad?

La demostración sí está copiada, no es algo de elaboración personal.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>El objetivo es convertir el polinomio ax^2+bx+c en un cuadrado perfecto, (o sea, completamos cuadrados).
Tenemos $ax^2+bx+c=0$
Multiplicamos a ambos lado por 4a: $4a^2x^2+4abx+4ac=0$
Sumamos a ambos lados b^2: $4a^2x^2+4abx+4ac+b^2=b^2$
Pasamos 4ac al miembro derecho y ya tenemos un cuadrado perfecto en el miembro izquierdo;
$4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac$
$(2ax)^2+2\cdot 2ax\cdot b+b^2=b^2-4ac$
$(2ax+b)^2=b^2-4ac$
Eliminamos el cuadrado de la izquierda $2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}$
Despejamos x: $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Ver la utilización del módulo y el uso del <u>+</u> .</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>- b) Explicar, mostrando comprensión (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)</td><td>Explicación de la definición:
Entendamos que una igualdad es la expresión de dos cantidades o expresiones algebraicas que tienen el mismo valor y ambas expresiones se hallan separadas por el signo = (igual a).
<u>Ejemplos:</u> 3.6 – 5 = 13 ó x = y + z.
Por otro lado una identidad es la igualdad de dos expresiones algebraicas equivalentes, o sea una igualdad que se verifica para cualesquiera valores de las letras que forman parte de la misma. Ejemplo: $(a + b)^2 = (a + b). (a + b)$ Amplia la explicación a algo no definido.
En el caso de las ecuaciones de segundo grado la igualdad se va a verificar como máximo para dos valores de la incógnita dentro del campo de los números reales. Si extendemos las soluciones al campo de los números complejos las soluciones serán dos siempre.</td><td>Para explicar la definición utiliza lenguaje natural, pero repite lo mismo que estaba diciendo

Uso de ejemplos para la explicación.</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>- c) reflexionar</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>I2
Lenguajes matemáticos (natural y simbólico), notación matemática, convenciones</td><td>- a) reproducir “algo” usando lenguajes matemáticos</td><td>Utiliza lenguaje natural tanto para definir como para las explicaciones: tiene que ver con que es de elaboración personal.

En la demostración, hace un desarrollo simbólico, aunque indicando algunas cuestiones en lenguaje natural a modo de explicación de lo que va a hacer. Esto tiene que ver, supongo, con que es copia de algún libro y no elaboración personal.</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td></td><td>- b) explicar el uso del lenguaje</td><td>No hay una explicación del lenguaje… lo que hace para explicar es repetir lo que definió (y mal)</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>- c) reflexionar</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Conocimiento del contenido matemático ante producciones propias</td><td rowspan="2">I3
Resolución de una consigna, actividad o ejercicio que no le resulte cognitivamente exigente.</td><td>- Usar lenguaje matemático, operar, usar propiedades, procedimientos, etc.</td><td>Selecciona una notación: a=y; b=y+1; c=y+2 con y perteneciente a los números enteros (de manera imprecisa, no pone condición sobre y)

Plantea la ecuación utilizando esa notación: $4yx^2 + 4(y+1)x + y + 2 = 0$

No analiza la cantidad de soluciones: solo hace cuentas para agilizar la resolvente.

Opera correctamente para hallar las soluciones de la ecuación (en términos del parámetro)</td><td>Toman una sola opción para tomar a los números consecutivos y NO se aclara el orden. Ni siquiera lo mencionan.</td></tr>
<tr><td>- Explicar su resolución (lenguaje utilizado, las operaciones, propiedades utilizados, la respuesta).</td><td>Sea $4ax^2 + 4bx + c = 0$ una ecuación cuadrática igualada a cero. Buscaremos las raíces de dicha función utilizando la formula resolvente y realizando la siguiente sustitución.
Supongamos a=y; b=y+1; c=y+2 con y perteneciente a los números enteros. Luego la igualdad quedaría:
$4yx^2 + 4(y+1)x + y + 2 = 0$
Para hallar las raíces utilizaré la formula resolvente. $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. No chequea hipótesis.
Con a=4y; b=4(y+1)=4y+4; c=y+2
En primera instancia analizaré solo el discriminante:
Discriminante=$b^2 - 4ac$ que sustituyendo queda lo siguiente:
D=$(4y+4)^2 - 4.4.y.(y+2)$=$16y^2 + 32y + 16 - 16y(y+2)$
D=$16y^2 + 32y + 16 - 16y^2 - 32y$=16 Analiza el discriminante pero no lo utiliza! Digo, esto puede ser solo un cálculo auxiliar, no un “análisis”.
Luego:
$x_{1,2} = \frac{-4y-4\pm\sqrt{16}}{2.4y}$.
$x_1 = \frac{-4y-4+\sqrt{16}}{2.4y} = \frac{-4y-4+4}{8y} = -\frac{1}{2}$; por otro lado; $x_2 = \frac{-4y-4-\sqrt{16}}{2.4y} = \frac{-4y-4-4}{8y} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{y}$
Nota 1: Observar que para hallar la segunda raíz de la ecuación; y=0 no está definido, luego y pertenece a todos los números enteros menos el cero. No lo consideró como hipótesis!!!
Nota 2: Una de las raíces siempre será $-\frac{1}{2}$, mientras que la otra se puede hallar con la siguiente ecuación: $x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{y}$ con y perteneciente a todos los números enteros menos el cero.</td><td>Problemas con conceptos matemáticos: ecuación/función/expresión.

“Analiza” el discriminante pero no concluye sobre lo obtenido: se queda en un cálculo auxiliar.</td></tr>
</table>

			Sobre la resolución/borrador:  Luego de realizar tres intentos observe que una de las raíces se repetía entonces decidí hacerlo de forma genérica con a=y; b=y+1; c=y+2 con y perteneciente a los números enteros. No considera restricción para y. El siguiente paso fue buscar la definición de numero consecutivo, porque pensé que pasaría si pruebo con a=y; b=y-1; c=y-2 con y perteneciente a los números enteros. Luego de resolver, obtuve lo siguiente: $x_1 = \frac{-4y+4-\sqrt{16}}{2.4y} = \frac{-4y+4-4}{8y} = -\frac{1}{2}$; por otro lado; $x_2 = \frac{-4y+4+\sqrt{16}}{2.4y} = \frac{-4y+4+4}{8y} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{y}$ Pero la definición de número consecutivo es: Un número consecutivo se obtiene sumando una unidad al anterior. Definición incompleta. Número consecutivo = n + 1. n es cualquier número entero. Son números consecutivos 2 y 3, 158 y 159. Necesariamente tiene que pasar que a›b›c. No entiendo para qué lo menciona.	

			Desarrollo que consta de ejemplos que utilizó para pensar por dónde podría pasar el tema de la consigna. Agrega definiciones incompletas y cuestiones irrelevantes para el desarrollo.	
		- reflexionar sobre: lo que significa “usar una propiedad” (que se deben chequear hipótesis), reconocer qué propiedades/métodos/reglas/teoremas son factibles de ser usados ante cada consigna que se aborde y según la instancia de resolución que se esté atravesando; la utilidad de los métodos empleados y la pertinencia –o no- de aplicarlos en diferentes contextos, la interpretación de lo hallado para dar la respuesta, la necesidad de responder a lo pedido.	Luego de la resolución experta llegue a las siguientes conclusiones. Dados tres números consecutivos a›b›c y realizando la siguiente sustitución: a=y; b=y+1; c=y+2 con y perteneciente a los números enteros. Podemos obtener sus raíces con las siguientes fórmulas: $x_1 = \frac{-4y-4+\sqrt{16}}{2.4y} = \frac{-4y-4+4}{8y} = -\frac{1}{2}$; por otro lado; $x_2 = \frac{-4y-4-\sqrt{16}}{2.4y} = \frac{-4y-4-4}{8y} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{y}$. Donde una de las raíces siempre se repite y la otra dependerá del valor que elijamos para y, con la salvedad que y≠0 ya que la fórmula no está definida en ese valor. Si observamos la definición de ecuación cuadrática a=y≠0 ya que si sucede lo contrario no sería una ecuación de segundo grado y estaríamos observando una ecuación lineal de la forma: $y = bx + c$ donde b,c son números enteros. No chequea hipótesis. Reconoce que debe aplicar la fórmula resolvente pero no considera la restricción para y, lo analiza a posteriori (cuando tiene la solución) → la condición de $y \neq 0$ surge a raíz de que está en el denominador de la solución y no por ser factor en el coeficiente principal. A raíz de ese razonamiento surge el planteo de que a≠ 0.	**La explicación es en base a las soluciones de la ecuación para terminar aclarando las condiciones para que sea ecuación cuadrática → mal**
	I4 Resolución de tareas intelectualmente exigentes (demostrar una proposición no vista, resolver un “problema”, modelizar).	- Usar	En este caso no corresponde el I4	
		- Explicar		
		- reflexionar		

DESCRIPTOR		EXPLICACIÓN	EVIDENCIAS DE A6	EN SÍNTESIS…
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones ajenas correctas matemáticamente**	**I1** Definiciones de conceptos, reglas, propiedades, enunciados de teoremas, procedimientos, demostraciones de resultados, ejercicios resueltos	- a) Reproducir (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	Conceptos Matemáticos trabajados: El concepto matemático trabajado en la consigna es el concepto de funciones. Enunciado de definición: Una función es una relación entre dos conjuntos, uno llamado x (dominio) y uno llamado y (codominio o imagen) en donde cada elemento del primer conjunto le corresponde uno del segundo. Enunciado de Propiedad/resultado utilizado: Una de las propiedades utilizadas en la consigna fue la fórmula resolvente. La fórmula resolvente sirve para hallar las raíces de una función de segundo grado de la forma ax^2+bx+c. La fórmula es la siguiente: $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ El discriminante $\Delta=b^2-4ac$ permite discriminar la cantidad de raíces reales que tiene la función. Cuando $\Delta<0$ las raíces serán complejas. Cuando $\Delta>0$ las raíces serán reales. Está incompleto! Son dos raíces reales distintas. Cuando $\Delta=0$ tendrá una raíz doble. Menciona el análisis del discriminante pero de manera errónea. Demostración de la propiedad: Sea $f(x)=ax^2+bx+c$ Como f tiene grado 2, es irreducible si y solo si tiene un factor en los reales de grado 1, que podemos asumir mónico de la forma X-x con x perteneciente a los reales. Así que en este caso f es reducible en los reales si y solo si f tiene una raíz real. Luego $f= a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}) = a((x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}) = a((x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2})$ problemas en la escritura (lo de "f" y los signos que no están) El discriminante de f es $\Delta= b^2-4ac$ Si existe w Є reales tal que $w^2=\Delta$, se tiene que $f= a((x+\frac{b}{2a})^2-(\frac{w}{2a})^2) = a(x-\frac{-b+w}{2a})\ a(x-\frac{-b-w}{2a})$ Ver falta de signos y por lo tanto f(x)=o las raíces serán $X1= a(x-\frac{-b+w}{2a}) = a(x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a})$ $X2= a(x-\frac{-b-w}{2a}) = a(x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a})$ ¿Y si no existe w? ¡La demostración no está cerrada! Mal reproducida.	**Definición de codominio e imagen.** **Definición de función.** **Definición desde lo que saben, lo personal. No buscan en libros.** **¿Qué es una propiedad? ¿Hasta dónde llega el enunciado?** **Confusión entre función/ecuación.**

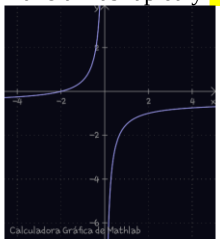
		- b) Explicar, mostrando comprensión (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	Explicación de la definición: Una función se puede referir a situaciones cotidianas, como por ejemplo el recorrido de un auto con velocidad constante que dependerá del tiempo, el costo de una llamada telefónica que dependerá de su duración o hasta el gasto de la sube que dependerá de la cantidad de viajes realizados. En todos los casos existe una relación entre dos conjuntos, una relación de dependencia. Una función es esta relación que existe entre los conjuntos, en donde a cada elemento de primer conjunto le corresponde un elemento del segundo. Por ejemplo tomemos el caso del auto, supongamos que tiene una velocidad de 70 km/h no aclara constante. La función seria F(t)= 70.t, en donde t será el tiempo transcurrido. Para cada valor de t le corresponde un valor en F(t), en este caso es el recorrido realizado en el tiempo t. Si t=1 la distancia recorrida será de 70km. Si t=5 la distancia recorrida será de 350km. En una función existirá una variable independiente, que sería el tiempo, y una variable dependiente, en este caso la distancia recorrida en ese tiempo. Está mezclando definición y ejemplo. Intenta explicar la definición utilizando un ejemplo, tomando una aplicación de funciones. Lo quiere relacionar con lo mencionado en su definición.	**Explicación de la definición con un ejemplo, no hace referencia a lo definido.** **Explica un uso del concepto.**
		- c) reflexionar		
	I2 Lenguajes matemáticos (natural y simbólico), notación matemática, convenciones	- a) reproducir "algo" usando lenguajes matemáticos	Utiliza lenguaje natural tanto al definir como al explicar. Al intentar demostrar la propiedad utilizada, tiene errores en la escritura simbólica.	
		- b) explicar el uso del lenguaje	Si bien usa lenguaje natural tanto al definir como al explicar, el alumno intenta con un ejemplo explicar cada cuestión mencionada en la definición: ejemplos de los conjuntos que menciona, de la relación. No abarca todo: no habla de la dependencia que menciona en los ejemplos.	**Definiciones incompletas y explicaciones que toman lo que se olvidó de decir en la definición (dependencia en la relación)**
		- c) reflexionar		

<table>
<tr>
<td rowspan="2">Conocimiento del contenido matemático ante producciones propias</td>
<td rowspan="2">I3
Resolución de una consigna, actividad o ejercicio que no le resulte cognitivamente exigente.</td>
<td>- Usar lenguaje matemático, operar, usar propiedades, procedimientos, etc.</td>
<td>Como a, b y c son números enteros consecutivos los voy a llamar a=n, b=n+1 y c=n+2. Luego los reemplazo en la ecuación dada, quedando de este modo:
$4n.x^2+4(n+1).x+n+2=0$

Seleccionó una notación, pero no aclaró que no era única. Tampoco planteó la restricción sobre n por ser el coeficiente principal (coherente con el desarrollo de todo el trabajo, nunca lo consideró).

No analiza el discriminante.

Opera para obtener las raíces, y recurre a un argumento gráfico para dar características sobre ellas.</td>
<td>No aclarar que hay otras posibilidades de tomar los consecutivos.

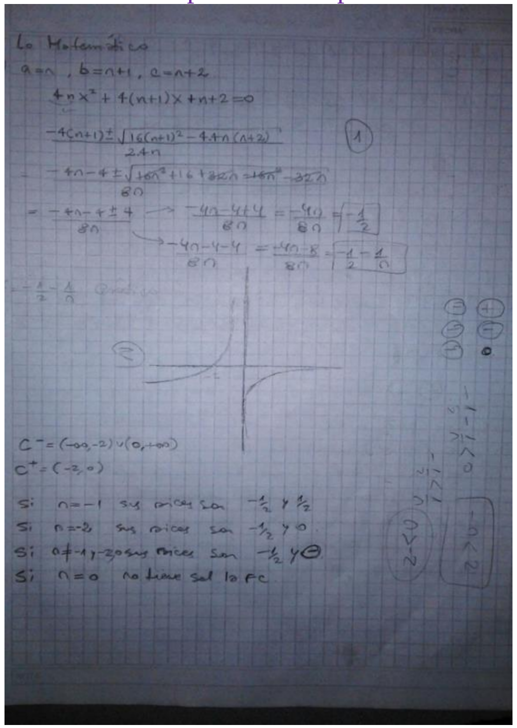
No plantear la condición del coef. ppal distinto de cero.</td>
</tr>
<tr>
<td>- Explicar su resolución (lenguaje utilizado, las operaciones, propiedades utilizados, la respuesta).</td>
<td>Como a, b y c son números enteros consecutivos los voy a llamar a=n, b=n+1 y c=n+2. Luego los reemplazo en la ecuación dada, quedando de este modo:
$4n.x^2+4(n+1).x+n+2=0$
Para hallar las raíces de la ecuación vamos a utilizar la fórmula resolvente no considera hipótesis para su utilización, obteniendo de este modo:
$\frac{-4.(n+1)\pm\sqrt{16.(n+1)^2-4.4.n-(n+2)}}{2.4n}=\frac{-4n-4\pm4}{8n}$
Finalmente sus dos raíces serán $-\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{2}-\frac{1}{n}$
Notamos que una de las raíces, dependiendo del valor que tome n, será positiva, negativa o cero.
Para hallar esto vamos a tomar a la raíz como la función F(n)= $-\frac{1}{2}-\frac{1}{n}$ y luego hallar sus raíces, conjunto de positividad y conjunto de negatividad.
Para realizar el gráfico vamos a utilizar el programa Mathlab para obtener el gráfico de una manera más rápida y más exacta.


Como observamos en el gráfico, para todo n∈(-2,0) la función es positiva, es decir, la raíz de la otra función! será positiva.
Para los n∈(-∞,2)u(0,+∞) la raíz será negativa.
Para n =2 la raíz será igual a 0. --> no necesita probarlo algebraicamente.
Finalmente observamos que las raíces dependerán del valor que tome n, pero como también sabemos que a=n, por ende las raíces dependerán del valor que tome el coeficiente a.

El alumno indica un desarrollo analítico (que no escribe) para indicar la expresión de las soluciones de la ecuación (pensada como raíces de una</td>
<td>Prueba analítica: no la considera, se queda con lo observado en el gráfico.

No analiza el discriminante.

Búsqueda de soluciones de una ecuación vs. Búsqueda de raíces de una función.</td>
</tr>
</table>

			función). No analiza discriminante, no concluye que son raíces reales distintas de ninguna manera. Llega a encontrar las raíces y de ahí se centra en el signo de cada una de ellas: no se preguntó ni siquiera en el final si al ser ambas negativas podrían ser iguales. OBSERVACIÓN: en su "definición", él toma el análisis del discriminante pero no lo usa en la resolución. En su borrador/pedido de explicación del ítem 1c), tenemos los siguiente:  La Matemática $a=n$, $b=n+1$, $c=n+2$ $4nx^2+4(n+1)x+n+2=0$ $\frac{-4(n+1)\pm\sqrt{16(n+1)^2-4.4n(n+2)}}{2.4n}$ $\frac{-4n-4\pm\sqrt{16n^2+16+32n-16n^2-32n}}{8n}$ $=\frac{-4n-4\pm4}{8n} \rightarrow \frac{-4n-4+4}{8n}=\frac{-4n}{8n}=\boxed{-\frac{1}{2}}$ $\rightarrow \frac{-4n-4-4}{8n}=\frac{-4n-8}{8n}=\boxed{-\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}$ $C^-=(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$ $C^+=(-2,0)$ Si $n=-1$ sus raíces son $-\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$ Si $n=-2$ sus raíces son $-\frac{1}{2}$ y 0 Si $n\neq-1$, -2 o sus raíces son $-\frac{1}{2}$ y ⊖ Si $n=0$ no tiene sol la Fc Se puede observar las cuentas que no presentó en la resolución, y la prueba con valores numéricos para n, verificando así lo obtenido en el análisis de la función homográficas que consideró. Sobre el ítem 1c) de explicación a un compañero: Lo primero que realizamos es pensar a a=n, b=n+1 y c=n+2 ya que son consecutivos. Después lo reemplazamos en la ecuación dada y aplicando la fórmula resolvente obtengo las raíces. Luego las raíces son $-\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{2}-\frac{1}{n}$ Explica qué pasos siguió en la resolución.	

			Una vez que tengo las raíces, noto que una de ellas depende del valor que tome n, como la consigna me pide que caracterice las raíces vamos a ver para que valores de n la raíz será positiva, negativa o cero. Para llevar a cabo esto vamos a pensar a la raíz como una función, de esta manera F(n)= $-\frac{1}{2}-\frac{1}{n}$. El paso siguiente es hallar las raíces de la función, el conjunto de positividad y el conjunto de negatividad. Para hallar lo antes mencionado vamos a utilizar el programa Mathlab, ya que de esta manera el gráfico lo realizaremos de una manera más rápida y exacta. Finalmente observamos el gráfico y obtenemos los valores para n en donde la función, es decir, la raíz es positiva, negativa o cero. Después de realizar el ejercicio note que al analizar los valores de n, estoy analizando los valores que puede tomar a, ya que a=n. entonces la raíz va a depender del coeficiente a. Mismas observaciones que antes.	
		- reflexionar sobre: lo que significa “usar una propiedad” (que se deben chequear hipótesis), reconocer qué propiedades/métodos/reglas/teoremas son factibles de ser usados ante cada consigna que se aborde y según la instancia de resolución que se esté atravesando; la utilidad de los métodos empleados y la pertinencia –o no- de aplicarlos en diferentes contextos, la interpretación de lo hallado para dar la respuesta, la necesidad de responder a lo pedido.	Creo que puedo utilizar en este ejercicio la fórmula resolvente, ya que esta fórmula se utiliza para funciones de segundo grado. Y para este ejercicio es importante su utilización. Pude ver al final del ejercicio que las raíces se podían hallar solo obteniendo el valor del coeficiente a, pero hallar las raíces me sirvió para clasificarlas. Dependiendo del valor del coeficiente a, la raíz será positiva, negativa o cero. Considera la fórmula resolvente para el tema de “funciones” no para ecuaciones. No considera las hipótesis para poder aplicarlas: condición sobre n, o sobre el coeficiente principal de la ecuación: no observó restricciones. Además, el alumno es consciente de que el análisis que hizo fue al final de la resolución: no consideró un punto intermedio para hacer un parate y pensar sobre el desarrollo que hacía.	**Se explicita que solo analizó lo obtenido en el final de la resolución.**

	I4 Resolución de tareas intelectualmente exigentes (demostrar una proposición no vista, resolver un "problema", modelizar).	- Usar	En este caso no corresponde el I4	
		- Explicar		
		- reflexionar		

<table>
<tr><th colspan="2">DESCRIPTOR</th><th>EXPLICACIÓN</th><th>EVIDENCIAS DE A7</th><th>EN SÍNTESIS…</th></tr>
<tr>
<td>Conocimiento del contenido matemático ante producciones ajenas correctas matemáticamente</td>
<td>I1
Definiciones de conceptos, reglas, propiedades, enunciados de teoremas, procedimientos, demostraciones de resultados, ejercicios resueltos</td>
<td>- a) Reproducir (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)</td>
<td>Conceptos Matemáticos trabajados: Los conceptos matemáticos trabajados en la resolución de la consigna son, números enteros, ecuaciones de segundo grado, función cuadrática y raíces de una función. ¿por qué ve funciones en esta consigna?

Enunciado de definición: <u>Ecuaciones de segundo grado</u>
Las ecuaciones de segundo grado son igualdades en las que la incógnita aparece elevada al cuadrado. Estas ecuaciones pueden tener dos soluciones como máximo y por medio de operaciones algebraicas o fórmulas podemos encontrar esas soluciones. Imprecisión en la definición. Definición desde el sentido común. Ampliación con datos de más.

Enunciado de Propiedad/resultado utilizado: <u>Enunciado de cómo encontrar raíces</u>
Pasa el problema de “ecuaciones” a “funciones”.
Sea $f(x)=ax^2+bx+c$ una ecuación de segundo grado con $a,b,c\in R$ y $a\neq 0$ y con raíces x_1,x_2 distintas o iguales no considera función que no tenga raíces, podemos hallar las raíces de dicha función con la siguiente fórmula $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Demostración de la propiedad:
Sea $f(x)=ax^2+bx+c=0$ con $a,b,c\in R$ y $a\neq 0$, queremos encontrar la solución de dicha ecuación.
Para demostrar la fórmula de Bhaskara, operamos algebraicamente de la siguiente manera: (anticipa qué va a hacer)
Como $a\neq 0$ dividimos a la función por a
$\frac{ax^2}{a}+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}$
Nos queda $x^2+\frac{bx}{a}=-\frac{c}{a}$ no había una igualación, ¿por qué ahora sí?
Ahora le sumamos $\frac{b^2}{4a^2}$ para así completar cuadrados
Y tenemos que $x^2+\frac{bx}{a}+\frac{b^2}{4a^2}=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$
Luego, $(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{-4ac+b^2}{4a^2}$ No analiza restricciones (desde la definición, no considera el caso “sin solución”)</td>
<td>¿Por qué señalan “funciones” como tema?
→ ¿habremos tenido culpa nosotras que hablamos de “raíces” de la ecuación en el enunciado?

¿qué es una definición?

¿es necesario incluir información extra?

No analiza restricciones en la demostración.</td>
</tr>
</table>

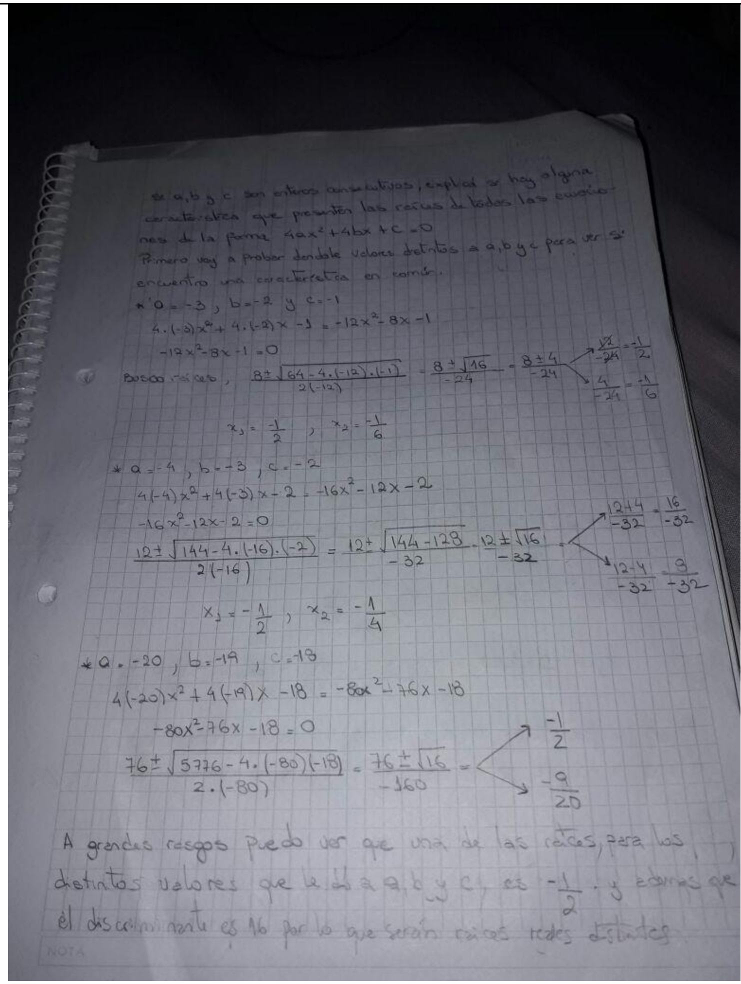
<table>
<tr>
<td rowspan="3"></td>
<td rowspan="3"></td>
<td></td>
<td>Continuamos aplicando raíz, pues el objetivo es despejar x, $\sqrt{(x+\frac{b}{2a})^2}=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$
$\left|\sqrt{(x+\frac{b}{2a})^2}\right|=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$ bien usado el módulo.
Seguimos operando algebraicamente, $x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$ lo considera como "operación algebraica", y no como "abuso de notación".
$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
Y llegamos así a que $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ es solución de $f(x)$.
No analiza restricciones.</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>- b) Explicar, mostrando comprensión (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)</td>
<td>Explicación de la definición:
Anteriormente estuvimos trabajando con ecuaciones que tenían un valor desconocido al que llamamos incógnitas y por medio de operaciones encontrábamos el valor de ella. Hoy vamos a ver ecuaciones de otro tipo, son las ecuaciones de segundo grado, en este caso podemos tener una o dos soluciones no considera ecuaciones sin solución, y tendremos diferentes formas de encontrar esas soluciones. Las ecuaciones de segundo grado aparecen de diferentes maneras pero para que sea de segundo grado debe estar el coeficiente con la incógnita elevada al cuadrado. La explicación, desde el sentido común, termina mezclando distintos conceptos. En este sentido, no muestra comprensión.

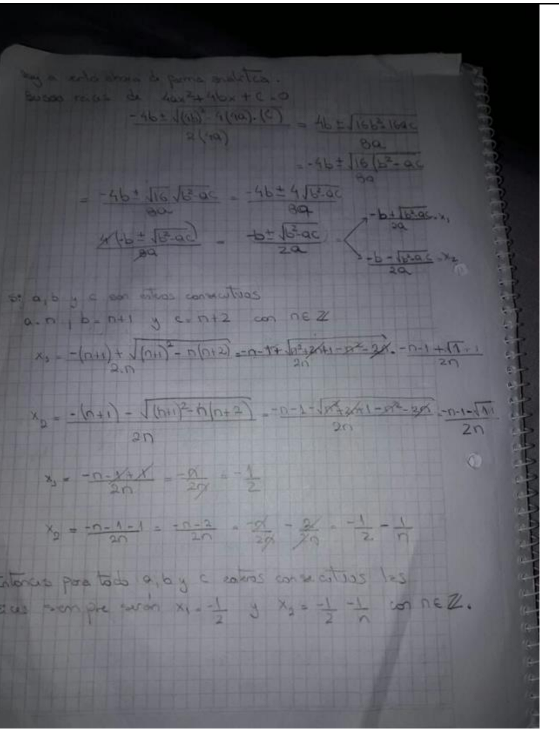
Explicación de la demostración: la explicación de lo demostrado se reduce a indicar qué es lo que hace en cada paso, no hay intención de aclarar intenciones salvo al principio que menciona qué va a buscar. No considera restricciones de discriminantes para el despeje que realiza.</td>
<td>Para definir ecuaciones no consideran hablar sobre el formato por el <u>contexto</u>
(por ejemplo, no hay raíces, etc.)

Si al explicar el razonamiento es confuso, ¡no muestra comprensión!</td>
</tr>
<tr>
<td>- c) reflexionar</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</table>

	I2 Lenguajes matemáticos (natural y simbólico), notación matemática, convenciones	- a) reproducir “algo” usando lenguajes matemáticos	La reproducción de definiciones y propiedades se hacen mayoritariamente en lenguaje natural. Las demostraciones (la de la propiedad y el desarrollo de la consigna) se realiza utilizando lenguaje simbólico, sin mediar otro tipo de lenguaje (natural) Problema matemático: no considera ecuaciones sin solución (tanto en la definición como en la explicación)	
		- b) explicar el uso del lenguaje	No se lee una explicación en lenguaje natural de lo que definió anteriormente (que también estaba en lenguaje natural). Quiero decir, no se ve una intención de explicar (por ejemplo con otras palabras) lo que definió en el ítem anterior: repite lo mismo.	**La explicación repite lo definido anteriormente (no aclara ni amplía ni ejemplifica, solo repite)**
		- c) reflexionar		
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones propias**	**I3** Resolución de una consigna, actividad o ejercicio que **no** le resulte cognitivamente exigente.	- Usar lenguaje matemático, operar, usar propiedades, procedimientos, etc.	Selecciona una notación: $a = n,\ b = n+1$ y $c = n+2$ con $n \in Z$ (no aclara que no es única, ni lo considera en el desarrollo) El desarrollo es utilizando el lenguaje simbólico. Utiliza la fórmula resolvente sin plantear hipótesis sobre los coeficientes que utiliza: ni el principal ni lo referido al discriminante.	**No hay evidencia de que sepa que no es única la forma de tomar los consecutivos (no se aclara orden en el enunciado).**
		- Explicar su resolución (lenguaje utilizado, las operaciones, propiedades utilizados, la respuesta).	**<u>Resolución experta</u>** $x_{1,2} = -\frac{4b \pm \sqrt{(4b)^2 - 4(4a)c}}{2(4a)} = -\frac{4b \pm \sqrt{16b^2 - 16ac}}{8a} = \frac{4b \pm \sqrt{16(b^2 - ac)}}{8a} = \frac{4b \pm \sqrt{16}\sqrt{b^2 - ac}}{8a}$ $= \frac{-4b \pm 4\sqrt{b^2 - ac}}{8a} = \frac{\cancel{4}(-b \pm \sqrt{b^2 - ac})}{\cancel{8}a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{2a}$ $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - ac}}{2a}$	**Dejar como respuesta a la consigna cuáles son las dos soluciones, cuando en realidad se pregunta características de ellas.**

			$x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{2a}$ Hace un planteo distinto: incluye la notación de números consecutivos una vez planteada la fórmula resolvente. Esto implica que se desdibuja el Δ= 16, aunque se puede ver de otra manera: $a = n,\ b = n+1$ y $c = n+2$ con $n \in Z$ $x_1 = \frac{-(n+1)+\sqrt{(n+1)^2 - n(n+2)}}{2n} = \frac{-n-1+\sqrt{\cancel{n^2}+2\cancel{n}+1-\cancel{n^2}-2\cancel{n}}}{2n} = \frac{-n-1+1}{2n} = \frac{-\cancel{n}}{2\cancel{n}} = \frac{-1}{2}$ $x_2 = \frac{-(n+1)-\sqrt{(n+1)^2 - n(n+2)}}{2n} = \frac{-n-1-\sqrt{\cancel{n^2}+2\cancel{n}+1-\cancel{n^2}-2\cancel{n}}}{2n} = \frac{-n-1-1}{2n} = \frac{-n-2}{2n} = \frac{-\cancel{n}}{2\cancel{n}} - \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}n}$ Las raíces son: $x_1 = -\frac{1}{2}$ y $x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{n}$ En esta nueva resolución tenemos que Δ= 1 pero no se considera para decir algo sobre las soluciones de la ecuación. Las soluciones de la ecuación están relacionadas con el n pero no con los coeficientes de la ecuación. La resolución de la consigna consiste en la manipulación algebraica para llegar a las raíces. No se incluye explicaciones en otro lenguaje. La explicación consiste en un desarrollo completo de la resolución. Sobre su Borrador/resolución de exploración:	**Uso de ejemplos: como parte del proceso de resolución (he) → ver si sucede lo mismo pero como verificación de lo obtenido.**

			 Si a, b y c son enteros consecutivos, explicá si hay alguna característica que presenten las raíces de todas las ecuaciones de la forma $4ax^2+4bx+c=0$ Primero voy a probar dándole valores distintos a a, b y c para ver si encuentro una característica en común. * $a=-3$, $b=-2$ y $c=-1$ $4.(-3)x^2+4.(-2)x-1=-12x^2-8x-1$ $-12x^2-8x-1=0$ Busco raíces, $\frac{8\pm\sqrt{64-4.(-12).(-1)}}{2(-12)}=\frac{8\pm\sqrt{16}}{-24}=\frac{8\pm4}{-24}$ → $\frac{12}{-24}=\frac{-1}{2}$; $\frac{4}{-24}=\frac{-1}{6}$ $x_1=\frac{-1}{2}$, $x_2=\frac{-1}{6}$ * $a=-4$, $b=-3$, $c=-2$ $4(-4)x^2+4(-3)x-2=-16x^2-12x-2$ $-16x^2-12x-2=0$ $\frac{12\pm\sqrt{144-4.(-16).(-2)}}{2(-16)}=\frac{12\pm\sqrt{144-128}}{-32}=\frac{12\pm\sqrt{16}}{-32}$ → $\frac{12+4}{-32}=\frac{16}{-32}$; $\frac{12-4}{-32}=\frac{8}{-32}$ $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{1}{4}$ * $a=-20$, $b=-19$, $c=-18$ $4(-20)x^2+4(-19)x-18=-80x^2-76x-18$ $-80x^2-76x-18=0$ $\frac{76\pm\sqrt{5776-4.(-80)(-18)}}{2.(-80)}=\frac{76\pm\sqrt{16}}{-160}=$ → $\frac{-1}{2}$; $-\frac{9}{20}$ A grandes rasgos puedo ver que una de las raíces, para los distintos valores que le dé a a, b y c, es $-\frac{1}{2}$. y además que el discriminante es 16 por lo que serán raíces reales distintas. NOTA Se puede apreciar el uso de ejemplos para comenzar a pensar la consigna.	

				
		- reflexionar sobre: lo que significa "usar una propiedad" (que se deben chequear hipótesis), reconocer qué propiedades/métodos/reglas/teoremas son factibles de ser usados ante cada consigna que se aborde y según la instancia de resolución que se esté atravesando; la utilidad de los métodos empleados y la pertinencia –o no- de	Dado que queremos hallar las características de las raíces de una función cuadrática es fundamental utilizar la fórmula de Bhaskara para poder así encontrar dichas raíces y ver de las soluciones encontradas cual o cuales características quedan demostradas. hallar las características de las raíces de una función cuadrática no es justamente este el objetivo de la consigna! Sino buscar soluciones de una ecuación cuadrática. Piensa en la fórmula como única posibilidad de resolución, no reconoce en la demostración un método para resolver. No contempló restricciones para la demostración de la fórmula. Si bien la definición incluye pedir el coeficiente principal distinto de cero, no lo considera en el desarrollo de la consigna.	

		aplicarlos en diferentes contextos, la interpretación de lo hallado para dar la respuesta, la necesidad de responder a lo pedido.		
	I4 Resolución de tareas intelectualmente exigentes (demostrar una proposición no vista, resolver un "problema", modelizar).	- Usar	En este caso no corresponde el I4	
		- Explicar		
		- reflexionar		

DESCRIPTOR		EXPLICACIÓN	EVIDENCIAS DE A8	EN SÍNTESIS…
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones ajenas correctas matemáticamente**	**I1** Definiciones de conceptos, reglas, propiedades, enunciados de teoremas, procedimientos, demostraciones de resultados, ejercicios resueltos	- a) Reproducir (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	Conceptos Matemáticos trabajados: Conceptos trabajados en la consigna: funciones, dominio de funciones, funciones cuadráticas, ecuaciones cuadráticas, raíces de funciones, conjuntos numéricos (enteros y racionales). Enunciado de definición: Una *función cuadrática* es una función del tipo: $f: IR \to IR$ / $f(x) = ax^2 + bx + c$ (con a, b y c números reales y a es distinto de 0). Su gráfica se llama parábola. La forma $y = ax^2 + bx + c$ es la *ecuación de la parábola* asociada a la función cuadrática. Enunciado de Propiedad/resultado utilizado: Fórmula que halla las raíces de $f(x) = ax^2 + bx + c$: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ → No plantea condición sobre los coeficientes. Demostración de la propiedad: Buscamos una expresión equivalente a $f(x) = ax^2 + bx + c$ pero escrita en forma canónica $f(x) = a(x-h)^2 + k$. No aclara con qué intención quiere hacer este cambio. Primero factorizamos: $ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$ "factorizar" se refiere a escribirlo como producto de factores, pero en este caso solo saca a factor común (está factorizado, pero el término se usa para algo más). Completamos cuadrados en la expresión que quedo entre paréntesis. ¿podría haber completado cuadrados sin sacar a factor común? ¿cuál era la idea de haberlo hecho? $a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}] =$ $= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - (\frac{b^2-4ac}{4a})$ Llegamos así a lo que pretendíamos. Las expresiones equivalentes son: $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - (\frac{b^2-4ac}{4a})$ para todo x Luego las raíces de x se pueden calcular despejando x de la expresión obtenida: (se refiere a una ecuación) $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - (\frac{b^2-4ac}{4a}) = 0$ Luego $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a}$ $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$ Ahora todo depende del signo de lo que quedo en el miembro de la derecha para que existan dos raíces, una o ninguna. Suponemos que el término de la derecha es mayor o igual a 0 para poder despejar ¿y si fuera negativo? (No consideran la opción) $$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$	**¿qué es una definición?** **¿dónde "paramos" de escribir?** **En general, nadie explicó por qué sacan a factor común.**

			Suponemos $a > 0$; el caso $a < 0$ es análogo No lo muestra, ¿sabe qué significa que sea análogo? $x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	
		- b) Explicar, mostrando comprensión (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	Explicación de la definición: Una función cuadrática es aquella función que en principio va de IR en IR, que es expresada como un polinomio de grado 2. Donde sus coeficientes son números reales y en el caso que el coeficiente principal, o sea el que acompaña a la x de segundo grado, sea igual a 0 donde nos queda una función lineal. Cuando graficamos la función nos queda una curva a la llamamos parábola. Además si le damos un valor a esta función y lo igualamos al polinomio de grado 2 obtenemos una ecuación cuadrática. La explicación suma imprecisiones, no muestra comprensión. Explicación de la demostración: Para demostrar que la fórmula resolvente me indica las raíces de una función polinómica o sea cuando la ecuación es igual a 0 lo que voy a hacer es llevar la expresión a la forma canónica, donde es más fácil despejar la x Recién acá menciona la intención del cambio de formato de la ecuación cuadrática!. Como primer paso saco de factor común el coeficiente principal y completo cuadrados. Luego mediante operaciones de agrupación y despeje llego a la forma que quería (canónica). Ahora despejo de esta forma la x, llegando a conseguir la fórmula resolvente, para luego calcular los valores de x que son las raíces. Entiende qué es lo que hizo, de hecho explica mejor en lenguaje natural qué es lo que pretende hacer y para qué.	**Las explicaciones suman imprecisiones.**
		- c) reflexionar		
	I2 Lenguajes matemáticos (natural y simbólico), notación matemática, convenciones	- a) reproducir "algo" usando lenguajes matemáticos	Utiliza lenguaje simbólico y natural. En cuanto a la definición y su explicación: se lee un intento de explicar con palabras que significa lo anotado en símbolos (forma de la ecuación y restricción para el coeficiente principal) En cuanto a la propiedad y su demostración: está escrito en lenguaje simbólico, podemos encontrar errores de escritura e imprecisiones. Éstas últimas, se ven solucionadas cuando explica en lenguaje natural.	**El lenguaje natural ayuda a pulir imprecisiones que quedan en el desarrollo escrito en lenguaje simbólico.**
		- b) explicar el uso del lenguaje	No explica qué usa y por qué, solo hace un relato de lo que quiso hacer y porqué lo hacía (más referido al proceso que al lenguaje).	

<table>
<tr><td></td><td></td><td>- c) reflexionar</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Conocimiento del contenido matemático ante producciones propias</td><td rowspan="2">I3
Resolución de una consigna, actividad o ejercicio que no le resulte cognitivamente exigente.</td><td>- Usar lenguaje matemático, operar, usar propiedades, procedimientos, etc.</td><td>Elige una notación: a = n-1 ; b = n ; c = n+1 Pero le queda definida de manera incorrecta (no aclara que n es un número entero, y que además n no puede ser 1).
No menciona que existen otras formas de tomar los consecutivos (porque no se indica orden)

Utiliza la notación seleccionada para plantear las cuentas.

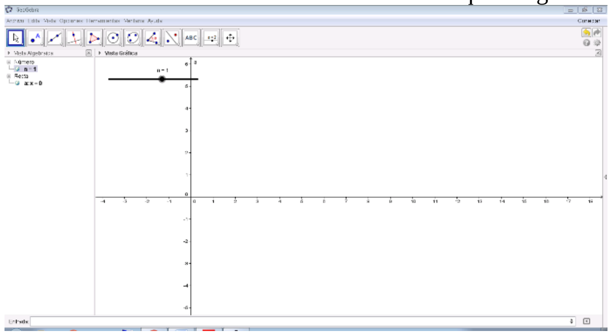
Hace referencia al discriminante y concluye que tiene dos raíces reales distintas, pero no lo incluye en su conclusión.
Si el discriminante fuera negativo, ¿qué haría? Por como lo plantea entiendo que la fórmula se puede usar solo si $\Delta \geq 0$, pero no dice nada el otro caso: no está mal porque no lo necesita.</td><td>La demostración de cómo llegar a la fórmula resolvente nos da una forma de calcular raíces (es constructiva), entonces: si el discriminante fuera negativo uno dice que no se puede utilizar, entonces no tiene solución.
el discrim sea negativo implica que al querer hacer la resolvente me da que no se puede calcular, entonces la ecuación no tiene solución.</td></tr>
<tr><td>- Explicar su resolución (lenguaje utilizado, las operaciones, propiedades utilizados, la respuesta).</td><td>Primero factorizo el polinomio para ver si facilita las cuentas:
$$4\left(a\,x^2 + bx + \frac{c}{4}\right) = 0$$
$$ax^2 + bx + \frac{c}{4} = 0$$
Por otro lado como a,b,c son enteros consecutivos voy a asignarles las siguientes expresiones: a = n-1 ; b = n ; c = n+1
Ahora como pienso aplicar la formula resolvente para obtener las raíces, primero debo ver qué pasa con el discriminante (para saber qué tipo de raíces tiene el polinomio):
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
Notar que en nuestro caso b = n; a = n-1 y c = $\frac{n+1}{4}$
$$\Delta = n^2 - 4\,(n-1)\,\frac{(n+1)}{4} = n^2 - (n^2 - 1) = 1$$
Como el discriminante es 1 concluyo que la ecuación tiene dos raíces reales distintas y además, por tener coeficientes enteros las raíces son racionales.
Ahora pues como el discriminante es 1 puedo usar la formula resolvente:
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x_{1,2} = \frac{-n \pm \sqrt{1}}{2(n-1)}$$</td><td></td></tr>
</table>

$$x_1 = \frac{-n+1}{2(n-1)} = -\frac{1}{2}$$

La primera raíz que obtengo es constante e igual a - $\frac{1}{2}$ independientemente de los valores de a, b y c.

$$x_2 = \frac{-n-1}{2(n-1)} = -\frac{1}{2}\frac{(n+1)}{(n-1)}$$

Para ver qué pasa con esta raíz que evidentemente depende del valor de n o lo que es lo mismo de los valores de a, b y c. Luego utilizo Geogebra, ingreso la expresión y le voy dando distintos valores de n. Observo entonces que n sigue cierto patrón.



Captura de geogebra No se ve nada!

Valores observados (como par ordenado (n, x)):

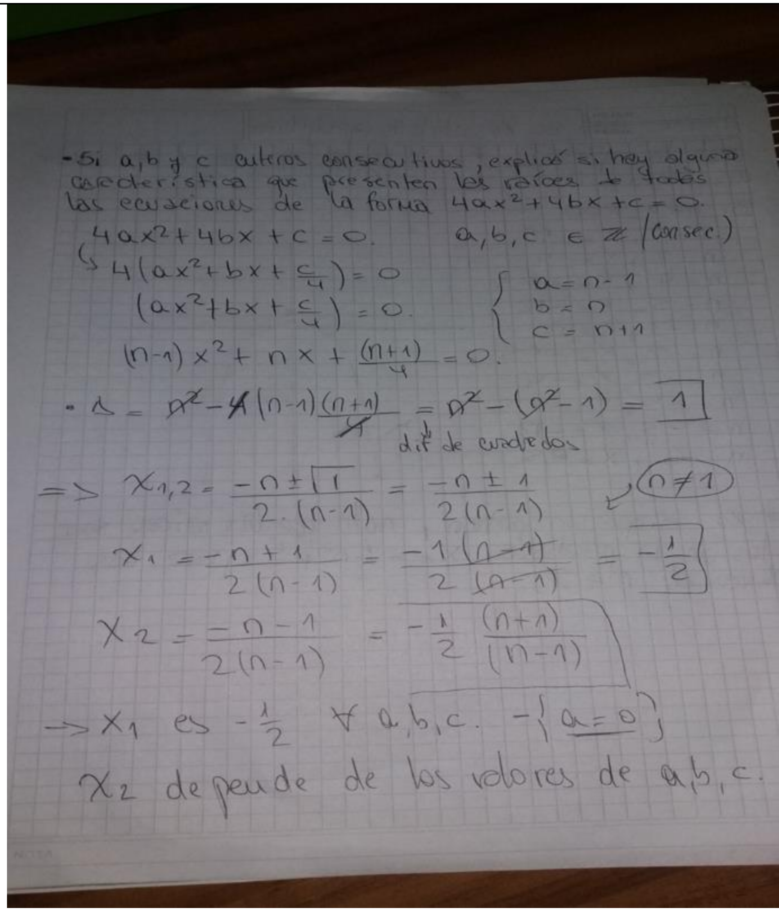
(1,0), (2,-1.5), (3,-4), (4,-7.5), (5,-12), (-1,0), (-2,-1.5), (-3,-4), (-4,-7.5), (-5,-12), (0,0.5).

Luego esto lo corroboro con las cuentas. A qué se debe la “corroboración”?

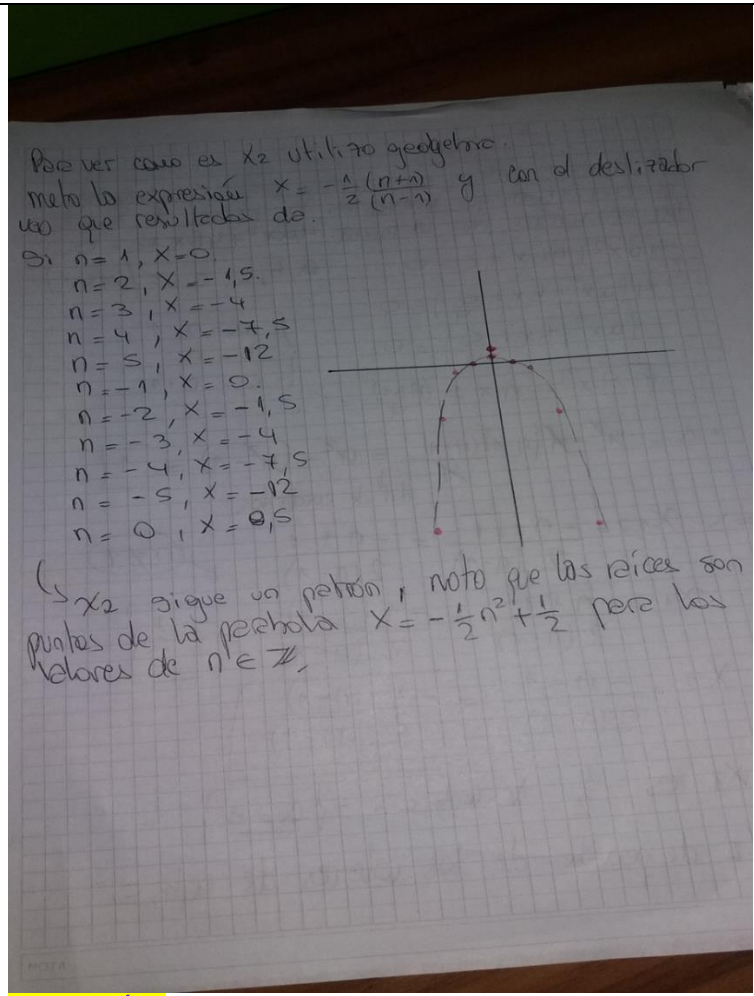
En resumen lo que puedo decir de las raíces de esta ecuación es que son racionales, una es constante e igual a -1/2 y la otra va a depender de los valores de a, b y c. Siguiendo un patrón, donde dichos valores son puntos de la parábola $x = -\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}$ DE DÓNDE SALE? Error de cuentas (n perteneciente al conjunto de los enteros).

Sobre el borrador/explicación del ítem 1c)

Necesidad de verificación numérica: he.



Tiene resuelto de la misma manera que presentó la resolución experta.
Atención: forma de escribir de manera simbólica que no es correcta (ante último renglón).

			 Para ver como es x_2 utilizo geogebra. meto la expresión $x = -\frac{1}{2}\frac{(n+1)}{(n-1)}$ y con el deslizador veo que resultados da. Si $n=1$, $x=0$ $n=2$, $x=-1,5$ $n=3$, $x=-4$ $n=4$, $x=-7,5$ $n=5$, $x=-12$ $n=-1$, $x=0$ $n=-2$, $x=-1,5$ $n=-3$, $x=-4$ $n=-4$, $x=-7,5$ $n=-5$, $x=-12$ $n=0$, $x=0,5$ ↳ x_2 sigue un patrón, noto que las raíces son puntos de la parábola $x=-\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}$ para los valores de $n \in \mathbb{Z}$. ATENCIÓN: usa tabla de valores (ggb) para ver qué da. Pero el primero que toma es n=1 pero la expresión no está definida en ese valor. ¡¡¡La "parábola" que tiene es solo a raíz de una tabla de valores!!! No se da cuenta de que la expresión $x = \frac{-1(n+1)}{2(n-1)}$ **no** es cuadrática y lo lleva a algo de esa forma. **Explicación**: Para poder dar características sobre las raíces lo primero que hice fue buscar esas raíces. Como primer paso saque como factor común el cuatro del polinomio y renombre los coeficientes para que considerar los números consecutivos de la consigna. Luego calcule el discriminante que me dio 1 para más tarde aplicar la fórmula resolvente. Viendo que las raíces resultantes eran una constante para todos los valores y la otra dependía de los valores	**¡Serios problemas matemáticos!** **Acá hay evidencia de lo que vimos en otros trabajos: se puede decir algo sobre las raíces cuando uno las busca.**

			de los coeficientes LAS RAÍCES LE QUEDARON EN TÉRMINOS DE n NUNCA LAS RELACIONÓ CON LOS COEFICIENTES (¿se habrá copiado?). Para poder ver que valores toma esta raíz lo que hice fue meter la expresión en el geogebra en la pc pero muestra un dibujo en lápiz y papel, e indica (supuestamente porque no se ven) puntos en ggb y con el deslizador vi como variaba siguiendo un patrón. Note también no estaba hablando de eso?!?! que la segunda raíz daba distintos puntos pertenecientes a una parábola.	
		- reflexionar sobre: lo que significa "usar una propiedad" (que se deben chequear hipótesis), reconocer qué propiedades/métodos/reglas/teoremas son factibles de ser usados ante cada consigna que se aborde y según la instancia de resolución que se esté atravesando; la utilidad de los métodos empleados y la pertinencia –o no- de aplicarlos en diferentes contextos, la interpretación de lo hallado para dar la respuesta, la necesidad de responder a lo pedido.	Estoy seguro de poder utilizar esta propiedad por el tipo de ecuación que trato de resolver (cuadrática), porque los coeficientes son números enteros y además calcule el discriminante que debía darme mayor a 0 para tener raíces reales. Como dio 1 aplique la fórmula. Es consciente de que se puede aplicar esta fórmula. El alumno explica que, pudo aplicar la fórmula porque el discriminante es mayor que cero: lo que quiere decir es que pudo realizar la cuenta porque el discriminante le dio 1. No considera que, en caso de discriminante negativo, la ecuación no tiene solución. Por otro lado, no considera la definición (que él mismo da) de función cuadrática: restricción para el coeficiente principal. Utiliza la fórmula sin tener en cuenta esto, y tampoco lo menciona en su reflexión.	
	I4 Resolución de tareas intelectualmente exigentes (demostrar una proposición no vista, resolver un "problema", modelizar).	- Usar	En este caso no corresponde el I4	

		- Explicar		
		- reflexionar		

DESCRIPTOR		EXPLICACIÓN	EVIDENCIAS DE A9	EN SÍNTESIS…
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones ajenas correctas matemáticamente**	**I1** Definiciones de conceptos, reglas, propiedades, enunciados de teoremas, procedimientos, demostraciones de resultados, ejercicios resueltos	- a) Reproducir (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	Conceptos Matemáticos trabajados: En esta consigna considero que se trabaja con los conceptos de ecuación de segundo grado, raíces y número de soluciones en relación con el discriminante. Enunciado de definición: Ecuación de segundo grado: ecuación de una variable que es representada por una suma algebraica de términos falta más precisión con respecto a que son potencias de x! cuyo grado máximo es dos. La expresión tiene la forma $ax^2 + bx + c = 0$ con coeficientes a, b, c números reales y $a \neq 0$. Enunciado de Propiedad/resultado utilizado: Fórmula de la resolvente o Bhaskara: Para la obtención de las soluciones de una ecuación de segundo grado completa si no fuera completa también!, es decir, de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, utilizamos la siguiente fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ con a, b y c los coeficientes reales de la ecuación. NO considera $a \neq 0$, cosa que utilizó en la definición. Esto me lleva a pensar que escribe en función de lo que se acuerda, no busca bibliografía al respecto. Demostración de la propiedad: Supongamos la siguiente ecuación de una variable: $ax^2 + bx + c = 0$, con coeficientes "b" y "c" números reales cualesquiera y coeficiente "a" un número real distinto de cero. Es importante que a sea distinto de cero para que el término de grado dos esté presente, ya que si "a" fuese cero, el término al cuadrado se anularía y la ecuación inicial se transformaría en una ecuación lineal de una variable ($bx + c = 0$). Lo que queremos lograr es transformar a la x en una variable de grado uno, para poder despejarla como conocemos del trabajo con ecuaciones lineales. Mal expresado: quiere lograr despejar la x, lo demás es una idea personal. Empezamos sacando factor común "a": $a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0 \quad con\ a \neq 0$ Como "a" es distinto de cero, las divisiones $\frac{b}{a} y \frac{c}{a}$ están bien definidas, es decir que tienen sentido. Por otra parte, como "a" es distinto de cero, lo único que podría hacer que el producto $a.\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$ se anule es que $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Ahora bien, como tenemos una "x" de grado dos y otra de grado uno, con lo conocido hasta ahora no nos es posible despejar, por lo tanto debemos buscar la manera de hacer que la "x" quede en una expresión donde su grado sea uno para poder transponer términos y despejarla. Para esto intentaremos escribir a $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ como un trinomio cuadrado perfecto, completando cuadrados. Entonces:	**Escribe la propiedad desde sus conocimientos, no busca bibliografía para "copiar" una propiedad.**

este término sería

2 . 1° término . 2°término

x sería el primer término, ya que $\sqrt{x^2} = x$

$$x^2 \qquad + \qquad \frac{b}{a}.x \qquad + \qquad \frac{c}{a} = 0$$

Como nuestro primer término es "x" lo reemplazamos y
"$2.x.2°\ término$" $debe\ ser\ igual\ a$ "$\frac{b}{a}.x$". En este caso la única posibilidad es que el segundo término sea "$\frac{b}{2.a}$", luego "$2.x.\frac{b}{2.a} = \frac{b}{a}.x$".
Luego, la ecuación

$$x^2 + \frac{b}{a}.x + \frac{c}{a} = 0$$

$(x + \frac{b}{2.a})^2 + \frac{c}{a} = 0$ Esta no se entiende! (a esto quisiera llegar?)

Si desarrollo el término

$$(x + \frac{b}{2.a})^2 = x^2 + 2.x.\frac{b}{2.a} + \frac{b^2}{4.a^2}$$

Para que

$$x^2 + 2.x.\frac{b}{2.a} + \frac{b^2}{4.a^2} \quad sea\ igual\ a \quad x^2 + \frac{b}{a}.x \quad debemos\ restar \quad \frac{b^2}{4.a^2}$$

Está usando lo que después necesita llegar?

Haciendo esto en la expresión $(x + \frac{b}{2.a})^2 + \frac{c}{a} = 0$, nos queda:

$$(x + \frac{b}{2.a})^2 - \frac{b^2}{4.a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

Ahora podemos despejar "x":

$$\left(x + \frac{b}{2.a}\right)^2 - \frac{b^2}{4.a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2.a}\right)^2 = \frac{b^2}{4.a^2} - \frac{c}{a}$$

Denominador común $4.a^2$

$$\left(x + \frac{b}{2.a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4.a.c}{4.a^2}$$

			$x+\frac{b}{2.a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4.a.c}{4.a^2}}$ cuidado con el uso del módulo y el abuso de notación en $\pm$ $$x+\frac{b}{2.a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4.a.c}}{2.a}$$ $$x=-\frac{b}{2.a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4.a.c}}{2.a}$$ $$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4.a.c}}{2.a}$$ La demostración incluye párrafos de explicación de lo que hace y a dónde quiere llegar escritos en lenguaje natural.	
		- b) Explicar, mostrando comprensión (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	Explicación de la definición: Una ecuación de segundo grado se utiliza para modelizar situaciones donde nuestra incógnita, a la que llamamos “x”, está potenciada al cuadrado en uno de sus términos. Es por esto que se llama “ecuación de segundo grado”, porque el mayor exponente es dos. “a” es el coeficiente que acompaña a la variable de mayor grado, es decir a x^2, por esto es llamado coeficiente principal, y debe ser distinto de cero porque, de lo contrario, el término al cuadrado se cancelaría quedando una ecuación de primer grado con una variable ($aquí\ escribiría\ en\ el\ pizarrón\ mientras\ explico: con$ $a=0 \quad \rightarrow \quad 0x^2+bx+c=bx+c$). “b” es el coeficiente que acompaña al término lineal x, y “c” es el término independiente, el término que acompaña a la x de grado cero. ($aquí\ escribiría\ en\ el\ pizarrón\ mientras\ explico: con\ c.x^0=c.1=c$). Explicación en base a la utilidad, no hace referencia a la definición que dio anteriormente. Luego retoma la explicación mostrando por qué pide cierta condición en el enunciado.	**Explicación de una definición equivalente a mostrar para qué se usa.**
		- c) reflexionar		
	I2 Lenguajes matemáticos (natural y simbólico), notación	- a) reproducir “algo” usando lenguajes matemáticos	Utiliza lenguaje natural y simbólico.	

<table>
<tr><td></td><td>matemática, convenciones</td><td>- b) explicar el uso del lenguaje</td><td>Explica qué quiere decir con las restricciones que incluye en la definición, por qué se llama de esa forma.
Bien.</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>- c) reflexionar</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Conocimiento del contenido matemático ante producciones propias</td><td rowspan="2">I3
Resolución de una consigna, actividad o ejercicio que no le resulte cognitivamente exigente.</td><td>- Usar lenguaje matemático, operar, usar propiedades, procedimientos, etc.</td><td>Elige una notación: $a = a\,,\ b = a + 1,\ c = a + 2 \qquad con\ a \neq 0$ e incluye la restricción pertinente.

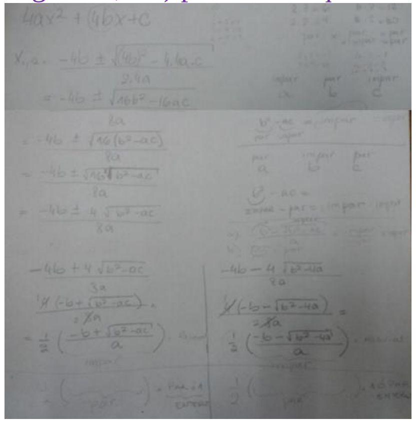
El análisis del discriminante lo considera al final de la resolución, pero no lo toma para concluir algo sobre lo que encontró.

Opera correctamente para encontrar las raíces (el detalle es que no plantea que el a es distinto de cero para utilizar la resolvente). Mi pregunta es: al haber utilizado la misma letra que ya tenía en el coeficiente principal, habrá dado por sentado que era distinta de cero?</td><td></td></tr>
<tr><td>- Explicar su resolución (lenguaje utilizado, las operaciones, propiedades utilizados, la respuesta).</td><td>Resolución experta “pasada en limpio” y explicación:

Teniendo en cuenta que la consigna dice que a,b y c son consecutivos, defino a como el valor de partida, b es un entero más que a y c es dos enteros más que a, entonces: $a = a\,,\ b = a + 1,\ c = a + 2 \qquad con\ a \neq 0$

Luego, reemplazando en la ecuación $4ax^2+4bx+c$, queda $4ax^2 + 4(a+1)x + (a+2)$
Como me piden características de las raíces, utilizo la fórmula de la resolvente:
I. $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
Pero con la sustitución realizada, mis coeficientes son, en relación con la fórmula:
$a = 4a \qquad b = 4(a+1) \qquad c = (a+2)$
Reemplazando esto en I. queda:
$$x_{1,2} = \frac{-4(a+1) \pm \sqrt{(4(a+1))^2 - 4.4.a.(a+2)}}{2.4.a}$$
Operando con la expresión:
$$x_{1,2} = \frac{-4.a - 4 \pm \sqrt{16.(a+1)^2 - 16.(a^2+2a)}}{8.a}$$
$$= \frac{-4.a - 4 \pm \sqrt{16.(\cancel{a^2} + \cancel{2.a} + 1 - \cancel{a^2} - \cancel{2.a})}}{8.a}$$
$$= \frac{-4.a - 4 \pm \sqrt{16.1}}{8.a} = \frac{-4.a - 4 \pm 4}{8.a} =$$
Utiliza la fórmula resolvente sin contemplar que $a \neq 0$. Tampoco analiza el discriminante.</td><td></td></tr>
</table>

			Aquí separo en x_1 y x_2 ya que tengo dos posibles raíces: $$x_1 = \frac{-4.a-4+4}{8.a} = -\frac{4.a}{8.a} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$$ $$x_2 = \frac{-4.a-4-4}{8.a} = \frac{-4.a-8}{8.a} = \frac{4.(-a-2)}{8.a} = -\frac{(a+2)}{2.a}$$ Las raíces de todas las ecuaciones de la forma $4ax^2+4bx+c$ con a, b y c enteros consecutivos tendrán las siguientes características: • Siempre habrá una de ellas cuyo valor sea $-\frac{1}{2}$ • La otra será de la forma $-\frac{(a+2)}{2.a}$, es decir que únicamente depende del valor de a. Para que haya solución, a debe ser distinto de cero LO DICE RECIÉN ACÁ!. Dependiendo el valor de a, la raíz será positiva, negativa o cero. Estudiando cada caso: $$-\frac{a+2}{2.a} > 0 \overset{si\ y\ sólo\ si}{\longleftrightarrow} -a-2>0 \underset{si\ y\ sólo\ si}{\longleftrightarrow} a<-2$$ $$Esto\ quiere\ decir\ que\ la\ raíz\ -\frac{a+2}{2.a}\ será\ positiva\ cuando\ a \in (-\infty,-2)$$ $-\frac{a+2}{2.a} < 0 \overset{si\ y\ sólo\ si}{\longleftrightarrow} -a-2<0 \underset{si\ y\ sólo\ si}{\longleftrightarrow} -2<a$ Error matemático de resolución. $$Esto\ quiere\ decir\ que\ la\ raíz\ -\frac{a+2}{2.a}\ será\ negativa\ cuando\ a \in (-2,+\infty)$$ $$-\frac{a+2}{2.a} = 0 \overset{si\ y\ sólo\ si}{\longleftrightarrow} -a-2=0 \underset{si\ y\ sólo\ si}{\longleftrightarrow} a=-2$$ $$Esto\ quiere\ decir\ que\ la\ raíz\ -\frac{a+2}{2.a}\ será\ cero\ cuando\ a=-2$$ Si bien la consigna pregunta por "las raíces", podemos tener tres casos al resolver este tipo de ecuaciones. Con conocer el valor del discriminante de la fórmula de la resolvente, es decir, el valor de "b^2-4ac" podemos determinar si habrá una solución real, dos soluciones reales o ninguna solución real. • Si $b^2-4ac>0$, tendremos dos soluciones reales. Vemos que en el caso estudiado como $b^2-4ac=16>0$, obtuvimos dos soluciones ya que existe la raíz real de cualquier número mayor a cero. • Si $b^2-4ac=0$, tendremos una única solución real de la forma $\frac{-b}{2.a}$, ya que la raíz de cero es cero. • Si $b^2-4ac<0$, no hay solución real, ya que no existe la raíz real de un número negativo. No relaciona el análisis del discriminante con respecto a las soluciones obtenidas. De hecho, dice que es 16 pero no nada más.	

			Resolución Borrador/extra: intenta ver qué tipo de números son las soluciones de la ecuación (enteros, racionales, pares, impares, positivas, negativas, etc) pero aclara que no le sirvió.  Con esta forma, con la que no llegué a ningún resultado, intentaba ver si las raíces eran números enteros o fracciones, pares o impares.	
		- reflexionar sobre: lo que significa “usar una propiedad” (que se deben chequear hipótesis), reconocer qué propiedades/métodos/reglas/teoremas son factibles de ser usados ante cada consigna que se aborde y según la instancia de resolución que se esté atravesando; la utilidad de los métodos empleados y la pertinencia –o no- de aplicarlos en diferentes contextos, la interpretación de lo hallado para dar la	Tengo certeza de que puedo utilizar este resultado porque al ser a, b y c números enteros, pertenecen al conjunto de los números reales. Tiene la restricción de que a debe ser distinto de cero, es decir que no podría considerar enteros consecutivos donde a=0 (como por ejemplo a=0, b=1, c=2), pero en ese caso ya no tendría una ecuación de segundo grado y la consigna cambiaría. Para la alumna resultó acertado el uso de la fórmula resolvente y lo justifica. Considera la restricción para el valor del coeficiente principal.	

		respuesta, la necesidad de responder a lo pedido.		
	I4 Resolución de tareas intelectualmente exigentes (demostrar una proposición no vista, resolver un "problema", modelizar).	- Usar	En este caso no corresponde el I4	
		- Explicar		
		- reflexionar		

DESCRIPTOR		EXPLICACIÓN	EVIDENCIAS DE A10	EN SÍNTESIS…
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones ajenas correctas matemáticamente**	**I1** Definiciones de conceptos, reglas, propiedades, enunciados de teoremas, procedimientos, demostraciones de resultados, ejercicios resueltos	- a) Reproducir (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	Conceptos Matemáticos trabajados: Conceptos matemáticos utilizados: • Función cuadrática • Pasaje de lenguaje coloquial a algebraico Enunciado de definición: una función cuadrática es una función del tipo $f: R \to R\, ; f(x) = ax^2 + bx + c$ (con a, b y c números reales y a distinto de 0). Su grafica se llama parábola. ¿Dónde termina una definición? ¿Por qué hacen aclaraciones? Enunciado de Propiedad/resultado utilizado: En la resolución del ejercicio se hizo uso de la formula resolvente: como propiedad para hallar las raíces. Para una ecuación cuadrática con coeficientes reales o complejos existen siempre dos soluciones, no necesariamente distintas, llamadas raíces, que pueden ser reales o complejas (si los coeficientes son reales y existen dos soluciones no reales, entonces deben ser complejas conjugadas). Fórmula general para la obtención de raíces: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ Se usa ± para indicar las dos soluciones: $x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y $x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ Demostración de la propiedad: Relacionando la ecuación de segundo grado con un polinomio de segundo grado y las raíces del mismo (a su vez raíces de una función cuadrática), podemos resolver la ecuación algebraicamente y obtener la fórmula de dicha ecuación. Sea dada la ecuación: $ax^2 + bx + c = 0$ donde $a \neq 0$ para garantizar que sea *realmente* una ecuación polinómica de segundo grado. Como **a** es distinto de cero, podemos dividir entre **a** cada término de la ecuación: no aclara qué es lo que va a hacer, solo copia en orden los pasos. $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ Restamos el valor del término independiente en ambos miembros de la igualdad: $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$ Para completar el trinomio cuadrado perfecto (TCP), o más brevemente, para completar el cuadrado en el miembro izquierdo, se suma el cuadrado de la mitad del coeficiente lineal, por lo que sumamos $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ en ambos miembros de la ecuación:	**Propiedad enunciada extraída de internet (Wikipedia) → recurrir a un medio más accesible (parece) que un libro.** **Al escribir la demostración, no deja indicaciones qué va a hacer y para qué, sino que escribe paso a paso todo lo algebraico.**

			$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$ Factorizamos el TCP del lado izquierdo y hacemos la operación indicada del derecho: $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$ Hacemos la operación con fracciones en el miembro derecho: $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ Extraemos raíz cuadrada en ambos miembros: ver porque usa el $\pm$ en vez de escribir con el módulo. $x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$ Separamos las raíces de la fracción del lado derecho: $x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{(2a)^2}}$ Simplificamos el radical del denominador del miembro derecho: acá no hace referencia a haber "simplificado". $x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ Despejamos la incógnita que buscamos: $x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ Combinamos las fracciones con el mismo denominador del lado derecho y obtenemos la fórmula general: $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	
		- b) Explicar, mostrando comprensión (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	Explicación de la definición: Una función cuadrática es una función que tiene la siguiente forma: Ojo definición de función! NO toma lo que incluyó en la definición (la función como terna) $f(x)=ax^2+bx+c$ Donde a, b y c son números reales y $a\neq 0$, es decir hay un número que acompaña al x^2 otro que acompaña a la x y un número solo al que denominamos termino independiente. A esta expresión la denominamos forma polinómica. Las funciones cuadráticas también pueden estar expresadas de las siguientes maneras: $f(x)=a(x-xv)^2+yv$, forma canónica $f(x)=a(x-x1).(x-x2)$, forma factorizada Su grafico es una parábola. Las parábolas son simétricas y tienen: vértice, eje de simetría, raíces, ordenada al origen.	**Explicación de la definición como traducción palabra a palabra de lo que está escrito: describe cómo está conformada la fórmula.** **La explicación de la definición está ampliada**

			Con respecto a la explicación de la demostración: se reduce a decir paso a paso qué es lo que se hace algebraicamente.	**con más información de la que se menciona.**
		- c) reflexionar		
	I2 Lenguajes matemáticos (natural y simbólico), notación matemática, convenciones	- a) reproducir "algo" usando lenguajes matemáticos	Utiliza el lenguaje natural constantemente para indicar qué hace en el planteo simbólico.	
		- b) explicar el uso del lenguaje	Explica paso a paso lo relacionado con la definición de la fórmula de la función cuadrática, y también el porqué de la restricción.	
		- c) reflexionar		
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones propias**	**I3** Resolución de una consigna, actividad o ejercicio que **no** le resulte cognitivamente exigente.	- Usar		
		- Explicar su resolución (lenguaje utilizado, las operaciones, propiedades utilizados, la respuesta).	a, b, c son números enteros consecutivos NO considera condición para a. • a=a • b=a+1 • c=a+2 Reemplazando en $4ax^2+4bx+c$ $=4ax^2+4(a+1)x+a+2$ $=4(ax^2+(a+1)x)+a+2$ → Igualamos la función a 0 para buscar raíces en realidad está trabajando una ecuación, no una función. $ax^2+(a+1)x+\frac{a+2}{4}=0$ Usamos formula resolvente: $x=\frac{-(a+1)\pm\sqrt{(a+1)^2-4a\frac{(a+2)}{4}}}{2a}$ $x=\frac{-(a+1)\pm 1}{2a}$	**No aclara que no es única la forma de tomar los consecutivos.**

$X_1 = \frac{-a-1-1}{2a} = \frac{-a-2}{2a} = \frac{-(a+2)}{2a} = \frac{-c}{2a}$

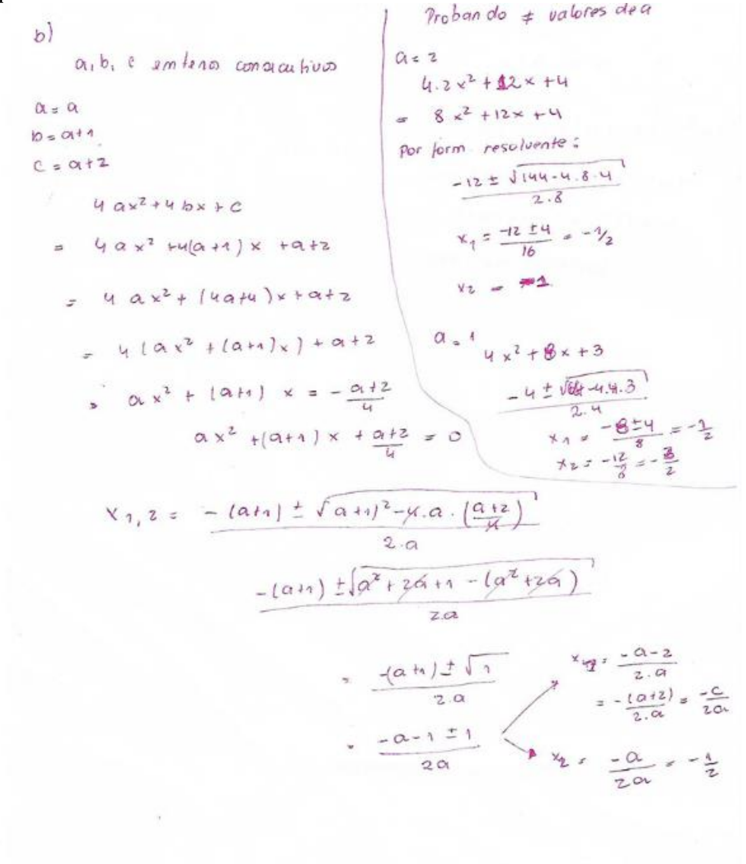
$X_2 = -\frac{a}{2a} = -\frac{1}{2}$

Llegando a la conclusión de que todas las ecuaciones de la forma 4ax2+4bx+c =0 tienen como raíz a x=-1/2 y a x= -c/2a

La conclusión tiene que ver con lo obtenido como raíces, no pudo ver antes qué características tenía analizando el discriminante.

Con respecto a los intentos de resolución/borrador:

Al iniciar la resolución de la consigna tome diferentes valores de a, donde se pudo observar que coincidía el valor de una de las raíces.



b)

a, b, c enteros consecutivos

$a = a$

$b = a+1$

$c = a+2$

$4ax^2+4bx+c$

$= 4ax^2+4(a+1)x+a+2$

$= 4ax^2+(4a+4)x+a+2$

$= 4(ax^2+(a+1)x)+a+2$

$\Rightarrow ax^2+(a+1)x = -\frac{a+2}{4}$

$ax^2+(a+1)x+\frac{a+2}{4} = 0$

$x_{1,2} = \frac{-(a+1) \pm \sqrt{(a+1)^2-4.a.\left(\frac{a+2}{4}\right)}}{2.a}$

$\frac{-(a+1) \pm \sqrt{a^2+2a+1-(a^2+2a)}}{2a}$

$= \frac{-(a+1) \pm \sqrt{1}}{2.a}$

$= \frac{-a-1 \pm 1}{2a}$

$x_1 = \frac{-a-2}{2.a} = -\frac{(a+2)}{2.a} = \frac{-c}{2a}$

$x_2 = \frac{-a}{2a} = -\frac{1}{2}$

Probando ≠ valores de a

$a = 2$

$4.2x^2+12x+4$

$= 8x^2+12x+4$

Por form resolvente:

$\frac{-12 \pm \sqrt{144-4.8.4}}{2.8}$

$x_1 = \frac{-12 \pm 4}{16} = -1/2$

$x_2 = -1$

$a = 1$

$4x^2+8x+3$

$\frac{-4 \pm \sqrt{64-4.4.3}}{2.4}$

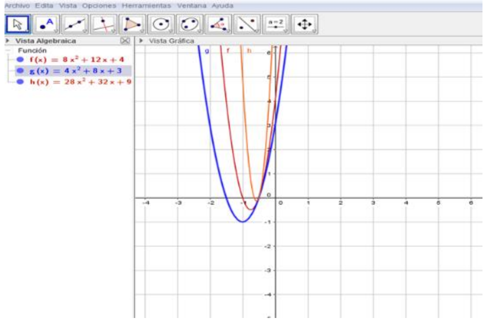
$x_1 = \frac{-8 \pm 4}{8} = -\frac{1}{2}$

$x_2 = -\frac{12}{8} = -\frac{3}{2}$

La alumna cuenta que recién al ver con números que había una regularidad, decidió probarlo en general.

Utilizando Geogebra realicé el grafico con números consecutivos más grandes para ver si seguía cumpliendo que una de las raíces sea x=-1/2. Sin embargo nada se podía deducir a partir del

***"características que presenten las raíces"* se reduce a hallarlas.**

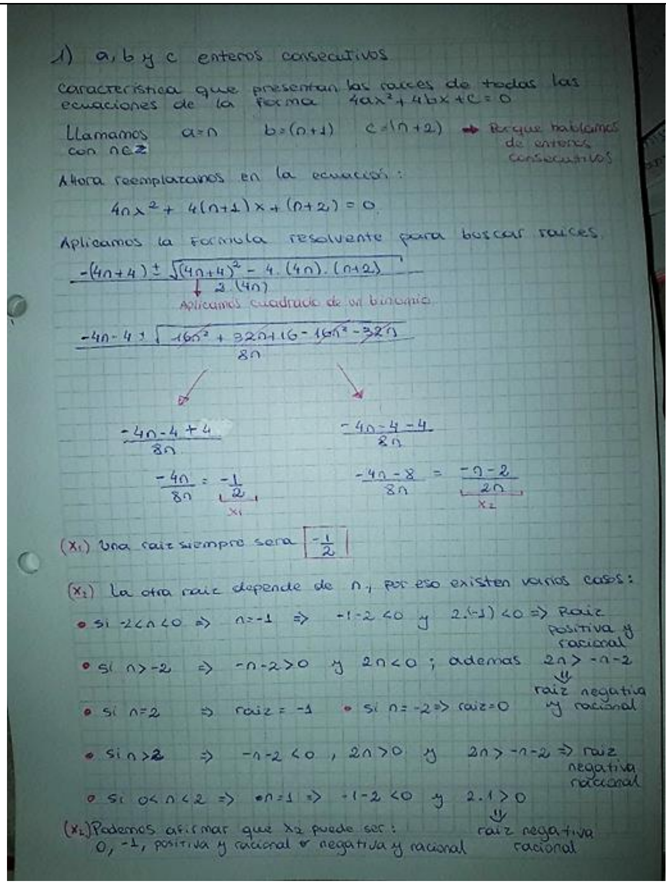
			grafico sobre la otra raíz. Por último a partir de un planteo algebraico se pudo llegar a una afirmación más general. Sin embargo, antes utilizó otra herramienta para probar casos extremos, pero no le resultó útil.  No menciona haber "verificado" sus hipótesis tampoco. <u>Con respecto a la explicación de la resolución</u>: Como la consigna plantea que a, b y c son tres números enteros consecutivos podemos pensar a a=a, b=a+1 y a c=a+2. Luego reemplazamos en la formula dada los valores de a b y c y quedaría: (no considera hipótesis que antes mostró) $4ax^2 + 4(a+1)x + a + 2$ mezcla de expresión/ecuación/función. Se nos pide sacar conclusiones respecto a alguna de las características que presenten las raíces, igualamos la función a cero para poder calcularlas quedando la siguiente ecuación: $ax^2 + (a+1)x + \frac{a+2}{4}=0$ Es una función cuadrática donde a=a; b= a+1 y c= $\frac{a+2}{4}$ Luego utilizando formula resolvente llegamos a la conclusión de que una de las raíces de la función siempre será $-\frac{1}{2}$ y la otra $-\frac{c}{2a}$. Por lo que se puede afirmar que tomando cualesquiera números consecutivos siempre las raíces cumplirán con lo antes afirmado. No aclara cómo toma los consecutivos.	
		- reflexionar sobre: lo que significa "usar una propiedad" (que se deben chequear hipótesis), reconocer qué propiedades/métodos/reglas/teoremas son factibles de ser usados ante cada consigna que se aborde y según la	Tengo certeza de utilizar la formula resolvente para hallar las raíces cuadráticas de la función dada. Ya que es la única forma para poder resolver ecuaciones cuadráticas completas es decir con a, b y c números reales distintos de cero. No se lee que entienda qué significa aplicar una propiedad: si bien la demostración utiliza la hipótesis de que a es distinto de cero, no lo menciona en la justificación acá citada. No reconoce que el método para encontrar la fórmula es en realidad una "demostración constructiva", que lo que hace en realidad es despejar la variable (y que podría hacer siempre algo así en vez de utilizar la fórmula). La respuesta siempre es el "valor de x".	

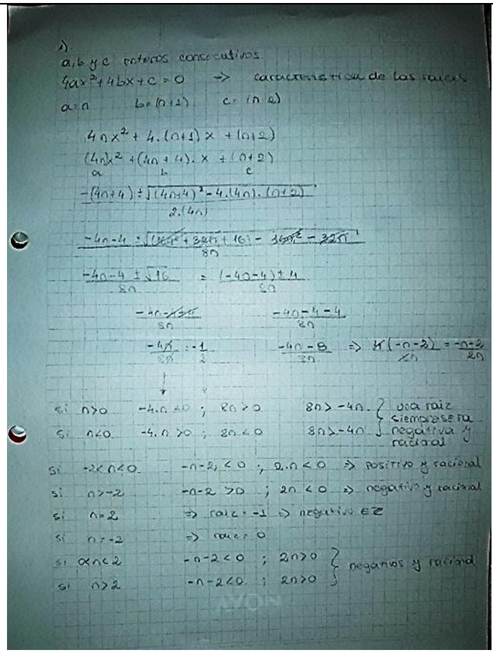
		instancia de resolución que se esté atravesando; la utilidad de los métodos empleados y la pertinencia –o no- de aplicarlos en diferentes contextos, la interpretación de lo hallado para dar la respuesta, la necesidad de responder a lo pedido.		
	I4 Resolución de tareas intelectualmente exigentes (demostrar una proposición no vista, resolver un “problema”, modelizar).	- Usar	En este caso no corresponde el I4	
		- Explicar		
		- reflexionar		

DESCRIPTOR		EXPLICACIÓN	EVIDENCIAS DE A11	EN SÍNTESIS…
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones ajenas correctas matemáticamente**	**I1** Definiciones de conceptos, reglas, propiedades, enunciados de teoremas, procedimientos, demostraciones de resultados, ejercicios resueltos	- a) Reproducir (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	Conceptos Matemáticos trabajados: En la consigna se trabajó con ecuaciones cuadráticas Enunciado de definición: Una ecuación cuadrática (ecuación de segundo grado) de una variable es una ecuación que tiene la forma de una suma algebraica de términos cuyo grado máximo es dos. Una ecuación cuadrática puede ser representada por un polinomio de grado dos. Formula general: $ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$ Donde x es la variable, a es el coeficiente cuadrático, b el coeficiente lineal y c el termino independiente. La forma en que está escrito evidencia que no fue buscada, sino que escrita desde el conocimiento propio. Enunciado de Propiedad/resultado utilizado: Sea $ax^2 + bx + c$ una ecuación cuadrática con $a \neq 0$. Se pide encontrar la solución de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, para ello debemos encontrar las raíces de la ecuación. Las raíces de una ecuación de segundo grado, x_1 y x_2 suelen expresarse mediante la fórmula: $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ La redacción es desde el sentido común… lenguaje natural, no simbólico, desde lo que conoce la alumna. Problemas en la escritura simbólica también. Demostración de la propiedad:	**Problemas con la definición de una ecuación: confusión con expresión.**

			Dado el polinomio de segundo grado $F = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$ Queremos saber cuando $F = 0$ Como $a \neq 0$, podemos escribir $F = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$ $= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$ $= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$ $= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right)^2\right)$ $= a\left(\left(x + \frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right) \cdot \left(x + \frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)\right)$ Llamamos discriminante de F como $\Delta = b^2 - 4ac$ Llamamos $\omega^2 = \Delta$ entonces: $F = a\left(X - \frac{-b+\omega}{2a}\right)\left(X - \frac{-b-\omega}{2a}\right)$ Por lo tanto $F(x) = 0 \iff X - \frac{-b+\omega}{2a} = 0$ o $X - \frac{-b-\omega}{2a} = 0$ Es decir se obtienen 2 raices: $X_\pm = \frac{-b \pm \omega}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a}$ La demostración está copiada, no está completa (falta explicación o indicación de por qué factoriza, cómo maneja los cuadrados)	
		- b) Explicar, mostrando comprensión (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	Explicación de la definición: xxx ¿considera que las definiciones no se explican? ¿considera que ya está explicado? Explicación de la propiedad: copia sin mostrar comprensión.	

		- c) reflexionar		
	I2 Lenguajes matemáticos (natural y simbólico), notación matemática, convenciones	- a) reproducir "algo" usando lenguajes matemáticos	Lo que reproduce lo hace en lenguaje natural, explica desde lo que sabe lo que considera definición o propiedad. Lo que demuestra, lo hace copiando tal cual de algún lado, por lo que utiliza lenguaje simbólico (aunque de manera incompleto).	
		- b) explicar el uso del lenguaje	No se puede analizar porque no completó la parte de la explicación. xxx	
		- c) reflexionar		
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones propias**	**I3** Resolución de una consigna, actividad o ejercicio que **no** le resulte cognitivamente exigente.	- Usar		

		- Explicar su resolución (lenguaje utilizado, las operaciones, propiedades utilizados, la respuesta).	 1) a, b y c enteros consecutivos característica que presentan las raíces de todas las ecuaciones de la forma $4ax^2+4bx+c=0$ Llamamos $a=n$ $b=(n+1)$ $c=(n+2)$ → Porque hablamos de enteros consecutivos con $n\in\mathbb{Z}$ Ahora reemplazamos en la ecuación: $4nx^2+4(n+1)x+(n+2)=0$ Aplicamos la formula resolvente para buscar raíces $\dfrac{-(4n+4)\pm\sqrt{(4n+4)^2-4.(4n).(n+2)}}{2.(4n)}$ Aplicamos cuadrado de un binomio $\dfrac{-4n-4\pm\sqrt{\cancel{16n^2}+\cancel{32n}+16-\cancel{16n^2}-\cancel{32n}}}{8n}$ $\dfrac{-4n-4+4}{8n}$ $\dfrac{-4n-4-4}{8n}$ $\dfrac{-4n}{8n}=\underbrace{-\dfrac{1}{2}}_{x_1}$ $\dfrac{-4n-8}{8n}=\underbrace{\dfrac{-n-2}{2n}}_{x_2}$ (x_1) Una raíz siempre será $\boxed{-\frac{1}{2}}$ (x_2) La otra raíz depende de n, por eso existen varios casos: • si $-2<n<0 \Rightarrow n=-1 \Rightarrow -1-2<0$ y $2.(-1)<0 \Rightarrow$ Raíz positiva y racional • si $n>-2 \Rightarrow -n-2>0$ y $2n<0$; además $2n>-n-2 \Downarrow$ raíz negativa y racional • si $n=2 \Rightarrow$ raíz $=-1$ • si $n=-2 \Rightarrow$ raíz $=0$ • si $n>2 \Rightarrow -n-2<0$, $2n>0$ y $2n>-n-2 \Rightarrow$ raíz negativa racional • si $0<n<2 \Rightarrow n=1 \Rightarrow -1-2<0$ y $2.1>0 \Downarrow$ raíz negativa racional (x_2) Podemos afirmar que x_2 puede ser: 0, −1, positiva y racional o negativa y racional Para la resolución no considera restricción para el valor de a (a pesar de haberlo mencionado en su definición). No considera el discriminante. Hay un análisis del signo de la solución que no se sabe de dónde sale… hecho con otros compañeros. El análisis del signo no se relaciona con lo que muestra en el anexo. Explicación (anexo):	

			 1) a, b y c enteros consecutivos $4ax^2+4bx+c=0$ → características de las raíces $a=n$ $b=(n+1)$ $c=(n+2)$ $4nx^2+4.(n+1)x+(n+2)$ $(4n)x^2+(4n+4).x+(n+2)$ $\frac{-(4n+4)\pm\sqrt{(4n+4)^2-4.(4n).(n+2)}}{2.(4n)}$ $\frac{-4n-4\pm\sqrt{16n^2+32n+16-16n^2-32n}}{8n}$ $\frac{-4n-4\pm\sqrt{16}}{8n}=\frac{(-4n-4)\pm4}{8n}$ $\frac{-4n-\cancel{4+4}}{8n}$ $\frac{-4n-4-4}{8n}$ $\frac{-4\cancel{n}}{8\cancel{n}}=-\frac{1}{2}$ $\frac{-4n-8}{8n}\Rightarrow\frac{\cancel{4}(-n-2)}{2n}=\frac{-n-2}{2n}$ si $n>0$ $-4.n<0$; $8n>0$ $8n>-4n$ si $n<0$ $-4.n>0$; $8n<0$ $8n>-4n$ } una raíz siempre será negativa y racional si $-2<n<0$ $-n-2<0$; $2.n<0$ ⇒ positivo y racional si $n>-2$ $-n-2>0$; $2n<0$ ⇒ negativo y racional si $n=2$ ⇒ raíz $=-1$ ⇒ negativo $\in \mathbb{Z}$ si $n=-2$ ⇒ raíz $=0$ si $0<n<2$ $-n-2<0$; $2n>0$ } negativos y racional si $n>2$ $-n-2<0$; $2n>0$ Elabora conclusiones en base al signo de n (sin considerar que no puede ser nulo, aunque no toma ese caso). Error en el razonamiento.	
		- reflexionar sobre: lo que significa "usar una propiedad" (que se deben chequear hipótesis), reconocer qué propiedades/métodos/reglas/teoremas son factibles de ser usados ante cada consigna que se aborde y según la instancia de resolución que se esté atravesando; la utilidad de los métodos empleados y la pertinencia –o no- de aplicarlos en diferentes contextos, la interpretación de lo	Si, se puede usar la propiedad. La fórmula resolvente puede ser utilizada siempre que se cumpla que tengas un polinomio de grado dos. En este caso como quería ver que sucedía con las raíces y es un polinomio de grado 2 la pude utilizar. No considera hipótesis para poder utilizar la resolvente, la condición para su utilización es que sea formato de ecuación cuadrática. OJO: no la considera pero la usó en la demostración.	

		hallado para dar la respuesta, la necesidad de responder a lo pedido.		
	I4 Resolución de tareas intelectualmente exigentes (demostrar una proposición no vista, resolver un "problema", modelizar).	- Usar	En este caso no corresponde el I4	
		- Explicar		
		- reflexionar		

<table>
<tr><th colspan="2">DESCRIPTOR</th><th>EXPLICACIÓN</th><th>EVIDENCIAS DE A12</th><th>EN SÍNTESIS…</th></tr>
<tr>
<td>Conocimiento del contenido matemático ante producciones ajenas correctas matemáticamente</td>
<td>I1
Definiciones de conceptos, reglas, propiedades, enunciados de teoremas, procedimientos, demostraciones de resultados, ejercicios resueltos</td>
<td>- a) Reproducir (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)</td>
<td>Conceptos Matemáticos trabajados: Para resolver la consigna utilice el concepto de la formula resolvente, el sub-concepto del discriminante de esta fórmula y la propiedad de la regla de los signos.

Enunciado de definición: Formula resolvente: Toda ecuación cuadrática expresada de manera canoníca, es decir: $ax^2 + bx + c$, en donde a, b y c son números reales. Tiene dos, una o 0 raíces reales. Para hallar las raíces de las ecuaciones cuadráticas expresadas de manera canoníca se utiliza la formula de la resolvente, la cual es: $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Con esta fórmula podemos averiguar cuáles serán las raíces de nuestra ecuación. Ahora para saber si nuestra ecuación tiene una, dos o ninguna raíz, vemos el valor del discriminante. El discriminante es lo que tenemos dentro de la raíz de la formula de la resolvente, es decir $b^2 - 4ac$. Si este valor nos da 0, quiere decir que nuestra ecuación tiene una sola raíz, si el valor que nos da es negativo, la ecuación no tiene raíces, y si el valor es positivo la ecuación tiene dos raíces. No es una definición, aquí incluye la explicación. No considera restricción para el coeficiente principal.
Ver qué significa discriminante mayor que cero: 2 soluciones reales “distintas”!!!

Enunciado de Propiedad/resultado utilizado: La propiedad que use para resolver la consigna fue la regla de los signos:
Esta regla dice lo siguiente: El producto o división de dos números negativos me da un numero positivo, El producto o división de dos números positivos me da un numero positivo, y el producto o división de un números negativos y otro positivo me da un numero negativo.
Definición desde el sentido común.

Demostración de la propiedad:
Sean a y b dos números reales, demostraremos las siguientes afirmaciones para el caso de la multiplicación, para la división es similar la demostración. Esto es común leer en libros, habría que ver si él es capaz de resolverlo.

Producto de dos números positivos: $(+a).(+b) = a.b$ no enuncia la propiedad completa: debería decir “el signo del resultado o del producto de dos números positivos, es positivo”. El enunciado habla de números reales y después no considera el 0.
Dem:
$(+a).(+b) = (+1a).(+1b) = \left((+1).(+1)\right)a.b = \left(1(+1)\right)a.b = 1.ab = ab$

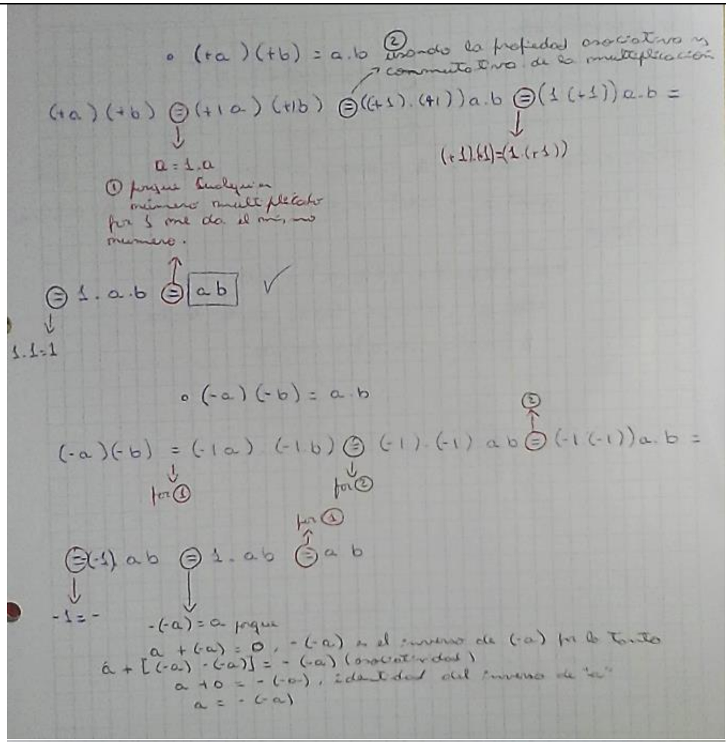
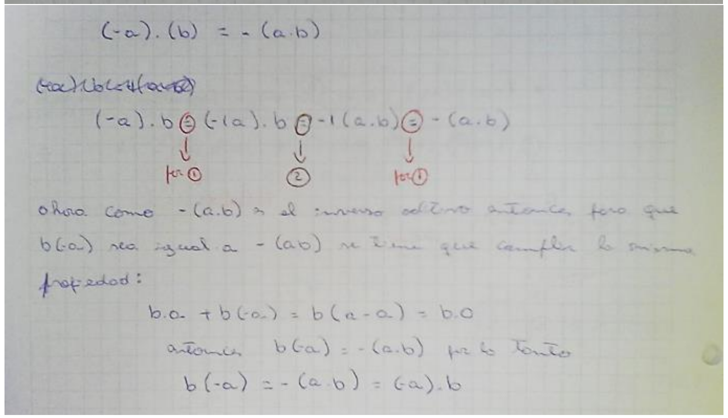
Producto de dos números negativos: $(-a).(-b) = a.b$
Dem:
$(-a).(-b) = (-1a).(-1b) = \left((-1).(-1)\right)a.b = \left(-1(-1)\right)a.b = 1.ab = ab$

Producto de un número positivo y otro negativo: $(-a).(b) = -(a.b)$</td>
<td>¿Qué es una definición?

¿qué es una ecuación?

En este caso, ni la demostración está escrita de manera correcta.</td>
</tr>
</table>

			Dem: $$(-a).b = (-1a).b = -1(a.b) = -(a.b)$$ $como$ $-$(a.b) es el inverso aditivo entonces para que b(-a) sea igual a –(a.b) tiene que cumplir la misma propiedad $$ba + b(-a) = b(a - a) = b.0 \rightarrow b(-a) = -(a.b) \therefore b(-a) = -(a.b) = (-a).b$$ No explica qué va haciendo en cada paso.	
		- b) Explicar, mostrando comprensión (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	Explicación de la definición: Bueno hoy veremos raíces de funciones cuadráticas expresadas de manera canoníca es decir, como: a por x al cuadro más b por x mas c, donde a, b y c son números reales que siempre los van a tener, por ejemplo si tenemos dos por x al cuadrado mas cinco x menos seis. Acá nuestros abc serán dos, cinco y menos seis. Para hallar las raíces de esta ecuación o cualquier ecuación cuadrática escrita de esta manera vamos a usar una formula, la formula de la resolvente, esta fórmula es la que está en el pizarrón. Usando esta fórmula pueden hallar las raíces de una ecuación cuadrática, si volvemos a nuestro ejemplo deberíamos reemplazar las letras abc que aparecen en la formula por los abc de nuestro ejemplo, ósea por dos, cinco y menos seis. Pero si en vez de querer saber cuales son las raíces de una ecuación cuadrática quisiéramos solo saber si la ecuación tiene una, dos o 0 raíces. Lo que usamos es el discriminante de la formula, miremos, si reemplazamos nuestros datos en el discriminante nos da que cinco al cuadrado es veinticinco menos cuatro por dos por menos seis nos queda veinticinco mas cuarenta y ocho que es setenta y tres y este número es positivo por lo tanto ya sabemos, usando el discriminante, que la ecuación va a tener dos raíces. No considera la condición de a distinto de 0. Explicación de la demostración:	

			 • $(+a)(+b) = a.b$ ② usando la propiedad asociativa y conmutativa de la multiplicación $(+a)(+b) = (+1a)(+1b) = ((+1).(+1))a.b = (1(+1))a.b =$ $a = 1.a$ ① porque cualquier número multiplicado por 1 me da el mismo número. $(+1).(1) = (1(+1))$ $= 1.a.b = \boxed{a.b}$ ✓ $1.1 = 1$ • $(-a)(-b) = a.b$ $(-a)(-b) = (-1a).(-1b) = (-1).(-1)\, ab = (-1(-1))a.b =$ por ① por ② por ① ② $= (-(-1))\, ab = 1.ab = ab$ $-1 = -$ $-(-a) = a$ porque $a + (-a) = 0$, $-(-a)$ es el inverso de $(-a)$ por lo tanto $a + [(-a) - (-a)] = -(-a)$ (asociatividad) $a + 0 = -(-a)$, identidad del inverso de "a" $a = -(-a)$  $(-a).(b) = -(a.b)$ $(-a)(b) = -(a.b)$ $(-a).b = (-1a).b = -1(a.b) = -(a.b)$ por ① ② por ① ahora como $-(a.b)$ es el inverso aditivo entonces para que $b(-a)$ sea igual a $-(ab)$ se tiene que cumplir la misma propiedad: $b.a + b(-a) = b(a-a) = b.0$ entonces $b(-a) = -(a.b)$ por lo tanto $b(-a) = -(a.b) = (-a).b$ Se puede observar que la explicación contiene más información que la demostración que presenta: qué propiedades de números reales utiliza (aunque escritas de manera imprecisa).	

		- c) reflexionar		
	I2 Lenguajes matemáticos (natural y simbólico), notación matemática, convenciones	- a) reproducir “algo” usando lenguajes matemáticos	Las definiciones están escritas de manera coloquial, utilizando el lenguaje natural. Se incluye el simbólico solo para dar expresiones. En la explicación de la definición, se fuera a escribir todo en lenguaje natural, hasta lo que anteriormente había escrito en lenguaje simbólico.	**¿Explicar implica la no utilización de lenguaje simbólico? ¿se debe explicar utilizando/forzando lenguaje natural?**
		- b) explicar el uso del lenguaje	La explicación se reduce a decir con palabras (dejarlo de esa manera escrito) lo mismo que dice la definición, pero todo en lenguaje natural. No explica a qué se refiere la terminología utilizada. Los puntos 2 y 3 son prácticamente lo mismo.	
		- c) reflexionar		
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones propias**	**I3** Resolución de una consigna, actividad o ejercicio que **no** le resulte cognitivamente exigente.	- Usar lenguaje matemático, operar, usar propiedades, procedimientos, etc.	Selecciona una notación, pero de manera imprecisa: Como a, b y c son números enteros consecutivos entonces podemos escribir $b = a + 1$ y $c = a + 2$. Analiza la cantidad de soluciones (con el discriminante) pero no lo considera para responder. Maneja bien la fórmula resolvente, pero tiene error de cuenta.	
		- Explicar su resolución (lenguaje utilizado, las operaciones, propiedades utilizados, la respuesta).	En principio para hallar las raíces de una función cuadrática basta con usar la formula de la resolvente para saber si las raíces reales son 0, 1 0 2. $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ Como a, b y c son números enteros consecutivos entonces podemos escribir $b = a + 1$ y $c = a + 2$. Remplazamos en la ecuación dada y obtenemos: no considera otra forma de tomar los consecutivos. No considera restricción para el valor de a. $\mathbf{4ax^2 + 4(a+1)x + a + 2 = 0}$ y la resolvente nos queda como: $\frac{-(4a+4)\pm\sqrt{(4a+4)^2-4.4a(a+2)}}{2.4a}$ Para analizar las características de las raíces de la ecuación veo, en principio, cuantas raíces puede llegar a tener la ecuación. Esto lo realizo analizando el discriminante de la	**Ver que se quedan en la resolución de la ecuación pero no responden a la consigna.**

			formula de la resolvente, ya que si este es 0, entonces hay una sola raíz real, si es mayor a 0 hay dos raíces reales y si es menor que 0 la ecuación no tendrá raíces reales. $(4a+4)^2 - 4.4a(a+2) = \cancel{16a^2} + \cancel{32a} + 16 - \cancel{16a^2} - \cancel{32a} = 16$ El discriminante es 16 por lo tanto la ecuación va a tener dos raíces reales DISTINTAS si *a*, *b* y *c* son números enteros consecutivos. Ahora analizo cuales pueden llegar a ser esas dos raíces reales. $\frac{-(4a+4) \pm \sqrt{16}}{8a} =$ $x1 = \frac{-4a-4+4}{8a} = \frac{-4a}{8a} = \frac{-1}{2}$ $x2 = \frac{-4a-4-4}{8a} = \frac{-4a-8}{8a} = \frac{4(-a-4)}{8a} = \frac{-a-4}{4a}$ error de cálculo, abajo debe quedar 2. Por lo tanto no importan cuales sean *a*, *b* y c consecutivos, una de las raíces siempre va a ser -0,5. Y la otra raíz va a depender del valor de “a”. Vemos como será la segunda raíz dependiendo de lo que valga a, (aclaramos que *a* tiene que ser distinto de 0 ya que si no la ecuación no sería una cuadrática). Recién acá lo incluye! No lo consideró para definirlo, pero sí para la resolución. Si *a=-8*, la raíz será 0. Arrastrará error de cuenta. Si -8< *a<0, (-a-8)<0* y 4*a<0, por lo tanto la raíz será positiva.* Si *a>0, (-a-8)<0* y 4*a>0, por lo tanto la raíz será negativa* Si *a<-8, (-a-8)>0* y 4*a<0, por lo tanto la raíz será negativa.* Por lo tanto, podemos decir que una raíz siempre será -0,5 y la otra va a depender del valor de *a*. $a \in (-\infty, -8) \cup (0, +\infty) la\ raiz\ sera\ negativa;$ $si\ a \in (-8{,}0), la\ raiz\ sera\ positiva;$ $y\ si\ a = -8, la\ raiz\ sera\ 0.$ No concluye: no responde a la consigna. Utiliza el discriminante para la cuenta pero no para responder.	**¿Qué es una definición? Necesita mencionar acá algo que antes no aclaró.**
		- reflexionar sobre: lo que significa “usar una propiedad” (que se deben chequear hipótesis), reconocer qué propiedades/métodos/reglas /teoremas son factibles de ser usados ante cada consigna que se aborde y según la instancia de resolución que se esté atravesando; la utilidad de los métodos empleados y la pertinencia –o no- de aplicarlos en diferentes	La regla de los signos puedo utilizarla para la resolución de la consigna ya que los valores de *a* son reales y esta propiedad puede utilizarse para números reales. Es correcto, pero no es relevante para la resolución de la consigna. Lo que toma para trabajar es irrelevante para la consigna.	**Utilizar para responder una definición/propiedad irrelevante para el tema de la consigna: ecuación cuadrática.**

		contextos, la interpretación de lo hallado para dar la respuesta, la necesidad de responder a lo pedido.		
	I4 Resolución de tareas intelectualmente exigentes (demostrar una proposición no vista, resolver un "problema", modelizar).	- Usar	En este caso no corresponde el I4	
		- Explicar		
		- reflexionar		

<table>
<tr><th colspan="2">DESCRIPTOR</th><th>EXPLICACIÓN</th><th>EVIDENCIAS DE A13</th><th>EN SÍNTESIS…</th></tr>
<tr>
<td>Conocimiento del contenido matemático ante producciones ajenas correctas matemáticamente</td>
<td>I1
Definiciones de conceptos, reglas, propiedades, enunciados de teoremas, procedimientos, demostraciones de resultados, ejercicios resueltos</td>
<td>- a) Reproducir (definición/propiedad/teorema/ demostración/etc.)</td>
<td>Conceptos Matemáticos trabajados: Uno de los conceptos matemáticos que se trabaja en esta consigna es ecuaciones cuadráticas o ecuaciones de segundo grado. Otros conceptos matemáticos que también se utilizan en la resolución de la consigna son el cuadrado de un binomio y la propiedad distributiva.

Enunciado de definición: Una ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática de una variable es una ecuación que tiene la forma de una suma algebraica de términos cuyo grado máximo es dos, es decir que una ecuación cuadrática puede ser representada por un polinomio de segundo grado o también conocido como polinomio cuadrático. La expresión general de una ecuación cuadrática de una variable es la que se presenta a continuación:
$ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$ y x es la variable.
Además, a es el coeficiente cuadrático (distinto de 0), b el coeficiente lineal y c es el término independiente.
Esta ecuación se puede interpretar mediante la gráfica de una función cuadrática, es decir, por una parábola. Esta representación gráfica es útil porque las intersecciones o el punto tangencial de esta gráfica (en el caso de existir) con el eje X coinciden con las soluciones de la ecuación. A dichas intersecciones de la gráfica con el eje X se las denomina raíces.
Los links que quedaron al copiar evidencian que fue extraído de internet.

Enunciado de Propiedad/resultado utilizado: Para resolver la consigna, utilicé la fórmula resolvente para obtener las raíces de todas las ecuaciones de la forma: $4ax^2 + 4bx + c = 0$.
No redacta la propiedad, la comenta.

Demostración de la propiedad: <u>Demostración de la fórmula resolvente:</u>

$\mathbf{f(r) = 0,\ r \in R} \leftrightarrow$
$\mathbf{ar^2 + br + c = 0\ (a\neq 0)} \leftrightarrow$ ¿queda claro dónde usan que a≠0?
$\mathbf{r^2 + \frac{b}{a}r + \frac{c}{a} = 0} \leftrightarrow$
$\mathbf{r^2 + 2r\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0} \leftrightarrow$ ¿qué hace? ¿ella sabe por qué lo hace?
$\mathbf{(r + \frac{b}{2a})^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0} \leftrightarrow$
$\mathbf{(r + \frac{b}{2a})^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} \leftrightarrow$
$\mathbf{(r + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} \leftrightarrow$
$\mathbf{(r + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2-4ac}{2a}} \leftrightarrow$
$\mathbf{b^2 - 4ac \geq 0}$

Tomando raíz cuadrada:</td>
<td>¿Qué es una definición?</td>
</tr>
</table>

			$\lvert \mathbf{r} + \frac{b}{2a} \rvert = \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2\lvert a\rvert}$ $\mathbf{r} + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2\lvert a\rvert} = \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $\mathbf{r} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	
		- b) Explicar, mostrando comprensión (definición/propiedad/teorema/ demostración/etc.)	Explicación de la definición: Una **ecuación cuadrática o ecuación de segundo grado** es aquella que posee (no siempre) un término cuadrático, un término lineal y un término independiente. Con esto me refiero a que en uno de sus términos, la variable (generalmente se usa la letra “x”) aparecerá elevada al cuadrado (es decir que tiene grado 2) y acompañada de un coeficiente al cual se lo denomina coeficiente principal. Luego, en otro de sus términos aparecerá la variable, en este caso con grado 1, acompañada por un coeficiente. Y por último, en el término restante, aparecerá únicamente un número (si es que dicho número no es 0) sin la variable en cuestión, y a este término se lo llama término independiente. En el caso en el que alguno de los coeficientes sea el número 1, por ejemplo, en el término cuadrático y en el término lineal, estará presente únicamente la variable ya que dicho coeficiente se encuentra multiplicando a la variable, es decir que hacer 1 por la variable dará como resultado a la variable. Por lo tanto, “no tiene sentido” escribirlo en el caso de los términos mencionados. En cambio, en el término independiente, sí es necesario que ese 1 aparezca ya que no hay variable a la cual dicho número multiplicaría. Por otro lado, si alguno de los coeficientes es 0 entonces tanto el término cuadrático como el lineal o el independiente (según donde aparezca dicho coeficiente) se anularíanNo considera la definición! Es por eso que al principio de la explicación aclaré que no siempre están presentes los tres términos ya que puede suceder que haya uno o dos términos únicamente o, también, que estén involucrados los tres términos en una ecuación. Además, cabe mencionar que, en el caso en el que no esté presente el término cuadrático, entonces se estaría hablando de una ecuación lineal o de grado uno. Para poder trabajar sobre ecuaciones cuadráticas, tiene que estar presente sí o sí el término en el cual la variable se encuentra elevada al cuadrado. Explicación de la propiedad: Comienzo dividiendo a $\mathbf{ar^2 + br + c = 0}$ por a, es decir que divido a cada uno de los términos por a ¿y por qué lo puede hacer? A esto me refería en la pregunta que dejé en la resolución. Una vez hechas las divisiones, completo cuadrados. Luego, al trinomio cuadrado perfecto que se ve a continuación $\mathbf{r^2 + 2r\frac{b}{2a}} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ lo “convierto” en un cuadrado de binomio. Por lo tanto, se obtendría lo siguiente $\mathbf{(r + \frac{b}{2a})^2}$. Luego, “paso” del otro lado del igual a $-\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}$ y en el caso del primer término, distribuyo la potencia cuadrada tanto al numerador como al denominador, obteniéndose lo siguiente: $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$. Resuelvo la resta y todo quedaría expresado de la siguiente forma: $\mathbf{(r + \frac{b}{2a})^2} = \frac{b^2-4ac}{2a}$ (si y solo si b^2-4ac es mayor o igual a 0).	**AL definir la ecuación cuadrática menciona que a≠0, pero no lo considera al explicar la definición. Solo lo toma cuando hace una aclaración al final: no lo toma como restricción del tema.** **Explicación como traducción de lenguaje simbólico al natural: no explicando el por qué lo puede hacer o qué hace, sino traduciendo símbolos.**

			Luego, a la potencia cuadrada de $\mathbf{r} + \frac{b}{2a}$ la “paso” como raíz cuadrada del otro lado del igual y le aplico módulo a lo que quedó, ya que dicha suma puede tomar un valor positivo o uno negativo. Es por eso mismo que luego se reemplaza al módulo por un $\pm$. Por último, se pasa restando al $\frac{b}{2a}$. Como ambos términos tienen el mismo denominador, puedo juntarlos obteniendo una única fracción como se muestra a continuación: $\mathbf{r} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ La explicación de la demostración consiste en decir de manera coloquial qué quiso hacer en cada paso.	
		- c) reflexionar		
	I2 Lenguajes matemáticos (natural y simbólico), notación matemática, convenciones	- a) reproducir “algo” usando lenguajes matemáticos	Las definiciones se realizan en lenguaje natural, NO utilizan lenguaje simbólico. En la demostración de la propiedad y resolución de la consigna, sí se utiliza lenguaje simbólico.	
		- b) explicar el uso del lenguaje	Se lee un intento por explicar en lenguaje natural lo que la expresión de la cuadrática incluye. El resto es volver a decir con palabras lo que se realiza con símbolos (a modo de traducción, no de explicación).	
		- c) reflexionar		
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones propias**	**I3** Resolución de una consigna, actividad o ejercicio que **no** le resulte cognitivamente exigente.	- Usar lenguaje matemático, operar, usar propiedades, procedimientos, etc.	Selecciona una notación: **a = a** **b = a+1** (como b es el número consecutivo de a, le sumo 1 a a) **c = b+1 = a+1+1 = a+2** (como c es el número consecutivo de b, le sumo 1 a b, es decir que le sumo 2 a a). Pero no considera restricción para el valor de a. Usa propiedades de manera correcta. Opera correctamente. Considera el discriminante por un tema de cuenta, no para mencionar una característica de las raíces.	

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>- Explicar su resolución (lenguaje utilizado, las operaciones, propiedades utilizados, la respuesta).</td>
<td>Resolución y explicación (explícitamente aclarado)
Resolución experta y explicación de la resolución como si se la quisiese pasar a un compañero que tiene mi “resolución pasada en limpio” pero no la entendió:
Para comenzar, sé que a, b y c son números enteros consecutivos, por lo tanto los puedo escribir de la siguiente manera:
a = a
b = a+1 (como b es el número consecutivo de a, le sumo 1 a a)
c = b+1 = a+1+1 = a+2 (como c es el número consecutivo de b, le sumo 1 a b, es decir que le sumo 2 a a).
No considera en otro orden a los consecutivos. No toma en cuenta restricción para el coef. Ppal. aunque después lo toma al final.
Una vez que tengo a los tres números en función de a, voy a reescribir a la ecuación $4ax^2 + 4bx + c = 0$ de la siguiente forma:
$$4ax^2 + 4(a+1)x + (a+2) = 0$$
Luego, voy a buscar las raíces de todas las ecuaciones que tienen la forma anteriormente escrita tal como lo pide la consigna. Para ello, utilizaré la fórmula resolvente que se presenta a continuación (tomando a ≠ 0):
$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
Reemplazaré a a, a b y a c por los valores anteriormente obtenidos (a = a, b = a+1 y c = a+2) y realizaré las operaciones correspondientes hasta lograr obtener las dos raíces de todas las ecuaciones de la forma $4ax^2 + 4(a+1)x + (a+2) = 0$, que pueden ser iguales o distintas (serán iguales en el caso en el que la raíz que aparece en la fórmula resolvente de 0 como resultado y al sumar o restar 0 se obtendría un único valor, al cual se lo llamaría raíz doble):
$$x_1, x_2 = \frac{-[4(a+1)] \pm \sqrt{[4(a+1)]^2 - 4.4a.(a+2)}}{2.4a}$$
Dentro de la raíz, elevo al cuadrado tanto al 4 como al (a+1) y, en el segundo término, multiplico a 4 por 4a. También, en el denominador, multiplico a 2 por 4a y se obtiene lo que se presenta a continuación:
$$x_1, x_2 = \frac{-[4(a+1)] \pm \sqrt{16(a+1)^2 - 16a(a+2)}}{8a}$$
Continúo operando dentro de la raíz, resolviendo un cuadrado de binomio en el caso de $(a+1)^2$ y aplicando la propiedad distributiva cuando aparece a(a+2):
$$x_1, x_2 = \frac{-[4(a+1)] \pm \sqrt{16(a^2 + 2a + 1) - 16(a^2 + 2a)}}{8a}$$
Como 16 se encuentra multiplicando a los dos términos que aparecen dentro de la raíz, lo puedo “sacar” como factor común de la siguiente forma:
$$x_1, x_2 = \frac{-[4(a+1)] \pm \sqrt{16(a^2 + 2a + 1 - a^2 - 2a)}}{8a}$$
Por propiedad de la radicación, como 16 y lo que se encuentra dentro del paréntesis se están multiplicando, puedo “separar” la raíz, lo cual quedaría así:
$$x_1, x_2 = \frac{-[4(a+1)] \pm \sqrt{16}\sqrt{a^2 + 2a + 1 - a^2 - 2a}}{8a}$$
Calculo la raíz cuadrada de 16 No lo considera para dar condiciones. Además, se puede observar que el a^2 (que es positivo en el caso del primer término dentro de la raíz) se</td>
<td>No considerar casos especiales (restricción de a), pero tenerlos en cuenta a la hora de cerrar la resolución.</td>
</tr>
</table>

cancela con el a^2 que aparece restando. Lo mismo sucede con el 2a, ya que uno de los términos es positivo y el otro es negativo. Es decir, que dentro de la raíz solo queda el 1, y su raíz es 1. Por ende, se multiplica al 4 que se obtuvo al realizar la raíz cuadrada de 16 con el 1 antes mencionado. Por lo tanto, se obtendría lo siguiente:

$$x_1, x_2 = \frac{-[4(a+1)] \pm 4}{8a}$$

Luego, como el 4 se encuentra en los dos términos que aparecen en el numerador, lo "saco" como factor común, de modo tal de poder simplificarlo con el 8 que se encuentra en el denominador:

$$x_1, x_2 = \frac{4[-(a+1) \pm 1]}{8a}$$

$$x_1, x_2 = \frac{-(a+1) \pm 1}{2a}$$

Sobre lo obtenido, aplico la propiedad distributiva entre el (-1) (que está representado por un menos delante del paréntesis) y el (a+1). Se puede observar lo que se presenta a continuación:

$$x_1, x_2 = \frac{-a-1 \pm 1}{2a}$$

Una vez que se han realizado todas las operaciones, puedo separar el $\pm$ en dos resultados distintos, donde una de las raíces es:

$$\boldsymbol{x_1} = \frac{-a-1+1}{2a} = \frac{-a}{2a} = \boldsymbol{\frac{-1}{2}}$$

y la otra es:

$$\boldsymbol{x_2} = \frac{-a-1-1}{2a} = \frac{-a-2}{2a} = \boldsymbol{\frac{-(a+2)}{2a}}$$

Finalmente, puedo concluir diciendo que las raíces de todas las ecuaciones de la forma $4ax^2 + 4bx + c = 0$ presentan las siguientes características:

- $X_1 = \boldsymbol{\frac{-1}{2}}$
- $X_2 = \boldsymbol{\frac{-(a+2)}{2a}}$

En el caso en que a = 0, entonces b = 1 y c = 2 por ser números enteros consecutivos. Por lo tanto, la ecuación quedaría presentada de la siguiente manera: $4x + 2 = 0$.
Es decir que habría una única raíz y la misma la voy a averiguar de la siguiente forma:

$$4x + 2 = 0$$
$$4x = -2$$
$$x = \frac{-2}{4}$$
$$x = \frac{-1}{2}$$

¡¡¡Es la única que lo considera!!!

que justamente coincide con una de las raíces en el caso en que $a \neq 0$.

Bien resuelto.

		- reflexionar sobre: lo que significa “usar una propiedad” (que se deben chequear hipótesis), reconocer qué propiedades/métodos/reglas/teoremas son factibles de ser usados ante cada consigna que se aborde y según la instancia de resolución que se esté atravesando; la utilidad de los métodos empleados y la pertinencia –o no- de aplicarlos en diferentes contextos, la interpretación de lo hallado para dar la respuesta, la necesidad de responder a lo pedido.	No tengo certeza de que puedo usar la propiedad demostrada anteriormente. La utilicé porque gracias a ella se pueden hallar las raíces de las ecuaciones cuadráticas. Una de sus restricciones es que el valor que tome a debe ser distinto a 0 ya que en el denominador de la misma aparece 2a y si a fuese 0, no sería posible poder dividir por 0. Además, si a fuese 0, esta fórmula no la aplicaría para hallar raíces ya que la ecuación con la que estaría trabajando tendría grado 1 y el valor de la incógnita se podría hallar simplemente haciendo los despejes correspondientes. El no tener certeza se relaciona con la falta de tener en cuenta la condición para aplicar la fórmula resolvente: $a \neq 0$. De haber considerado eso, podría tener la certeza!	**Nadie consideró el caso en que a sea cero. Solo esta chica (incluido en la resolución)** **Por definición de ecuación cuadrática, no puede pasar. Pero en este caso nosotras en el enunciado no lo pusimos! Podria darse el caso a=0 y deben analizarlo separado. Digo: los que consideraron que a no era cero, no aclararon que pasaba en ese caso aparte.**
	I4 Resolución de tareas intelectualmente exigentes (demostrar una proposición no vista, resolver un “problema”, modelizar).	- Usar	En este caso no corresponde el I4	
		- Explicar		
		- reflexionar		

<table>
<tr><th colspan="2">DESCRIPTOR</th><th>EXPLICACIÓN</th><th>EVIDENCIAS DE A14</th><th>EN SÍNTESIS…</th></tr>
<tr>
<td>Conocimiento del contenido matemático ante producciones ajenas correctas matemáticamente</td>
<td>I1
Definiciones de conceptos, reglas, propiedades, enunciados de teoremas, procedimientos, demostraciones de resultados, ejercicios resueltos</td>
<td>- a) Reproducir (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)</td>
<td>
Conceptos Matemáticos trabajados: <u>Conceptos matemáticos trabajados en esta consigna</u>:
-Ecuaciones cuadráticas
-Raíces
-Números enteros
-Propiedad cancelativa
-Propiedad distributiva
-Cuadrado de un binomio
-Factor común
-Simplificación

Enunciado de definición: <u>Definición:</u>
Una Ecuación cuadrática o de segundo grado es una expresión de la forma:
$a.x^2 + b.x + c = 0$
Y se llama así por que la incógnita x aparece elevada al cuadrado. Decimos que: a es el termino cuadrático, b es el termino lineal y c es el termino independiente. Las soluciones de este tipo de ecuaciones se llaman <u>raíces</u>.
No incluye restricción para el valor de a.

Enunciado de Propiedad/resultado utilizado:
Sea n un número entero (distinto de cero) entonces la expresión $x_n = \frac{-2n-2}{2n}$ tiene un desarrollo decimal comprendido entre -2 y 0.
Esto no es una propiedad utilizada: es parte de la respuesta a la consigna.

Demostración de la propiedad: (No corresponde a lo pedido – VER!)
Para demostrar que $x_n = \frac{-2n-2}{2n}$ tiene un desarrollo decimal comprendido entre -2 y 0 tenemos que analizar al número entero n. vamos a analizar distintos casos.
Si n es un numero entero par mayor que cero
Sea n=2k con k natural (distinto de cero)
Lo reemplazamos en la expresión $x_n = \frac{-2n-2}{2n}$ y realizamos los procedimientos algebraicos correspondientes para simplificarla con el fin de estudiar el resultado de utilizar n=2k.
$x_n = \frac{-2k-2}{2.2k} = \frac{2.(-k-1)}{2.2k} = \frac{-k-1}{2k} \rightarrow x_n = \frac{-k-1}{2k}$ con $k \neq 0$
</td>
<td>¿Qué es una propiedad? En este caso, toma como propiedad parte de la respuesta hallada.</td>
</tr>
</table>

- Si n es un numero entero impar mayor que cero

Sea n=2k+1 con k natural (distinto de cero)

Lo reemplazamos en la expresión $x_n = \frac{-2n-2}{2n}$ y realizamos los procedimientos algebraicos correspondientes para simplificarla con el fin de estudiar el resultado de utilizar n=2k+1

$$x_n = \frac{-2(2k+1)-2}{2(2k+1)} = \frac{-4k-2-2}{4k+2} = \frac{-4k-4}{4k+2} = \frac{2(-2k-2)}{2(2k+1)} \to x_n = \frac{-2k-2}{2k+1} \text{ con } k \neq 0$$

- Si n es un numero entero par menor que cero

Sea n=-2k con k natural (distinto de cero)

Lo reemplazamos en la expresión $x_n = \frac{-2n-2}{2n}$ y realizamos los procedimientos algebraicos correspondientes para simplificarla con el fin de estudiar el resultado de utilizar n=-2k.

$$x_n = \frac{-2(-2k)-2}{2(-2k)} = \frac{4k-2}{-4k} = \frac{2(2k-1)}{-4k} = \frac{2k-1}{-2k} \to x_n = \frac{2k-1}{-2k} \text{ con } k \neq 0$$

- Si n es un numero entero impar menor que cero

Sea n=-2k+1 con k natural (distinto de cero)

Lo reemplazamos en la expresión $x_n = \frac{-2n-2}{2n}$ y realizamos los procedimientos algebraicos correspondientes para simplificarla con el fin de estudiar el resultado de utilizar n=-2k+1

$$x_n = \frac{-2(-2k+1)-2}{2(-2k+1)} = \frac{4k-2-2}{-4k+2} = \frac{4k-4}{-4k+2} = \frac{2(2k-2)}{2(-2k+1)} \to x_n = \frac{2k-2}{-2k+1} \text{ con } k \neq 0$$

Luego de haber obtenido estas expresiones, pasemos en limpio lo que hemos obtenido y analicemos que significa:

Expresión	**Expresión**	**k**	**Resultado**	**Rango de la solució**

Par>0	n=2k	$x_n = \dfrac{-k-1}{2k}$	10000	-1,0001	$(-2,0)$
Impar>0	n=2k+1	$x_n = \dfrac{-2k-2}{2k+1}$	33553	-1,000014902	$(-2,0)$
Par<0	n=-2k	$x_n = \dfrac{2k-1}{-2k}$	-20004	-1,00004999	$(-2,0)$
Impar<0	n=-2k+1	$x_n = \dfrac{2k-2}{-2k+1}$	-17153	-1,000029149	$(-2,0)$

Tras lo resumido en la tabla anterior vemos que sea cual sea el numero entero n que elijamos la expresión $x_n = \dfrac{-2n-2}{2n}$ tiene un desarrollo decimal (es decir que pertenece a los números racionales) comprendido entre -2 y 0

Uso de ejemplos para probar algo verdadero?

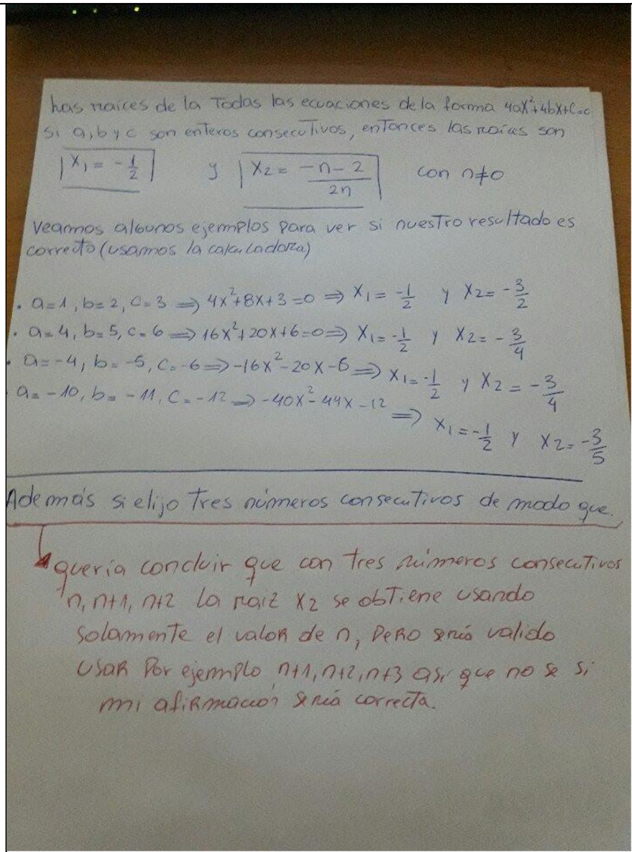
- b) Explicar, mostrando comprensión (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	Explicación de la definición: <u>Aclaración:</u> Esta definición de forma hablada la di a un curso de 4to año y la estructura que usare es exactamente la misma que utilice para dialogar con mis alumnos con la cual posteriormente a la clase verifique que sirvió para la comprensión de dicha definición. Serios problemas de redacción. “Ustedes trabajaron con este tipo ecuaciones (**se escriben el pizarrón algunos ejemplos de ecuaciones de grado 1)**. Estas ecuaciones se llaman ecuaciones de grado 1 o lineales por que la incógnita x tiene una potencia 1, la cual no se escribe nunca (**momento en el que se inicia una explicación sobre por que $x^1=x$ y se dicen ecuaciones lineales**), ahora vamos a trabajar con ecuaciones donde la incógnita x esta elevada al cuadrado (**se escribe un ejemplo en el pizarrón, como es el caso de:** $2x^2-6x+2$ no es una ecuación y luego otros ejemplos similares). Estas ecuaciones se llaman ecuaciones cuadráticas o de grado 2 (**volvemos a repetir que esto es por que la incógnita esta elevada al cuadrado**). Pregunta: **¿Cómo se escribiría en general una ecuación así?** Como se pueden ver en estos ejemplos tenemos tres términos (**en general pero podemos tener menos: mostramos casos donde falten términos**): un número por x^2 más o menos por otro numero por x más o menos un número sin incógnita. Escribamos ahora la definición de una ecuación cuadrática”. Inconclusa. No hace referencia a la restricción del coeficiente principal.	**Mostrar ejemplos para explicar.** **Explicar como sinónimo de leer/escribir en lenguaje natural lo que está en el simbólico: no explicando, solo traducción.**

			### Explicación de la demostración: En la demostración del resultado que planteamos anteriormente (se refiere a la resolución de la consigna) lo que voy a hacer es considerar que números enteros yo reemplazaría en la expresión $x_n = \frac{-2n-2}{2n}$ y que obtendría luego de realizar las cuentas correspondientes. Para esto consideramos cuatro casos: es decir el caso par si positivo y negativo y el caso impar si es positivo y negativo. Con esto voy a obtener cuatro expresiones que voy a simplificar lo que mas se pueda para que me den una expresión para el número entero elegido de forma general. Luego reemplazare un valor elegido al azar en cada expresión para ver en que intervalo se encuentran las soluciones de $x_n = \frac{-2n-2}{2n}$ si tomo distintos números enteros. Finalmente a lo que vamos a llegar es a que sea cual sea el numero entero elegido (menos el cero) el intervalo de soluciones de $x_n = \frac{-2n-2}{2n}$ estará entre -2 y 0. ### Explicación de la resolución: Para la resolución de la consigna lo primero que hice fue usar la formula resolvente como si fuera una ecuación de segundo grado cualquiera, pero en vez de usar a, b y c use los términos que incluía la consigna es decir: 4a y 4b. Luego realice operaciones algebraicas (resolver potencia, sacar factor común y simplificar) para resumir esa expresión. Obtuve una expresión para cada raíz de esa ecuación. A continuación lo que hice fue tomar tres números enteros n, n+1 y n+2 con n distinto de cero. Finalmente lo que hice fue reemplazar esos tres números en las expresiones de las raíces que yo ya había obtenido y volviendo a hacer manejos algebraicos (propiedad cancelativa, distributiva y cuadrado de un binomio) encontré como son las raíces en funciones de los números enteros consecutivos elegidos. <u>Observación 1</u>: Luego de terminar podría elegir nueceros enteros consecutivos y chequear la veracidad de mi resultado. <u>Observación 2</u>: también se podrían tomar otros números consecutivos. Por ejemplo un caso podría ser: n+1, n+2, n+3 el tema no está en cómo se llamen, sino el orden en el que se toman!	
		- c) reflexionar		
	I2 Lenguajes matemáticos (natural y simbólico), notación	- a) reproducir “algo” usando lenguajes matemáticos	En general utiliza lenguaje natural, el simbólico solo para la demostración.	

	matemática, convenciones	- b) explicar el uso del lenguaje	Trata de mostrar con palabras lo que (también con palabras) escribió en la definición.	
		- c) reflexionar		
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones propias**	**I3** Resolución de una consigna, actividad o ejercicio que **no** le resulte cognitivamente exigente.	- Usar lenguaje matemático, operar, usar propiedades, procedimientos, etc.	Selecciona notación: pienso en tres números enteros n, n+1 y n+2 (números consecutivos para todo $n \in Z_{\neq 0}$) Luego reemplazo a=n, b=n+1 y c=n+2 (con n distinto de cero) Opera correctamente. No analiza el discriminante.	
		- Explicar su resolución (lenguaje utilizado, las operaciones, propiedades utilizados, la respuesta).	Sean a, b, y c números enteros consecutivos, quiero ver como serán las raíces de todas las ecuaciones de la forma $4ax^2+4bx+c=0$. Lo primero que hago es utilizar la formula resolvente para ver que expresión tienen sus raíces. Entonces: $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ Usando los términos de la ecuación me queda: $x_{1,2}=\frac{-4b\pm\sqrt{(4b)^2-4.4ac}}{2.4a}$ Luego voy resolviendo la expresión algebraica hasta obtener la expresión correspondiente a las raíces de la ecuación:	

			$x_{1,2}=\frac{-4b\pm\sqrt{(4b)^2-4.4ac}}{2.4a}$ $x_{1,2}=\frac{-4b\pm\sqrt{16b^2-16ac}}{8a}\rightarrow$ resolvi la potencia $x_{1,2}=\frac{-4b\pm\sqrt{16(b^2-ac)}}{8a}\rightarrow$ saque el 16 de factor comun $x_{1,2}=\frac{-4b\pm\sqrt{16}.\sqrt{(b^2-ac)}}{8a}\rightarrow$ use la distributividad de la raiz y saque afuera $\sqrt{16}$ $x_{1,2}=\frac{-4b\pm 4.\sqrt{(b^2-ac)}}{8a}$ $x_{1,2}=\frac{4\left[-b\pm\sqrt{(b^2-ac)}\right]}{8a}\rightarrow$ saque el 4 de factor comun y lo simplifique con el 8 $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{(b^2-ac)}}{2a}$ Ahora nos quedan las raíces de la ecuación de la forma: NO analiza el discriminante. $x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{2a}$ y $x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{2a}$ Ahora pienso en tres números enteros n, n+1 y n+2 (números consecutivos para todo $n\in Z_{\neq 0}$) Pide n≠o pero no lo relaciona con la condición para el a! Luego reemplazo a=n, b=n+1 y c=n+2 (con n distinto de cero) en las expresiones que obtuve antes y vuelvo a operar algebraicamente: **Raíz x_1:** $x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{2a}$ $x_1=\frac{-(n+1)+\sqrt{(n+1)^2-n(n+2)}}{2n}\rightarrow$ resuelvo el cuadrado y aplico prop distributiva $x_1=\frac{-n-1+\sqrt{n^2+2n+1-n^2-2n}}{2n}\rightarrow$ aplico prop cancelativa $x_1=\frac{-n-1+\sqrt{1}}{2n}$ $x_1=\frac{-n-1+1}{2n}$ $x_1=\frac{-n}{2n}$ $x_1=\frac{-1}{2}$ **Raíz x_2:**	

			$x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{2a}$ $x_2 = \frac{-(n+1)-\sqrt{(n+1)^2-n(n+2)}}{2n} \rightarrow \text{resuelvo el cuadrado y aplico prop distributiva}$ $x_2 = \frac{-n-1-\sqrt{n^2+2n+1-n^2-2n}}{2n} \rightarrow \text{aplico prop cancelativa}$ $x_2 = \frac{-n-1-\sqrt{1}}{2n}$ $x_2 = \frac{-n-1-1}{2n}$ $x_2 = \frac{-n-2}{2n}$ Finalmente las raíces de todas las ecuaciones de la forma $4ax^2+4bx+c=0$ con a, b y c enteros consecutivos (donde a=n, b=n+1 y c=n+2): son de la forma: $x_1 = \frac{-1}{2}$ y $x_2 = \frac{-2-n}{2n}$ con $n \neq 0$ Si se toman tres números enteros (esto no lo incluyo en esta resolución) consecutivos vemos que sus raíces dan de la forma que me quedo en la resolución. Podemos además concluir (ver demostración) que x_2 Queda inconclusa. En el borrador está escrito lo mismo, salvo el final en el que verifica lo encontrado utilizando ejemplos:	

			 Las raíces de la Todas las ecuaciones de la forma $4aX^2+4bX+c=0$ si a, b y c son enteros consecutivos, entonces las raíces son $\boxed{X_1=-\frac{1}{2}}$ y $\boxed{X_2=\frac{-n-2}{2n}}$ con $n\neq 0$ Veamos algunos ejemplos para ver si nuestro resultado es correcto (usamos la calculadora) · $a=1, b=2, c=3 \Rightarrow 4x^2+8x+3=0 \Rightarrow X_1=-\frac{1}{2}$ y $X_2=-\frac{3}{2}$ · $a=4, b=5, c=6 \Rightarrow 16x^2+20x+6=0 \Rightarrow X_1=-\frac{1}{2}$ y $X_2=-\frac{3}{4}$ · $a=-4, b=-5, c=-6 \Rightarrow -16x^2-20x-6 \Rightarrow X_1=-\frac{1}{2}$ y $X_2=-\frac{3}{4}$ $a=-10, b=-11, c=-12 \Rightarrow -40x^2-44x-12 \Rightarrow X_1=-\frac{1}{2}$ y $X_2=-\frac{3}{5}$ Además si elijo tres números consecutivos de modo que. quería concluir que con tres números consecutivos n, n+1, n+2 la raíz X_2 se obtiene usando solamente el valor de n, pero sería válido usar por ejemplo n+1, n+2, n+3 así que no sé si mi afirmación sería correcta. Nota: en esta ultima hoja hay un error de escritura, seria: "*usando solamente el valor de n, pero* ***no seria valido"***	
		- reflexionar sobre: lo que significa "usar una propiedad" (que se deben chequear hipótesis), reconocer qué propiedades/métodos/reglas/teoremas son factibles de ser usados ante cada consigna que se aborde y según la	Considero que es valido el resultado que utilice porque en primer lugar lo demostré correctamente. En segundo lugar, por que aparte utilice una hoja de cálculo donde utilice muchos ejemplos y todos los resultados caían en el intervalo (-2,0). Como esto lo que queremos decir es que una de las raíces de la familia de ecuaciones de la forma $4ax^2+4bx+c=0$ necesariamente va a estar entre -2 y 0. La única restricción que encontré para este resultado es que el número entero utilizado no puede ser cero no se desprende de las hipótesis? Porque no lo considera! y si o si tiene que ser entero. La utilidad de este resultado reside en que yo estoy diciendo como va a ser una de las soluciones de la ecuación cuadrática pero además estoy diciendo, al aplicar ese resultado, que la raíz esta en el intervalo (-2,0), es decir que:	**¿Qué significa utilizar un resultado?** **RESULTADO COMO RESULTADO DE LA CUENTA Y NO UNA PROPIEDAD MATEMÁTICA ☹**

		instancia de resolución que se esté atravesando; la utilidad de los métodos empleados y la pertinencia –o no- de aplicarlos en diferentes contextos, la interpretación de lo hallado para dar la respuesta, la necesidad de responder a lo pedido.	-2< $x_2 = \frac{-2-n}{2n}$ <0 para todo n distinto de cero Esta resolución esta incorrecta. El alumno interpretó “resultado” como “resultado de la cuenta”, así que basó su trabajo en esa idea.	
	I4 Resolución de tareas intelectualmente exigentes (demostrar una proposición no vista, resolver un “problema”, modelizar).	- Usar	En este caso no corresponde el I4	
		- Explicar		
		- reflexionar		

<table>
<tr><th colspan="2">DESCRIPTOR</th><th>EXPLICACIÓN</th><th>EVIDENCIAS DE A15</th><th>EN SÍNTESIS…</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Conocimiento del contenido matemático ante producciones ajenas correctas matemáticamente</td><td rowspan="2">I1
Definiciones de conceptos, reglas, propiedades, enunciados de teoremas, procedimientos, demostraciones de resultados, ejercicios resueltos</td><td>- a) Reproducir (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)</td><td>Conceptos Matemáticos trabajados: Los conceptos matemáticos que se trabajan en esta consigna son: ecuaciones, ecuación cuadrática e inecuaciones

Enunciado de definición: <u>Ecuación:</u> Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas, denominadas miembros de la ecuación. Estos miembros se relacionan a través de operaciones matemáticas, números y letras utilizadas como incógnita.

Enunciado de Propiedad/resultado utilizado: Para hallar las raíces de una ecuación cuadrática de la forma ax²+bx+c se puede utilizar la fórmula resolvente. La fórmula es:
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
El análisis de la expresión b^2-4ac que aparece en ellas permite discriminar la cantidad de raíces reales que tiene la ecuación. Si $b^2-4ac=0$ la ecuación tiene una sola raíz, si $b^2-4ac>0$ tiene dos raíces reales distintas y si $b^2-4ac<0$ no tiene ninguna raíz.

Demostración de la propiedad:
Sea la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$ no considera restricción para el valor de a.
Como la expresión cuadrática ax^2+bx+c tiene grado 2, es irreducible si y solo si tiene un factor en los reales de grado 1, que podemos asumir Mónico de la forma X-x con x perteneciente a los reales. Así que en este caso la ecuación es reducible en los reales si y solo si la ecuación tiene una raíz real.
Luego
$ax^2+bx+c = a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}) = a((x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}) = a((x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2})$ (no considera restricción para poder hacer la cuenta)
El discriminante de la ecuación es $\Delta= b^2-4ac$
Si existe w Є reales tal que $w^2=\Delta$, se tiene que
$ax^2+bx+c = a((x+\frac{b}{2a})^2-(\frac{w}{2a})^2) = a(x-\frac{-b+w}{2a})\, a(x-\frac{-b-w}{2a})$
y por lo tanto las raíces serán
$X_1= a(x-\frac{-b+w}{2a})$
$X_2= a(x-\frac{-b-w}{2a})$
Entonces? La pregunta sería si entendió qué hizo y si considera que así quedó cerrada.</td><td>¿Qué es una definición?

Definición de ecuación

Imprecisión de escritura en definiciones/propiedades.

Copia la demostración pero no considera la restricción: copió mal o de un lugar que no la consideraba? La cosa es que ella tampoco se aviva!</td></tr>
<tr><td>- b) Explicar, mostrando comprensión (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)</td><td>Explicación de la definición:
En una ecuación están igualadas dos expresiones algebraicas. Nos referimos con expresiones algebraicas a la combinación de letras y números, en donde las letras representan a la incógnita o variable. Estas expresiones de la ecuación se relacionan a través de ciertas operaciones.
La explicación intenta aclarar lo definido, pero termina repitiendo lo mismo.

Explicación de la demostración:</td><td>La explicación repite la definición (que como estaba escrita en lenguaje natural, era como una explicación)</td></tr>
</table>

		- c) reflexionar		
	I2 Lenguajes matemáticos (natural y simbólico), notación matemática, convenciones	- a) reproducir "algo" usando lenguajes matemáticos	Puede explicar en lenguaje natural pero escribe de forma imprecisa lo relacionado a lenguaje simbólico: ver problemas con definición de ecuación/expresión/función.	
		- b) explicar el uso del lenguaje	Lo que hace en la explicación es repetir lo que mencionó en la definición: no intenta explicar lo que anotó antes, repite frases.	**Al definir utilizando lenguaje natural, la explicación termina siendo una repetición de la definición (no hace aclaración extra para mostrar qué quiso decir en la definición).**
		- c) reflexionar		
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones propias**	**I3** Resolución de una consigna, actividad o ejercicio que **no** le resulte cognitivamente exigente.	- Usar lenguaje matemático, operar, usar propiedades, procedimientos, etc.	Define notación: $a = n, b = n + 1$ y $c = n + 2$ con n entero de manera imprecisa. No considera restricción para el valor de n. Opera correctamente. No analiza discriminante aunque lo haya mencionado en la definición.	
		- Explicar su resolución (lenguaje utilizado, las operaciones, propiedades utilizados, la respuesta).	Resolución experta "pasada en limpio" Si a, b y c son enteros consecutivos, hallamos las raíces de todas las ecuaciones cuadráticas $4ax^2 + 4bx + c = 0$. Para hallarlas utilizaremos la fórmula resolvente: no atiende a la restricción para el coeficiente principal. $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Entonces, tenemos que $a = 4a,\ b = 4b$ y $c = c$. Reemplazándolo en la fórmula obtenemos: $x = \frac{-4b\pm\sqrt{(4b)^2-4.4ac}}{2.4a} = \frac{-4b\pm\sqrt{16b^2-16ac}}{8a} = \frac{-4b\pm\sqrt{16}\sqrt{b^2-ac}}{8a} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{2a}$ Como a, b y c son enteros consecutivos. Entonces $a = n, b = n + 1$ y $c = n + 2$ con n entero. Por lo que sus raíces serán de la forma:	**No utilizan el discriminante para decir una característica de las raíces.** **Llegan a la respuesta utilizando cuentas.**

$x = \frac{-(n+1)\pm\sqrt{(n+1)^2-\text{n}.(\text{n}+2)}}{2n} = \frac{-(n+1)\pm\sqrt{n^2+2\text{n}+1-n^2-2\text{n}}}{2n} = \frac{-(n+1)\pm 1}{2n}$ entonces obtenemos las raíces $x = \frac{-n-2}{2n}$ y $x = -\frac{1}{2}$

Notemos que la raíz $x = -\frac{1}{2}$ no depende de los valores de n. Y para $x = \frac{-n-2}{2n}$ debemos encontrar los valores de n en los que la raíz sea positiva, negativa o cero. Para esto, resolvemos las inecuaciones $\frac{-n-2}{2n} > 0$ y $\frac{-n-2}{2n} < 0$. Y la ecuación $\frac{-n-2}{2n} = 0$.

Primero calculamos $\frac{-n-2}{2n} = 0$

$\frac{-n-2}{2n} = 0 \leftrightarrow -n-2 = 0 \leftrightarrow n = -2$. Entonces para $n = -2$, la raíz es $x = 0$

Luego calculamos $\frac{-n-2}{2n} > 0$

Por lo que tenemos $\begin{cases} -n-2 > 0 \\ 2n > 0 \end{cases}$ o $\begin{cases} -n-2 < 0 \\ 2n < 0 \end{cases}$

Luego de resolver las inecuaciones, obtenemos que para todo n Є (-2,0) la raíz $x = \frac{-n-2}{2n}$ es positiva.

Ahora calculamos $\frac{-n-2}{2n} < 0$

Por lo que tenemos $\begin{cases} -n-2 < 0 \\ 2n > 0 \end{cases}$ o $\begin{cases} -n-2 > 0 \\ 2n < 0 \end{cases}$

Resolviendo las ecuaciones obtenemos que para todo n Є (-∞,-2)υ(0,+∞) la raíz $x = \frac{-n-2}{2n}$ es negativa.

Las raíces de la ecuación $4ax^2 + 4bx + c = 0$ con a, b, c enteros consecutivos son:

$X = -\frac{1}{2}$ y $x = \frac{-n-2}{2n} = 0$ si $n = -2$

$X = -\frac{1}{2}$ y $x = \frac{-n-2}{2n} > 0$ si n Є (-2,0)

$X = -\frac{1}{2}$ y $x = \frac{-n-2}{2n} < 0$ si n Є (-∞,-2)υ(0,+∞)

Por otro lado, observamos que $a = n$ por lo tanto si la raíz depende de n, dependerá del valor de a. Esto indica que las raíces dependerán del valor que tome el coeficiente a de la cuadrática $4ax^2 + 4bx + c = 0$.

No consideran a=n=0 como caso que no va a suceder, les queda excluido de la respuesta por el análisis de la inecuación.

De hecho, analiza en n=-2 pero no en n=0 (viendo la respuesta)

Anexo: lo que muestra en su manuscrito es lo mismo que aparece como resolución experta, quizás menos detallado.

Explicación a un compañero de la resolución:

Para hallar las raíces de la ecuación $4ax^2 + 4bx + c = 0$ con a, b, c enteros consecutivos lo primero que hacemos es usar la fórmula resolvente para una ecuación cuadrática. La fórmula resolvente tiene la forma $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ donde a=4a, b=4b y c=c. Luego reemplazando en la fórmula y haciendo cálculos obtenemos $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{2a}$ y como a, b y c sabíamos que son consecutivos llamamos $a = n$, $b = n+1$ y $c = n+2$. Reemplazando esto último en la formula obtenida $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{2a}$ tenemos que las raíces son $\frac{-n-2}{2n}$ y$-\frac{1}{2}$.

¿Qué es explicar una resolución?
En este caso, es contar lo mismo de la resolución sin el detalle de los pasos (cálculos algebraicos). O sea, es como tomar la resolución y borrar las cuentas.

			Vemos que la raíz $\frac{-n-2}{2n}$ depende de los valores que tome n. Entonces queremos encontrar los valores de n para los cuales $\frac{-n-2}{2n} > 0$, $\frac{-n-2}{2n} < 0$ y $\frac{-n-2}{2n} = 0$. Y de este modo encontrar las raíces. Luego, resolvemos las ecuaciones e inecuaciones y hallamos los valores de n para los cuales la raíz es positiva, negativa o cero. La explicación es un resumen de todos los pasos realizados (resumen porque no incluye el detalle de las cuentas)	
		- reflexionar sobre: lo que significa "usar una propiedad" (que se deben chequear hipótesis), reconocer qué propiedades/métodos/reglas/teoremas son factibles de ser usados ante cada consigna que se aborde y según la instancia de resolución que se esté atravesando; la utilidad de los métodos empleados y la pertinencia –o no- de aplicarlos en diferentes contextos, la interpretación de lo hallado para dar la respuesta, la necesidad de responder a lo pedido.	Tengo la certeza de que se puede usar la fórmula resolvente dado que se utiliza para hallar las raíces de una ecuación cuadrática. Esta fórmula ayuda a poder analizar las raíces que tengan ya sean positivas, negativas o cero, para los valores que tome n o dependiendo de los coeficientes de la ecuación. Aunque quizás no sea la única forma de resolver esta ecuación o de analizar las raíces. No considera restricción para el coeficiente principal. Reconoce que puede utilizar la fórmula por el formato de la ecuación. La última oración, ¿a qué se refiere? (No sé si quiere hacer notar que sabe que hay otras o solo abre el paraguas por si no está considerando algo)	
	I4 Resolución de tareas intelectualmente exigentes (demostrar una proposición no vista, resolver un "problema", modelizar).	- Usar	En este caso no corresponde el I4	
		- Explicar		
		- reflexionar		

DESCRIPTOR		EXPLICACIÓN	EVIDENCIAS DE A16	EN SÍNTESIS…
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones ajenas correctas matemáticamente**	**I1** Definiciones de conceptos, reglas, propiedades, enunciados de teoremas, procedimientos, demostraciones de resultados, ejercicios resueltos	- a) Reproducir (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	Conceptos Matemáticos trabajados: En esta actividad, en la consigna dada se están trabajando se trabaja el concepto matemático de ecuación de grado 2 en forma polinomica y cálculo de raíces/ soluciones de la ecuación de forma algebraica. Enunciado de definición: <u>*Ecuación de grado 2 (ecuación cuadrática)*</u> *Es una ecuación que tiene la forma de una suma algebraica de términos, cuyo grado máximo es 2 y puede ser representada por un polinomio cuadrático. Su expresión general es:* $aX^2 + bX + c$ ver cómo es la forma general de una ecuación!!! Confusión con expresión. No menciona restricción del coeficiente principal. ***a= coeficiente cuadrático*** ***b= coeficiente lineal*** ***c= termino independiente*** Enunciado de Propiedad/resultado utilizado: Un concepto importante que utilice para resolver la consiga es la ***fórmula resolvente***. **<u>Definición:</u>** *Las ecuaciones de segundo grado se resuelven aplicando la siguiente formula:* sigue sin mencionar a≠0. $X_{1,2} = \frac{-b +- (b^2 - 4ac)^{1/2}}{2*a}$ *Se denomina discriminante a la expresión* b^2*-4ac. Las ecuaciones de segundo grado o cuadráticas, pueden tener una solución doble, dos soluciones* *menciona raíz doble pero no aclara que las dos soluciones que menciona son distintas!!!* *o no tener soluciones* *reales**, eso depende del valor del discriminante.* *Si* b^2*-4ac > 0, hay dos soluciones* *reales distintas* *Si* b^2*-4ac = 0, hay una solución doble.* *Si* b^2*-4ac < 0, no hay soluciones en el conjunto de los reales.* Demostración de la propiedad: El objetivo es convertir el polinomio $aX^2 + bX + c$ en un cuadrado perfecto. Tenemos $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$. Multiplico a ambos lados **4a**. Entones queda, $\mathbf{4a^2X^2 + 4abX + 4ac = 0}$ Ahora sumo a ambos lados $\mathbf{b^2}$. Y obtengo, $\mathbf{4a^2X^2 + 4abX + 4ac + b^2 = b^2}$ Paso a **4ac** al miembro derecho y ya tengo un cuadrado perfecto en el miembro izquierdo, es decir, $\mathbf{4a^2X^2 + 4abX + b^2 = b^2 - 4ac}$ $\mathbf{(2aX)^2 + 2*2aXb + b^2 = b^2 - 4ac}$ $\mathbf{(2aX + b)^2 = b^2 - 4ac}$ Elimino el cuadrado de la izquierda, $\mathbf{2aX + b = +- (b^2 - 4ac)^{1/2}}$ Ver cómo realizó estos despejes. ¿Sabe que significa lo amarillo? Despejo X y obtengo, $X_{1,2} = \frac{-b +- (b^2 - 4ac)^{1/2}}{}$	**Definición de ecuación utilizando "grado", no sabemos si está definido.** **Definición desde el sentido común.**

			2*a Problemas de definición de la ecuación, desarrollo escueto y mal tipeado.	
		- b) Explicar, mostrando comprensión (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	Explicación de la definición: Esta definición introduce las ecuaciones de grado 2, en una qué otra forma hay? A qué se refiere con "forma"? de sus formas, en este caso la polinomica Confusión función/ecuación!. Como menciona la definición, se trata de una suma de términos donde el mayor grado que acompaña a la variable X es 2 y su forma polinomica es esa (señalando el pizarrón). En la misma observamos que tiene coeficientes, es decir son números que ya van a estar dados por eso decimos que son constantes ¿coeficientes como sinónimo de constantes?, no van a variar. Por un lado, tenemos el coeficiente "a" llamado coeficiente cuadrático que es el numerito que siempre va a acompañar a las variables X elevadas al cuadrado no menciona restricción/hipótesis, luego sigue el termino con coeficiente "b" denominado coeficiente lineal porque es el que acompaña a X elevado a la uno, es decir de la forma lineal, y por ultimo está el termino independiente "c" es aquel que no está acompañado por ninguna variable, se dice que es una constante. A este tipo de funciones se las puede analizar de igual manera que las lineales, podemos graficarlas, hallar su solución, calcular raíces, etc. Más adelante, podremos ver que al interpretarla como una función cuadrática, su grafico es una parábola (mostrar en el pizarrón un dibujo) y para hallar sus raíces utilizaremos una formula. Explicación confusa.	**La explicación empeora la definición: confusión entre el concepto de función y de ecuación, entre el concepto de coeficiente y de constante.**
		- c) reflexionar		
	I2 Lenguajes matemáticos (natural y simbólico), notación matemática, convenciones	- a) reproducir "algo" usando lenguajes matemáticos	Usa lenguaje natural en mayor medida. El simbólico lo utiliza en la resolución. Al no utilizar editor de ecuaciones, se le dificulta escribir en lenguaje simbólico. La única diferencia entre la definición y su explicación, es que en la última está escrito lo mismo pero con palabras (sin usar símbolos)	
		- b) explicar el uso del lenguaje	No explica el uso del lenguaje sino que traduce de símbolos a palabras.	**Traducción "literal" de símbolos a palabras, no interpretación.**

		- c) reflexionar		
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones propias**		- Usar lenguaje matemático, operar, usar propiedades, procedimientos, etc.	Selecciona notación: a= n, b =n+1 y c=n+2 de manera imprecisa. No aclara que hay otras posibilidades de elegir a los consecutivos (orden). Opera correctamente. No utiliza el discriminante en el desarrollo a pesar de tenerlo definido y mencionado en su trabajo.	**Define y utiliza el discriminante para responder las preguntas pero no para la resolución.**
	I3 Resolución de una consigna, actividad o ejercicio que **no** le resulte cognitivamente exigente.	- Explicar su resolución (lenguaje utilizado, las operaciones, propiedades utilizados, la respuesta).	Resolución experta "pasada en limpio": Con a, b y c consecutivos tengo que: a= n, b =n+1 y c=n+2 No menciona $a=n\neq 0$. Dada la ecuación: $4ax^2 + 4bx + c = 0$, reemplazo los datos de las constantes. Entonces queda; $4(n)\,x^2 + 4(n+1)\,x + (n+2) = 0$ y para hallar las raíces aplico la formula resolvente. Es decir; $X_{1,2} = \dfrac{-b \pm (b^2 - 4ac)^{1/2}}{2a}$ $X_{1,2} = \dfrac{-(4(n+1)) \pm ((4(n+1))^2 - 4((4n)(n+2)))^{1/2}}{2(4n)}$ $X_{1,2} = \dfrac{-(4n+4) \pm (4^2(n+1)^2 - (16n)(n+2))^{1/2}}{8n}$ $X_{1,2} = \dfrac{-(4n+4) \pm (16(n^2+2n+1) - (16n^2+32n))^{1/2}}{8n}$ $X_{1,2} = \dfrac{-(4n+4) \pm (16n^2+32n+16) - 16n^2-32n)^{1/2}}{8n}$ $X_{1,2} = \dfrac{-(4n+4) \pm (16)^{1/2}}{8n}$ $X_{1,2} = \dfrac{-(4n+4) \pm (4)}{8n} = \quad X_1 = \dfrac{-4n-4+4}{8n} = \dfrac{4n}{8n} = 1/2$ $X_2 = \dfrac{-4n-4-4}{8n} = -\dfrac{(n+2)}{4n} = -a/4c$ Operatoria correcta, no da una respuesta a la consigna (lo deja en el resultado de la cuenta). Aplica la resolvente sin haber considerado restricción para el valor de a.	

La explicación en l ahoja borrador tiene el mismo desarrollo.

Explicación a un compañero:

Si a, b y c consecutivos (recordar su definición de consecutivos de números enteros n, n+1…) no define números enteros los puedo escribir de la forma: a= n, b =n+1 y c=n+2
Dada la ecuación: $4ax^2 + 4bx + c = 0$, (recordar que las ¿ecuaciones? cuadráticas polinomicas son de la forma $ax^2 + bx + c$) reemplazo los datos de las constantes.
Entonces queda; $4(n)x^2 + 4(n+1)x + (n+2) = 0$ (tener en cuenta que acá, a= 4n, b= 4 (n+1) y c= (n+2)) y para hallar las raíces aplico la formula resolvente (ya que esta en polinomica, aplico directamente la formula) No considera que a y n no pueden valer 0!. Es decir;

$$X_{1,2} = \frac{-b \pm (b^2 - 4ac)^{1/2}}{2*a}$$

Reemplazo los valores que halle a lo último: a= 4n, b= 4 (n+1) y c= (n+2). Despejo!! ¿qué cosa? Solo aplica fórmula!

$$X_{1,2} = \frac{-(4(n+1)) \pm ((4(n+1))^2 - 4((4n)(n+2)))^{1/2}}{2(4n)}$$

$$X_{1,2} = \frac{-(4n+4) \pm (4^2(n+1)^2 - (16n)(n+2))^{1/2}}{8n}$$

$$X_{1,2} = \frac{-(4n+4) \pm (16(n^2+2n+1) - (16n^2+32n))^{1/2}}{8n}$$

$$X_{1,2} = \frac{-(4n+4) \pm (16n^2+32n+16) - 16n^2-32n)^{1/2}}{8n}$$

$$X_{1,2} = \frac{-(4n+4) \pm (16)^{1/2}}{8n}$$

$$X_{1,2} = \frac{-(4n+4) \pm (4)}{8n} = \qquad X_1 = \frac{-4n-4+4}{8n} = \frac{-4n}{8n} = -1/2$$

X_1 Observar que en este caso no depende de ningún parámetro, siempre va a dar -1/2.

.

$$X_2 = \frac{-4n-4-4}{8n} = \frac{-(n+2)}{4n} = -a/4c$$

X_2 Observar que depende de a y c, ya que los parámetros a=n y c=(n+2)
En conclusión, todas las raíces de la ecuación cuadrática de la forma $4ax^2 + 4bx + c = 0$ con a, b y c consecutivos van a tener la forma de X = -1/2 y X= -a/4c
Lo que está en rojo son las aclaraciones que haría a un compañero que viera mi resolución y no entienda ciertos pasos.

Según la alumna, la respuesta a la consigna está incluida en una explicación y no como final de la resolución.

En la explicación se incluye una respuesta formal a la consigna… de la resolución entonces debería "leerse de lo obtenido" porque no está!

		- reflexionar sobre: lo que significa "usar una propiedad" (que se deben chequear hipótesis), reconocer qué propiedades/métodos/reglas/teoremas son factibles de ser usados ante cada consigna que se aborde y según la instancia de resolución que se esté atravesando; la utilidad de los métodos empleados y la pertinencia –o no- de aplicarlos en diferentes contextos, la interpretación de lo hallado para dar la respuesta, la necesidad de responder a lo pedido.	Creo que esta fórmula es aplicable, porque es una de las maneras más eficientes de hallar las raíces / soluciones de la ecuación cuadrática en su forma polinomica sea cuales fueran sus coeficientes cuadráticos, lineales o independientes. Sabemos que con números concretos es directo y fácil, pero en esta consigna vimos que de manera algebraica resulta igual su aplicación. Considera que puede aplicar la resolvente por el tipo/formato de la ecuación, no considera restricción para el coeficiente principal. ¿cuáles podrían ser otras formas de resolverla?	**Posibilidad de aplicar la fórmula resolvente por el formato de la ecuación, no considera restricción para el coeficiente principal.**
	I4 Resolución de tareas intelectualmente exigentes (demostrar una proposición no vista, resolver un "problema", modelizar).	- Usar	En este caso no corresponde el I4	
		- Explicar		
		- reflexionar		

DESCRIPTOR		**EXPLICACIÓN**	**EVIDENCIAS DE A17**	**EN SÍNTESIS…**
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones ajenas correctas matemáticamente**	**I1** Definiciones de conceptos, reglas, propiedades, enunciados de teoremas, procedimientos, demostraciones de resultados, ejercicios resueltos	- a) Reproducir (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	Conceptos Matemáticos trabajados: En la consigna se trabajó los siguientes conceptos: • Raíces de una ecuación cuadrática • Concepto de limite • Inecuaciones y conjuntos de solución Enunciado de definición: **<u>Raíces de una ecuación cuadrática</u>:** *Definición: Sea* $p(x) = ax^2 + bx + c$ *un polinomio de grado 2 en* $\mathbb{R}$*, con* $x_o \in \mathbb{R}$*. Si* $p(x_o) = 0$*, se dice que* x_o *es una raíz de* $p(x)$. Impreciso: falta decir qué sabe de los coeficientes (no alcanza decir "en R") Ver qué pasa con implicación/doble implicación. Enunciado de Propiedad/resultado utilizado: Las ecuaciones de segundo grado se resuelven aplicando la siguiente fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ Sigue sin considerar que a≠0. Se denomina discriminante a la expresión: $b^2 - 4ac$ Las ecuaciones de segundo grado o cuadráticas pueden tener una solución doble, dos soluciones reales distintas o no tener solución, eso depende del valor que tenga el discriminante: • Si $b^2 - 4ac > 0$, hay dos soluciones reales distintas. • Si $b^2 - 4ac = 0$, hay una solución doble o dos iguales. • Si $b^2 - 4ac < 0$, no hay solución en el conjunto de los números reales Demostración de la propiedad: Habíamos comenzado el tema intentando hallar el valor de x para la siguiente ecuación: $ax^2 + bx + c = 0$ Vamos a intentar despejar el valor de x haciendo uso varias propiedades, por ejemplo voy a comenzar dividiendo a todo por a, esto ya me restringe que l valor de a no puede ser cero $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ La restricción del valor para a aparece cuando lo necesita en la cuenta, no como una definición. Ahora vamos a agregar términos tal que podamos formar un cuadrado perfecto y agrupamos $x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{a}\right)^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$ $\left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$ $\left[x + \frac{b}{2a}\right]^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$ Teniendo la ecuación con este formato podemos despejar x $\left[x + \frac{b}{2a}\right]^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$	**Ponen "2 soluciones" sin aclarar que son distintas.**

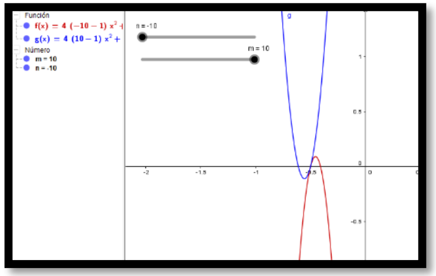
			$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}}=\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{4ac}{a^2}}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ Despejamos x: $x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ Así obtenemos nuestra fórmula resolvente. La operatoria es correcta.	
		- b) Explicar, mostrando comprensión (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	Explicación de la definición: Las raíces de una función, en este caso una cuadrática, son todos los valores llamémosle x_o para los cuales evaluadas en la función cuadrática me dan cero, es decir: $p(x_o)=ax_o{}^2+bx_o+c=0$ Recordar que a, b y c son números y al evaluar x_o en $p(x)$, lo que hacemos es trabajar una operación combinada cuyo resultado sabemos de antemano es cero. Veámoslo con un ejemplo, si tengo la siguiente cuadrática $p(x)=x^2-3x-10$ y me piden hallar las raíces, lo que tengo que hacer es plantear una ecuación: $x^2-3x-10=0$ Entonces debo hallar un valor de x que al evaluarlo en $x^2-3x-10$ tiene que dar cero, por ejemplo elijo un número como el 2 y reemplazo $p(x=2)=2^2-3.2-10=-12$ Para $x=2$ no me dio cero entonces 2 no es raíz de $p(x)$. Ahora pruebo con $x=5$ $p(x=5)=5^2-3.5-10=0$ Para este valor si me dió cero, entonces digo que $x=5$ es una raíz de $p(x)$. Nuestra motivación para este tema es como saber que número es raíz o no y lo veremos dentro de poco. Bien ejemplificado.	**Explicación de la definición: intenta explicar más explícito qué significa lo que puso (que $p(x_0)=0$)** **Uso de ejemplos para explicar.**
		- c) reflexionar		
	I2 Lenguajes matemáticos (natural y simbólico), notación matemática, convenciones	- a) reproducir "algo" usando lenguajes matemáticos	Utiliza lenguaje simbólico en la mayoría del trabajo, explica utilizando lenguaje natural.	
		- b) explicar el uso del lenguaje	En la explicación de la definición se ve una intención por aclarar qué significa lo escrito de manera simbólica.	

<table>
<tr><td></td><td></td><td>- c) reflexionar</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Conocimiento del contenido matemático ante producciones propias</td><td rowspan="2">I3
Resolución de una consigna, actividad o ejercicio que no le resulte cognitivamente exigente.</td><td>- Usar lenguaje matemático, operar, usar propiedades, procedimientos, etc.</td><td>Selecciona notación: $a = n-1, \quad b = n, \quad c = n+1$ de manera imprecisa.
No considera restricción para n por la definición de ecuación cuadrática.

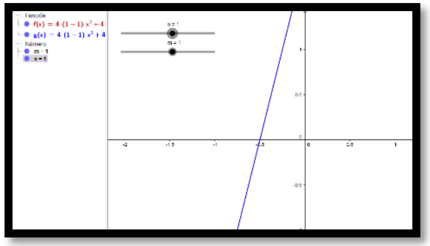
Opera corrcectamente.

No considera el análisis del discriminantes que mencionó en la definición. De hecho, hace una análisis de las soluciones que obtiene que podría haberse relacionado con eso.</td><td></td></tr>
<tr><td>- Explicar su resolución (lenguaje utilizado, las operaciones, propiedades utilizados, la respuesta).</td><td>Para empezar a resolver la consigna vamos simplificar la ecuación, para ello vamos a sacar factor común el 4 y pasamos a dividir al 0 $p(x) = 4\left(ax^2 + bx + \frac{c}{4}\right) = 0 \rightarrow ax^2 + bx + \frac{c}{4} = 0$
De esta manera nos queda simplificada la cuadrática y usamos la resolvente en esta nueva ecuación:
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{2a} \quad (1)$
Para la elección de los tres números consecutivos vamos a considerar $a < b < c$, con no considera otro orden!
$a = n-1, \quad b = n, \quad c = n+1 \quad \rightarrow \quad p(x) = (n-1)x^2 + nx + \frac{(n+1)}{4}$
Reemplazamos en (1):
$$x_{1,2} = \frac{-n \pm \sqrt{n^2 - (n-1)(n+1)}}{2(n-1)} = \frac{-n \pm \sqrt{n^2 - n^2 + 1}}{2(n-1)} = \frac{-n \pm 1}{2(n-1)}$$
Hallamos las raíces:
$$\boxed{x_1 = \frac{-n+1}{2(n-1)} = \frac{-(n-1)}{2(n-1)} = -\frac{1}{2}, \qquad x_2 = \frac{-n-1}{2(n-1)} = \frac{-(n+1)}{2(n-1)}}$$
Una de las raíces es una constante y el otro depende del valor de n que no puede valer 1 sino tendríamos una lineal
$4x + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -\frac{1}{2}$ Debería haberlo considerado antes!
Tenemos una raíz que es fija, vamos a ver cómo se comporta la otra raíz en los valores límites
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-(n+1)}{2(n-1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-n(1+1/n)}{2n(1-1/n)} = -\frac{1}{2}$$
$$\lim_{n\to-\infty} \frac{-(n+1)}{2(n-1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-n(1+1/n)}{2n(1-1/n)} = -\frac{1}{2}$$
$$\lim_{n\to1^+} \frac{-(n+1)}{2(n-1)} = \lim_{n\to1^+} = \frac{-(2)}{2.0^+} = -\infty$$
$$\lim_{n\to1^-} \frac{-(n+1)}{2(n-1)} = \lim_{n\to1^+} = \frac{-(2)}{2.0^-} = \infty$$</td><td></td></tr>
</table>

Es decir que cuando tiende a infinito ya sea negativo o positivo, la segunda raíz tiende a -1/2 por lo que las raíces están muy próximas hasta casi juntarse en -1/2, la parábola se hace muy cerrada haciéndose casi raíz única. ¿y lo logra? Debería poder responder esto!!!



Para el caso del límite por derecha e izquierda de 1 la raíz se hace infinita, pero como vimos si llegase n a valer 1 tendríamos una recta con una sola raíz y la otra estaría en el "infinito".



La única restricción de x_2 está si $n = 1$, por lo tanto x_2 puede tomar cualquier valor sobre el eje x a excepción de 1/2 como hemos visto en el límite de los infinitos. Nos queda ver el signo que va tomando x_2 a medida que asignamos valores de n:

$$x_2 > 0$$

$$\frac{-(n+1)}{2(n-1)} > 0$$

$$\begin{cases} -(n+1) > 0 & \rightarrow \quad n < -1 \\ 2(n-1) > 0 & \rightarrow \quad n > 1 \end{cases}, \text{ no hay intersección en el conjunto de soluciones}$$

$$\begin{cases} -(n+1) < 0 & \rightarrow \quad n > -1 \\ 2(n-1) < 0 & \rightarrow \quad n < 1 \end{cases}, \text{ hay intersección en el intervalo } n \in \langle -1,1 \rangle$$

$$x_2 < 0$$

$$\frac{-(n+1)}{2(n-1)} < 0$$

$$\begin{cases} -(n+1) < 0 & \rightarrow \quad n > -1 \\ 2(n-1) > 0 & \rightarrow \quad n > 1 \end{cases}, \text{ hay intersección en el intervalo } n \in \langle 1, \infty \rangle$$

$$\begin{cases} -(n+1) > 0 & \rightarrow \quad n < -1 \\ 2(n-1) < 0 & \rightarrow \quad n < 1 \end{cases}, \text{ hay intersección en el intervalo } n \in \langle -\infty, -1 \rangle$$

$$x_2 = 0$$

$$\frac{-(n+1)}{2(n-1)} = 0$$

$$-(n+1) = 0 \rightarrow \ n = -1$$

			Entonces clasificamos las raíces de la siguiente manera Para $n = -1$ $$x_1 = -\frac{1}{2}, \qquad x_2 = 0$$ Para $n \in \langle -1,1 \rangle$ $$x_1 = -\frac{1}{2}, \qquad x_2 > 0$$ Para $n \in [\langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 1, \infty \rangle]$ $$x_1 = -\frac{1}{2}, \qquad x_2 < 0$$ Bien analizado, pero considera restricciones cuando deberían ser datos por el tema.	
		- reflexionar sobre: lo que significa "usar una propiedad" (que se deben chequear hipótesis), reconocer qué propiedades/métodos/reglas/teoremas son factibles de ser usados ante cada consigna que se aborde y según la instancia de resolución que se esté atravesando; la utilidad de los métodos empleados y la pertinencia –o no- de aplicarlos en diferentes contextos, la interpretación de lo hallado para dar la respuesta, la necesidad de responder a lo pedido.	Se puede usar la propiedad que acabamos de demostrar para la consigna pues el discriminante, para todos los valores de n, me da 1 que es mayor que cero, debemos tener cuidado cuando el valor de $n = 1$, pues esto anularía el valor de a y por lo tanto la formula resolvente no tendría sentido usarla, como condiciones durante la demostración pedimos que $a \neq 0$. Al reflexionar sobre la posibilidad de utilización de la fórmula resolvente, el alumno nota que se podría utilizar pidiendo en toda la demostración que a≠0. Sin embargo, no pudo volver a cambiarla! Tiene en cuenta el discriminante, pero no lo relaciona con la cantidad de soluciones: lo usa para hacer notar que se puede usar la fórmula.	
	I4 Resolución de tareas intelectualmente exigentes (demostrar una proposición no vista, resolver un "problema", modelizar).	- Usar	En este caso no corresponde el I4	
		- Explicar		

		- reflexionar		

DESCRIPTOR		**EXPLICACIÓN**	**EVIDENCIAS DE A18**	**EN SÍNTESIS…**
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones ajenas correctas matemáticamente**	**I1** Definiciones de conceptos, reglas, propiedades, enunciados de teoremas, procedimientos, demostraciones de resultados, ejercicios resueltos	- a) Reproducir (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	Conceptos Matemáticos trabajados: (no pudo enumerar los conceptos, pasó directo a la definición) Enunciado de definición: Se conoce como **raíz** (o **cero**) de un polinomio o de una función *f(x)* a todo elemento *x* perteneciente al dominio de dicha función tal que se cumpla que la función evaluada en el punto es cero F(x)=0. Un polinomio es una expresión matemática constituida por una suma finita de productos entre variables (*valores no determinados* o desconocidos) y constantes. El **dominio** de definición de una función $f{:}X\rightarrow Y$ se define como el conjunto *X* de todos los elementos *x* para los cuales la función *f* asocia algún *y* perteneciente al conjunto *Y* de llegada, llamado **codominio.** La **propiedad distributiva** de la multiplicación sobre la suma es aquella en la que el resultado de un número multiplicado por la suma de dos o más sumandos, es igual a la suma de los productos de cada sumando por ese número. $a.(b+c)=a.b+a.c$ Imprecisión El **cuadrado de un binomio** resulta de aplicar propiedad distributiva entre todos los términos $(a \pm b)^2 = (a \pm b).(a \pm b) = a^2 \pm 2.a.b \pm b^2$ Imprecision Las definiciones se dividen: las dos primeras copiadas y las dos que restan pensadas (o copiadas de un lugar en donde las definieron mal). Enunciado de Propiedad/resultado utilizado: Sean a, b, c números enteros consecutivos, la expresión de la forma $4ax^2+4bx+c$ tendrá raíces de la forma $(-b\pm1)/2a$ La propiedad está relacionada con la consigna a resolver, no es una propiedad matemática. Demostración de la propiedad: Aplicamos resolvente y llegamos a la forma $(-b\pm\sqrt{(b^2-ac)})/2a$ La expresión que se encuentra en el radicando puede escribirse como $(x+1)^2- x(x+2) = 1$ Las raíces entonces son de la forma $(-b\pm1)/2a$	**La demostración es un tipo de explicación, no demuestra. (considera que alcanza con lo hecho en la resolución)**

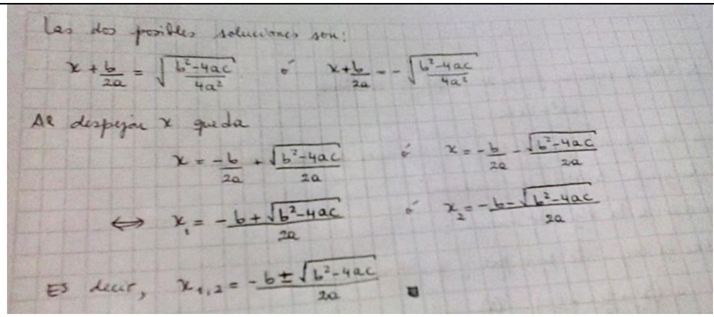
			Hace una rápida explicación, no lo demuestra.	
		- b) Explicar, mostrando comprensión (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	Explicación de la definición: Llamamos raíz de una función cuadrática a aquellos valores pertenecientes al dominio que hacen que la función valga cero. Una función cuadrática en su expresión polinómica es de la forma Ax^2+Bx+C y puede tener una dos o ninguna raíz. Para hallarlas podemos utilizar la resolvente todo esto excede a lo definido. $(-B\pm\sqrt{(B^2-4AC)})/2^a$ No plantea restricción sobre el valor de a. Por tanto una ecuación cuadrática de la forma $4ax^2+4bx+c$ tendrá A=4a, B=4b, C=c y sus raíces serán de la forma $(-b\pm 1)/2a$ por lo antes analizado. Está directamente relacionado con la consigna, funciona como ejemplo. Explicación de la demostración: la misma demostración es la explicación, no repite porque lo considera hecho en la resolución de la consigna.	**En la explicación se agrega información que excede lo definido.** **Uso de ejemplo: relacionado con la consigna.**
		- c) reflexionar		
	I2 Lenguajes matemáticos (natural y simbólico), notación matemática, convenciones	- a) reproducir "algo" usando lenguajes matemáticos	Utiliza lenguaje natural tanto en la definición como en la explicación.	
		- b) explicar el uso del lenguaje	No explica qué quiso decir en la definición, trata de decirlo con otras palabras.	**Dos tipos de "explicar" en I2: los que tratan de traducir la definición de un lenguaje a otro, y los que quieren explicarlo diciendo otras cosas y no explicando que dijo en la definición (como decir un sinónimo).**
		- c) reflexionar		

Conocimiento del contenido matemático ante **producciones propias**	**I3** Resolución de una consigna, actividad o ejercicio que **no** le resulte cognitivamente exigente.	- Usar lenguaje matemático, operar, usar propiedades, procedimientos, etc.	Selecciona notación: a=x, b=x+1, c=x+2 (de manera imprecisa) No considera hipótesis para aplicar la fórmula. Opera correctamente, usa mal la fórmula resolvente porque no verifica hipótesis. Analiza el discriminante, pero no lo usa para concluir.	**Usa mal la fórmula resolvente porque no verifica hipótesis.**
		- Explicar su resolución (lenguaje utilizado, las operaciones, propiedades utilizados, la respuesta).	Como primer paso por resolvente encuentro que $4ax^2 + 4bx + c = 0$ tiene como raíces de la forma $(-b\pm\sqrt{(b^2-4ac)})/2a$ Por otro lado, siendo a, b, c enteros positivos consecutivos se encuentra que los mismos podrían escribirse como a=x, b=x+1, c=x+2. Por tanto, las siguientes expresiones son equivalentes: $b^2-ac =(x+1)^2- x(x+2)$ Aplicando resolución de cuadrado de un binomio y propiedad distributiva encontramos que $(x+1)^2- x(x+2)= x^2+2x+1-x^2-2x = 1$ Por tanto y volviendo al análisis de la primera expresión las raíces serán de la forma $(-b\pm\sqrt{(1)})/2a = (-b\pm1)/2^a$ Analiza el discriminante para saber si puede aplicar la fórmula, no para dar respuesta a la consigna. Por ejemplo dados los consecutivos a=5, b=6, c=7 nos determina la función $20x^2+24x+7$ ver definición de ecuación. Debemos probar que sus raíces son de la forma $(-b\pm1)/2a$. Aplicando resolvente $(-24\pm\sqrt{(24^2-4.20.7)})/40 = (-24\pm\sqrt{1})40 = (-6\pm1)/10$ se verifica. No muestra por qué. Por otro lado podemos afirmar que la raíz de la forma $(-b+1)/2.a = -(b-a)/2.a = -a/2a = -0.5$ para todo a, b entero positivo consecutivo. La resolución es muy escueta, no está completa. Utiliza ejemplos para comprobar lo hallado.	**Analiza el discriminante para saber si puede aplicar la fórmula, pero no para pensar en una respuesta a la consigna.**
		- reflexionar sobre: lo que significa “usar una propiedad” (que se deben chequear hipótesis), reconocer qué propiedades/métodos/reglas/teoremas son factibles de ser usados ante cada consigna que se aborde y según la instancia de resolución que se esté	Puedo afirmar con certeza que las raíces son de la forma indicada para todo valor a, b, c enteros consecutivos positivos, y que además una de las raíces siempre es -0.5 por lo visto anteriormente. La reflexión no incluye el análisis de las hipótesis que no hizo en su momento. Por otro lado, la respuesta se reduce a lo visto en las cuentas.	

		atravesando; la utilidad de los métodos empleados y la pertinencia –o no- de aplicarlos en diferentes contextos, la interpretación de lo hallado para dar la respuesta, la necesidad de responder a lo pedido.		
	I4 Resolución de tareas intelectualmente exigentes (demostrar una proposición no vista, resolver un “problema”, modelizar).	- Usar	En este caso no corresponde el I4	
		- Explicar		
		- reflexionar		

DESCRIPTOR		EXPLICACIÓN	EVIDENCIAS DE A19	EN SÍNTESIS…
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones ajenas correctas matemáticamente**	**I1** Definiciones de conceptos, reglas, propiedades, enunciados de teoremas, procedimientos, demostraciones de resultados, ejercicios resueltos	- a) Reproducir (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	Conceptos Matemáticos trabajados: En ésta consigna se trabaja el concepto de función cuadrática y su análisis, particularmente con las raíces. También se advierte el concepto de pasaje de lenguaje coloquial a simbólico y resolución de ecuaciones de segundo grado. Enunciado de definición: Se presentará a continuación el concepto de función cuadrática: Definición: *Sea $f: R \to R$. Decimos que f es una función* **polinómica** *o simplemente un* **polinomio** *si tiene la forma* $f(x)= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, *para ciertos* $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ *en R.* Las funciones **cuadráticas,** $f(x)= ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$, también son funciones polinómicas. Donde ***a*** es el coeficiente principal del término cuadrático, *b* es el coeficiente que acompaña el término lineal y *c* es el término independiente**.**(Aragón, Pinasco, Schifini, Varela, 2008, p. 53) Necesita definir algo más grande para tomar la definición que plantea como caso particular. Enunciado de Propiedad/resultado utilizado: Para hallar las soluciones de una ecuación de segundo grado con *a, b* y *c* números reales y distintos de cero, la fórmula utilizada es la denominada “fórmula resolvente” dada con la siguiente expresión: $$X_{1,2} = [-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}]/ 2a$$ Generalizan la hipótesis. Escrita desde lo que sabe. Demostración de la propiedad: Esta fórmula, viene de una manipulación algebraica sobre la ecuación de segundo grado para hallar de una forma general las soluciones:	**Usó la definición de función polinómica para definir función cuadrática (como caso particular)**

			Se tiene la expresión general de una función cuadrática ax^2+bx+c Se Busca una expresión general para las soluciones de esta ecuación de segundo grado "Completando Cuadrados". Se procede de la siguiente manera: Se extrae el coeficiente principal y se obtiene: $a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$ (1) Luego, como $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = x^2+\frac{2bx}{2a}+\frac{b^2}{4a^2} = x^2+\frac{bx}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$, resto $+\frac{b^2}{4a^2}$ al dejarlo expresado en un binomio en (1) Entonces, $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]$ Acomodando, se tiene $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-b^2+4ac}{4a^2}\right]$ $\Longleftrightarrow a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$ Ahora, como lo que se busca es cuándo ésta expresión es cero, se tiene lo siguiente: $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=0$ Entonces se busca cuándo $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$ Al despejar la variable, se tiene que $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ luego, al pasar la raíz, existen dos posibles soluciones que elevadas al cuadrado dan como resultado $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$.		

			 Extraída de un libro de texto.	
		- b) Explicar, mostrando comprensión (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	Explicación de la definición: Una función cuadrática es una expresión como la descrita más arriba, en la que se puede ver que está determinada por tres términos: un término cuadrático *(ax^2)* llamado así por tener a la variable "x" elevada al exponente "2"; un término lineal *(bx)* llamado así por tener a la variable elevada al exponente "1" y que en ocasiones este término puede no estar presente; y un tercer término *(c)* denominado término independiente o de ordenada ya que no está condicionado al valor de "x". En este tipo de funciones, el coeficiente principal *(a)* siempre está presente. Este valor es siempre distinto de cero y es constante como *b* y *c*. Estas funciones sirven para modelizar problemas relacionados con trayectorias de objetos y hacer análisis tanto gráficamente como analíticamente de temas de interés. La explicación trata de "traducir" lo que está escrito y también agrega información	**La explicación de la definición trata de decir de otra manera la definición, pero además agrega info que antes no estaba considerada.**
		- c) reflexionar		
	I2 Lenguajes matemáticos (natural y simbólico), notación matemática, convenciones	- a) reproducir "algo" usando lenguajes matemáticos	Usa mayormente lenguaje natural, tiene que ver con que en general escribió desde lo que ella sabe y no desde lo que leyó en algún libro por ejemplo. Utilizó lenguaje simbólico en la demostración y en la resolución de la consigna.	**¿Por qué usan mayormente lenguaje natural? ¿Tendrá que ver con que es una producción propia y no una búsqueda de libro?**
		- b) explicar el uso del lenguaje	Trata de mostrar en la explicación qué quiere decir lo que escribió de manera simbólica.	

<table>
<tr><td></td><td></td><td>- c) reflexionar</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Conocimiento del contenido matemático ante producciones propias</td><td rowspan="2">I3
Resolución de una consigna, actividad o ejercicio que no le resulte cognitivamente exigente.</td><td>- Usar lenguaje matemático, operar, usar propiedades, procedimientos, etc.</td><td>Selecciona una notación, y lo hace de manera correcta: $\boldsymbol{a=n}$, $\boldsymbol{b=n+1}$, $\boldsymbol{c=n+2}$, con a o $n \neq 0$
No aclara que podría haber otra forma de tomar los consecutivos.

Opera correctamente.

No analiza discriminante.</td><td></td></tr>
<tr><td>- Explicar su resolución (lenguaje utilizado, las operaciones, propiedades utilizados, la respuesta).</td><td>Dados a, b y c enteros consecutivos, se realiza el siguiente cambio de variables: $\boldsymbol{a=n}$, $\boldsymbol{b=n+1}$, $\boldsymbol{c=n+2}$, con a o $n \neq 0$.
Luego la ecuación queda de la forma $4nx^2 + 4(n+1)x + (n+2) = 0$.
Para analizar el comportamiento de las raíces se utiliza la fórmula resolvente para funciones cuadráticas, representada por la siguiente expresión: no menciona hipótesis.
$$\boldsymbol{X_{1,2}} = (-b \pm \sqrt{b^2-4ac})/2a \quad \textbf{(1)}$$
Al sustituir las letras a, b, c con el cambio de variables propuesto se obtiene:
$$\boldsymbol{X_{1,2}} = [-4(n+1) \pm \sqrt{[4(n+1)]^2 - 4.4n\,(n+2)}]/2.4n$$
$$\leftrightarrow \quad \boldsymbol{X_{1,2}} = [-4(n+1) \pm \sqrt{4^2(n+1)^2 - 16n(n+2)}]/8n$$
$$\leftrightarrow \quad \boldsymbol{X_{1,2}} = [-4(n+1) \pm \sqrt{16((n+1)^2 - n(n+2))}]/8n$$
$$\leftrightarrow \quad \boldsymbol{X_{1,2}} = [-4(n+1) \pm \sqrt{16}\sqrt{(\cancel{n^2} \cancel{+ 2n} + 1 \cancel{- n^2} \cancel{- 2n})}]/8n$$
$$\leftrightarrow \quad \boldsymbol{X_{1,2}} = [-4(n+1) \pm 4\sqrt{1}]/8n$$
$$\leftrightarrow \quad \boldsymbol{X_{1,2}} = (-4n - 4 \pm 4)/8n$$
Luego,
$\boldsymbol{X_1} = (-4n \cancel{-4 + 4})/8n \rightarrow \boldsymbol{x_1} = -4n/8n \rightarrow \boldsymbol{x_1 = -1/2}$,
$\boldsymbol{X_2} = (-4n -4 -4)/8n \rightarrow \boldsymbol{x_2} = (-4n -8)/8n \rightarrow \boldsymbol{x_2} = -4(n+2)/8n \rightarrow \boldsymbol{x_2 = -(n+2)/2n}$
Volviendo al cambio de variables, como $c = n+2$ y $a = n$ resulta que
$\boldsymbol{X_2 = -c / 2a}$ y $\boldsymbol{x_1 = -1/2}$ es constante para todo $n \neq 0$.

Por lo resuelto anteriormente, la característica que presentan las raíces de todas las ecuaciones de la forma $4ax^2 + 4bx + c = 0$ es que el conjunto de sus ceros o raíces está determinado por C°: {-1/2, -c/2a}. Es decir, dado cualquier a, b y c enteros consecutivos, una de las raíces es constantemente -1/2 y la otra raíz está condicionada por los valores c y a. Donde a representa la amplitud de la curva y c es el corrimiento que realiza la función sobre el eje de ordenadas.</td><td>Lee la info de lo trabajado algebraicamente, no desde las condiciones que surgen de analizar el discriminante (que no hace)</td></tr>
</table>

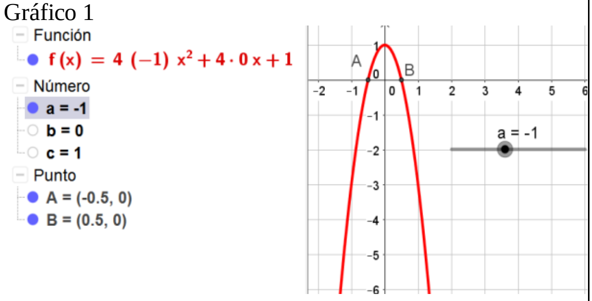
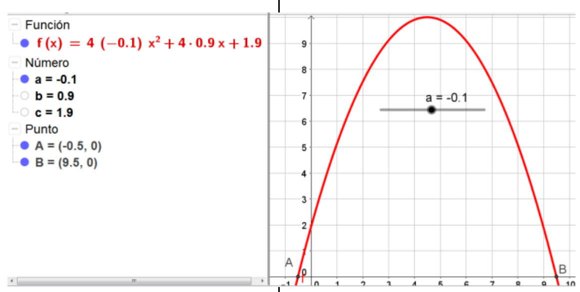
			En general es correcta, pero solo lee información de lo que obtiene algebraicamente. No se planteo cuántas soluciones tenía la ecuación. No analizó el discriminante. Explicación a un compañero: Bueno, como en la consigna me determinan que a, b y c son enteros consecutivos, lo que hice fue llamar de alguna manera a estas letras para que se relacionen. Por eso denomino a a como n, entonces al ser consecutivos b va a ser uno más al anterior. Como n es el anterior, el siguiente va a ser $n+1$ y siguiendo el mismo razonamiento para c, queda que es $n+2$. Además expliqué que a o n no puede ser cero porque no estaría en condiciones de tener una forma de ecuación cuadrática si este valor fuese cero. Luego, al reemplazarlo queda la ecuación donde los coeficientes ahora dependen de n únicamente. Como se pide alguna característica de las raíces de este tipo de ecuaciones, para poder hallar las raíces de esta ecuación utilicé la fórmula resolvente dada para este tipo de funciones que se encuentra expresada más arriba **(1)**. Al hacer los cálculos, habiendo reemplazado con el cambio de variable propuesto, todo me queda expresado en n. Lo hago de esta manera para no tener tantas letras "dando vueltas". Luego llego a una conclusión por toda la manipulación algebraica que hice, se cancelan valores y $\boldsymbol{x_1}$ queda que vale $-1/2$ siempre independientemente de los valores que tomen a, b y c consecutivos. En este caso tampoco importa quién es n. En el caso de $\boldsymbol{x_2}$ es una relación que queda expresada en términos de n como $-(n+2)/2n$. Tomé de nuevo el cambio de variables para ver cómo se relacionaba esto con los valores de a, b y c dados inicialmente. Entonces $\boldsymbol{x_2}$ va a quedar expresado en términos de c y a, en este caso b no aparece. Por lo tanto, la (una de ellas) característica que presenta todas las raíces de una ecuación de esta forma es que una de ellas, siempre no importa quienes sean a, b y c consecutivos es constantemente menos un medio y la otra va a depender de los valores que tomen a y c. Bien explicado. Lo que muestra en el anexo es igual a su resolución experta.	
		- reflexionar sobre: lo que significa "usar una propiedad" (que se deben chequear hipótesis), reconocer qué propiedades/métodos/reglas/teoremas son factibles de ser usados ante cada consigna que se aborde y según la instancia de resolución que se esté atravesando; la utilidad de	Tengo la certeza de utilizar la fórmula en la resolución ya que si quisiera resolver la ecuación de la manera tradicional, como una ecuación lineal, quedaría una "solución" dependiendo de la variable, lo que no me daría lo que necesito. Al resolver esta ecuación y tener los tres términos no nulos, es condición necesaria utilizar esta fórmula, además de que la demostración me avala su uso. Al obtener las soluciones de esa manera puedo reemplazar el valor hallado y así verificar si cumple con lo pedido. Como esto pasa y simplifica el "completar cuadrados" para cada ecuación distinta, el uso de la fórmula es factible y muy útil. No entiendo lo último. Mal formuladas las condiciones para la aplicación de la resolvente.	**No reconocen en la construcción de la fórmula resolvente una forma de despeje "utilizable" en caso de no acordarse la fórmula por ejemplo.** **"la demostración me avala su uso"**

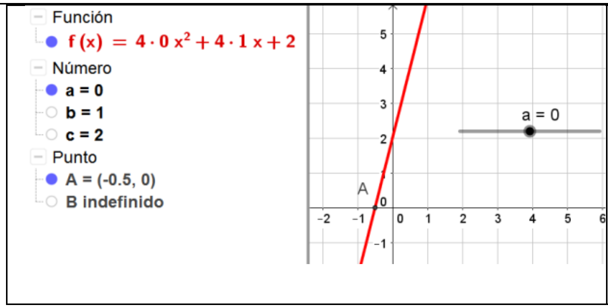
		los métodos empleados y la pertinencia –o no- de aplicarlos en diferentes contextos, la interpretación de lo hallado para dar la respuesta, la necesidad de responder a lo pedido.		
	I4 Resolución de tareas intelectualmente exigentes (demostrar una proposición no vista, resolver un "problema", modelizar).	- Usar	En este caso no corresponde el I4	
		- Explicar		
		- reflexionar		

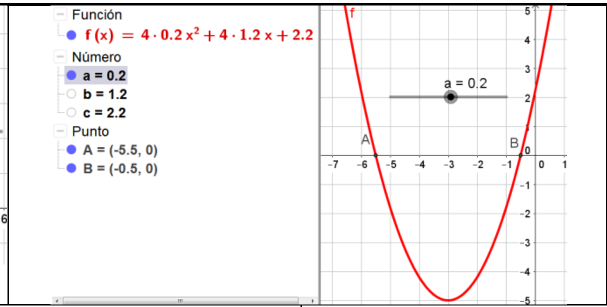
DESCRIPTOR		**EXPLICACIÓN**	**EVIDENCIAS DE A20**	**EN SÍNTESIS…**
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones ajenas correctas matemáticamente**	**I1** Definiciones de conceptos, reglas, propiedades, enunciados de teoremas, procedimientos, demostraciones de resultados, ejercicios resueltos	- a) Reproducir (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)	Conceptos Matemáticos trabajados: Cálculo de las raíces de una ecuación cuadrática mediante el método de la resolvente. Ecuación (III) de la resolución experta. Enunciado de definición: *"Las raíces de una ecuación cuadrática se calculan mediante la siguiente expresión:* $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $donde\ a, b\ y\ c\ son\ los\ coeficientes\ de\ la\ cuadrática\ y\ a$ 0." El alumno toma esto como la definición pedida (no la propiedad que el resto de la clase señaló) Enunciado de Propiedad/resultado utilizado: La resolvente de una ecuación cuadrática es una fórmula que nos permite calcular las raíces del polinomio a partir de sus coeficientes. Dicha fórmula es la siguiente: $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},\ \ con\ a, b, c\ \in \mathbb{R}\ y\ a \neq 0.$$ El enunciado de la propiedad utilizada es desde la elaboración personal, no porque fue buscado en algún lado. Demostración de la propiedad: <u>Deducción de la fórmula resolvente</u> Dada la ecuación cuadrática: $ax^2 + bx + c = 0,\ \ con\ a, b, c\ \in \mathbb{R}\ y\ a \neq 0.$ Multiplicando miembro a miembro por $4a$ (el lado izquierdo de la ecuación no se anula ya que $a \neq 0$) $$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$ Completando cuadrados $$(2ax)^2 + 2(2ax)b + b^2 - b^2 + 4ac = 0$$ Los primeros tres términos es la forma desarrollada del cuadrado de un binomio $$(2ax + b)^2 - b^2 + 4ac = 0$$ Despejando x obtenemos la fórmula resolvente para una ecuación cuadrática $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ Me queda la duda de si sabe qué sucede en los pasos intermedios… saltea cuentas. No es textual buscado en algún libro/internet.	**El alumno toma conceptos de la materia EM1 y explica esas cuestiones en vez de referirse a lo matemático.** **Considera el concepto de "función" en vez de trabajar con "ecuación", pero las definiciones las piensa desde "ecuación".** **¿Qué pasa con el "tema" de la consigna? Hay mezcla!** **Enunciados: elaboración personal** **Demostración: elaboración personal o "resumen" de algo leído.**

<table>
<tr><td rowspan="3"></td><td rowspan="2"></td><td>- b) Explicar, mostrando comprensión (definición/propiedad/teorema/demostración/etc.)</td><td>Explicación de la definición:
Para hallar la raíz de una ecuación lineal, es decir, para hallar el valor de x para que la ecuación de cero, ya conocemos un método. Tenemos que igualar la ecuación a cero y luego despejar x.
Por ejemplo (escribo en el pizarrón) escribamos la expresión general de una ecuación lineal:
$ax + b = 0, \quad donde\ a\ y\ b\ son\ números\ reales\ y\ a \neq 0.$
Notemos que si $a = 0$, tendríamos una identidad y no una ecuación.
(Pregunto a la clase) ¿Qué valor tiene que tomar x para que la ecuación me de cero?
(Si no surge la respuesta de la clase, sigo así)
Bueno, hay que despejar x. (escribo en el pizarrón) $x = -\frac{b}{a}$
Si ahora tenemos una expresión cuadrática y queremos hallar sus raíces, es decir, queremos ver para qué valores de x la ecuación nos da cero.
(Escribo en el pizarrón)
$ax^2 + bx + c = 0, \quad donde\ a, b\ y\ c\ son\ números\ reales\ y\ a \neq 0.$
Notemos que si $a = 0$, tendríamos una ecuación lineal y no una ecuación cuadrática.
¿Será posible despejar x como en el caso lineal?
(Dejo que prueben unos minutos mientras recorro el aula para ver o discutir sus intentos)
(Retomo la clase)
Bueno, podemos despejar x pero nos llevará un poco más de trabajo que en el caso lineal. Pero finalmente obtendremos la siguiente expresión: (Escribo en el pizarrón)
"Las raíces de una ecuación cuadrática se calculan mediante la siguiente expresión llamada resolvente:
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad donde\ a, b\ y\ c\ son\ los\ coeficientes\ de\ la\ cuadrática\ y\ a \neq 0.$"
La explicación se reduce a copiar la definición, la da por sabida como una fórmula más ante la imposibilidad de poder despejar como con las lineales que mostró en la explicación.</td><td>**La explicación de cómo resolver una ecuación cuadrática comienza con la resolución de una ecuación lineal.**
➔ Esto intenta ser una muestra de comprensión: la necesidad de recurrir a una fórmula ante la imposibilidad de despejar como se hacía en las lineales… (¿?)</td></tr>
<tr><td>- c) reflexionar</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>**I2**
Lenguajes matemáticos (natural y simbólico), notación matemática, convenciones</td><td>- a) reproducir "algo" usando lenguajes matemáticos</td><td>Al reproducir definición/propiedad utiliza lenguaje coloquial porque lo hace comentando qué va a hacer, utiliza el lenguaje simbólico para escribir las fórmulas.
Al copiar la demostración y la resolución experta utiliza correctamente el lenguaje simbólico.

Al copiar y explicar la definición, no hay diferencia.</td><td></td></tr>
</table>

		- b) explicar el uso del lenguaje	No hay una explicación de lenguaje, solo repite lo definido. Lo que hace es explicar los pasos que da, pero no por qué lo escribe de esa manera.	**Ver si no hay confusión en qué es explicar: se refiere a explicar qué quisiste decir? Se refiere a “traducir” lo escrito simbólicamente?**
		- c) reflexionar		
Conocimiento del contenido matemático ante **producciones propias**	**I3** Resolución de una consigna, actividad o ejercicio que **no** le resulte cognitivamente exigente.	- Usar lenguaje matemático, operar, usar propiedades, procedimientos, etc.	Selecciona notación, plantea ecuación. Utiliza correctamente la fórmula. Analiza el discriminante, pero NO lo considera para la respuesta.	
		- Explicar su resolución (lenguaje utilizado, las operaciones, propiedades utilizados, la respuesta).	Lo primero que hice fue utilizar el geogebra para explorar el comportamiento de la función al variar los parámetros a, b y c teniendo en cuanta la relación existente entre ellos de acuerdo a la consigna. 1. Cree un deslizador “a”; 2. Definí los parámetros b y c: b = a+1 y c = a+2; 3. Si bien el enunciado dice que a, b y c son números consecutivos, lo cual implica que son enteros y con el software estaríamos realizando una variación continua. Esto no representa ningún problema ya que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. Es decir, si la gráfica muestra cierto comportamiento para a, b y c $\in \mathbb{R}$, entonces también se observará el mismo patrón para a, b y c $\in \mathbb{Z}$. Introduje la función dada, marqué los puntos de intersección (A y B) de la gráfica con el eje de las abscisas y comencé a variar el parámetro “a”. Así obtuve los siguientes gráficos: Gráfico 1  Gráfico 2  Gráfico 3 Gráfico 4	**¿por qué consideran que la resolución experta no puede incluir una exploración previa?** **Ver la definición de “experto”**





4. En base a la exploración pude notar que existe una raíz fija (x = -1/2) mientras que la otra se va desplazando conforme van cambiando los valores de a, b y c.
   i. Para a < 0 (gráficos 1 y 2) la raíz x =-1/2 designada por el punto A, no se modificó. En ambos casos las ramas de la parábola van hacia -∞ y el vértice de la parábola queda a derecha del punto A.
   ii. Para a = 0 no tenemos una cuadrática, nos queda la lineal 4bx+c =0 (gráfico 3), esta lineal tiene una raíz en x = -1/2, denotada por el punto A.
   iii. Para a > 0 (gráfico 4), la cuadrática sigue teniendo una raíz en x = -1/2 pero esta vez designada por el punto B. En este caso las ramas de la parábola van hacia +∞ y el vértice se encuentra a izquierda del punto B.
5. A partir de este primer análisis cualitativo me surgieron dos preguntas:
   I. ¿A qué se debe qué esta cuadrática tiene una raíz fija en x = -1/2?
   II. ¿Es posible construir una cuadrática que tenga una raíz fija en cualquier otro punto? Si es así, ¿Cómo lo hacemos?

Una primera aproximación a la resolución consistió en exploración: numérica, con TIC.

Resolución experta:

Sean a, b y c números enteros tal que

$$\begin{cases} a \in \mathbb{Z} - \{0\} \\ b = a + 1 \\ c = a + 2 \end{cases} \quad (I)$$

no considera los enteros consecutivos en otro orden… aunque sí lo menciona en su anexo.

Queremos ver qué valores de x satisfacen la ecuación:

$$4ax^2 + 4bx + c = 0, \quad (II)$$

Utilizando las identidades definidas en (I)

$$4ax^2 + 4(a+1)x + (a+2) = 0$$

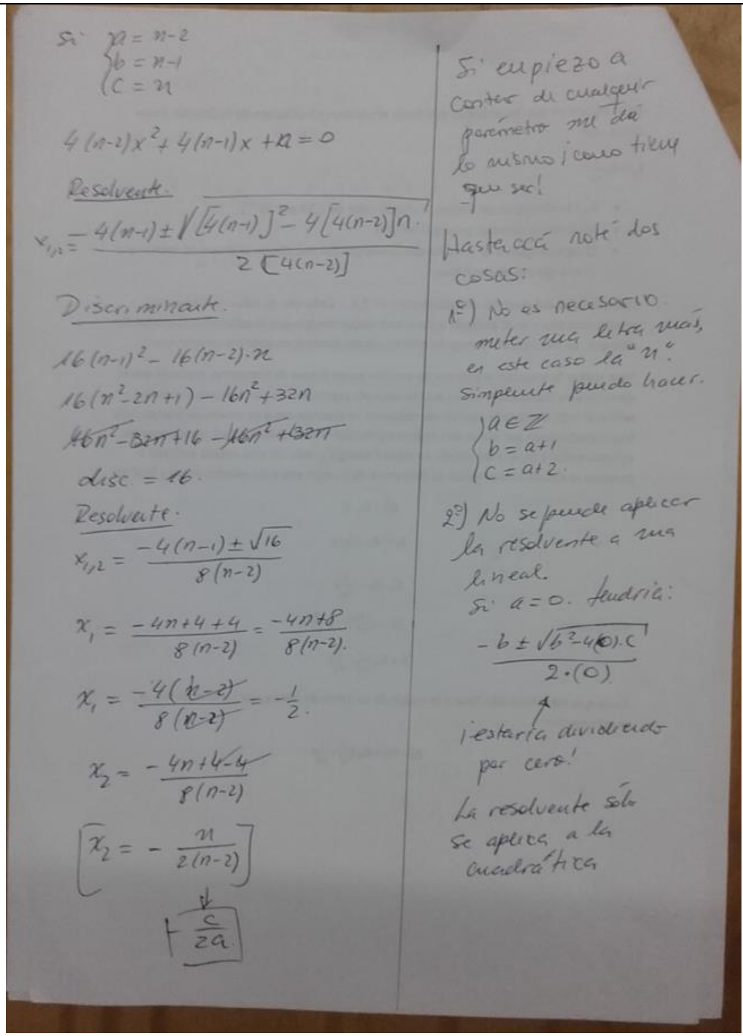
Aplico la fórmula resolvente para hallar los valores de x que satisfacen la ecuación.

$$x_{1,2} = \frac{-4(a+1) \pm \sqrt{(4(a+1))^2 - 4(4a)(a+2)}}{2(4a)}, \quad (III)$$

Este alumno muestra primera una exploración que lo llevó a pensar cómo hacerlo más general, y no lo considera parte de su trabajo. ¿Será que consideró la "exploración experta" como el "pasado en limpio"?

			Opero sobre el discriminante $\Delta = 16(a^2 + 2a + 1) - 16a^2 - 32a$ $\Delta = \cancel{16a^2} + \cancel{32a} + 16 - \cancel{16a^2} - \cancel{32a}$ $\Delta = 16$ Analiza el discriminante para ver si puede aplicar la resolvente pero NO lo considera como generador de condiciones para las soluciones. Vuelvo a la expresión (III) $x_{1,2} = \frac{-4a - 4 \pm \sqrt{16}}{8a}$ $x_1 = -\frac{1}{2}$ y $x_2 = -\frac{a+2}{2a}$ toma a las soluciones en términos de "a" (no de a y c ni como relacionada con la otra) ***Respondiendo a la consigna, podemos decir que una característica que presentan las raíces de las ecuaciones de la forma*** $4ax^2 + 4bx + c = 0$, **(*donde a, b y c son enteros consecutivos*), *es que* una de las raíces siempre será -1/2, mientras que la otra dependerá del valor que asuma, en este caso, el parámetro "*a*".** Bien resuelto, bien concluido. **Anexo** de explicaciones:	**Bien que considera que es "una característica" y no LA característica.**

			Si $\begin{cases} a = n \\ b = n+1 \\ c = n+2 \end{cases}$ $4ax^2 + 4bx + c = 0$ $4(n)x^2 + 4(n+1)x + (n+2) = 0$ Resolvente $-\frac{4(n+1) \pm \sqrt{[4(n+1)]^2 - 4\cdot 4n\cdot(n+2)}}{2\cdot(4n)}$ Discriminante $16(n+1)^2 - 16n(n+2)$ $16(n^2+2n+1) - 16n^2 - 32n$ $\cancel{16n^2} + \cancel{32n} + 16 - \cancel{16n^2} - \cancel{32n}$ disc $= 16$. $-\frac{4(n+1) \pm \sqrt{16}}{8n}$ $x_{1,2} = \frac{-4n-4\pm 4}{8n}$ $x_1 = \frac{-4n-4+4}{8n} = \frac{-4\cancel{n}}{8\cancel{n}} = -\frac{1}{2}$ $x_2 = -\frac{4n-4-4}{8n} = -\frac{4n-8}{8n} = -\frac{n+2}{2n}$ Raíces $= \left\{-\frac{1}{2} ; -\frac{n+2}{2n}\right\}$ $\downarrow$ $\boxed{-\frac{c}{2a}}$ Si $\begin{cases} a = n-1 \\ b = n \\ c = n+1 \end{cases}$ $4(n-1)x^2 + 4nx + (n+1) = 0$ Resolvente $x_{1,2} = \frac{-4n \pm \sqrt{(4n)^2 - 4[4(n-1)]\cdot(n+1)}}{2\cdot[4(n-1)]}$ Discriminante $16n^2 - 16(n-1)(n+1) \rightarrow$ ≠ cuadrados $16n^2 - 16(n^2 - 1^2)$ $\cancel{16n^2} - \cancel{16n^2} + 16$ $\boxed{\text{disc} = 16}$ Resolvente $x_{1,2} = \frac{-4n \pm \sqrt{16}}{8(n-1)}$ $x_{1,2} = \frac{-4n \pm 4}{8(n-1)}$ $x_1 = \frac{-4n+4}{8(n-1)} = \frac{4-4n}{8(n-1)}$ $x_1 = \frac{\cancel{4}(1-n)}{\underset{2}{\cancel{8}}(n-1)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{-\overset{-1}{\cancel{(n-1)}}}{\cancel{(n-1)}}$ $\boxed{x_1 = -\frac{1}{2}}$ $x_2 = \frac{-4n-4}{8(n-1)} = \frac{-\cancel{4}(n+1)}{2\cancel{8}(n-1)}$ $\boxed{x_2 = -\frac{(n+1)}{2(n-1)}} \rightarrow \boxed{-\frac{c}{2a}}$		

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td>


Si $\begin{cases} a = n-2 \\ b = n-1 \\ c = n \end{cases}$

$4(n-2)x^2 + 4(n-1)x + n = 0$

Resolvente

$x_{1,2} = \frac{-4(n-1) \pm \sqrt{[4(n-1)]^2 - 4[4(n-2)]n}}{2[4(n-2)]}$

Discriminante

$16(n-1)^2 - 16(n-2)\cdot n$

$16(n^2-2n+1) - 16n^2 + 32n$

$\cancel{16n^2} - \cancel{32n} + 16 - \cancel{16n^2} + \cancel{32n}$

disc $= 16$.

Resolvente

$x_{1,2} = \frac{-4(n-1) \pm \sqrt{16}}{8(n-2)}$

$x_1 = \frac{-4n+4+4}{8(n-2)} = \frac{-4n+8}{8(n-2)}$

$x_1 = \frac{-4(\cancel{n-2})}{8(\cancel{n-2})} = -\frac{1}{2}$

$x_2 = \frac{-4n+\cancel{4-4}}{8(n-2)}$

$x_2 = -\frac{n}{2(n-2)}$

$\boxed{-\frac{c}{2a}}$

Si empiezo a contar de cualquier parámetro me da lo mismo ¡como tiene que ser!

Hasta acá noté dos cosas:

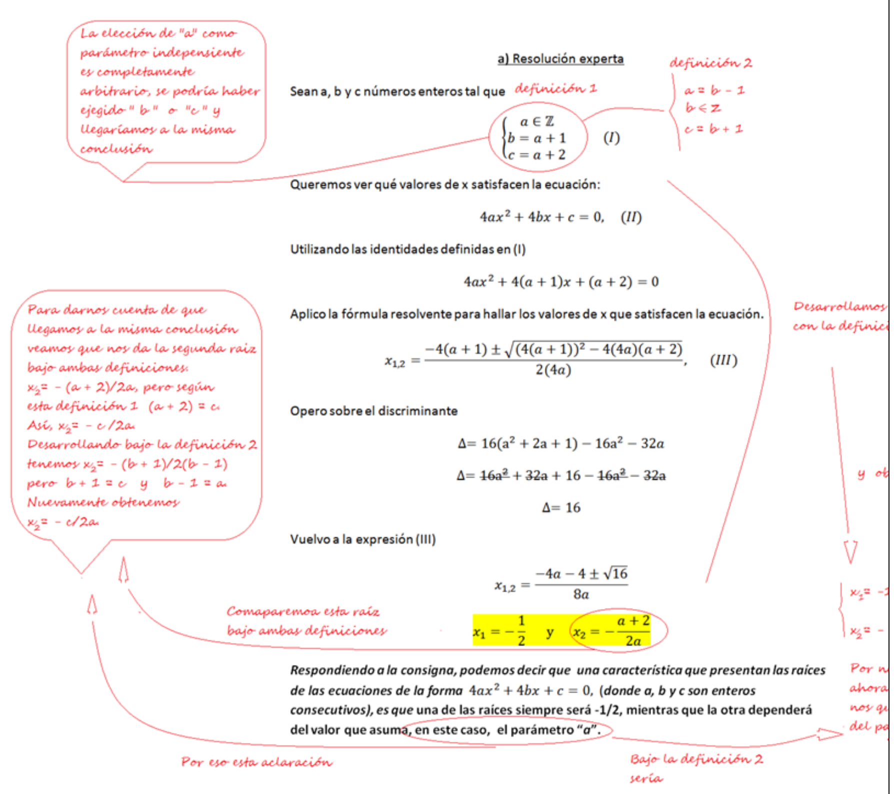
1°) No es necesario meter una letra más, en este caso la "n". Simplemente puedo hacer: $\begin{cases} a \in \mathbb{Z} \\ b = a+1 \\ c = a+2 \end{cases}$

2°) No se puede aplicar la resolvente a una lineal. Si $a = 0$. tendría: $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4(0)\cdot c}}{2\cdot(0)}$ ¡estaría dividiendo por cero!

La resolvente sólo se aplica a la cuadrática

Señala cuestiones relevantes que no menciona en la resolución "experta": tomar los consecutivos en otro orden, que una solución depende de dos de sus parámetros.

Con respecto a la explicación de cada paso:
</td>
<td>Las cuestiones que consideró al pensar la resolución no las dejó por escrito en su resolución experta, sino que las deja indicadas para la explicación oral.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td>


a) Resolución experta

Sean a, b y c números enteros tal que

$$\begin{cases} a \in \mathbb{Z} \\ b = a + 1 \\ c = a + 2 \end{cases} \quad (I)$$

Queremos ver qué valores de x satisfacen la ecuación:

$$4ax^2 + 4bx + c = 0, \quad (II)$$

Utilizando las identidades definidas en (I)

$$4ax^2 + 4(a+1)x + (a+2) = 0$$

Aplico la fórmula resolvente para hallar los valores de x que satisfacen la ecuación.

$$x_{1,2} = \frac{-4(a+1) \pm \sqrt{(4(a+1))^2 - 4(4a)(a+2)}}{2(4a)}, \quad (III)$$

Opero sobre el discriminante

$$\Delta = 16(a^2 + 2a + 1) - 16a^2 - 32a$$

$$\Delta = \cancel{16a^2} + \cancel{32a} + 16 - \cancel{16a^2} - \cancel{32a}$$

$$\Delta = 16$$

Vuelvo a la expresión (III)

$$x_{1,2} = \frac{-4a - 4 \pm \sqrt{16}}{8a}$$

$$x_1 = -\frac{1}{2} \quad y \quad x_2 = -\frac{a+2}{2a}$$

Respondiendo a la consigna, podemos decir que una característica que presentan las raíces de las ecuaciones de la forma $4ax^2 + 4bx + c = 0$, *(donde a, b y c son enteros consecutivos), es que* una de las raíces siempre será -1/2, mientras que la otra dependerá del valor que asuma, en este caso, el parámetro "*a*".

Las cuestiones importantes que halla las señala de manera oral en la explicación, no consideró dejarlo escrito.
</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>- reflexionar sobre: lo que significa "usar una propiedad" (que se deben chequear hipótesis), reconocer qué propiedades/métodos/reglas/teoremas son factibles de ser usados ante cada consigna que se aborde y según la instancia de resolución que se esté atravesando; la utilidad de</td>
<td>En la deducción del punto (5) notamos que el único requisito para utilizar la resolvente es que $a \neq 0$. Según la consigna a, b y c son enteros consecutivos, con lo cual, en principio, a podría valer cero. Pero si ese fuera el caso, ya no tendríamos una ecuación cuadrática sino una lineal. El alumno presenta la posibilidad de tomar a los consecutivos de manera distinta, por lo que debería mencionarlo acá también. ¿será que entiende que con a distinto de cero abarca también los otros casos? NO considera tomar los consecutivos en otro orden.
En el punto (3) donde cuento como presentaría el tema ante una clase, escribo en el pizarrón la ecuación cuadrática y a continuación la restricción para el coeficiente "a" ($a \neq 0$) y el por qué de esta restricción.
Una vez aclarado este punto, creo que se ya podríamos utilizar la resolvente sin ningún problema y en todo caso prestar atención a lo que nos dice el discriminante.

Bien pensado.</td>
<td></td>
</tr>
</table>

		los métodos empleados y la pertinencia –o no- de aplicarlos en diferentes contextos, la interpretación de lo hallado para dar la respuesta, la necesidad de responder a lo pedido.		
	I4 Resolución de tareas intelectualmente exigentes (demostrar una proposición no vista, resolver un "problema", modelizar).	- Usar	En este caso no corresponde el I4	
		- Explicar		
		- reflexionar		