ANEXO II

En el Anexo II se encuentran las resoluciones de los TP2, correspondientes a los 20 alumnos que participaron de la experiencia.

CONSIGNA

1) Si a, b y c son enteros consecutivos, explicá si hay alguna característica que presenten las raíces de todas las ecuaciones de la forma $4ax^2+4bx+c=0$. Te pedimos que dejes en una "hoja borrador" los intentos que hagas para resolver (no taches, si podés escribí lo que pensás aunque te hayas dado cuenta que no te sirve, si buscás información indicá qué, etc.) y nos entregues:
a) tu resolución experta "pasada en limpio"
b) tu "hoja borrador" y
c) una explicación de tu resolución como si se la quisieras pasar a un compañero que tiene tu "resolución pasada en limpio" pero no la entendió. (Estimá media carilla o a tu resolución en limpio agregarle flechas con explicaciones, por ejemplo)
2) ¿Qué concepto matemático considerás que se trabaja en esta consigna? (si hay más de uno, indicalos). Elegí **un** concepto matemático que hayas utilizado en la resolución del ítem 1), y escribí su definición. Pensá que la vas a dejar escrita en el pizarrón cuando sea trabajada en una clase.
3) Explicá esa definición con tus palabras (como si le hablaras a la clase). Todo esto a lo sumo te insumirá media carilla.
4) Enunciá un resultado/propiedade matemático que hayas utilizado para resolver la consigna tal como se encontraría en un libro de texto.
5) Demostrá la propiedad/resultado que hayas mencionado en el ítem anterior. Pensá cómo explicarías la demostración, para que luego nos la cuentes o lo entregues por escrito.
6) ¿Tenés certeza de que podés usar la propiedad que utilizaste? Si tu respuesta es afirmativa, explicá por qué. Si no lo es, explicá por qué la usaste, si considerás que es válido haberla usado, si tiene restricciones, etc.

Resolución A1

1) a) Resolución experta.
Sea a, b y c números enteros consecutivos cualesquiera. En términos generales tenemos que:
a = y; b = y + 1; c = y + 2
Entonces, reemplazando en la ecuación original, nos queda:
4 y x^2 + 4 (y + 1) x + (y + 2) = 0
Resolvemos la ecuación cuadrática: $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
$x_{1,2}$ = - 4 (y + 1) ± √ [(4 y + 4)² - 4 . 4 y (y + 2)] / 2 . 4 y
Observemos que sucede dentro de la raíz (discriminante):
√ (16 y² + 32 y + 16 – 16 y² - 32 y) = √ 16 = 4.
Entonces, como el valor obtenido es positivo, tenemos dos soluciones:
x_1 = - 4 y - 4 - 4 / 8 y = -1/2
x_2 = - 4 y - 4 – 4 / 8 y = -1/2 - 1/y

Por un lado, notemos que, sea cual sea el valor de y, el discriminante siempre será 4, y por otro lado, una de las raíces siempre será -1/2. Ahora bien, como vemos, la otra raíz es de la forma -1/2 - 1/y, está claro que no es posible que y = 0. Veamos que sucede entonces:
Si a = y = 0; b = 1; c = 2, reemplazando, tenemos que:
4 x + 2 = 0
El término de segundo grado se elimina ya que es igual a cero por lo que deja de ser una ecuación cuadrática y pasa a ser una ecuación lineal. Por ende tendremos una excepción y es que a = y ≠ 0.
Por lo tanto, concluimos que, sean cual sean los tres números enteros consecutivos que se elijan, una de las raíces de la ecuación cuadrática siempre será -1/2, con la excepción de que a = y ≠ 0.

b) "Hoja borrador" (insertadas al final del trabajo)

c) Explicación de mi resolución.
Sea a, b y c números enteros consecutivos cualesquiera. En términos generales tenemos que:
a = y; b = y + 1; c = y + 2

Recordar que los números consecutivos son aquellos que siguen el uno al otro, en orden, sin saltos, del menor al mayor.

Entonces, reemplazando en la ecuación original, nos queda:
$4\ a\ x^2 + 4\ b\ x + c = 0$
$4\ y\ x^2 + 4\ (y + 1)\ x + (y + 2) = 0$
Resolvemos la ecuación cuadrática: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ***FÓRMULA RESOLVENTE***

$x_{1,2} = - 4\ (y + 1) \pm \sqrt{}\ [(4\ y + 4)^2 - 4\ .\ 4\ y\ (y + 2)]\ /\ 2\ .\ 4\ y$
Observemos que sucede dentro de la raíz (discriminante):
$\sqrt{}\ (16\ y^2 + 32\ y + 16 - 16\ y^2 - 32\ y) = \sqrt{}\ 16 = 4.$
Entonces, como el valor obtenido es positivo, se tienen dos soluciones:
$x_1 = - 4\ y - 4 - 4\ /\ 8\ y = -1/2$
$x_2 = - 4\ y - 4 - 4\ /\ 8\ y = -1/2 - 1/y$

Si el valor obtenido hubiera sido negativo, no tendríamos raíces reales y si el resultado hubiera sido igual a cero, tendríamos una sola raíz.

Por un lado, notamos que, sea cual sea el valor de y, el discriminante siempre será 4, y por otro lado, una de las raíces siempre será -1/2. Ahora bien, como vemos, la otra raíz es de la forma -1/2 - 1/y, está claro que no es posible que y = 0. Veamos que sucede entonces:
Si a = y = 0; b = 1; c = 2, reemplazando, se tiene que:
4 x + 2 = 0
El término de segundo grado ($4\ a\ x^2$) se elimina ya que es igual a cero por lo que deja de ser una ecuación cuadrática y pasa a ser una ecuación lineal. Por ende se tendrá una excepción y es que a = y ≠ 0.

Por lo tanto, se concluimos que, sean cual sean los tres números enteros consecutivos que se elijan, una de las raíces de la ecuación cuadrática siempre será -1/2, con la excepción de que $a = y \neq 0$.

2) Considero que en esta consigna se trabajan los siguientes conceptos matemáticos: Ecuación de segundo grado o cuadrática, fórmula resolvente para ecuaciones cuadráticas, expresiones algebraicas, cálculos combinados.
 Definición de ecuación de segundo grado o cuadrática:
 Una ecuación de segundo grado o cuadrática es una igualdad de dos expresiones algebraicas en la cual el mayor exponente de la incógnita es dos. La forma general de la ecuación cuadrática es: $a x^2 + b x + c = 0$
3) Explicación de la definición de ecuación cuadrática:

 Sabemos que una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas (expresiones algebraicas se le llama al conjunto de números y letras ligados entre sí por los signos de las operaciones). Cada una de estas expresiones algebraicas se denomina miembros de la ecuación y se encuentran separadas por el signo igual. En estos miembros aparecen elementos conocidos, llamados datos, y otros desconocidos, llamados variables o incógnitas, relacionados mediante operaciones matemáticas.
 Las incógnitas, representadas generalmente por letras, constituyen los valores que se pretenden hallar. En una ecuación de segundo grado, el mayor exponente que pueden tener las incógnitas es dos. Generalmente una ecuación de segundo grado es de la forma: $a x^2 + b x + c = 0$, donde a, b y c son números reales.
 La solución de la ecuación será cualquier valor dado a las variables siempre que satisfagan la igualdad. Si bien existen varias formas para su resolución (factorización en un producto de binomios, completación de cuadrados), la forma general para hacerlo, que permite resolver cualquier ecuación de segundo grado, es la siguiente:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

 De la fórmula planteada hallaremos dos valores que satisfagan la ecuación, uno o ninguno dependiendo esto del discriminante ($\sqrt{b^2 - 4ac}$). Si es positivo, habrá dos soluciones para la ecuación, si es cero, solo habrá una solución y si es negativo, no tendrá solución en los números reales.

4) Uno de los resultados/propiedades matemáticas que utilicé para resolver la consigna es: fórmula resolvente de la ecuación cuadrática.
 Las ecuaciones cuadráticas cuya forma sea $a x^2 + b x + c = 0$, siendo a, b y c números reales y $a \neq 0$, se resuelven aplicando una fórmula, llamada fórmula resolvente. Ella es

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

5) Demostración de la fórmula resolvente de la ecuación de segundo grado.
 ¿De dónde proviene la formula? $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
 Tenemos la ecuación de segundo grado: $\mathbf{a x^2 + b x + c = 0}$. La idea es convertir al polinomio en un cuadrado perfecto, entonces:
 - multiplicamos ambos lados de la ecuación por 4 a, por lo que obtenemos: $4 a^2 x^2 + 4 a b x + 4 a c = 0$

- luego sumamos b^2 a ambos lados:
  $4 a^2 x^2 + 4 a b x + 4 a c + b^2 = b^2$
- si pasamos $4 a c$ al miembro derecho, obtenemos el cuadrado perfecto del lado izquierdo:
  $4 a^2 b^2 + 4 a b x = b^2 - 4 a c$
- reescribimos la ecuación anterior:

Notar que si desarrollo el cuadrado, obtengo lo mismo que en el punto anterior.

$(2 a x + b)^2 = b^2 - 4 a c$

- Ahora eliminamos el cuadrado de la izquierda:
  $2 a x + b = \pm \sqrt{b^2 - 4 a c}$

Aquí nos queda ± porque, al aplicar raíz para eliminar el cuadrado tenemos dos posibilidades para el miembro de la derecha. Que sea positivo o negativo.

Por último, despejamos x:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

6) Creo que es imprescindible utilizar la fórmula resolvente para resolver ecuaciones cuadráticas, ya que, sin ella no es posible ver, por ejemplo, que en todos los casos, sean cuales sean los números enteros consecutivos utilizados, el discriminante siempre va a ser positivo, por lo cual obtendremos dos resultados distintos de x, y además que una de las raíces siempre será -1/2.

TP: Mier 3/5 11^{00} hs.

Si a, b y c son enteros consecutivos, explicá si hay alguna característica que presenten las raíces de todas las ecuaciones de la forma

$$4ax^2 + 4bx + c = 0.$$

Pruebo distintos nros consecutivos:

1) $a = -1$, $b = 0$, $c = 1$

$$-4x^2 + 1 = 0$$
$$-4x^2 = -1$$
$$x^2 = 1/4$$
$$x_{1,2} = \pm 1/2$$

$$x_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{16}}{-8} = \begin{cases} \boxed{-1/2} \\ \boxed{+1/2} \end{cases}$$

$C^\circ = \{-1/2 ; 1/2\}$

2) $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$

$$4x + 2 = 0$$
$$x = -1/2 \qquad C^\circ = \{-1/2\}$$

Pero deja de ser una ec. de 2° grado $\Rightarrow a \neq 0$

3) $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$

$$4x^2 + 8x + 3 = 0$$
$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 48}}{8} = \frac{-8 \pm \sqrt{16}}{8} = \frac{-8 \pm 4}{8} = \begin{cases} -\frac{12}{8} = \boxed{-\frac{3}{2}} \\ -\frac{4}{8} = \boxed{-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$C^\circ = \{-3/2 , -1/2\}$

4) $a = -1$, $b = -2$, $c = -3$

$$-4x^2 - 8x - 3 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{-8} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{-8} = \frac{8 \pm 4}{-8} = \begin{cases} \boxed{-3/2} \\ \boxed{-1/2} \end{cases}$$

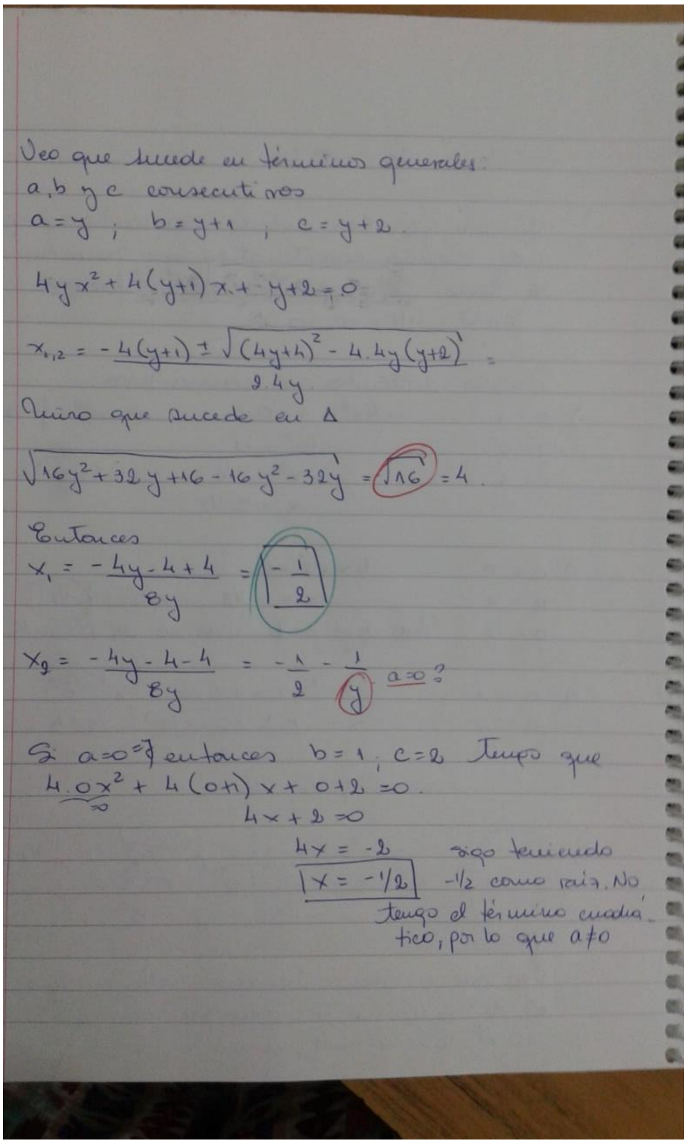
→ No son nros consecutivos!!

Los nros consecutivos son aquellos que siguen el uno al otro, en orden, sin saltos y de menor a mayor.

$a = -3$, $b = -2$, $c = -1$

$$-12x^2 - 8x - 1 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{-24} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{-24} = \begin{cases} \boxed{-1/2} \\ \boxed{-1/6} \end{cases}$$

Veo que, en todos los casos, $-1/2$ es raíz y que el discriminante siempre da $\sqrt{16}$



Veo que sucede en términos generales:
a, b y c consecutivos
$a = y$; $b = y+1$; $c = y+2$.

$$4yx^2 + 4(y+1)x + y+2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-4(y+1) \pm \sqrt{(4y+4)^2 - 4.4y(y+2)}}{2.4y} =$$

Miro que sucede en Δ

$$\sqrt{16y^2 + 32y + 16 - 16y^2 - 32y} = \sqrt{16} = 4.$$

Entonces

$$x_1 = \frac{-4y - 4 + 4}{8y} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

$$x_2 = \frac{-4y - 4 - 4}{8y} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{y} \quad \underline{a=0}\,?$$

Si $a = 0 \Rightarrow$ entonces $b = 1$; $c = 2$ Tengo que

$$\underbrace{4.0x^2}_{=0} + 4(0+1)x + 0+2 = 0.$$

$$4x + 2 = 0$$

$$4x = -2$$

$$\boxed{x = -1/2}$$

sigo teniendo $-1/2$ como raíz. No tengo el término cuadrático, por lo que $a \neq 0$

Resolución A2

1. A Llamo $a = n - 1, b = n\ y\ c = n + 1$; enteros.
Entonces la ecuación

$$4ax^2 + 4bx + c = 0$$

Tendrá solución $x_1 = \frac{-(n+1)}{2(n-1)}$ y $x_2 = -\frac{1}{2}$
Aplico la fórmula resolvente

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Entonces

$$x_{1,2} = \frac{-4n \pm \sqrt{(4n)^2 - 4[4(n-1)(n+1)]}}{2[4(n-1)]}$$

Donde $2[4(n-1)] \neq 0$

$$x_{1,2} = \frac{-4n \pm \sqrt{16n^2 - 4[4n^2 - 4]}}{8(n-1)}$$

Entonces

$$x_{1,2} = \frac{-4n \pm \sqrt{16}}{8(n-1)}$$

Entonces mis raíces son: $x_1 = -\frac{(n+1)}{2(n-1)}$ $x_2 = -\frac{1}{2}$

Conclusión: para todas las ecuaciones de la forma

$4ax^2 + 4bx + c = 0$ siempre $-\frac{1}{2}$ es raíz y mi otra raíz me queda en función de los números a y c o sea $-\frac{1}{2} * \frac{c}{a}$

1. C a, b y c son números consecutivos que los llamé n-1,n y n+1 respectivamente pero como la ecuación es $4ax^2 + 4bx + c = 0$ entonces me queda $4(n-1)x^2 + 4nx + (n+1)$=0

Donde los coeficientes que reemplazo en la resolvente son:

a= 4(n-1)

b=4n

c=n+1

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $x_{1,2} = \frac{-4n \pm \sqrt{(4n)^2 - 4[4(n-1)(n+1)]}}{2[4(n-1)]}$

2. Considero que los conceptos matemáticos utilizados son:

- Raíces de un polinomio
- Método para encontrar las raíces de un polinomio cuadrático.

El polinomio p(x) es divisible por un polinomio de la forma (x-a) si y solo si p(x=a)=0; al valor x=a se le llama raíz o cero de p(x).

3. Como tengo una doble implicación voy a empezar de atrás para adelante, si yo consigo un valor "a" que me anula el polinomio p(x) ese valor es raíz de mi polinomio, eso significa que mi polinomio evaluado en x=a da cero, y más aún; el polinomio (x-a) divide a mi polinomio p(x).

Por ejemplo: si mi p(x)=$x^2 - 4$ en x=2 mi polinomio se hace cero, esto ocurre si y solo si 2 es raíz de mi polinomio, más aun (x-2) divide a x^2-4.

4. Método para calcular las raíces de un polinomio cuadrático: "formula resolvente"

Sean x_1 y x_2 las raíces reales de un polinomio, las podemos hallar mediante la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde a,b y c son los coeficientes del polinomio.

5.

Si a, b y c son enteros consecutivos, explicá si hay alguna característica que presenten las raíces de todas las ecuaciones de la forma $4ax^2 + 4bx + c = 0$.

$$4ax^2 + 4bx + c = 0.$$

$b = 4n$

$a = 4(n-1)$

$c = n+1.$

Fórmula resolvente

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 . a . c}}{2 . a}$$

$$x_1, x_2 = \frac{-4n \pm \sqrt{4n^2 - 4 . (n-1) . (n+1)}}{2 \, 4(n-1)}$$

$$\frac{-4n \pm \sqrt{(4n)^2 - 4[4(n-1) . (n+1)]}}{2[4(n-1)]} \rightarrow 8n - 8 \neq 0, \; 8n \neq 8, \; \boxed{n \neq 1}$$

$$\frac{-4n \pm \sqrt{16n^2 - 4[4(n^2 - n + n - 1)]}}{8(n-1)}$$

$$\frac{-4n \pm \sqrt{16n^2 - 4(4n^2 - 4)}}{8(n-1)}$$

$$\frac{-4n \pm \sqrt{16n^2 - 16n^2 + 16}}{8(n-1)}$$

$$x_1, x_2 = \frac{-4n \pm \sqrt{16}}{8(n-1)} = \frac{-4n \pm \sqrt{16}}{8(n-1)} = \frac{-4n \pm 4}{8(n-1)} = \frac{-4(n \pm 1)}{8(n-1)} =$$

$$x_1 = -\frac{(n+1)}{2(n-1)}$$

$$x_2 = -\frac{(n-1)}{2(n-1)} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

Graficando en Geogebra!

$$4ax^2 + 4bx + c = 0$$

si $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$.

$4a = 4$

$4b = 8$ raíces en $x_1 = -\frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{c}{a}$ $\quad -\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{1}$

$c = 3$ $\quad x_2 = -\frac{1}{2}$

si $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$

$4a = 8$ raíces en $x_1 = -1 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{c}{a}$ $\quad -\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{2}$

$4b = 12$ $\quad x_2 = -\frac{1}{2}$

$c = 4$

si $a = -1$, $b = 0$, $c = 1$

$4a = -4$ raíces en $x_1 = \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-1}$

$4b = 0$ $\quad x_2 = -\frac{1}{2}$

$c = 1$

si $a = -4$, $b = -3$, $c = -2$

$4a = -16$ raíces en $x_1 = -\frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{-2}{-4}$

$4b = -12$

$c = -2$ $\quad x_2 = -\frac{1}{2}$

si $a = -10$, $b = -9$, $c = -8$

$4a = -40$ raíces en $x_1 = -\frac{4}{10} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{-8}{-10}$

$4b = -36$ $\quad x_2 = -\frac{1}{2}$

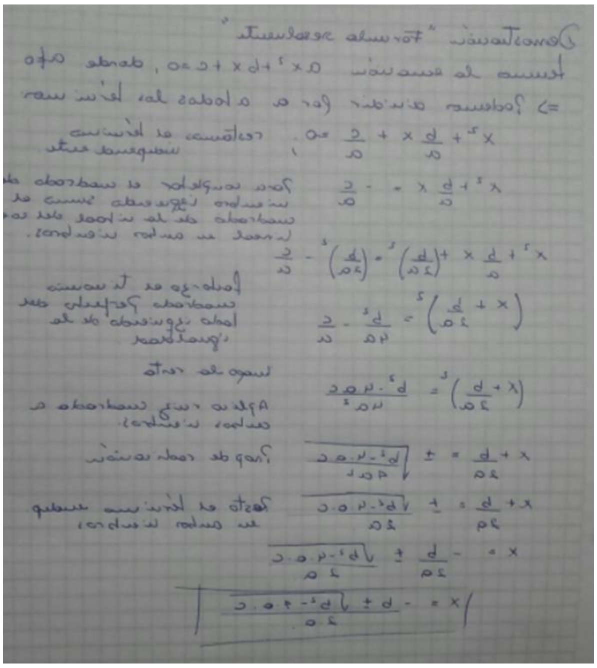
$c = -8$

si $a = 10$, $b = 11$, $c = 12$

$4a = 40$ raíces $x_1 = -\frac{6}{10} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{12}{10}$

$4b = 44$ $\quad x_2 = -\frac{1}{2}$

$c = 12$



6. Haber aplicado el resultado de la fórmula resolvente para hallar las características de las raíces de todas las ecuaciones de la forma

$$4ax^2 + 4bx + c = 0$$

Fue muy conveniente, tengo certeza de que podía usarla ya que la formula me devuelve las raíces reales de un polinomio cuadrático, quizás tendría restricciones si no supiera que mi polinomio original pertenece a enteros, pues era condición que mis coeficientes sean enteros consecutivos. De no ser por esto tendría que mirar el discriminante de la formula y pedir condiciones.

Resolución de A3

Resolución Experta:

Consigna Si a, b y c son enteros consecutivos, explicá si hay alguna característica que presenten las raíces de todas las ecuaciones de la forma $4ax^2 + 4bx + c = 0$.

Tengo la ecuación (*) $4ax^2 + 4bx + c = 0$ con a, b y $c \in \mathbb{Z}$.

Propongo 3 números consecutivos $a = n$

$b = n+1$, $n \in \mathbb{Z}$

$c = n+2$

Remplazo en la ecuación (*)

$$4nx^2 + 4(n+1)x + n+2 = 0$$

Notemos que $n \neq 0$ para que la ecuación sea cuadrática

Utilizo fórmula resolvente para encontrar las soluciones de la ecuación. Mis nuevos a, b y c son: $a = 4n$

$b = 4(n+1)$

$c = n+2$

Planteo la fórmula y remplazo.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-4(n+1) \pm \sqrt{16(n+1)^2 - 4 \cdot 4n \cdot (n+2)}}{2 \cdot 4n}$$

$$x_{1,2} = \frac{-4(n+1) \pm \sqrt{16(n^2+2n+1) - 16n(n+2)}}{8n}$$

$$x_{1,2} = \frac{-4(n+1) \pm \sqrt{\cancel{16n^2} + \cancel{32n} + 16 - \cancel{16n^2} - \cancel{32n}}}{8n}$$

$$x_{1,2} = \frac{-4(n+1) \pm 4}{8n}$$

Ahora veamos por separado x_1 y x_2

$$x_1 = \frac{-4n \cancel{-4} \cancel{+4}}{8n} = \frac{-4\cancel{n}}{8\cancel{n}} = -\frac{1}{2}$$

Una raíz siempre va a ser $-\frac{1}{2}$

$$x_2 = \frac{-4n-4-4}{8n} = \frac{-4n-8}{8n} = \frac{\cancel{4}(-n-2)}{\cancel{4}(2n)} = \frac{-n-2}{2n}$$

La segunda solución siempre va a tener la forma $\frac{-n-2}{2n}$.

Veamos cuando esta toma valores positivos, negativos o es cero.

Con $n > 0$

- $\frac{-n-2}{2n} > 0$ → como $n > 0$

$-n-2 > 0$ → no cambia la desigualdad

$n < -2$

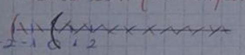
Esto está fuera del conjunto de n que estoy trabajando

- $\frac{-n-2}{2n} < 0$

$-n-2 < 0$

$n > -2$

Veamos los n que cumplen



$n \in (0, +\infty)$

- Veamos cuando $\frac{-n-2}{2n} = 0$

$-n-2 = 0$

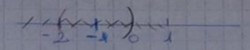
$\boxed{n = -2}$

Con $n < 0$.

- $\frac{-n-2}{2n} > 0$ → negativo ⇒ se invierte la desigualdad

$-n-2 < 0$

$n > -2$

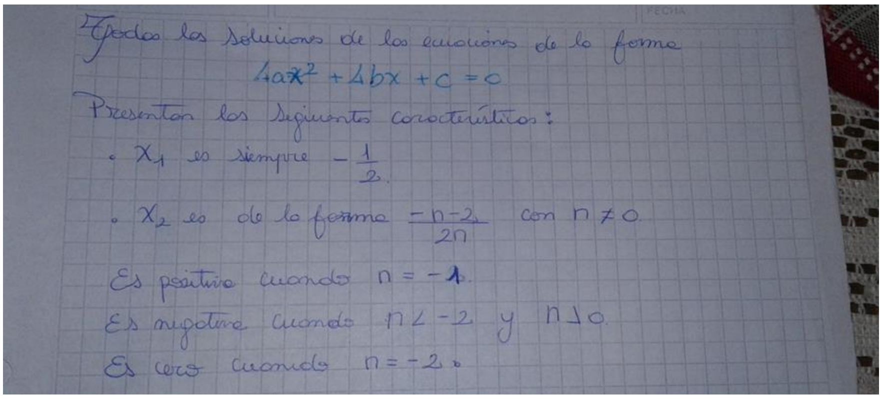


-1 es el único entero para el cual $\frac{-n-2}{2n} > 0$.

- $\frac{-n-2}{2n} < 0$ → es negativo ⇒ se invierte la desigualdad

$-n-2 > 0$

$n < -2$



Todas las soluciones de las ecuaciones de la forma

$4ax^2 + 4bx + c = 0$

Presentan las siguientes características:

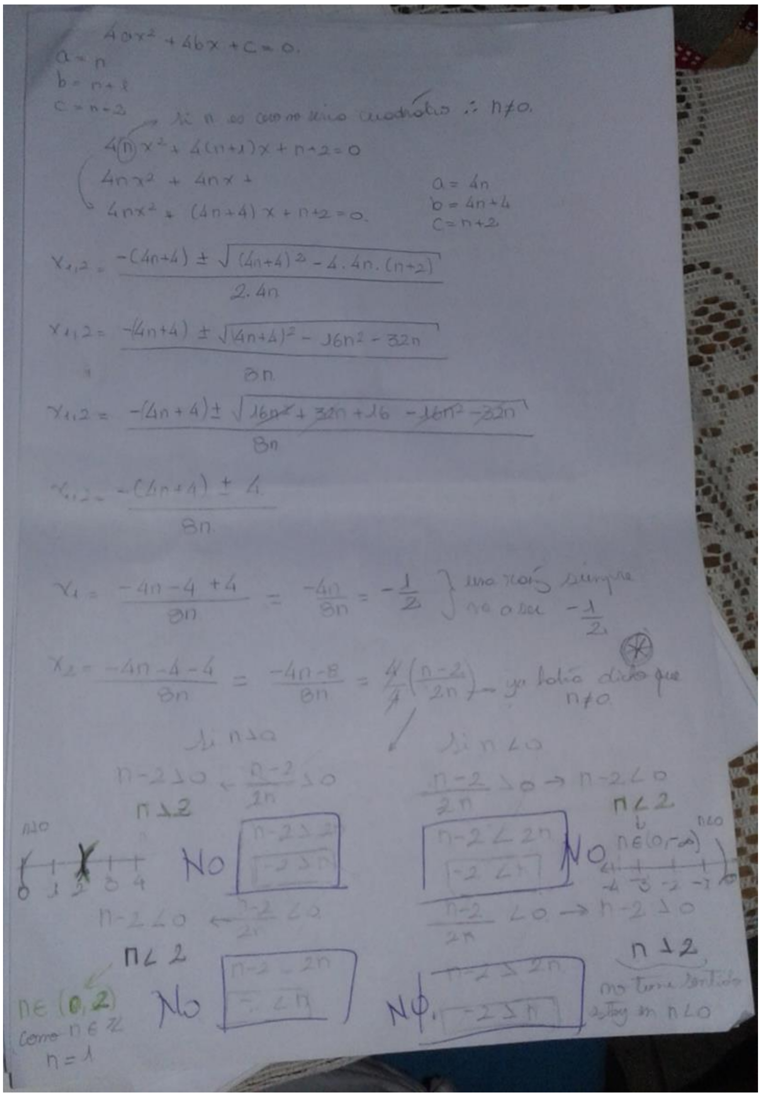
- x_1 es siempre $-\frac{1}{2}$.
- x_2 es de la forma $\frac{-n-2}{2n}$ con $n \neq 0$.

Es positivo cuando $n = -1$.

Es negativo cuando $n < -2$ y $n > 0$.

Es cero cuando $n = -2$.

Borrador:



$4ax^2 + 4bx + c = 0$.

$a = n$

$b = n+1$

$c = n+2$

si n es cero no sería cuadrática $\therefore n \neq 0$.

$4(n)x^2 + 4(n+1)x + n+2 = 0$

$4nx^2 + 4nx +$

$4nx^2 + (4n+4)x + n+2 = 0$.

$a = 4n$

$b = 4n+4$

$c = n+2$

$$x_{1,2} = \frac{-(4n+4) \pm \sqrt{(4n+4)^2 - 4 \cdot 4n \cdot (n+2)}}{2 \cdot 4n}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(4n+4) \pm \sqrt{(4n+4)^2 - 16n^2 - 32n}}{8n}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(4n+4) \pm \sqrt{\cancel{16n^2} + \cancel{32n} + 16 - \cancel{16n^2} - \cancel{32n}}}{8n}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(4n+4) \pm 4}{8n}$$

$$x_1 = \frac{-4n-4+4}{8n} = \frac{-4n}{8n} = -\frac{1}{2}$$ } una raíz siempre va a ser $-\frac{1}{2}$

$$x_2 = \frac{-4n-4-4}{8n} = \frac{-4n-8}{8n} = \frac{\cancel{4}}{\cancel{4}}\left(\frac{n-2}{2n}\right)$$ → ya había dicho que $n \neq 0$

Si $n > 0$

$n-2 > 0 \leftarrow \frac{n-2}{2n} > 0$

$n > 2$

No $\boxed{n-2 > 2n \quad -2 > n}$

$n-2 < 0 \leftarrow \frac{n-2}{2n} < 0$

$n < 2$

$n \in (0, 2)$

Como $n \in \mathbb{Z}$

$n = 1$

No $\boxed{n-2 < 2n \quad -2 < n}$

Si $n < 0$

$\frac{n-2}{2n} > 0 \rightarrow n-2 < 0$

$n < 2$

$n \in (0, -\infty)$

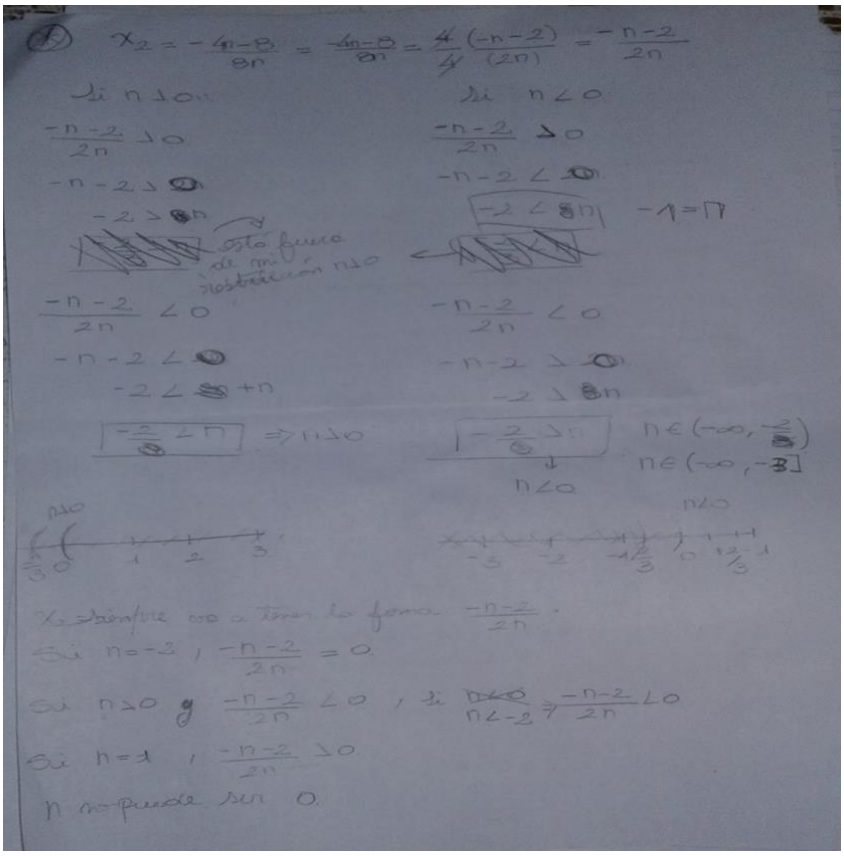
No $\boxed{n-2 < 2n \quad -2 < n}$

$\frac{n-2}{2n} < 0 \rightarrow n-2 > 0$

$n > 2$

no tiene sentido estoy en $n < 0$

No $\boxed{n-2 > 2n \quad -2 > n}$



$x_2 = -\frac{4n-8}{8n} = \frac{-4n-8}{8n} = \frac{4(-n-2)}{4(2n)} = \frac{-n-2}{2n}$

si $n > 0$ | si $n < 0$

$\frac{-n-2}{2n} > 0$ | $\frac{-n-2}{2n} > 0$

$-n-2 > 0$ | $-n-2 < 0$

$-2 > n$ | $\boxed{-2 < n}$ $-1 = n$

esto fuera de mi restricción $n > 0$

$\frac{-n-2}{2n} < 0$ | $\frac{-n-2}{2n} < 0$

$-n-2 < 0$ | $-n-2 > 0$

$-2 < n$ | $-2 > n$

$\boxed{-2 < n} \Rightarrow n > 0$ | $\boxed{-2 > n}$ $n \in (-\infty, -2)$ $n \in (-\infty, -2]$

$n < 0$

X_2 siempre va a tener la forma $\frac{-n-2}{2n}$.

Si $n = -2$, $\frac{-n-2}{2n} = 0$.

Si $n > 0$ y $\frac{-n-2}{2n} < 0$, si $n < -2 \Rightarrow \frac{-n-2}{2n} < 0$

Si $n = -1$, $\frac{-n-2}{2n} > 0$

n no puede ser 0.

2)

Los conceptos matemáticos que se trabajan en esta consigna son:

Ecuación cuadrática

Soluciones de ecuaciones cuadráticas

Inecuaciones y conjunto solución

Expresiones algebraicas

Elegí definir el concepto de ecuación cuadrática:

Una ecuación cuadrática es aquella de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{R}\ y\ a \neq 0$, a diferencia de las ecuaciones lineales, puede tener a lo sumo dos soluciones reales, no necesariamente distintas

Y la fórmula para hallar sus soluciones es:

$$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

3)

Recordemos que cuando trabajamos ecuaciones lineales, eran de la forma $ax + b = 0$ con $a, b \in \mathbb{R}\, y\, a \neq 0$. Estas ecuaciones eran de grado 1 porque la variable “x” estaba elevada a “la uno” y estas ecuaciones tenían una sola solución.

Cuando hablamos de ecuación cuadrática se suma un término de grado dos. Es decir, se suma un término con “X” elevada al cuadrado. La forma general es $ax^2 + bx + c = 0$ a, b y c son los coeficientes de cada término. B y c pueden ser cualquier número real pero “a” nunca puede ser cero porque la ecuación dejaría de ser cuadrática y se convertiría en lineal.

Estás ecuaciones tienen dos soluciones reales distintas o una solución real o pueden llegar a no tener solución.

Las soluciones se pueden encontrar con una fórmula especial que se llama "Fórmula resolvente", para poder utilizarla tenemos que identificar los coeficientes de la ecuación y reemplazarlos en la ecuación con su respectivo signo.

ejemplo

$x^2 - x - 2 = 0$ en esta ecuación vemos que a = 1 , b = -1 y c = -2

Ahora reemplacemos en la fórmula resolvente

$$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$X_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1}$$

manejo algebraico

$$X_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$X_1 = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ , } X_2 = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

fin del ejemplo

4)

Formula resolvente

"¿Cómo hallar las raíces de $f(x) = ax^2 + bx + c$?

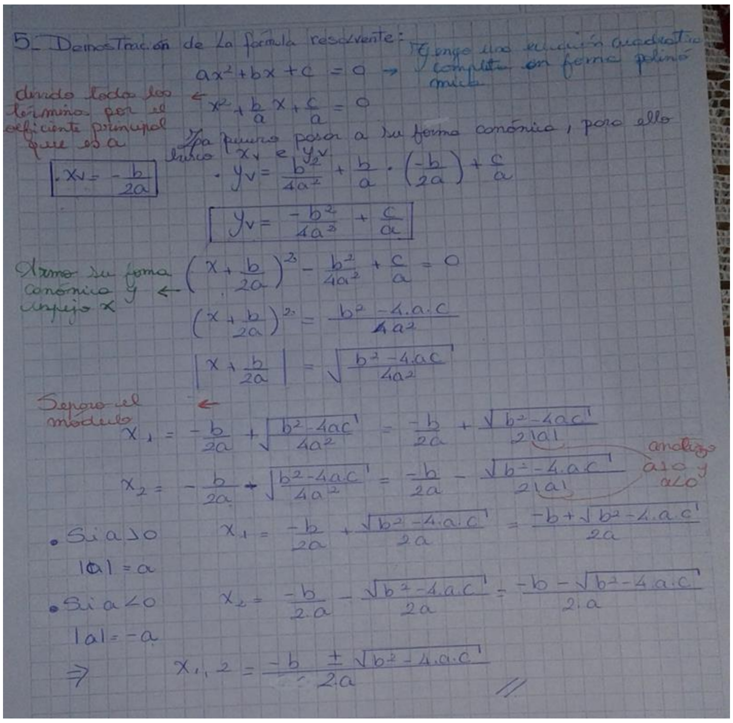
Hallar las raíces significa encontrar las x que verifican $ax^2 + bx + c = 0$.

Tenemos una Fórmula que resuelve este problema que es: $X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$,"

(Carnelli et al, 2006, pp 200-201)

5)

Demostración


5- Demostración de la fórmula resolvente:

$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow$ Tengo una ecuación cuadrática completa en forma polinómica

divido todos los términos por el coeficiente principal que es a $\leftarrow$ $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

Ya puedo pasar a su forma canónica, para ello busco x_v e y_v

$\boxed{x_v = -\frac{b}{2a}}$ $\quad y_v = \frac{b^2}{4a^2} + \frac{b}{a} \cdot \left(\frac{-b}{2a}\right) + \frac{c}{a}$

$\boxed{y_v = \frac{-b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}}$

Armo su forma canónica y despejo x $\leftarrow$ $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4.a.c}{4a^2}$

$\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \sqrt{\frac{b^2 - 4.ac}{4a^2}}$

Separo el módulo $\leftarrow$

$x_1 = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2|a|}$

$x_2 = -\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2 - 4a.c}{4a^2}} = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2|a|}$

analizo $a>0$ y $a<0$

• Si $a>0$ $\quad |a| = a$ $\quad x_1 = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2a}$

• Si $a<0$ $\quad |a| = -a$ $\quad x_2 = \frac{-b}{2.a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$

$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2a}$ //

6)Tengo la certeza de que puedo usar la propiedad ya que es la fórmula con la que se pueden resolver ecuaciones cuadráticas y está demostrado en el ítem anterior.

Resolución de A4

a)

Si *a, b y c* son enteros consecutivos, explicá si hay alguna característica que presenten las raíces de todas las ecuaciones de la forma*:* $4ax^2 + 4bx + c = 0$

Sean *a=n, b=n+1 y c=n+2, con a, b y c* números enteros consecutivos, con $n \in Z$ *. En* este caso*, con* $n \neq 0$

La forma de la ecuación es*:* $4nx^2 + 4(n+1)x + (n+2) = 0$. Luego, realizo la resolvente*:*

$$x_1, x_2 = \frac{-4(n+1) \pm \sqrt{4^2(n+1)^2 - 4 \times 4n \times (n+2)}}{2 \times 4 \times n} \Leftrightarrow \frac{-(4n+4) \pm \sqrt{16n^2 + 32n + 16 - 16n^2 - 32n}}{8n}$$

$$\Leftrightarrow x_1, x_2 = \frac{-(4n+4) \pm \sqrt{16}}{8n} \Leftrightarrow \frac{-(4n+4) \pm 4}{8n} \Leftrightarrow$$

$$x_1 = \frac{-4n-4+4}{8n} \Leftrightarrow \frac{-4n}{8n} = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-4n-4-4}{8n} \Leftrightarrow \frac{-4n-8}{8n} = -\frac{4(n+2)}{8n} = -\frac{(n+2)}{2n} = -\frac{c}{2a}$$

Las raíces de todas las ecuaciones de la forma $4ax^2 + 4bx + c = 0$ *son* $x_1 = -\frac{1}{2}$ *y* $x_2 = -\frac{c}{2a}$

b)

Nº2 para estudiantes de EM1 "lo matemático" [illegible] (1)

Consigna: Si a, b y c son enteros consecutivos, explica si hay alguna característica que presentan las raíces de todas las ecuaciones de la forma $4ax^2 + 4bx + c = 0$

Para encontrar las raíces de la forma $4ax^2 + 4bx + c = 0$, $a \neq 0$

▲ le doy valores numéricos positivos a a, b y c (de menor a mayor)

Sean $a = 1$, $b = 2$ y $c = 3$

★ $4x^2 + 8x + 3 = 0$ $\qquad \Delta = 8^2 - 4.4.3 = 64 - 48 = 16$

Las raíces son $x_1 x_2 = \frac{-8 \pm \sqrt{16}}{8} = \frac{-8 \pm 4}{8}$ $\quad x_1 = -\frac{1}{2}$, $\quad x_2 = -\frac{3}{2}$

Sean $a = 2$, $b = 3$ y $c = 4$

$8x^2 + 12x + 4 = 0$ $\qquad \Delta = 12^2 - 4.8.4 = 144 - 128 = 16$

Las raíces son $x_1 x_2 = \frac{-12 \pm 4}{16}$ $\quad x_1 = -1 \rightarrow$ [illegible], $\quad x_2 = -\frac{1}{2}$

Sean $a = 3$, $b = 4$ y $c = 5$

$12x^2 + 16x + 5 = 0$ $\qquad \Delta = 16^2 - 4.12.5 = 256 - 240 = 16$

Las raíces son $x_1 x_2 = \frac{-16 \pm 4}{24}$ $\quad x_1 = -\frac{1}{2}$, $\quad x_2 = -\frac{5}{6} \rightarrow$ [illegible]

▲ Le doy valores numéricos negativos a a, b y c

Sean $a = -3$, $b = -2$ y $c = -1$

$-12x^2 - 8x - 1 = 0$ $\qquad \Delta = (-8)^2 - 4.(-12).(-1) = 64 - 48 = 16$

Las raíces son $x_1 x_2 = \frac{8 \pm 4}{-24}$ $\quad x_1 = -\frac{1}{2}$, $\quad x_2 = -\frac{1}{6} \rightarrow$ [illegible]

Sean $a = -2$, $b = -1$ y $c = 0$ (a, b son enteros negativos)

$-8x^2 + (-4)x + 0 = 0$

$-8x^2 - 4x = 0$

$-4x(2x + 1) = 0$

$\boxed{x_1 = 0}$ $\qquad \boxed{x_2 = -\frac{1}{2}}$

¿Qué sucede si $a = -1$, $b = 0$ y $c = 1$? (2)

$$-4x^2 + 0x + 1 = 0$$

$$-4x^2 + 1 = 0$$

$$-4x^2 = -1$$

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

$$|x| = \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$\boxed{x_1 = \frac{1}{2}}$ $\boxed{x_2 = -\frac{1}{2}}$

Dando valores numéricos a a, b y c se observa que una de las raíces es $-\frac{1}{2}$ (la forma $4ax^2 + 4bx + c = 0$)

▲ Si $a = n$, $b = n+1$ y $c = n+2$ — $\cancel{n \geq 1}$ $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ → (de menor a mayor)

$$4nx^2 + 4(n+1)x + n + 2 = 0$$

$$\Delta = (4(n+1))^2 - 4 \cdot 4n(n+2) = 16(n+1)^2 - 16n(n+2) =$$

$$16 \cdot (n^2 + 2n + 1) - 16n^2 - 32n = 16n^2 + 32n + 16 - 16n^2 - 32n = 16$$

Las raíces son $x_1 x_2 = \frac{-4(n+1) \pm 4}{2 \cdot 4n} = \frac{-4n - 4 \pm 4}{8n}$

$$\left[x_1 = \frac{-4n - 4 + 4}{8n} = \frac{-4n}{8n} = -\frac{1}{2}\right]$$

$$\left[x_2 = \frac{-4n - 4 - 4}{8n} = \frac{-4n - 8}{8n} = \frac{-4(n+2)}{8n} = \frac{-\overbrace{(n+2)}^{c}}{2\underbrace{n}_{a}}\right]$$

▲ Si $a = n-1$, $b = n$ y $c = n+1$ — $n \in \mathbb{Z} - \{1\}$

$$4 \cdot (n-1)x^2 + 4nx + n + 1 = 0$$

$$\Delta = (4n)^2 - 4 \cdot 4(n-1) \cdot (n+1) = 16n^2 - 16 \cdot (n^2 - 1) = 16$$

Las raíces son $x_1 x_2 = \frac{-4n \pm 4}{2 \cdot 4(n-1)} = \frac{-4n \pm 4}{8(n-1)} \rightarrow n \neq 1$

Sigo hoja (3)

$$\left[x_1 = \frac{-4n+4}{8(n-1)} = \frac{-4(n-1)}{8(n-1)} = -\frac{1}{2}\right]$$

$$\left[x_2 = \frac{-4n-4}{8(n-1)} = \frac{-4(n+1)}{8(n-1)} = \frac{-\overbrace{(n+1)}^{c}}{\underbrace{2(n-1)}_{a}}\right] = -\frac{c}{2.a}$$

Al simbolizar los valores de a, b y c, obtenemos las raíces de la forma

$4ax^2+4bx+c=0 \rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}$ y $x_2 = -\frac{c}{2.a}$

Si observamos en las raíces de * $x = -\frac{1}{2}$ y $x_2 = -\frac{3}{2}$ de la forma

$$\underbrace{\underset{a}{4}x^2 + \underset{b}{8}x + \underset{c}{3} = 0}_{}$$

$x_2 = -\frac{3^{\,c}}{2.1\ a}$ Pero a = 4.

Estos no son los a.b elegidos

En este ejercicio $a=1$, $b=2$ y $c=3$ Entonces $x_2 = -\frac{3^{\,c}}{2\,1\ a}$

---

otra forma

$$\underbrace{4a}_{A}x^2 + \underbrace{4b}_{B}x + \underbrace{c}_{C} = 0 \qquad a \neq 0$$

$$x_1 x_2 = \frac{-4b \pm \sqrt{(4b)^2 - 4.4a.c}}{2.4a} = \frac{-4b \pm \sqrt{16b^2 - 16a.c}}{8a} =$$

$$\frac{-4b \pm \sqrt{16.(b^2 - a.c)}}{8a} = \frac{-4b \pm 4\sqrt{b^2 - a.c}}{8.a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - a.c}}{2.a}$$

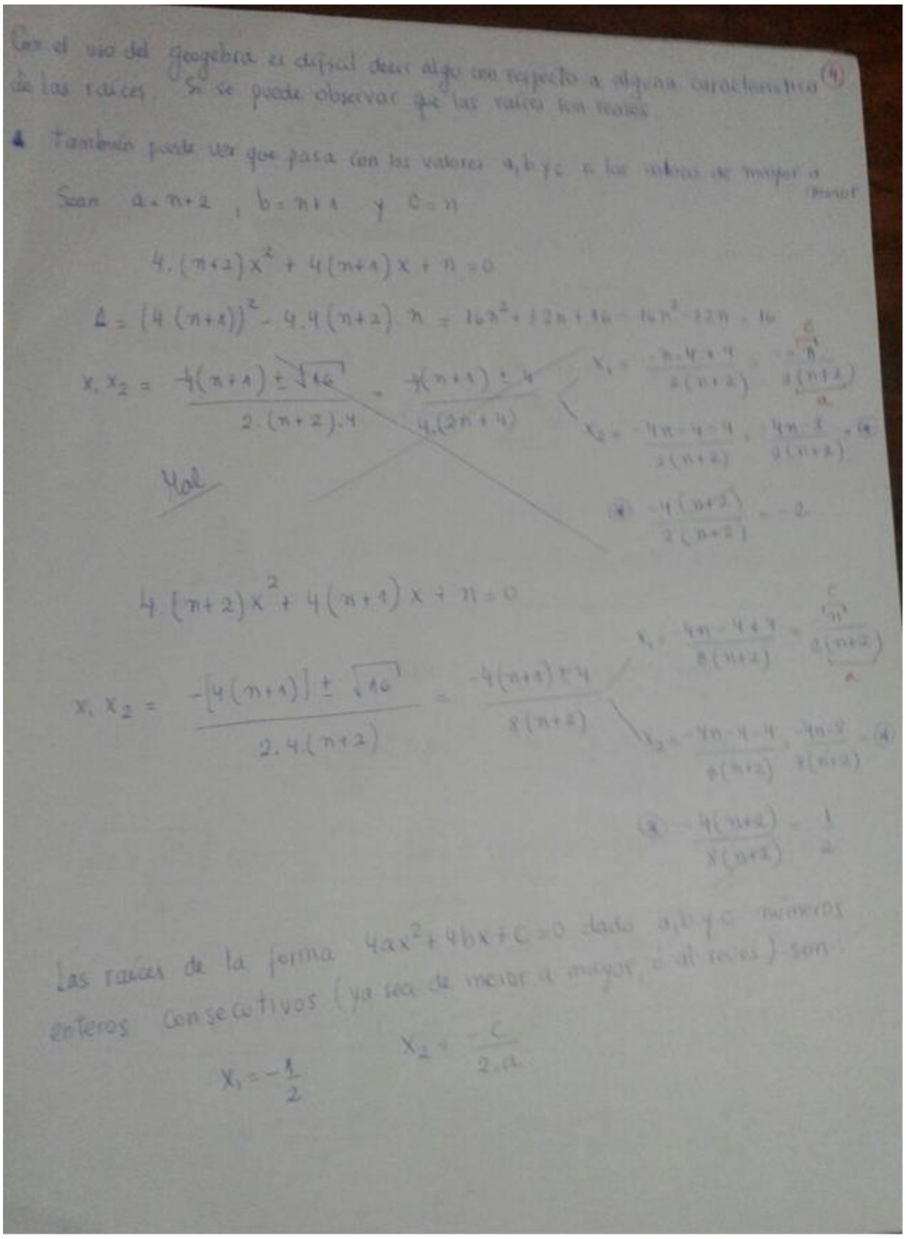
Si tomamos $a=n$, $b=n+1$ y $c=n+2$

$$x_1 x_2 = \frac{-(n+1) \pm \sqrt{(n+1)^2 - n.(n+2)}}{2.n} = \frac{-(n+1) \pm \sqrt{n^2+2n+1-n^2 -}}{2n}$$

$$x_1 x_2 = \frac{-(n+1) \pm \sqrt{1}}{2n} = \frac{(-n-1) \pm 1}{2n}$$

$\nearrow x_1 = \frac{-n-1+1}{2n} = \frac{-n}{2n} = -\frac{1}{2}$

$\searrow x_2 = \frac{-n-1-1}{2n} = \frac{-n-2}{2n} = -$


Con el uso del geogebra es difícil decir algo con respecto a alguna característica de las raíces. Sí se puede observar que las raíces son reales. (4)

También puede ver qué pasa con los valores a, b y c si los coloco de mayor a menor

Sean $a = n+2$, $b = n+1$ y $c = n$

$4.(n+2)x^2 + 4(n+1)x + n = 0$

$\Delta = (4(n+1))^2 - 4.4(n+2).n = 16n^2 + 32n + 16 - 16n^2 - 32n = 16$

$x_1 x_2 = \frac{-4(n+1) \pm \sqrt{16}}{2.(n+2).4} = \frac{-4(n+1) \pm 4}{4.(2n+4)}$

Mal

$4.(n+2)x^2 + 4(n+1)x + n = 0$

$x_1 x_2 = \frac{-[4(n+1)] \pm \sqrt{16}}{2.4.(n+2)} = \frac{-4(n+1) \pm 4}{8(n+2)}$

$x_1 = \frac{-4n-4+4}{8(n+2)} = \frac{c}{2(n+2)}$

$x_2 = \frac{-4n-4-4}{8(n+2)} = \frac{-4n-8}{8(n+2)} = \frac{-4(n+2)}{8(n+2)} = -\frac{1}{2}$

Las raíces de la forma $4ax^2 + 4bx + c = 0$ dado a, b y c números enteros consecutivos (ya sea de menor a mayor, ó al revés) son:

$x_1 = -\frac{1}{2}$ $x_2 = \frac{-c}{2.a}$

c)

Si a, b y c son enteros consecutivos, explicá si hay alguna característica que presenten las raíces de todas las ecuaciones de la forma: $4ax^2 + 4bx + c = 0$, con $a \neq 0$.

Sean a=n, b=n+1 y c=n+2, con a, b y c números enteros consecutivos, con $n \in Z$ *y* $n \neq 0$ *.A continuación, reemplazo estas expresiones de número consecutivos en la fórmula de la resolvente para hallar las raíces.*

También podemos comprobar con a=n-1, b=n y c=n+1, en este caso $n \in Z$ *y* $n \neq 1$

La forma de la ecuación es: $4nx^2 + 4(n+1)x + (n+2) = 0$. *Luego, realizo la resolvente:*

$$x_1, x_2 = \frac{-4(n+1) \pm \sqrt{4^2(n+1)^2 - 4 \times 4n \times (n+2)}}{2 \times 4 \times n} \Leftrightarrow \frac{-(4n+4) \pm \sqrt{16n^2 + 32n + 16 - 16n^2 - 32n}}{8n}$$

$$\Leftrightarrow x_1, x_2 = \frac{-(4n+4) \pm \sqrt{16}}{8n} \Leftrightarrow \frac{-(4n+4) \pm 4}{8n} \Leftrightarrow$$

$x_1 = \frac{-4n-4+4}{8n} \Leftrightarrow \frac{-4n}{8n} = -\frac{1}{2}$ *Una de las raíces va hacer* $-\frac{1}{2}$
$x_2 = \frac{-4n-4-4}{8n} \Leftrightarrow \frac{-4n-8}{8n} = -\frac{4(n+2)}{8n} = -\frac{(n+2)}{2n} = -\frac{c}{2a}$ *Esta raíz quedo expresada en términos de los valores de c y a.*

Las raíces de todas las ecuaciones de la forma $4ax^2 + 4bx + c = 0$ *son* $x_1 = -\frac{1}{2}$ *y* $x_2 = -\frac{c}{2a}$ *. Ambas son raíces reales.*

2) Uno de los conceptos matemáticos de esta consigna es la ecuación cuadrática y la fórmula de la resolvente.

Se llama ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática con incógnita x, a la siguiente expresión:

$ax^2 + bx + c = 0$, donde *a, b y c* son números reales*, y a≠ 0*

Pueden ser completas o incompletas, la anterior es completa, las incompletas se producen cuando *b=0* o cuando *c=0.*

3) Una ecuación cuadrática tiene la forma (Señalo en el pizarrón $ax^2 + bx + c = 0$) donde los coeficientes reales son *a, b y c.*
Cuando se pide que el coeficiente *a* sea distinto a cero es porque si esto ocurre, la ecuación quedaría de la forma $bx + c = 0$ que representa a una ecuación lineal. Por ejemplo: $5x + 7 = 0$

Por ejemplo, son ecuaciones cuadráticas:
$\frac{1}{2}x^2 + 2x + 4 = 0$
$x^2 - 81 = 0$
$6x - x^2 + 9 = 0$

¿Podrían dar otros ejemplos de una función cuadrática? ¿Cuáles?
La variable x es lo que quiero hallar, o sea, son los valores de x que busco para satisfaga la ecuación cuadrática. Esto quiere decir, encontrar valores que haga que la ecuación dé cero.

4) La propiedad matemática utilizada en la resolución de la consigna es la fórmula de la resolvente.
Las raíces de una ecuación cuadrática pueden obtenerse mediante la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

5) Demostración:

La ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática es de la expresión:

$$ax^2 + bx + c = 0\text{, } \textit{con } a\neq 0$$

Primero despejo c de la ecuación, obteniendo*:*

$ax^2 + bx = -c$

Luego, saco factor común *a*,

$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) = -c \rightarrow \textit{Por definición } a\neq 0$

Después, despejo *a*

$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$

Sumo a ambos miembros $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ para completar cuadrados en el primer miembro de la igualdad:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

Manipulo aritméticamente en el segundo miembro de la igualdad:

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2}$

Despejo, obteniendo:

$x + \frac{b}{a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$

Finalmente,

$x = -\frac{b}{a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Por lo tanto, las raíces de la ecuación cuadrática se calculan con esta fórmula.

6) Tenía certeza de usar esta propiedad ya que la ecuación de segundo grado tenía coeficientes reales.

Resolución de A5

Sea $4ax^2 + 4bx + c = 0$ una ecuación cuadrática igualada a cero. Buscaremos las raíces de dicha función utilizando la formula resolvente y realizando la siguiente sustitución.

Supongamos a=y; b=y+1; c=y+2 con y perteneciente a los números enteros. Luego la igualdad quedaría:

$4yx^2 + 4(y+1)x + y + 2 = 0$

Para hallar las raíces utilizaré la formula resolvente. $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Con a=4y; b=4(y+1)=4y+4; c=y+2

En primera instancia analizaré solo el discriminante:

Discriminante=$b^2 - 4ac$ que sustituyendo queda lo siguiente:

D=$(4y+4)^2 - 4.4.y.(y+2)$=$16y^2 + 32y + 16 - 16y(y+2)$

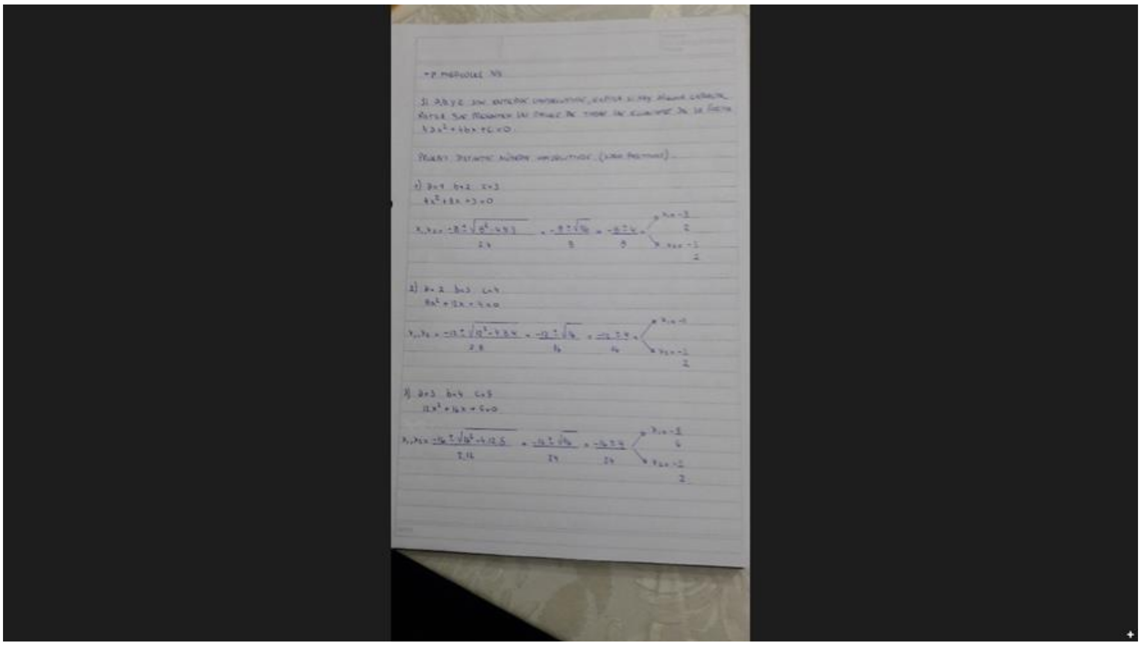
D=$16y^2+32y+16-16y^2-32y$=16
Luego:
$x_{1,2}=\frac{-4y-4\pm\sqrt{16}}{2.4y}$.
$x_1=\frac{-4y-4+\sqrt{16}}{2.4y}$=$\frac{-4y-4+4}{8y}$=$-\frac{1}{2}$; por otro lado; $x_2=\frac{-4y-4-\sqrt{16}}{2.4y}$=$\frac{-4y-4-4}{8y}$=$-\frac{1}{2}-\frac{1}{y}$

Nota 1: Observar que para hallar la segunda raíz de la ecuación; y=0 no está definido, luego y pertenece a todos los números enteros menos el cero.

Nota 2: Una de las raíces siempre será $-\frac{1}{2}$, mientras que la otra se puede hallar con la siguiente ecuación: x_2=$-\frac{1}{2}-\frac{1}{y}$ con y perteneciente a todos los números enteros menos el cero.

Respuesta a las preguntas:

1) Intentos en lápiz y papel:



Luego de realizar tres intentos observe que una de las raíces se repetía entonces decidí hacerlo de forma genérica con a=y; b=y+1; c=y+2 con y perteneciente a los números enteros.

El siguiente paso fue buscar la definición de numero consecutivo, porque pensé que pasaría si pruebo con a=y; b=y-1; c=y-2 con y perteneciente a los números enteros.

Luego de resolver, obtuve lo siguiente:
$x_1=\frac{-4y+4-\sqrt{16}}{2.4y}$=$\frac{-4y+4-4}{8y}$=$-\frac{1}{2}$; por otro lado; $x_2=\frac{-4y+4+\sqrt{16}}{2.4y}$=$\frac{-4y+4+4}{8y}$=$-\frac{1}{2}+\frac{1}{y}$
Pero la definición de número consecutivo es:
Un número consecutivo se obtiene sumando una unidad al anterior.
Número consecutivo = n + 1. n es cualquier número entero.
Son números consecutivos 2 y 3, 158 y 159.
Necesariamente tiene que pasar que a›b›c.

2) Los conceptos matemáticos que se trabajan en esta consigna son:

- Resolver ecuaciones cuadráticas.
- Encontrar raíces de una ecuación.
- Formula resolvente.
- Definición de número consecutivo.
- Operaciones de expresiones algebraicas y cálculos combinados.
- Sustitución.

Definición de ecuación:

Ecuación es la igualdad de dos expresiones algebraicas no equivalentes, o sea, una igualdad que sólo se verifica para determinados valores de las incógnitas. En una ecuación existen una o varias variables a las que se las llama incógnitas.

Las incógnitas se acostumbran a representar por las ultimas letras del alfabeto: t,u,v,x,y,z.

Una ecuación cuadrática, o sea de segundo grado es del tipo $ax^2 + bx + c = 0$, con a ≠ 0, con a,b,c números reales, o cualquier otra ecuación en la que al operar, transponer términos y simplificar adopten esa expresión.

Hay tres formas de hallar las raíces (el o los valores de la variable) de las ecuaciones cuadráticas:

1. Factorización Simple
2. Completando el Cuadrado
3. Fórmula Cuadrática o Resolvente.

Ejemplo:

$x^2 = 4$

Tenemos un ejemplo de ecuación cuadrática, ya que esta igualdad se verifica para los siguientes valores de x.

$x_1 = 2$ y $x_2 = -2$

3) Explicación de la definición:

Entendamos que una igualdad es la expresión de dos cantidades o expresiones algebraicas que tienen el mismo valor y ambas expresiones se hallan separadas por el signo = (igual a).

Ejemplos: 3.6 – 5 = 13 ó x = y + z.

Por otro lado una identidad es la igualdad de dos expresiones algebraicas equivalentes, o sea una igualdad que se verifica para cualesquiera valores de las letras que forman parte de la misma. Ejemplo: $(a + b)^2 = (a + b). (a + b)$

En el caso de las ecuaciones de segundo grado la igualdad se va a verificar como máximo para dos valores de la incógnita dentro del campo de los números reales. Si extendemos las soluciones al campo de los números complejos las soluciones serán dos siempre.

4) Resultados, propiedades o conceptos matemáticos que se utilizaron. Propiedades para resolver ecuaciones de segundo grado:

1) Se efectúan las operaciones indicadas, si las hay.
2) Se hace la transposición de términos, pasando todos los términos a uno de los miembros.
3) Se reducen términos semejantes y la ecuación queda igualada a cero.
4) Se halla la incógnita: para ello se utiliza la fórmula resolvente.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

5) Una vez obtenida las soluciones de la ecuación podemos verificar si cumplen con la igualdad, sustituyendo las incógnitas por las soluciones. Después de efectuar las operaciones pertinentes debe llegarse a una igualdad.

5) <u>Demostración de la formula resolvente:</u>

El objetivo es convertir el polinomio $ax^2 + bx + c$ en un cuadrado perfecto, (o sea, completamos cuadrados).

Tenemos $ax^2 + bx + c = 0$

Multiplicamos a ambos lado por 4a: $4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$

Sumamos a ambos lados b^2: $4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 = b^2$

Pasamos 4ac al miembro derecho y ya tenemos un cuadrado perfecto en el miembro izquierdo;

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$
$$(2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b + b^2 = b^2 - 4ac$$
$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Eliminamos el cuadrado de la izquierda $2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$

Despejamos x: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

6) Luego de la resolución experta llegue a las siguientes conclusiones.

Dados tres números consecutivos a›b›c y realizando la siguiente sustitución: a=y; b=y+1; c=y+2 con y perteneciente a los números enteros. Podemos obtener sus raíces con las siguientes fórmulas: $x_1 = \frac{-4y-4+\sqrt{16}}{2.4y} = \frac{-4y-4+4}{8y} = -\frac{1}{2}$; por otro lado; $x_2 = \frac{-4y-4-\sqrt{16}}{2.4y} = \frac{-4y-4-4}{8y} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{y}$. Donde una de las raíces siempre se repite y la otra dependerá del valor que elijamos para y, con la salvedad que y≠0 ya que la fórmula no está definida en ese valor. Si observamos la definición de ecuación cuadrática a=y≠0 ya que si sucede lo contrario no sería una ecuación de segundo grado y estaríamos observando una ecuación lineal de la forma: $y = bx + c$ donde b,c son números enteros.

Resolución de A6

a) Como a, b y c son números enteros consecutivos los voy a llamar a=n, b=n+1 y c=n+2. Luego los reemplazo en la ecuación dada, quedando de este modo:

$4n.x^2+4(n+1).x+n+2=0$

Para hallar las raíces de la ecuación vamos a utilizar la fórmula resolvente, obteniendo de este modo:

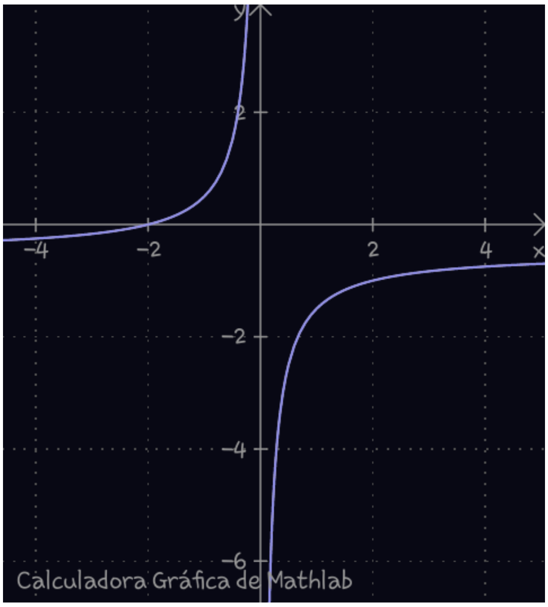
$\frac{-4.(n+1)\pm\sqrt{16.(n+1)^2-4.4.n-(n+2)}}{2.4n} = \frac{-4n-4\pm4}{8n}$

Finalmente sus dos raíces serán $-\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{2} - \frac{1}{n}$

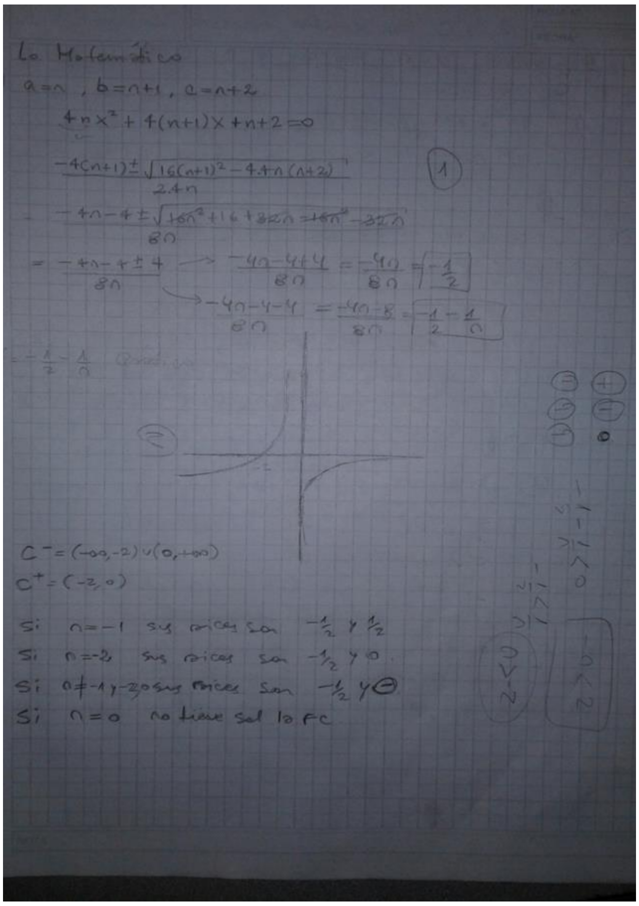
Notamos que una de las raíces, dependiendo del valor que tome n, será positiva, negativa o cero.

Para hallar esto vamos a tomar a la raíz como la función F(n)= $-\frac{1}{2} - \frac{1}{n}$ y luego hallar sus raíces, conjunto de positividad y conjunto de negatividad.

Para realizar el gráfico vamos a utilizar el programa Mathlab para obtener el gráfico de una manera más rápida y más exacta.



Como observamos en el gráfico, para todo nϵ(-2,0) la función es positiva, es decir, la raíz será positiva.
Para los nϵ(-∞,2)u(0,+∞) la raíz será negativa.
Para n =2 la raíz será igual a 0.
Finalmente observamos que las raíces dependerán del valor que tome n, pero como también sabemos que a=n, por ende las raíces dependerán del valor que tome el coeficiente a.
b)



c) Lo primero que realizamos es pensar a a=n, b=n+1 y c=n+2 ya que son consecutivos. Después lo reemplazamos en la ecuación dada y aplicando la fórmula resolvente obtengo las raíces. Luego las raíces son $-\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{2}-\frac{1}{n}$

Una vez que tengo las raíces, noto que una de ellas depende del valor que tome n, como la consigna me pide que caracterice las raíces vamos a ver para que valores de n la raíz será positiva, negativa o cero.

Para llevar a cabo esto vamos a pensar a la raíz como una función, de esta manera F(n)= $-\frac{1}{2}-\frac{1}{n}$. El paso siguiente es hallar las raíces de la función, el conjunto de positividad y el conjunto de negatividad.

Para hallar lo antes mencionado vamos a utilizar el programa Mathlab, ya que de esta manera el gráfico lo realizaremos de una manera más rápida y exacta.

Finalmente observamos el gráfico y obtenemos los valores para n en donde la función, es decir, la raíz es positiva, negativa o cero.

Después de realizar el ejercicio note que al analizar los valores de n, estoy analizando los valores que puede tomar a, ya que a=n. entonces la raíz va a depender del coeficiente a.

Ejercicio 2:

El concepto matemático trabajado en la consigna es el concepto de funciones.

Una función es una relación entre dos conjuntos, uno llamado x (dominio) y uno llamado y (codominio o imagen) en donde cada elemento del primer conjunto le corresponde uno del segundo.

Ejercicio 3:

Una función se puede referir a situaciones cotidianas, como por ejemplo el recorrido de un auto con velocidad constante que dependerá de el tiempo, el costo de una llamada telefónica que dependerá de su duración o hasta el gasto de la sube que dependerá de la

cantidad de viajes realizados. En todos los casos existe una relación entre dos conjuntos, una relación de dependencia. Una función es esta relación que existe entre los conjuntos, en donde a cada elemento de primer conjunto le corresponde un elemento del segundo.
Por ejemplo tomemos el caso del auto, supongamos que tiene una velocidad de 70 km/h. La función seria F(t)= 70.t, en donde t será el tiempo transcurrido. Para cada valor de t le corresponde un valor en F(t), en este caso es el recorrido realizado en el tiempo t.
Si t=1 la distancia recorrida será de 70km.
Si t=5 la distancia recorrida será de 350km.
En una función existirá una variable independiente, que sería el tiempo, y una variable dependiente, en este caso la distancia recorrida en ese tiempo.

Ejercicio 4:

Una de las propiedades utilizadas en la consigna fue la fórmula resolvente.
La fórmula resolvente sirve para hallar las raíces de una función de segundo grado de la forma ax^2+bx+c. La fórmula es la siguiente:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ permite discriminar la cantidad de raíces reales que tiene la función.
Cuando $\Delta<0$ las raíces serán complejas.
Cuando $\Delta>0$ las raíces serán reales.
Cuando $\Delta=0$ tendrá una raíz doble.

Ejercicio 5:

Sea $f(x)=ax^2+bx+c$
Como f tiene grado 2, es irreducible si y solo si tiene un factor en los reales de grado 1, que podemos asumir Mónico de la forma X-x con x perteneciente a los reales. Así que en este caso f es reducible en los reales si y solo si f tiene una raíz real.
Luego
$f= a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}) = a((x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}) = a((x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2})$
El discriminante de f es $\Delta = b^2 - 4ac$
Si existe w Є reales tal que $w^2 = \Delta$, se tiene que
$f= a((x+\frac{b}{2a})^2 - (\frac{w}{2a})^2) = a(x-\frac{-b+w}{2a})\, a(x-\frac{-b-w}{2a})$
y por lo tanto f(x)=o las raíces serán
$X1= a(x-\frac{-b+w}{2a}) = a(x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a})$
$X2= a(x-\frac{-b-w}{2a}) = a(x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a})$

Ejercicio 6:

Creo que puedo utilizar en este ejercicio la fórmula resolvente, ya que esta fórmula se utiliza para funciones de segundo grado. Y para este ejercicio es importante su utilización. Pude ver al final del ejercicio que las raíces se podían hallar solo obteniendo el valor del coeficiente a, pero hallar las raíces me sirvió para clasificarlas. Dependiendo del valor del coeficiente a, la raíz será positiva, negativa o cero.

Resolución de A7

1. **Resolución experta**

$$x_{1,2} = -\frac{4b \pm \sqrt{(4b)^2 - 4(4a)c}}{2(4a)} = -\frac{4b \pm \sqrt{16b^2 - 16ac}}{8a} = \frac{4b \pm \sqrt{16(b^2 - ac)}}{8a} = \frac{4b \pm \sqrt{16}\sqrt{b^2 - ac}}{8a}$$

$$= \frac{-4b \pm 4\sqrt{b^2 - ac}}{8a} = \frac{\cancel{4}(-b \pm \sqrt{b^2 - ac})}{\cancel{8}a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - ac}}{2a}$$

$a = n,\ \ b = n + 1$ y $c = n + 2$ con $n \in Z$

$$x_1 = \frac{-(n+1) + \sqrt{(n+1)^2 - n(n+2)}}{2n} = \frac{-n - 1 + \sqrt{\cancel{n^2} + \cancel{2n} + 1 - \cancel{n^2} - \cancel{2n}}}{2n} = \frac{-n - 1 + 1}{2n} = \frac{-\cancel{n}}{2\cancel{n}} = \frac{-1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-(n+1) - \sqrt{(n+1)^2 - n(n+2)}}{2n} = \frac{-n - 1 - \sqrt{\cancel{n^2} + \cancel{2n} + 1 - \cancel{n^2} - \cancel{2n}}}{2n} = \frac{-n - 1 - 1}{2n} = \frac{-n - 2}{2n} = \frac{-\cancel{n}}{2\cancel{n}} - \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}n}$$

Las raíces son: $x_1 = -\frac{1}{2}$ y $x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{n}$

<u>Imágenes de la hoja borrador</u>

Si a, b y c son enteros consecutivos, explicá si hay alguna característica que presenten las raíces de todas las ecuaciones de la forma $4ax^2+4bx+c=0$

Primero voy a probar dándole valores distintos a a, b y c para ver si encuentro una característica en común.

* $a=-3$, $b=-2$ y $c=-1$

$4\cdot(-3)x^2+4\cdot(-2)x-1=-12x^2-8x-1$

$-12x^2-8x-1=0$

Busco raíces: $\dfrac{8\pm\sqrt{64-4\cdot(-12)\cdot(-1)}}{2(-12)}=\dfrac{8\pm\sqrt{16}}{-24}=\dfrac{8\pm 4}{-24}$ $\begin{cases}\dfrac{12}{-24}=\dfrac{-1}{2}\\ \dfrac{4}{-24}=\dfrac{-1}{6}\end{cases}$

$x_1=\dfrac{-1}{2}$, $x_2=\dfrac{-1}{6}$

* $a=-4$, $b=-3$, $c=-2$

$4(-4)x^2+4(-3)x-2=-16x^2-12x-2$

$-16x^2-12x-2=0$

$\dfrac{12\pm\sqrt{144-4\cdot(-16)\cdot(-2)}}{2(-16)}=\dfrac{12\pm\sqrt{144-128}}{-32}=\dfrac{12\pm\sqrt{16}}{-32}$ $\begin{cases}\dfrac{12+4}{-32}=\dfrac{16}{-32}\\ \dfrac{12-4}{-32}=\dfrac{8}{-32}\end{cases}$

$x_1=-\dfrac{1}{2}$, $x_2=-\dfrac{1}{4}$

* $a=-20$, $b=-19$, $c=-18$

$4(-20)x^2+4(-19)x-18=-80x^2-76x-18$

$-80x^2-76x-18=0$

$\dfrac{76\pm\sqrt{5776-4\cdot(-80)(-18)}}{2\cdot(-80)}=\dfrac{76\pm\sqrt{16}}{-160}$ $\begin{cases}\dfrac{-1}{2}\\ \dfrac{-9}{20}\end{cases}$

A grandes rasgos puedo ver que una de las raíces, para los distintos valores que le doy a a, b y c, es $-\dfrac{1}{2}$ y además que el discriminante es 16 por lo que serán raíces reales distintas.

Voy a verlo ahora de forma analítica.

Busco raíces de $4ax^2+4bx+c=0$

$$\frac{-4b\pm\sqrt{(4b)^2-4(4a)\cdot(c)}}{2(4a)}=\frac{-4b\pm\sqrt{16b^2-16ac}}{8a}$$

$$=\frac{-4b\pm\sqrt{16(b^2-ac)}}{8a}$$

$$=\frac{-4b\pm\sqrt{16}\sqrt{b^2-ac}}{8a}=\frac{-4b\pm4\sqrt{b^2-ac}}{8a}$$

$$\frac{\cancel{4}(-b\pm\sqrt{b^2-ac})}{\cancel{8}a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{2a}\begin{cases}\dfrac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{2a}=x_1\\ \dfrac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{2a}=x_2\end{cases}$$

Si a, b y c son enteros consecutivos

$a=n$, $b=n+1$ y $c=n+2$ con $n\in\mathbb{Z}$

$$x_1=\frac{-(n+1)+\sqrt{(n+1)^2-n(n+2)}}{2n}=\frac{-n-1+\sqrt{\cancel{n^2}+\cancel{2n}+1-\cancel{n^2}-\cancel{2n}}}{2n}=\frac{-n-1+\sqrt{1}}{2n}$$

$$x_2=\frac{-(n+1)-\sqrt{(n+1)^2-n(n+2)}}{2n}=\frac{-n-1-\sqrt{\cancel{n^2}+\cancel{2n}+1-\cancel{n^2}-\cancel{2n}}}{2n}=\frac{-n-1-\sqrt{1}}{2n}$$

$$x_1=\frac{-n-\cancel{1}+\cancel{1}}{2n}=\frac{-\cancel{n}}{2\cancel{n}}=-\frac{1}{2}$$

$$x_2=\frac{-n-1-1}{2n}=\frac{-n-2}{2n}=\frac{-\cancel{n}}{2\cancel{n}}-\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}n}=\frac{-1}{2}-\frac{1}{n}$$

Entonces para todo a, b y c enteros consecutivos las raíces siempre serán $x_1=-\dfrac{1}{2}$ y $x_2=\dfrac{-1}{2}-\dfrac{1}{n}$ con $n\in\mathbb{Z}$.

Explicación de la resolución experta

Primero voy a buscar las raíces de la ecuación $4ax^2+4bx+c=0$ de manera simbólica con la fórmula resolvente $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Una vez que encontré la forma que tiene cada una de ellas, le asigno valores en forma de símbolos a a, b y c partiendo de que son números enteros consecutivos. Por eso planteo que $a=n,\ \ b=n+1$ y $c=n+2$ con $n\in Z$ y los reemplazo en la forma encontrada de las raíces. Y así que llego a la conclusión de que una raíz siempre será $-\frac{1}{2}$ y la otra tendrá la forma $-\frac{1}{2}-\frac{1}{n}$ con n entero.

2.

Los conceptos matemáticos trabajados en la resolución de la consigna son, números enteros, ecuaciones de segundo grado, función cuadrática y raíces de una función.

Ecuaciones de segundo grado:

Las ecuaciones de segundo grado son igualdades en las que la incógnita aparece elevada al cuadrado. Estas ecuaciones pueden tener dos soluciones como máximo y por medio de operaciones algebraicas o fórmulas podemos encontrar esas soluciones.

3.Explicación para clase

Anteriormente estuvimos trabajando con ecuaciones que tenían un valor desconocido al que llamamos incógnitas y por medio de operaciones encontrábamos el valor de ella. Hoy vamos a ver ecuaciones de otro tipo, son las ecuaciones de segundo grado, en este caso podemos tener una o dos soluciones, y tendremos diferentes formas de encontrar esas soluciones. Las ecuaciones de segundo grado aparecen de diferentes maneras pero para que sea de segundo grado debe estar el coeficiente con la incógnita elevada al cuadrado.

4. Enunciado de cómo encontrar raíces

Sea $f(x)=ax^2+bx+c$ una ecuación de segundo grado con $a,b,c\in R$ y $a\neq 0$ y con raíces x_1,x_2 distintas o iguales, podemos hallar las raíces de dicha función con la siguiente fórmula $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

5. Demostración la fórmula de Bhaskara

Sea $f(x)=ax^2+bx+c=0$ con $a,b,c\in R$ y $a\neq 0$, queremos encontrar la solución de dicha ecuación.

Para demostrar la fórmula de Bhaskara, operamos algebraicamente de la siguiente manera:

Como $a\neq 0$ dividimos a la función por a

$$\frac{ax^2}{a}+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}$$

Nos queda $x^2+\frac{bx}{a}=-\frac{c}{a}$

Ahora le sumamos $\frac{b^2}{4a^2}$ para así completar cuadrados

Y tenemos que $x^2+\frac{bx}{a}+\frac{b^2}{4a^2}=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$

Luego, $(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{-4ac+b^2}{4a^2}$

Continuamos aplicando raíz, pues el objetivo es despejar x, $\sqrt{(x+\frac{b}{2a})^2} = \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$

$$\left|\sqrt{(x+\frac{b}{2a})^2}\right| = \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

Seguimos operando algebraicamente, $x+\frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Y llegamos así a que $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ es solución de $f(x)$.

6. Dado que queremos hallar las características de las raíces de una función cuadrática es fundamental utilizar la fórmula de Bhaskara para poder así encontrar dichas raíces y ver de las soluciones encontradas cual o cuales características quedan demostradas.

Resolución de A8

1) Primero factorizo el polinomio para ver si facilita las cuentas:

$$4\left(a\,x^2 + bx + \frac{c}{4}\right) = 0$$

$$ax^2 + bx + \frac{c}{4} = 0$$

Por otro lado como a, b, c son enteros consecutivos voy a asignarles las siguientes expresiones: a = n-1 ; b = n ; c = n+1

Ahora como pienso aplicar la formula resolvente para obtener las raíces, primero debo ver qué pasa con el discriminante (para saber qué tipo de raíces tiene el polinomio):

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Notar que en nuestro caso b = n; a = n-1 y c = $\frac{n+1}{4}$

$$\Delta = n^2 - 4\,(n-1)\frac{(n+1)}{4} = n^2 - (n^2-1) = 1$$

Como el discriminante es 1 concluyo que la ecuación tiene dos raíces reales distintas y además, por tener coeficientes enteros las raíces son racionales.

Ahora pues como el discriminante es 1 puedo usar la formula resolvente:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

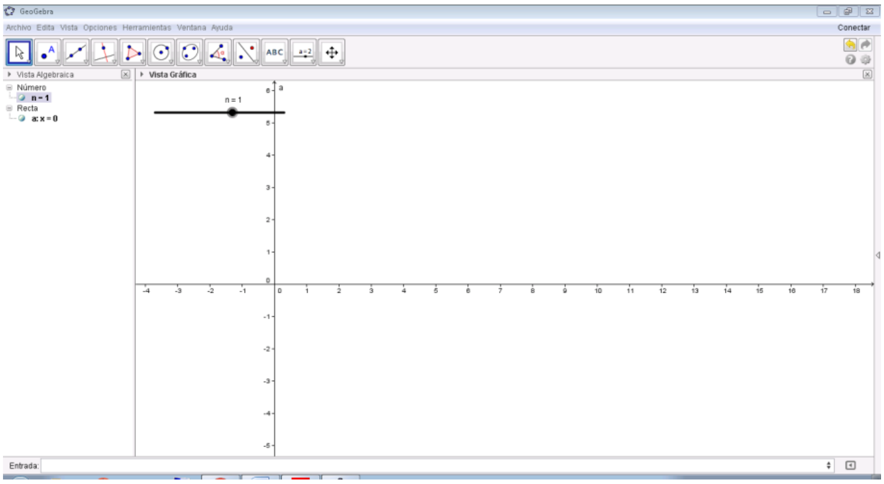
$$x_{1,2} = \frac{-n \pm \sqrt{1}}{2(n-1)}$$

$$x_1 = \frac{-n+1}{2(n-1)} = -\frac{1}{2}$$

La primera raíz que obtengo es constante e igual a -$\frac{1}{2}$ independientemente de los valores de a, b y c.

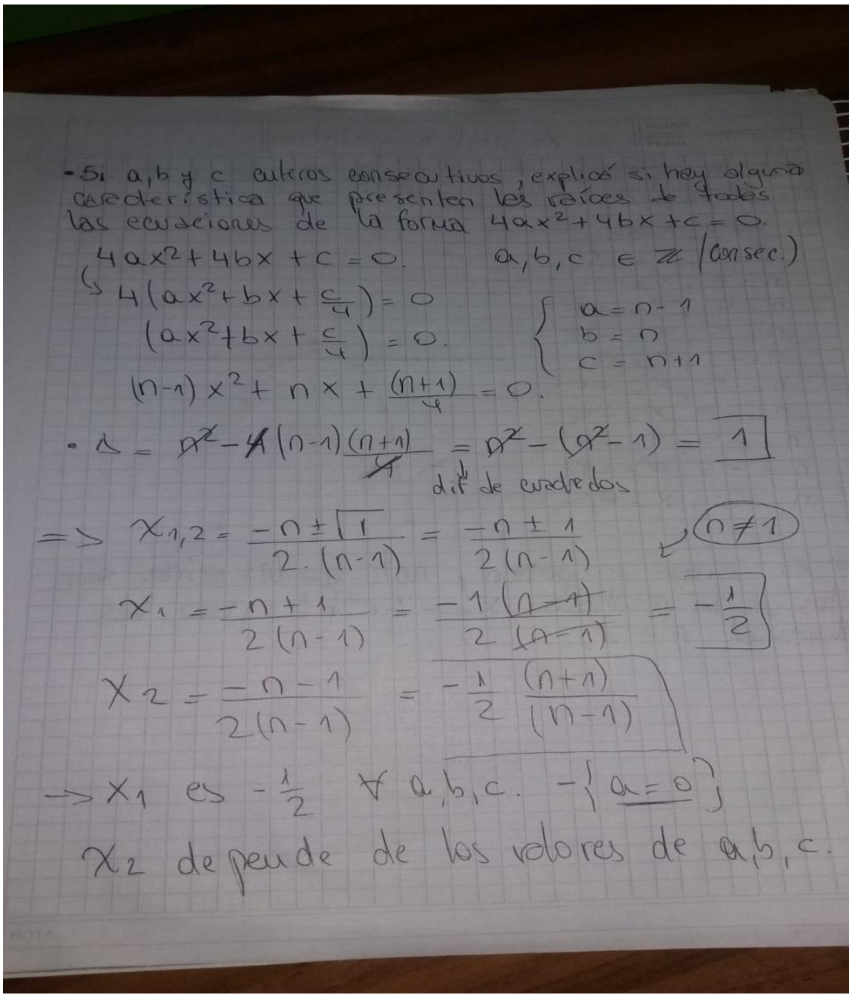
$$x_2 = \frac{-n-1}{2(n-1)} = -\frac{1}{2}\frac{(n+1)}{(n-1)}$$

Para ver qué pasa con esta raíz que evidentemente depende del valor de n o lo que es lo mismo de los valores de a, b y c. Luego utilizo Geogebra, ingreso la expresión y le voy dando distintos valores de n. Observo entonces que n sigue cierto patrón.



Captura de geogebra
Valores observados (como par ordenado (n, x)):
(1,0), (2,-1.5), (3,-4), (4,-7.5), (5,-12), (-1,0), (-2,-1.5), (-3,-4), (-4,-7.5), (-5,-12), (0,0.5).

Luego esto lo corroboro con las cuentas.
En resumen lo que puedo decir de las raíces de esta ecuación es que son racionales, una es constante e igual a -1/2 y la otra va a depender de los valores de a, b y c. Siguiendo un patrón, donde dichos valores son puntos de la parábola $x = -\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}$ (n perteneciente al conjunto de los enteros).



• Si a, b y c enteros consecutivos, explicá si hay alguna característica que presenten las raíces de todas las ecuaciones de la forma $4ax^2+4bx+c=0$.

$4ax^2+4bx+c=0$. $a,b,c \in \mathbb{Z}$ (consec.)

$4(ax^2+bx+\frac{c}{4})=0$

$(ax^2+bx+\frac{c}{4})=0$.

$\begin{cases} a = n-1 \\ b = n \\ c = n+1 \end{cases}$

$(n-1)x^2+nx+\frac{(n+1)}{4}=0$.

• $\Delta = \cancel{n^2} - \cancel{4}(n-1)\frac{(n+1)}{\cancel{4}} = \underbrace{n^2-(n^2-1)}_{\text{dif de cuadrados}} = \boxed{1}$

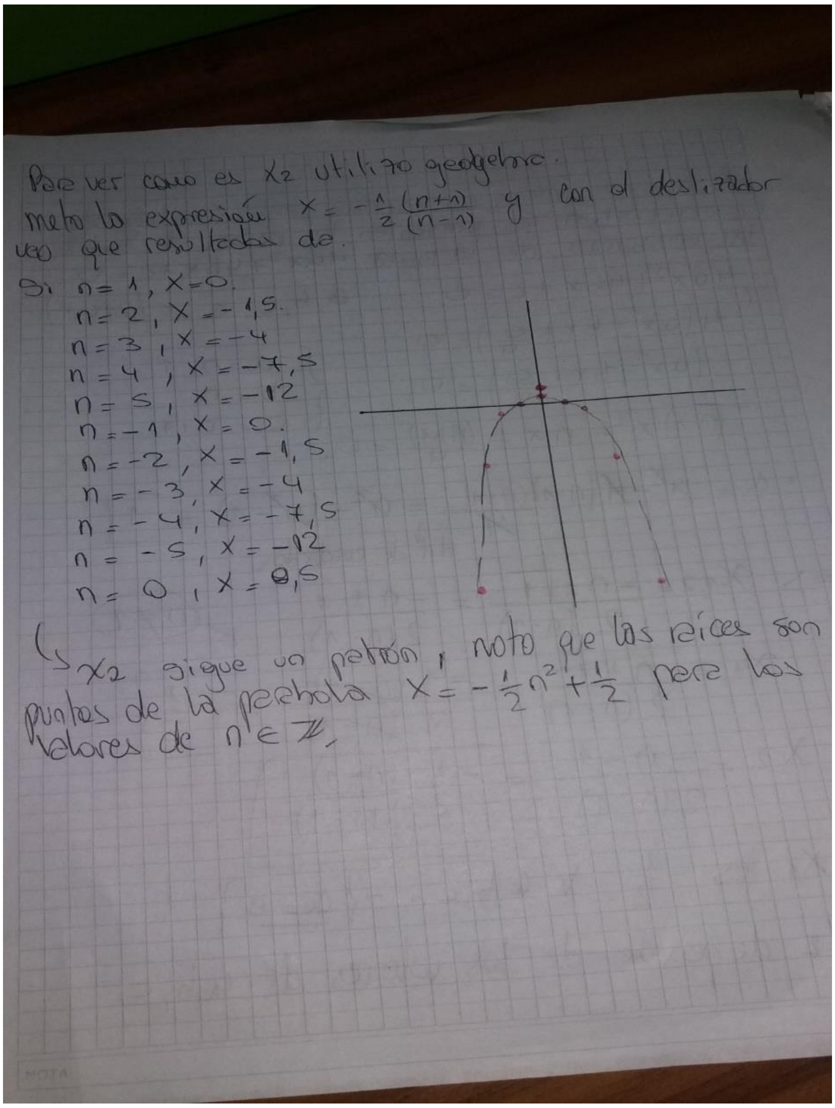
$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-n\pm\sqrt{1}}{2.(n-1)} = \frac{-n\pm 1}{2(n-1)}$ $n\neq 1$

$x_1 = \frac{-n+1}{2(n-1)} = \frac{-1\cancel{(n-1)}}{2\cancel{(n-1)}} = \boxed{-\frac{1}{2}}$

$x_2 = \frac{-n-1}{2(n-1)} = -\frac{1}{2}\frac{(n+1)}{(n-1)}$

→ x_1 es $-\frac{1}{2}$ $\forall a,b,c. - \{a=0\}$

x_2 depende de los valores de a, b, c.



Para ver como es x_2 utilizo geogebra.
meto la expresión $x = -\frac{1}{2}\frac{(n+1)}{(n-1)}$ y con el deslizador
veo que resultados de.

Si $n = 1$, $x = 0$.
$n = 2$, $x = -1{,}5$.
$n = 3$, $x = -4$
$n = 4$, $x = -7{,}5$
$n = 5$, $x = -12$
$n = -1$, $x = 0$.
$n = -2$, $x = -1{,}5$
$n = -3$, $x = -4$
$n = -4$, $x = -7{,}5$
$n = -5$, $x = -12$
$n = 0$, $x = 0{,}5$

↳ x_2 sigue un patrón, noto que las raíces son puntos de la parabola $x = -\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}$ para los valores de $n \in \mathbb{Z}$.

Explicación: Para poder dar características sobre las raíces lo primero que hice fue buscar esas raíces. Como primer paso saque como factor común el cuatro del polinomio y renombre los coeficientes para que considerar los números consecutivos de la consigna. Luego calcule el discriminante que me dio 1 para más tarde aplicar la fórmula resolvente. Viendo que las raíces resultantes eran una constante para todos los valores y la otra dependía de los valores de los coeficientes. Para poder ver que valores toma esta raíz lo que hice fue meter la expresión en el geogebra en la pc y con el deslizador vi como variaba siguiendo un patrón. Note también que la segunda raíz daba distintos puntos pertenecientes a una parábola.

2) Conceptos trabajados en la consigna: funciones, dominio de funciones, funciones cuadráticas, ecuaciones cuadráticas, raíces de funciones, conjuntos numéricos (enteros y racionales).

<u>Definición:</u>

Una *función cuadrática* es una función del tipo: $f: IR \to IR$ / $f(x) = ax^2 + bx + c$ (con a, b y c números reales y a es distinto de 0). Su gráfica se llama parábola.

La forma $y = ax^2 + bx + c$ es la *ecuación de la parábola* asociada a la función cuadrática.

3) Una función cuadrática es aquella función que en principio va de IR en IR, que es expresada como un polinomio de grado 2. Donde sus coeficientes son números reales y en el caso que el coeficiente principal, o sea el que acompaña a la x de segundo grado, sea igual a 0 donde nos queda una función lineal. Cuando graficamos la función nos queda una curva a la llamamos parábola. Además si le damos un valor a esta función y lo igualamos al polinomio de grado 2 obtenemos una ecuación cuadrática.
4) Fórmula que halla las raíces de $f(x) = ax^2 + bx + c$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

5) Demostración:
Buscamos una expresión equivalente a $f(x) = ax^2 + bx + c$ pero escrita en forma canónica $f(x) = a(x-h)^2 + k$.
Primero factorizamos: $ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$
Completamos cuadrados en la expresión que quedo entre paréntesis.

$$a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}] =$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - (\frac{b^2-4ac}{4a})$$

Llegamos así a lo que pretendíamos. Las expresiones equivalentes son:
$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - (\frac{b^2-4ac}{4a})$ para todo x
Luego las raíces de x se pueden calcular despejando x de la expresión obtenida:

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - (\frac{b^2-4ac}{4a}) = 0$$

Luego $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a}$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

Ahora todo depende del signo de lo que quedo en el miembro de la derecha para que existan dos raíces, una o ninguna.
Suponemos que el término de la derecha es mayor o igual a 0 para poder despejar

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

Suponemos $a > 0$; el caso $a < 0$ es análogo

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Explicación de la demostración: Para demostrar que la formula resolvente me indica las raíces de una función polinómica o sea cuando la ecuación es igual a 0 lo que voy a hacer es llevar la expresión a la forma canónica, donde es más fácil despejar la x. Como primer paso saco de factor común el coeficiente principal y completo cuadrados. Luego mediante operaciones de agrupación y despeje llego a la forma que quería (canónica). Ahora despejo de esta forma la x, llegando a conseguir la formula resolvente, para luego calcular los valores de x que son las raíces.
6) Estoy seguro de poder utilizar esta propiedad por el tipo de ecuación que trato de resolver (cuadrática), porque los coeficientes son números enteros y además calcule el discriminante que debía darme mayor a 0 para tener raíces reales. Como dio 1 aplique la fórmula.

Resolución de A9

1)
a) c) Resolución experta "pasada en limpio" y explicación:

Teniendo en cuenta que la consigna dice que a,b y c son consecutivos, defino a como el valor de partida, b es un entero más que a y c es dos enteros más que a, entonces:

$$a = a\,, \qquad b = a + 1, \qquad c = a + 2 \qquad\qquad con\ a \neq 0$$

Luego, reemplazando en la ecuación $4ax^2+4bx+c$, queda $4ax^2 + 4(a+1)x + (a+2)$
Como me piden características de las raíces, utilizo la fórmula de la resolvente:

I. $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Pero con la sustitución realizada, mis coeficientes son, en relación con la fórmula:

$$a = 4a \qquad\qquad b = 4(a+1) \qquad\qquad c = (a+2)$$

Reemplazando esto en I. queda:

$$x_{1,2} = \frac{-4(a+1) \pm \sqrt{(4(a+1))^2 - 4.4.a.(a+2)}}{2.4.a}$$

Operando con la expresión:

$$x_{1,2} = \frac{-4.a - 4 \pm \sqrt{16.(a+1)^2 - 16.(a^2+2a)}}{8.a}$$

$$= \frac{-4.a - 4 \pm \sqrt{16.(\cancel{a^2} + \cancel{2.a} + 1 - \cancel{a^2} - \cancel{2.a})}}{8.a}$$

$$= \frac{-4.a - 4 \pm \sqrt{16.1}}{8.a} = \frac{-4.a - 4 \pm 4}{8.a} =$$

Aquí separo en x_1 y x_2 ya que tengo dos posibles raíces:

$$x_1 = \frac{-4.a - 4 + 4}{8.a} = -\frac{4.a}{8.a} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-4.a - 4 - 4}{8.a} = \frac{-4.a - 8}{8.a} = \frac{4.(-a-2)}{8.a} = -\frac{(a+2)}{2.a}$$

Las raíces de todas las ecuaciones de la forma $4ax^2+4bx+c$ con a, b y c enteros consecutivos tendrán las siguientes características:

- Siempre habrá una de ellas cuyo valor sea $-\frac{1}{2}$
- La otra será de la forma $-\frac{(a+2)}{2.a}$, es decir que únicamente depende del valor de a. Para que haya solución, a debe ser distinto de cero. Dependiendo el valor de a, la raíz será positiva, negativa o cero. Estudiando cada caso:

$$-\frac{a+2}{2.a} > 0 \quad \xleftrightarrow{si\ y\ sólo\ si} \quad -a - 2 > 0 \quad \xleftrightarrow[si\ y\ sólo\ si]{} \quad a < -2$$

$$Esto\ quiere\ decir\ que\ la\ raíz\ -\frac{a+2}{2.a}\ será\ positiva\ cuando\ a \in (-\infty, -2)$$

$$-\frac{a+2}{2.a} < 0 \quad \xleftrightarrow{si\ y\ sólo\ si} \quad -a - 2 < 0 \quad \xleftrightarrow[si\ y\ sólo\ si]{} \quad -2 < a$$

$$Esto\ quiere\ decir\ que\ la\ raíz\ -\frac{a+2}{2.a}\ será\ negativa\ cuando\ a \in (-2, +\infty)$$

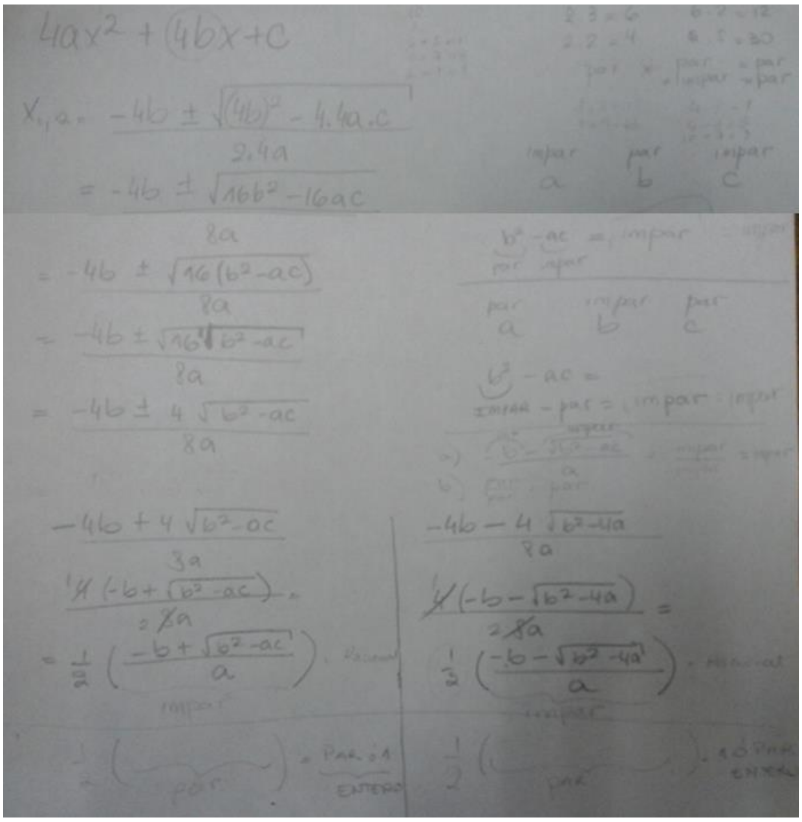
$$-\frac{a+2}{2.a}=0 \quad \xleftrightarrow{si\ y\ sólo\ si} \quad -a-2=0 \quad \xleftrightarrow[si\ y\ sólo\ si]{} \quad a=-2$$

$$Esto\ quiere\ decir\ que\ la\ raíz\ -\frac{a+2}{2.a}\ será\ cero\ cuando\ a=-2$$

Si bien la consigna pregunta por “las raíces”, podemos tener tres casos al resolver este tipo de ecuaciones. Con conocer el valor del discriminante de la fórmula de la resolvente, es decir, el valor de "b^2-4ac" podemos determinar si habrá una solución real, dos soluciones reales o ninguna solución real.

- Si $b^2-4ac>0$, tendremos dos soluciones reales. Vemos que en el caso estudiado como $b^2-4ac=16>0$, obtuvimos dos soluciones ya que existe la raíz real de cualquier número mayor.
- Si $b^2-4ac=0$, tendremos una única solución real de la forma $\frac{-b}{2.a}$, ya que la raíz de cero es cero.
- Si $b^2-4ac<0$, no hay solución real, ya que no existe la raíz real de un número negativo.

b)



Con esta forma, con la que no llegué a ningún resultado, intentaba ver si las raíces eran números enteros o fracciones, pares o impares.

2) En esta consigna considero que se trabaja con los conceptos de ecuación de segundo grado, raíces y número de soluciones en relación con el discriminante.

“Ecuación de segundo grado: ecuación de una variable que es representada por una suma algebraica de términos cuyo grado máximo es dos. La expresión tiene la forma $ax^2 + bx + c = 0$ con coeficientes a, b, c números reales y $a \neq 0$”

3) Una ecuación de segundo grado se utiliza para modelizar situaciones donde nuestra incógnita, a la que llamamos “x”, está potenciada al cuadrado en uno de sus términos. Es por esto que se llama “ecuación de segundo grado”, porque el mayor exponente es dos.

“a” es el coeficiente que acompaña a la variable de mayor grado, es decir a x^2, por esto es llamado coeficiente principal, y debe ser distinto de cero porque, de lo contrario, el término al cuadrado se cancelaría quedando una ecuación de primer grado con una variable ($aquí\ escribiría\ en\ el\ pizarrón\ mientras\ explico$: con
$a = 0 \quad \rightarrow \quad 0x^2 + bx + c = bx + c$).

“b” es el coeficiente que acompaña al término lineal x, y “c” es el término independiente, el término que acompaña a la x de grado cero. ($aquí\ escribiría\ en\ el\ pizarrón\ mientras\ explico$: $con\ c.x^0 = c.1 = c$).

4) Fórmula de la resolvente o Bhaskara:

Para la obtención de las soluciones de una ecuación de segundo grado completa, es decir, de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, utilizamos la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

con a, b y c los coeficientes reales de la ecuación.

5) Demostración de la “Fórmula de la resolvente”.

Supongamos la siguiente ecuación de una variable:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

con coeficientes “b” y “c” números reales cualesquiera y coeficiente “a” un número real distinto de cero. Es importante que a sea distinto de cero para que el término de grado dos esté presente, ya que si “a” fuese cero, el término al cuadrado se anularía y la ecuación inicial se transformaría en una ecuación lineal de una variable ($bx + c = 0$).

Lo que queremos lograr es transformar a la x en una variable de grado uno, para poder despejarla como conocemos del trabajo con ecuaciones lineales.

Empezamos sacando factor común “a”:

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0 \qquad con\ a \neq 0$$

Como “a” es distinto de cero, las divisiones $\frac{b}{a}$ y $\frac{c}{a}$ están bien definidas, es decir que tienen sentido. Por otra parte, como “a” es distinto de cero, lo único que podría hacer que el producto $a.\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$ se anule es que $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

Ahora bien, como tenemos una “x” de grado dos y otra de grado uno, con lo conocido hasta ahora no nos es posible despejar, por lo tanto debemos buscar la manera de hacer que la “x” quede en una expresión donde su grado sea uno para poder transponer términos y despejarla.

Para esto intentaremos escribir a $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ como un trinomio cuadrado perfecto, completando cuadrados.

Entonces:

$este\ término\ sería$

$2\ .\ 1°\ término\ .\ 2°término$

$$x^2 \qquad + \qquad \frac{b}{a}.x \qquad + \qquad \frac{c}{a} = 0$$

$x\ sería\ el\ primer$

$término, ya\ que$

$\sqrt{x^2} = x$

Como nuestro primer término es "x" lo reemplazamos y "$2.x.2°\ término$" $debe\ ser\ igual\ a$ "$\frac{b}{a}.x$". En este caso la única posibilidad es que el segundo término sea "$\frac{b}{2.a}$", luego "$2.x.\frac{b}{2.a} = \frac{b}{a}.x$".

Luego, la ecuación

$$x^2 + \frac{b}{a}.x + \frac{c}{a} = 0$$

$$(x + \frac{b}{2.a})^2 + \frac{c}{a} = 0$$

Si desarrollo el término

$$(x + \frac{b}{2.a})^2 = x^2 + 2.x.\frac{b}{2.a} + \frac{b^2}{4.a^2}$$

Para que

$$x^2 + 2.x.\frac{b}{2.a} + \frac{b^2}{4.a^2} \quad sea\ igual\ a \quad x^2 + \frac{b}{a}.x \quad debemos\ restar \quad \frac{b^2}{4.a^2}$$

Haciendo esto en la expresión $(x + \frac{b}{2.a})^2 + \frac{c}{a} = 0$, nos queda:

$$(x + \frac{b}{2.a})^2 - \frac{b^2}{4.a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

Ahora podemos despejar "x":

$$\left(x + \frac{b}{2.a}\right)^2 - \frac{b^2}{4.a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2.a}\right)^2 = \frac{b^2}{4.a^2} - \frac{c}{a}$$

Denominador común $4.a^2$

$$\left(x + \frac{b}{2.a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4.a.c}{4.a^2}$$

$$x+\frac{b}{2.a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4.a.c}{4.a^2}}$$

$$x+\frac{b}{2.a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4.a.c}}{2.a}$$

$$x=-\frac{b}{2.a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4.a.c}}{2.a}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4.a.c}}{2.a}$$

6) Tengo certeza de que puedo utilizar este resultado porque al ser a, b y c números enteros, pertenecen al conjunto de los números reales. Tiene la restricción de que a debe ser distinto de cero, es decir que no podría considerar enteros consecutivos donde a=0 (como por ejemplo a=0, b=1, c=2), pero en ese caso ya no tendría una ecuación de segundo grado y la consigna cambiaría.

Resolución de A10

1.

a) a, b, c son números enteros consecutivos

- a=a
- b=a+1
- c=a+2

Reemplazando en $4ax^2+4bx+c$

$= 4ax^2+4(a+1)x+a+2$

$= 4(ax^2+(a+1)x)+a+2$

→ Igualamos la función a 0 para buscar raíces

$ax^2+(a+1)x+\frac{a+2}{4}$=0

Usamos formula resolvente:

$$x=\frac{-(a+1)\pm\sqrt{(a+1)^2-4a\frac{(a+2)}{4}}}{2a}$$

$$x=\frac{-(a+1)\pm 1}{2a}$$

$$X_1=\frac{-a-1-1}{2a}=\frac{-a-2}{2a}=\frac{-(a+2)}{2a}=\frac{-c}{2a}$$

$$X_2=-\frac{a}{2a}=-\frac{1}{2}$$

Llegando a la conclusión de que todas las ecuaciones de la forma 4ax2+4bx+c =0 tienen como raíz a x=-1/2 y a x= -c/2a b)

a, b, c entero consecutivo

$a = a$

$b = a+1$

$c = a+2$

$4ax^2+4bx+c$

$= 4ax^2+4(a+1)x+a+2$

$= 4ax^2+(4a+4)x+a+2$

$= 4(ax^2+(a+1)x)+a+2$

$= ax^2+(a+1)x = -\frac{a+2}{4}$

$ax^2+(a+1)x+\frac{a+2}{4} = 0$

Probando ≠ valores de a

$a = 2$

$4.2x^2+12x+4$

$= 8x^2+12x+4$

Por form. resolvente:

$\frac{-12 \pm \sqrt{144-4.8.4}}{2.8}$

$x_1 = \frac{-12 \pm 4}{16} = -1/2$

$x_2 = -1$

$a = 1$

$4x^2+8x+3$

$\frac{-4 \pm \sqrt{64-4.4.3}}{2.4}$

$x_1 = \frac{-8 \pm 4}{8} = -\frac{1}{2}$

$x_2 = -\frac{12}{8} = -\frac{3}{2}$

$$x_{1,2} = \frac{-(a+1) \pm \sqrt{(a+1)^2-4.a.\left(\frac{a+2}{4}\right)}}{2.a}$$

$$\frac{-(a+1) \pm \sqrt{a^2+2a+1-(a^2+2a)}}{2.a}$$

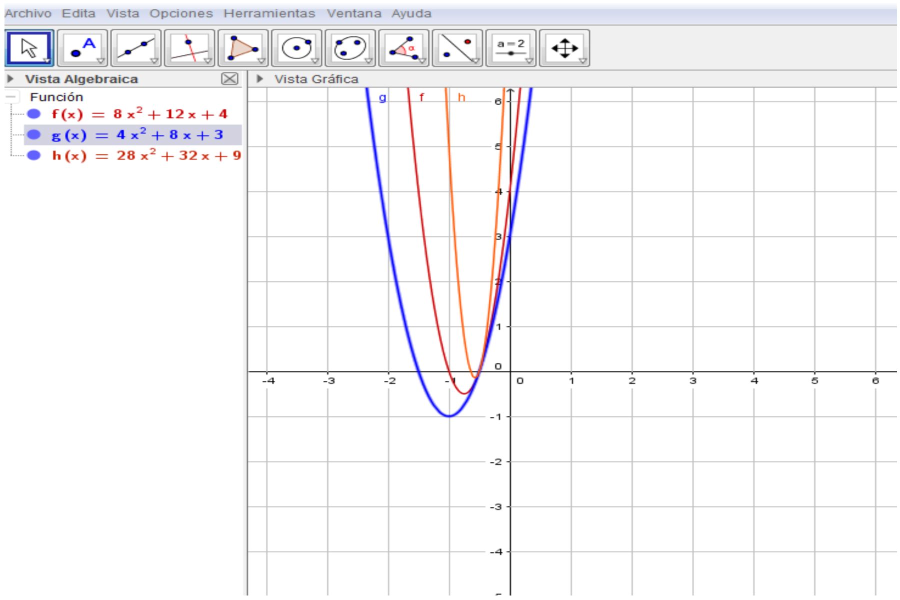
$$= \frac{-(a+1) \pm \sqrt{1}}{2.a}$$

$$= \frac{-a-1 \pm 1}{2a}$$

$x_1 = \frac{-a-2}{2.a} = -\frac{(a+2)}{2.a} = \frac{-c}{2a}$

$x_2 = \frac{-a}{2a} = -\frac{1}{2}$

Utilizando Geogebra realicé el grafico con números consecutivos más grandes para ver si seguía cumpliendo que una de las raíces sea x=-1/2. Sin embargo nada se podía deducir a partir del grafico sobre la otra raíz. Por último a partir de un planteo algebraico se pudo llegar a una afirmación más general.



c) Como la consigna plantea que a, b y c son tres números enteros consecutivos podemos pensar a a=a, b=a+1 y a c=a+2. Luego reemplazamos en la formula dada los valores de a b y c y quedaría:

$$4ax^2 + 4(a+1)x + a + 2$$

Se nos pide sacar conclusiones respecto a alguna de las características que presenten las raíces, igualamos la función a cero para poder calcularlas quedando la siguiente ecuación:

$$ax^2 + (a+1)x + \frac{a+2}{4}=0$$

Es una función cuadrática donde a=a; b= a+1 y c= $\frac{a+2}{4}$

Luego utilizando formula resolvente llegamos a la conclusión de que una de las raíces de la función siempre será -$\frac{1}{2}$ y la otra -$\frac{c}{2a}$. Por lo que se puede afirmar que tomando cualesquiera números consecutivos siempre las raíces cumplirán con lo antes afirmado.

2. Conceptos matemáticos utilizados:

- Función cuadrática
- Pasaje de lenguaje coloquial a algebraico

Definición: una función cuadrática es una función del tipo $f\colon R \to R\,; f(x) = ax^2 + bx + c$(con a, b y c números reales y a distinto de 0). Su grafica se llama parábola.

3. **Explicación:** una función cuadrática es una función que tiene la siguiente forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Donde a, b y c son números reales y a$\neq 0$, es decir hay un número que acompaña al x^2 otro que acompaña a la x y un número solo al que denominamos termino independiente. A esta expresión la denominamos forma polinómica.

Las funciones cuadráticas también pueden estar expresadas de las siguientes maneras:

$f(x) = a(x - xv)^2 + yv$, forma canónica

$f(x) = a(x - x1).(x - x2)$, forma factorizada

Su grafico es una parábola.

Las parábolas son simétricas y tienen: vértice, eje de simetría, raíces, ordenada al origen.

4. En la resolución del ejercicio se hizo uso de la formula resolvente: como propiedad para hallar las raíces.

Para una ecuación cuadrática con coeficientes reales o complejos existen siempre dos soluciones, no necesariamente distintas, llamadas raíces, que pueden ser reales o complejas (si los coeficientes son reales y existen dos soluciones no reales, entonces deben ser complejas conjugadas). Fórmula general para la obtención de raíces:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se usa ± para indicar las dos soluciones:

$x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y $x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

5. Demostración:

Relacionando la ecuación de segundo grado con un polinomio de segundo grado y las raíces del mismo (a su vez raíces de una función cuadrática), podemos resolver la ecuación algebraicamente y obtener la fórmula de dicha ecuación.

Sea dada la ecuación:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde $a \neq 0$ para garantizar que sea *realmente* una ecuación polinómica de segundo grado.
Como **a** es distinto de cero, podemos dividir entre **a** cada término de la ecuación:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Restamos el valor del término independiente en ambos miembros de la igualdad:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Para completar el trinomio cuadrado perfecto (TCP), o más brevemente, para completar el cuadrado en el miembro izquierdo, se suma el cuadrado de la mitad del coeficiente lineal, por lo que sumamos $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ en ambos miembros de la ecuación:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

Factorizamos el TCP del lado izquierdo y hacemos la operación indicada del derecho:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

Hacemos la operación con fracciones en el miembro derecho:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Extraemos raíz cuadrada en ambos miembros:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

Separamos las raíces de la fracción del lado derecho:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{(2a)^2}}$$

Simplificamos el radical del denominador del miembro derecho:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Despejamos la incógnita que buscamos:

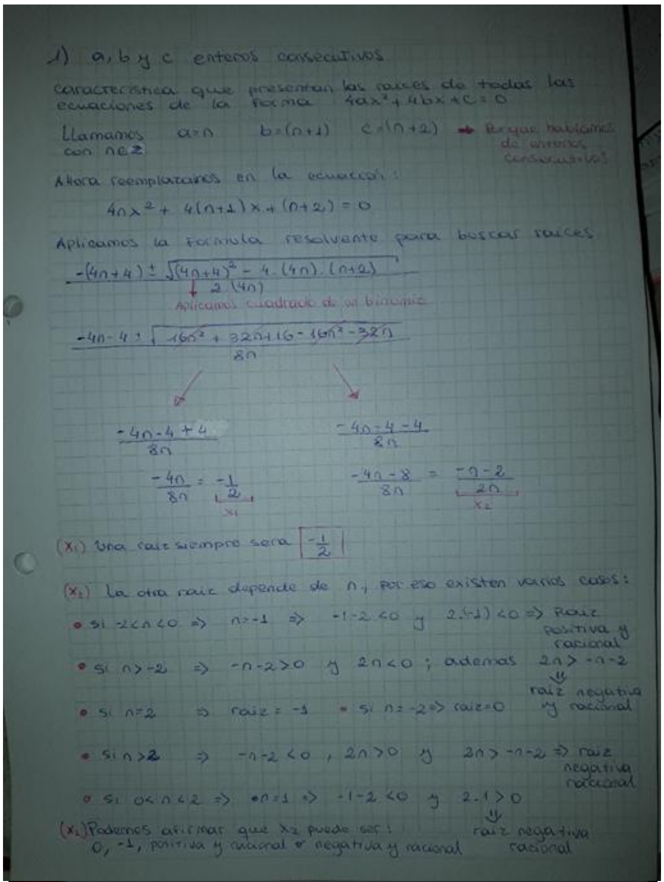
$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Combinamos las fracciones con el mismo denominador del lado derecho y obtenemos la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

6. Tengo certeza de utilizar la formula resolvente para hallar las raíces cuadráticas de la función dada. Ya que es la única forma para poder resolver ecuaciones cuadráticas completas es decir con a, b y c números reales distintos de cero.

Resolución de A11



1) a, b y c enteros consecutivos

característica que presentan las raíces de todas las ecuaciones de la forma $4ax^2+4bx+c=0$

Llamamos $a=n$ $b=(n+1)$ $c=(n+2)$ → Porque hablamos de enteros consecutivos
con $n \in \mathbb{Z}$

Ahora reemplazamos en la ecuación:

$$4nx^2+4(n+1)x+(n+2)=0$$

Aplicamos la formula resolvente para buscar raíces

$$\frac{-(4n+4)\pm\sqrt{(4n+4)^2-4.(4n).(n+2)}}{2.(4n)}$$

Aplicamos cuadrado de un binomio

$$\frac{-4n-4\pm\sqrt{16n^2+32n+16-16n^2-32n}}{8n}$$

$$\frac{-4n-4+4}{8n} \qquad \frac{-4n-4-4}{8n}$$

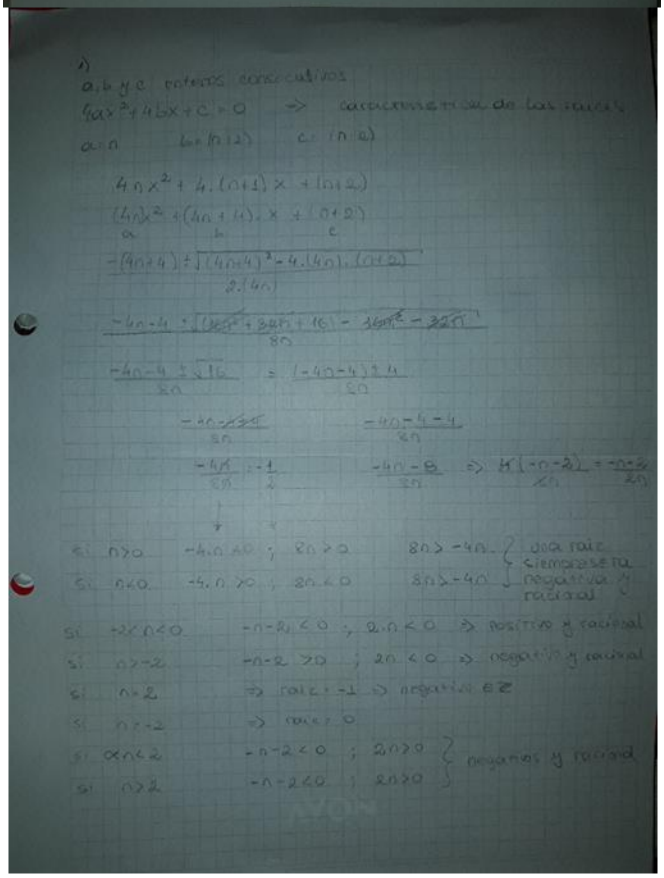
$$\frac{-4n}{8n}=\underbrace{\frac{-1}{2}}_{x_1} \qquad \frac{-4n-8}{8n}=\underbrace{\frac{-n-2}{2n}}_{x_2}$$

(x_1) Una raíz siempre será $\boxed{-\frac{1}{2}}$

(x_2) La otra raíz depende de n, por eso existen varios casos:

- si $-2<n<0$ ⇒ $n>-1$ ⇒ $-1-2<0$ y $2.(-1)<0$ ⇒ Raíz positiva y racional
- si $n>-2$ ⇒ $-n-2>0$ y $2n<0$; además $2n>-n-2$ ⇓ raíz negativa y racional
- si $n=2$ ⇒ raíz $=-1$ • si $n=-2$ ⇒ raíz$=0$
- si $n>2$ ⇒ $-n-2<0$, $2n>0$ y $2n>-n-2$ ⇒ raíz negativa racional
- si $0<n<2$ ⇒ •$n=1$ ⇒ $-1-2<0$ y $2.1>0$ ⇓ raíz negativa racional

(x_2) Podemos afirmar que x_2 puede ser: 0, −1, positiva y racional o negativa y racional



1)
a, b y c enteros consecutivos
$4ax^2+4bx+c=0$ ⇒ características de las raíces
$a=n$ $b=(n+1)$ $c=(n+2)$

$$4nx^2+4.(n+1)x+(n+2)$$
$$\underbrace{(4n)}_{a}x^2+\underbrace{(4n+4)}_{b}.x+\underbrace{(n+2)}_{c}$$

$$\frac{-(4n+4)\pm\sqrt{(4n+4)^2-4.(4n).(n+2)}}{2.(4n)}$$

$$\frac{-4n-4\pm\sqrt{16n^2+32n+16-16n^2-32n}}{8n}$$

$$\frac{-4n-4\pm\sqrt{16}}{8n}=\frac{(-4n-4)\pm4}{8n}$$

$$\frac{-4n-\cancel{4}+\cancel{4}}{8n} \qquad \frac{-4n-4-4}{8n}$$

$$\frac{-4n}{8n}=-\frac{1}{2} \qquad \frac{-4n-8}{8n} \Rightarrow \frac{4(-n-2)}{8n}=\frac{-n-2}{2n}$$

si $n>0$ $-4.n<0$; $8n>0$ $8n>-4n$
si $n<0$ $-4.n>0$; $8n<0$ $8n>-4n$
una raíz siempre será negativa y racional

si $-2<n<0$ $-n-2<0$; $2.n<0$ ⇒ positivo y racional
si $n>-2$ $-n-2>0$; $2n<0$ ⇒ negativo y racional
si $n=2$ ⇒ raíz $=-1$ ⇒ negativo $\in \mathbb{Z}$
si $n=-2$ ⇒ raíz $=0$
si $0<n<2$ $-n-2<0$; $2n>0$
si $n>2$ $-n-2<0$; $2n>0$
negativos y racional

2) En la consigna se trabajó con ecuaciones cuadráticas.

Definición: Una ecuación cuadrática (ecuación de segundo grado) de una variable es una ecuación que tiene la forma de una suma algebraica de términos cuyo grado máximo es dos. Una ecuación cuadrática puede ser representada por un polinomio de grado dos.

Formula general: $ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$

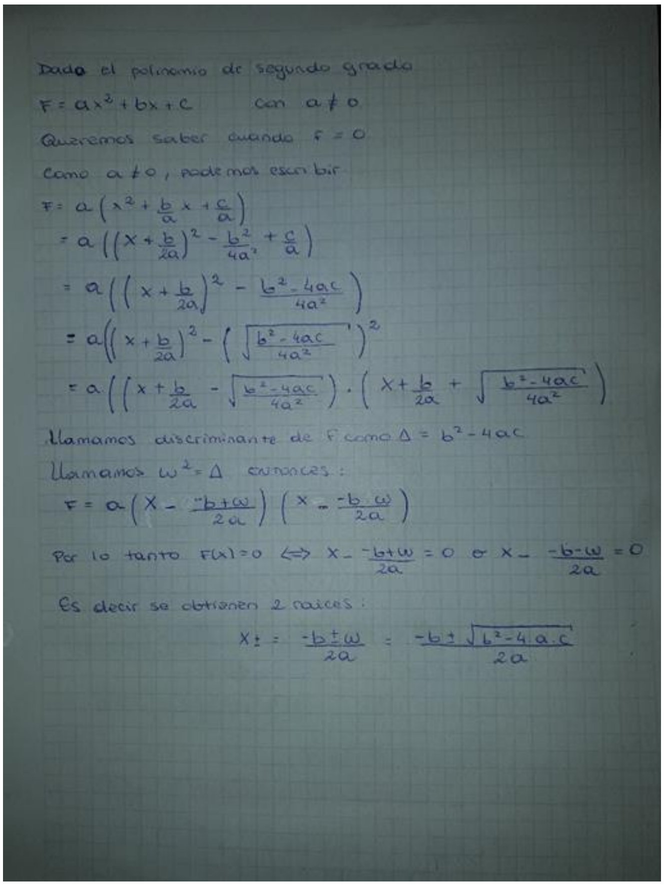
Donde x es la variable, a es el coeficiente cuadrático, b el coeficiente lineal y c el termino independiente.

3)

4) Sea $ax^2 + bx + c$ una ecuación cuadrática con $a \neq 0$. Se pide encontrar la solución de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, para ello debemos encontrar las raíces de la ecuación.

Las raíces de una ecuación de segundo grado, x_1 y x_2 suelen expresarse mediante la fórmula: $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

5)



Dado el polinomio de segundo grado

$F = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$

Queremos saber cuando $F = 0$

Como $a \neq 0$, podemos escribir

$$F = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right)^2$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right) \cdot \left(x + \frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right)$$

Llamamos discriminante de F como $\Delta = b^2 - 4ac$

Llamamos $\omega^2 = \Delta$ entonces:

$$F = a\left(x - \frac{-b+\omega}{2a}\right)\left(x - \frac{-b\ \omega}{2a}\right)$$

Por lo tanto $F(x) = 0 \iff x - \frac{-b+\omega}{2a} = 0$ o $x - \frac{-b-\omega}{2a} = 0$

Es decir se obtienen 2 raices:

$$x_\pm = \frac{-b \pm \omega}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a.c}}{2a}$$

6) Si, se puede usar la propiedad. La fórmula resolvente puede ser utilizada siempre que se cumpla que tengas un polinomio de grado dos. En este caso como quería ver que sucedía con las raíces y es un polinomio de grado 2 la pude utilizar.

Resolución de A12

1) **Si *a, b* y *c* son enteros consecutivos, explica si hay alguna característica que presenten las raíces de todas las soluciones de la forma $4ax^2 + 4bx + c = 0$**

En principio para hallar las raíces de una función cuadrática basta con usar la formula de la resolvente para saber si las raíces reales son 0, 1 0 2. $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
Como a, b y c son números enteros consecutivos entonces podemos escribir $b = a + 1$ y $c = a + 2$. Remplazamos en la ecuación dada y obtenemos:
$\boldsymbol{4ax^2 + 4(a+1)x + a + 2 = 0}$ y la resolvente nos queda como:
$\frac{-(4a+4)\pm\sqrt{(4a+4)^2-4.4a(a+2)}}{2.4a}$
Para analizar las características de las raíces de la ecuación veo, en principio, cuantas raíces puede llegar a tener la ecuación. Esto lo realizo analizando el discriminante de la formula de la resolvente, ya que si este es 0, entonces hay una sola raíz real, si es mayor a 0 hay dos raíces reales y si es menor que 0 la ecuación no tendrá raíces reales.

$$(4a+4)^2 - 4.4a(a+2) = \cancel{16a^2} + \cancel{32a} + 16 - \cancel{16a^2} - \cancel{32a} = 16$$

El discriminante es 16 por lo tanto la ecuación va a tener dos raíces reales si a, b y c son números enteros consecutivos.
Ahora analizo cuales pueden llegar a ser esas dos raíces reales.

$$\frac{-(4a+4)\pm\sqrt{16}}{8a} =$$

$$x1 = \frac{-4a-4+4}{8a} = \frac{-4a}{8a} = \frac{-1}{2}$$

$$x2 = \frac{-4a-4-4}{8a} = \frac{-4a-8}{8a} = \frac{4(-a-4)}{8a} = \frac{-a-4}{4a}$$

Por lo tanto no importan cuales sean a, b y c consecutivos, una de las raíces siempre va a ser -0,5. Y la otra raíz va a depender del valor de “a”.
Vemos como será la segunda raíz dependiendo de lo que valga a, (aclaramos que a tiene que ser distinto de 0 ya que si no la ecuación no sería una cuadrática).
Si *a=-8*, la raíz será 0.
Si -8< *a<0, (-a-8)<0* y 4*a<0, por lo tanto la raíz será positiva.*
Si *a>0, (-a-8)<0* y 4*a>0, por lo tanto la raíz será negativa*
Si *a<-8, (-a-8)>0* y 4*a<0, por lo tanto la raíz será negativa.*
Por lo tanto, podemos decir que una raíz siempre será -0,5 y la otra va a depender del valor de a.

$$a \in (-\infty, -8) \cup (0, +\infty) la\ raiz\ sera\ negativa;$$
$$si\ a \in (-8,0), la\ raiz\ sera\ positiva;$$
$$y\ si\ a = -8, la\ raiz\ sera\ 0.$$

a, b, c enteros consecutivos, explica si hay alguna característica que presenten las raíces de todas las soluciones de la forma $\underbrace{4a}_{A}x^2 + \underbrace{4b}_{B}x + \underbrace{c}_{C} = 0$

Para hallar las raíces de una cuadrática uso la fórmula de la resolvente $\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$ en principio una cuadrática puede tener 0 raíces, 2 raíces o 1 raíz $\in \mathbb{R}$, para saber qué es lo que ocurre con esta cuadrática veo lo siguiente:

1°) a, b, c enteros consecutivos, entonces

$b = a+1$, y $c = a+2 \Rightarrow 4a\,x^2 + 4(a+1)x + a+2 = 0$

la resolvente nos da $\frac{-(4a+4) \pm \sqrt{16(a+1)^2 - 4 \cdot 4a \cdot (a+2)}}{2 \cdot 4a}$

para saber si la ecuación ~~va a~~ tiene o no raíces analizo el discriminante de la resolvente

$16(a^2 + 2a + 1) - 16a(a+2)$

$\cancel{16a^2} + \cancel{32a} \boxed{+16} - \cancel{16a^2} + \cancel{32a}$

$\Rightarrow$ el discriminante, mientras sean a b y c consecutivos me va a dar 16.

[illegible]

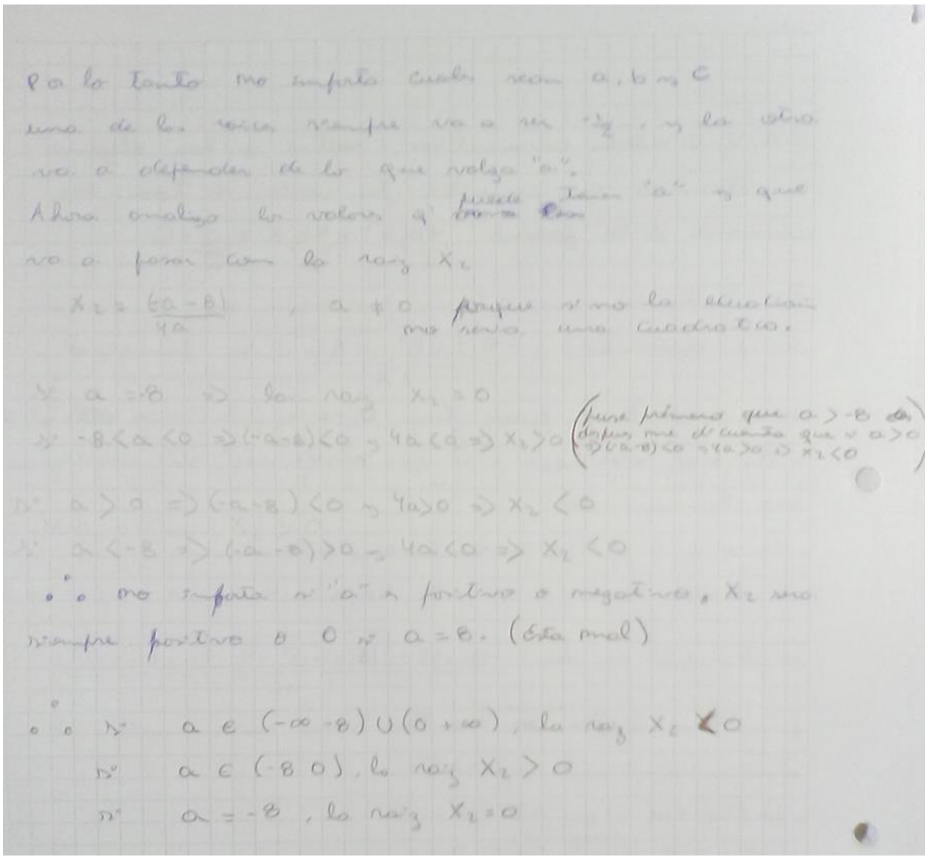
$\Rightarrow$ Tengo que la ecuación va a tener 2 raíces.

$$\frac{-(4a+4) \pm \sqrt{16}}{8a} = \frac{-(4a+4) \pm 4}{8a} =$$

$x_1 = \frac{-4a - 4 + 4}{8a}$ $\qquad$ $x_2 = \frac{-4a - 4 - 4}{8a}$

$x_1 = \frac{-4\cancel{a}}{8\cancel{a}} = \boxed{-\frac{1}{2}}$ $\qquad$ $x_2 = \frac{-4a - 8}{8a} = \frac{4(a-8)}{8a}$

$\boxed{x_2 = (a-8)}$



Por lo tanto no importa cuales sean a, b y c
una de las raíces siempre va a ser $-\frac{1}{2}$, y la otra
va a depender de lo que valga "a".
Ahora analizo los valores q' puede tener "a" y que
va a pasar con la raíz X_2

$X_2 = \frac{(-a-8)}{4a}$, $a \neq 0$ porque si no la ecuación no sería una cuadrática.

Si $a = -8 \Rightarrow$ la raíz $X_2 = 0$
Si $-8 < a < 0 \Rightarrow (-a-8) < 0$ y $4a < 0 \Rightarrow X_2 > 0$ (puse primero que $a > -8$ da, después me di cuenta que si $a > 0 \Rightarrow (-a-8) < 0$ y $4a > 0 \Rightarrow X_2 < 0$)

Si $a > 0 \Rightarrow (-a-8) < 0$ y $4a > 0 \Rightarrow X_2 < 0$
Si $a < -8 \Rightarrow (-a-8) > 0$ y $4a < 0 \Rightarrow X_2 < 0$
$\therefore$ no importa si "a" es positivo o negativo, X_2 es siempre positivo o 0 si $a = 8$. (Está mal)

$\therefore$ si $a \in (-\infty\ -8) \cup (0\ +\infty)$, la raíz $X_2 < 0$
si $a \in (-8\ 0)$, la raíz $X_2 > 0$
si $a = -8$, la raíz $X_2 = 0$

Explicación de lo que hice: Para resolver el ejercicio plantee el discriminante de la ecuación, por eso escribí lo de la formula resolvente, viendo el discriminante y reemplazando $b\ por\ a + 1$ y $c\ por\ a + 2$ porque b es uno más que a y c es dos más que a. Ahí despejando te da 16, ósea que no importan los valores de a, b y c, siempre el discriminante va a dar 16 y por lo tanto va a tener dos raíces la ecuación. Luego use la formula de la resolvente y busque cuáles eran esas dos raíces y te da que una es siempre -0,5 y la otra va a depender de lo que valga a. Después plantee los posibles valores de a y que pasaba con esa ecuación y vi que a, en primer lugar debería ser distinto de 0 sino no podría usar la formula de la resolvente porque la función no sería cuadrática. Luego seguí analizando los valores de a, como se ve en la explicación y termine el ejercicio con esas conclusiones.

1) Para resolver la consigna utilice el concepto de la formula resolvente, el sub-concepto del discriminante de esta fórmula y la propiedad de la regla de los signos.
   Formula resolvente: Toda ecuación cuadrática expresada de manera canoníca, es decir: $ax^2 + bx + c$, en donde a, b y c son números reales. Tiene dos, una o 0 raíces reales. Para hallar las raíces de las ecuaciones cuadráticas expresadas de manera canoníca se utiliza la formula de la resolvente, la cual es: $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.
   Con esta fórmula podemos averiguar cuáles serán las raíces de nuestra ecuación. Ahora para saber si nuestra ecuación tiene una, dos o ninguna raíz, vemos el valor del discriminante. El discriminante es lo que tenemos dentro de la raíz de la formula de la resolvente, es decir $b^2 - 4ac$. Si este valor nos da 0, quiere decir que nuestra ecuación tiene una sola raíz, si el valor que nos da es negativo, la ecuación no tiene raíces, y si el valor es positivo la ecuación tiene dos raíces.

2) Bueno hoy veremos raíces de funciones cuadráticas expresadas de manera canoníca es decir, como: a por x al cuadro más b por x mas c, donde a, b y c son números reales que siempre los van a tener, por ejemplo si tenemos dos por x al cuadrado mas cinco x menos seis. Acá nuestros abc serán dos, cinco y menos seis. Para hallar las raíces de esta ecuación o cualquier ecuación cuadrática escrita de esta manera vamos a usar una formula, la formula de la resolvente, esta fórmula es la que está en el pizarrón. Usando esta fórmula pueden hallar las raíces de una ecuación cuadrática, si volvemos a nuestro ejemplo deberíamos reemplazar las letras abc que aparecen en la formula por los abc de nuestro ejemplo, ósea por dos, cinco y menos seis. Pero si en vez de querer saber cuales son las raíces de una ecuación cuadrática quisiéramos solo saber si la ecuación tiene una, dos o 0 raíces. Lo que usamos es el discriminante de la formula, miremos, si reemplazamos nuestros datos en el discriminante nos da que cinco al cuadrado es veinticinco menos cuatro por dos por menos seis nos queda veinticinco mas cuarenta y ocho que es setenta y tres y este número es positivo por lo tanto ya sabemos, usando el discriminante, que la ecuación va a tener dos raíces.

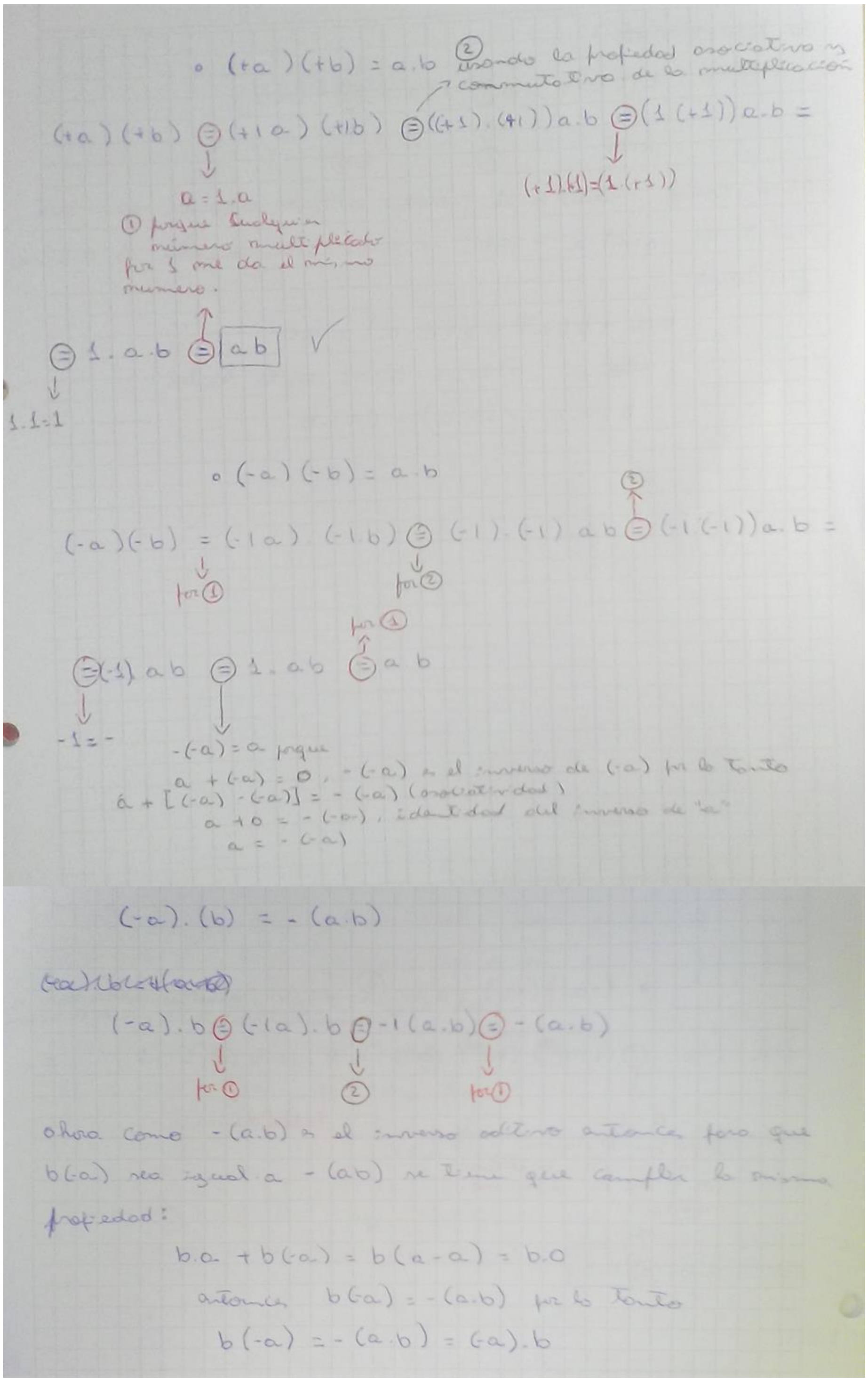
3) La propiedad que use para resolver la consigna fue la regla de los signos: Esta regla dice lo siguiente: El producto o división de dos números negativos me da un numero positivo, El producto o división de dos números positivos me da un numero positivo, y el producto o división de un números negativos y otro positivo me da un numero negativo.

4) Sean a y b dos números reales, demostraremos las siguientes afirmaciones para el caso de la multiplicación, para la división es similar la demostración.

Producto de dos números positivos: $(+a).(+b) = a.b$
Dem:
$$(+a).(+b) = (+1a).(+1b) = \big((+1).(+1)\big)a.b = \big(1(+1)\big)a.b = 1.ab = ab$$

Producto de dos números negativos: $(-a).(-b) = a.b$
Dem:
$$(-a).(-b) = (-1a).(-1b) = \big((-1).(-1)\big)a.b = \big(-1(-1)\big)a.b = 1.ab = ab$$

Producto de un número positivo y otro negativo: $(-a).(b) = -(a.b)$
Dem:
$$(-a).b = (-1a).b = -1(a.b) = -(a.b)$$
$como$ $-$(a.b) es el inverso aditivo entonces para que b(-a) sea igual a –(a.b) tiene que cumplir la misma propiedad
$$ba + b(-a) = b(a-a) = b.0 \rightarrow b(-a) = -(a.b) \therefore b(-a) = -(a.b) = (-a).b$$



$(+a)(+b) = a.b$ ② usando la propiedad asociativa y commutativa de la multiplicación

$(+a)(+b) = (+1a)(+1b) = ((+1).(+1))a.b = (1(+1))a.b =$

$a = 1.a$

① porque cualquier número multiplicado por 1 me da el mismo número.

$(+1).(+1) = (1.(+1))$

$= 1.a.b = \boxed{ab}$ ✓

$1.1 = 1$

$(-a)(-b) = a.b$

$(-a)(-b) = (-1a)(-1.b) = (-1).(-1)\,ab = (-1(-1))a.b =$

por ① por ② ②

$= (-1)\,ab = 1.ab = ab$

por ①

$-1 = -$

$-(-a) = a$ porque

$a + (-a) = 0$, $-(-a)$ es el inverso de $(-a)$ por lo tanto

$a + [(-a) - (-a)] = -(-a)$ (asociatividad)

$a + 0 = -(-a)$, identidad del inverso de "a"

$a = -(-a)$

$(-a).(b) = -(a.b)$

$(-a).b = (-1a).b = -1(a.b) = -(a.b)$

por ① ② por ①

ahora como $-(a.b)$ es el inverso aditivo entonces para que $b(-a)$ sea igual a $-(ab)$ se tiene que cumplir la misma propiedad:

$b.a + b(-a) = b(a-a) = b.0$

entonces $b(-a) = -(a.b)$ por lo tanto

$b(-a) = -(a.b) = (-a).b$

6)La regla de los signos puedo utilizarla para la resolución de la consigna ya que los valores de *a* son reales y esta propiedad puede utilizarse para números reales.

Resolución de A13

1) a) y c) Resolución experta y explicación de la resolución como si se la quisiese pasar a un compañero que tiene mi "resolución pasada en limpio" pero no la entendió:
Para comenzar, sé que a, b y c son números enteros consecutivos, por lo tanto los puedo escribir de la siguiente manera:

a = a
b = a+1 (como b es el número consecutivo de a, le sumo 1 a a)
c = b+1 = a+1+1 = a+2 (como c es el número consecutivo de b, le sumo 1 a b, es decir que le sumo 2 a a).
Una vez que tengo a los tres números en función de a, voy a reescribir a la ecuación *$4ax^2 + 4bx + c = 0$* de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{4ax^2 + 4(a+1)x + (a+2) = 0}$$

Luego, voy a buscar las raíces de todas las ecuaciones que tienen la forma anteriormente escrita tal como lo pide la consigna. Para ello, utilizaré la fórmula resolvente que se presenta a continuación (tomando a ≠ 0):

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Reemplazaré a a, a b y a c por los valores anteriormente obtenidos (a = a, b = a+1 y c = a+2) y realizaré las operaciones correspondientes hasta lograr obtener las dos raíces de todas las ecuaciones de la forma *$4ax^2 + 4(a+1)x + (a+2) = 0$*, que pueden ser iguales o distintas (serán iguales en el caso en el que la raíz que aparece en la fórmula resolvente de 0 como resultado y al sumar o restar 0 se obtendría un único valor, al cual se lo llamaría raíz doble):

$$x_1, x_2 = \frac{-[4(a+1)] \pm \sqrt{[4(a+1)]^2 - 4.4a.(a+2)}}{2.4a}$$

Dentro de la raíz, elevo al cuadrado tanto al 4 como al (a+1) y, en el segundo término, multiplico a 4 por 4a. También, en el denominador, multiplico a 2 por 4a y se obtiene lo que se presenta a continuación:

$$x_1, x_2 = \frac{-[4(a+1)] \pm \sqrt{16(a+1)^2 - 16a(a+2)}}{8a}$$

Continúo operando dentro de la raíz, resolviendo un cuadrado de binomio en el caso de $(a+1)^2$ y aplicando la propiedad distributiva cuando aparece a(a+2):

$$x_1, x_2 = \frac{-[4(a+1)] \pm \sqrt{16(a^2 + 2a + 1) - 16(a^2 + 2a)}}{8a}$$

Como 16 se encuentra multiplicando a los dos términos que aparecen dentro de la raíz, lo puedo "sacar" como factor común de la siguiente forma:

$$x_1, x_2 = \frac{-[4(a+1)] \pm \sqrt{16(a^2 + 2a + 1 - a^2 - 2a)}}{8a}$$

Por propiedad de la radicación, como 16 y lo que se encuentra dentro del paréntesis se están multiplicando, puedo "separar" la raíz, lo cual quedaría así:

$$x_1, x_2 = \frac{-[4(a+1)] \pm \sqrt{16}\sqrt{a^2 + 2a + 1 - a^2 - 2a}}{8a}$$

Calculo la raíz cuadrada de 16. Además, se puede observar que el a^2 (que es positivo en el caso del primer término dentro de la raíz) se cancela con el a^2 que aparece restando. Lo mismo sucede con el 2a, ya que uno de los términos es positivo y el otro es negativo. Es decir, que dentro de la raíz solo queda el 1, y su raíz es 1. Por ende, se multiplica al 4 que se obtuvo al realizar la raíz cuadrada de 16 con el 1 antes mencionado. Por lo tanto, se obtendría lo siguiente:

$$x_1, x_2 = \frac{-[4(a+1)] \pm 4}{8a}$$

Luego, como el 4 se encuentra en los dos términos que aparecen en el numerador, lo "saco" como factor común, de modo tal de poder simplificarlo con el 8 que se encuentra en el denominador:

$$x_1, x_2 = \frac{4[-(a+1) \pm 1]}{8a}$$
$$x_1, x_2 = \frac{-(a+1) \pm 1}{2a}$$

Sobre lo obtenido, aplico la propiedad distributiva entre el (-1) (que está representado por un menos delante del paréntesis) y el (a+1). Se puede observar lo que se presenta a continuación:

$$x_1, x_2 = \frac{-a - 1 \pm 1}{2a}$$

Una vez que se han realizando todas las operaciones, puedo separar el $\pm$ en dos resultados distintos, donde una de las raíces es:

$$\boldsymbol{x_1} = \frac{-a-1+1}{2a} = \frac{-a}{2a} = \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{2}}$$

y la otra es:

$$\boldsymbol{x_2} = \frac{-a-1-1}{2a} = \frac{-a-2}{2a} = \frac{\boldsymbol{-(a+2)}}{\boldsymbol{2a}}$$

Finalmente, puedo concluir diciendo que las raíces de todas las ecuaciones de la forma $4ax^2 + 4bx + c = 0$ presentan las siguientes características:

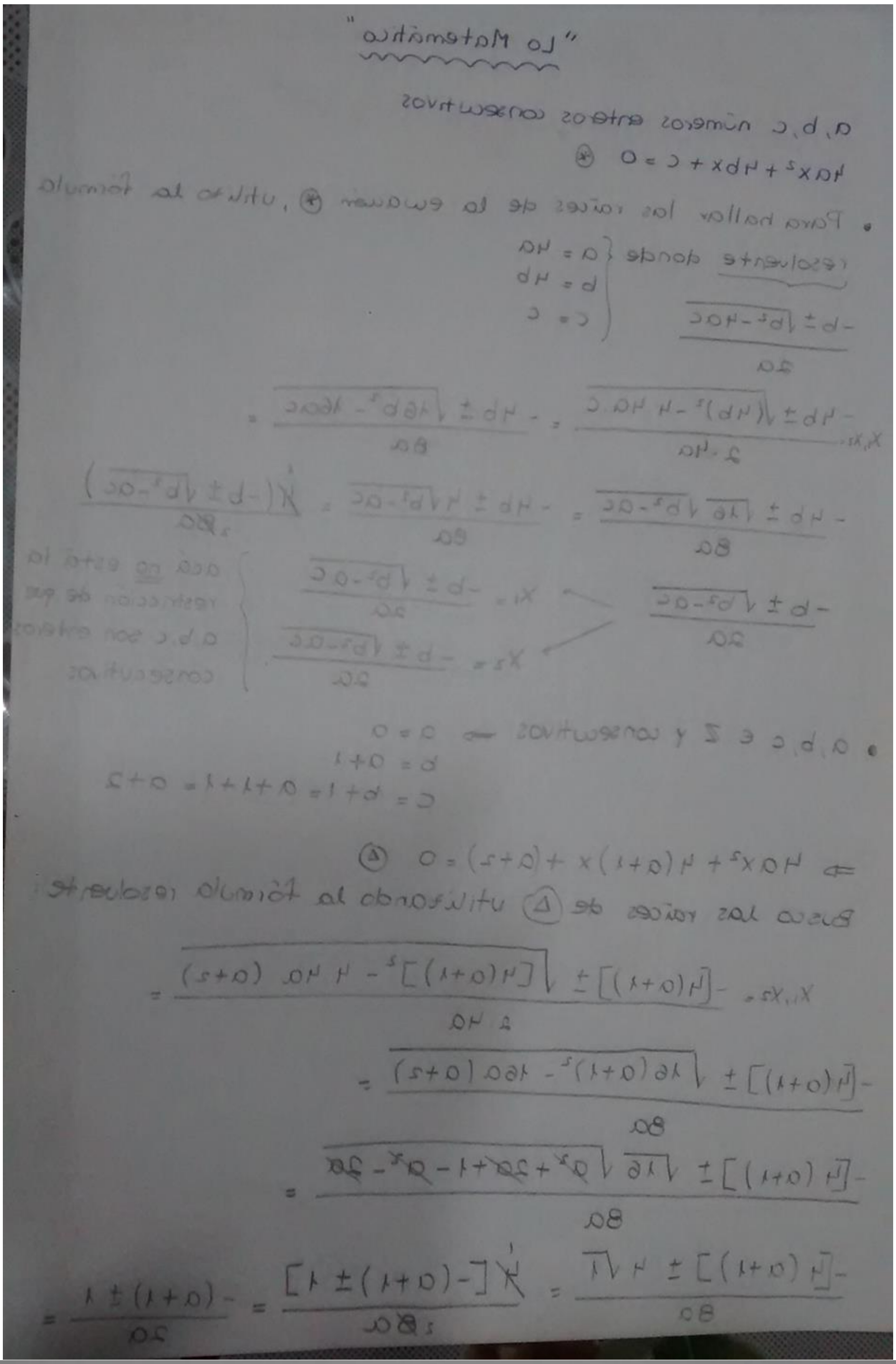
- $X_1 = \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{2}}$
- $X_2 = \frac{\boldsymbol{-(a+2)}}{\boldsymbol{2a}}$

En el caso en que a = 0, entonces b = 1 y c = 2 por ser números enteros consecutivos. Por lo tanto, la ecuación quedaría presentada de la siguiente manera: $4x + 2 = 0$.
Es decir que habría una única raíz y la misma la voy a averiguar de la siguiente forma:

$$4x + 2 = 0$$
$$4x = -2$$
$$x = \frac{-2}{4}$$
$$x = \frac{-1}{2}$$

que justamente coincide con una de las raíces en el caso en que a $\neq$ 0.

b) Hoja borrador:



"La Matemática"

a, b, c números enteros consecutivos

$4ax^2 + 4bx + c = 0$ (*)

• Para hallar las raíces de la ecuación (*), utilizo la fórmula resolvente donde $a = 4a$, $b = 4b$, $c = c$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_1, x_2 = \frac{-4b \pm \sqrt{(4b)^2 - 4 \cdot 4a \cdot c}}{2 \cdot 4a} = \frac{-4b \pm \sqrt{16b^2 - 16ac}}{8a}$$

$$= \frac{-4b \pm \sqrt{16}\sqrt{b^2-ac}}{8a} = \frac{-4b \pm 4\sqrt{b^2-ac}}{8a} = \frac{\cancel{4}(-b \pm \sqrt{b^2-ac})}{{}_2\cancel{8}a}$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-ac}}{2a} \rightarrow x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2-ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2-ac}}{2a}$$

acá no está la restricción de que a, b, c son enteros consecutivos

• $a, b, c \in \mathbb{Z}$ y consecutivos $\rightarrow a = a$

$b = a+1$

$c = b+1 = a+1+1 = a+2$

$\Rightarrow 4ax^2 + 4(a+1)x + (a+2) = 0$ (Δ)

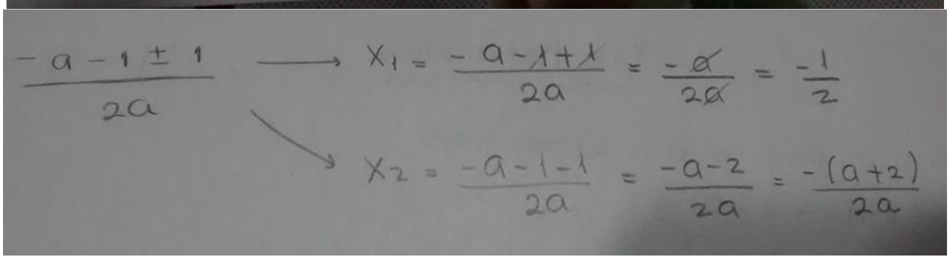
Busco las raíces de (Δ) utilizando la fórmula resolvente:

$$x_1, x_2 = \frac{-[4(a+1)] \pm \sqrt{[4(a+1)]^2 - 4 \cdot 4a\,(a+2)}}{2 \cdot 4a}$$

$$= \frac{-[4(a+1)] \pm \sqrt{16(a+1)^2 - 16a\,(a+2)}}{8a}$$

$$= \frac{-[4(a+1)] \pm \sqrt{16}\sqrt{a^2+2a+1-a^2-2a}}{8a}$$

$$= \frac{-[4(a+1)] \pm 4\sqrt{1}}{8a} = \frac{\cancel{4}[-(a+1) \pm 1]}{{}_2\cancel{8}a} = \frac{-(a+1) \pm 1}{2a}$$



$$\frac{-a-1 \pm 1}{2a} \longrightarrow x_1 = \frac{-a-\cancel{1}+\cancel{1}}{2a} = \frac{-\cancel{a}}{2\cancel{a}} = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-a-1-1}{2a} = \frac{-a-2}{2a} = \frac{-(a+2)}{2a}$$

2) Uno de los conceptos matemáticos que se trabaja en esta consigna es **ecuaciones cuadráticas o ecuaciones de segundo grado**.

Definición: Una ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática de una variable es una ecuación que tiene la forma de una suma algebraica de términos cuyo grado máximo es dos, es decir que una ecuación cuadrática puede ser representada por un polinomio de segundo grado o también conocido como polinomio cuadrático. La expresión general de una ecuación cuadrática de una variable es la que se presenta a continuación:

$ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$ y x es la variable.

Además, a es el coeficiente cuadrático (distinto de 0), b el coeficiente lineal y c es el término independiente.

Esta ecuación se puede interpretar mediante la gráfica de una función cuadrática, es decir, por una parábola. Esta representación gráfica es útil porque las intersecciones o el punto tangencial de esta gráfica (en el caso de existir) con el eje X coinciden con las soluciones de la ecuación. A dichas intersecciones de la gráfica con el eje X se las denomina raíces.

Otros conceptos matemáticos que también se utilizan en la resolución de la consigna son el **cuadrado de un binomio** y la **propiedad distributiva.**

3) Una **ecuación cuadrática o ecuación de segundo grado** es aquella que posee (no siempre) un término cuadrático, un término lineal y un término independiente. Con esto me refiero a que en uno de sus términos, la variable (generalmente se usa la letra “x”) aparecerá elevada al cuadrado (es decir que tiene grado 2) y acompañada de un coeficiente al cual se lo denomina coeficiente principal. Luego, en otro de sus términos aparecerá la variable, en este caso con grado 1, acompañada por un coeficiente. Y por último, en el término restante, aparecerá únicamente un número (si es que dicho número no es 0) sin la variable en cuestión, y a este término se lo llama término independiente.

En el caso en el que alguno de los coeficientes sea el número 1, por ejemplo, en el término cuadrático y en el término lineal, estará presente únicamente la variable ya que dicho coeficiente se encuentra multiplicando a la variable, es decir que hacer 1 por la variable dará como resultado a la variable. Por lo tanto, “no tiene sentido” escribirlo en el caso de los términos mencionados. En cambio, en el término independiente, sí es necesario que ese 1 aparezca ya que no hay variable a la cual dicho número multiplicaría.

Por otro lado, si alguno de los coeficientes es 0 entonces tanto el término cuadrático como el lineal o el independiente (según donde aparezca dicho coeficiente) se anularían. Es por eso que al principio de la explicación aclaré que no siempre están presentes los tres términos ya que puede suceder que haya uno o dos términos únicamente o, también, que estén involucrados los tres términos en una ecuación. Además, cabe mencionar que, en el caso en el que no esté presente el término cuadrático, entonces se estaría hablando de una ecuación lineal o de grado uno. Para poder trabajar sobre ecuaciones cuadráticas, tiene que estar presente sí o sí el término en el cual la variable se encuentra elevada al cuadrado.

4) Para resolver la consigna, utilicé la **fórmula resolvente** para obtener las raíces de todas las ecuaciones de la forma: $4ax^2 + 4bx + c = 0$.

5) Demostración de la fórmula resolvente:

$$\mathbf{f(r) = 0,\ r \in R \leftrightarrow}$$

$$\mathbf{ar^2 + br + c = 0\ (a \neq 0) \leftrightarrow}$$

$$\mathbf{r^2 + \frac{b}{a}r + \frac{c}{a} = 0 \leftrightarrow}$$

$$\mathbf{r^2 + 2r\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0 \leftrightarrow}$$

$(\mathbf{r} + \frac{b}{2a})^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = \mathbf{0} \leftrightarrow$
$(\mathbf{r} + \frac{b}{2a})^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \leftrightarrow$
$(\mathbf{r} + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \leftrightarrow$
$(\mathbf{r} + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2-4ac}{2a} \leftrightarrow$
$\mathbf{b^2 - 4ac \geq 0}$

Tomando raíz cuadrada:
$|\mathbf{r} + \frac{b}{2a}| = \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2|a|}$
$\mathbf{r} + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2|a|} = \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
$\mathbf{r} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

<u>Explicación de la demostración de la fórmula resolvente:</u>

Comienzo dividiendo a $\mathbf{ar^2 + br + c = 0}$ por a, es decir que divido a cada uno de los términos por a. Una vez hechas las divisiones, completo cuadrados. Luego, al trinomio cuadrado perfecto que se ve a continuación $\mathbf{r^2 + 2r}\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ lo "convierto" en un cuadrado de binomio. Por lo tanto, se obtendría lo siguiente $(\mathbf{r} + \frac{b}{2a})^2$. Luego, "paso" del otro lado del igual a $-\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}$ y en el caso del primer término, distribuyo la potencia cuadrada tanto al numerador como al denominador, obteniéndose lo siguiente: $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$. Resuelvo la resta y todo quedaría expresado de la siguiente forma:
$(\mathbf{r} + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2-4ac}{2a}$ (si y solo si b^2-4ac es mayor o igual a 0).
Luego, a la potencia cuadrada de $\mathbf{r} + \frac{b}{2a}$ la "paso" como raíz cuadrada del otro lado del igual y le aplico módulo a lo que quedó, ya que dicha suma puede tomar un valor positivo o uno negativo. Es por eso mismo que luego se reemplaza al módulo por un $\pm$. Por último, se pasa restando al $\frac{b}{2a}$. Como ambos términos tienen el mismo denominador, puedo juntarlos obteniendo una única fracción como se muestra a continuación:
$\mathbf{r} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

6) No tengo certeza de que puedo usar la propiedad demostrada anteriormente. La utilicé porque gracias a ella se pueden hallar las raíces de las ecuaciones cuadráticas. Una de sus restricciones es que el valor que tome a debe ser distinto a 0 ya que en el denominador de la misma aparece 2a y si a fuese 0, no sería posible poder dividir por 0. Además, si a fuese 0, esta fórmula no la aplicaría para hallar raíces ya que la ecuación con la que estaría trabajando tendría grado 1 y el valor de la incógnita se podría hallar simplemente haciendo los despejes correspondientes.

Resolución de A14

1)

a) Resolución experta:

Sean a, b, y c números enteros consecutivos, quiero ver como serán las raíces de todas las ecuaciones de la forma $4ax^2 + 4bx + c = 0$.
Lo primero que hago es utilizar la formula resolvente para ver que expresión tienen sus raíces.
Entonces:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Usando los términos de la ecuación me queda:

$$x_{1,2} = \frac{-4b \pm \sqrt{(4b)^2 - 4.4ac}}{2.4a}$$

Luego voy resolviendo la expresión algebraica hasta obtener la expresión correspondiente a las raíces de la ecuación:

$$x_{1,2} = \frac{-4b \pm \sqrt{(4b)^2 - 4.4ac}}{2.4a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-4b \pm \sqrt{16b^2 - 16ac}}{8a} \rightarrow \text{resolvi la potencia}$$

$$x_{1,2} = \frac{-4b \pm \sqrt{16\left(b^2 - ac\right)}}{8a} \rightarrow \text{saque el 16 de factor comun}$$

$$x_{1,2} = \frac{-4b \pm \sqrt{16}.\sqrt{\left(b^2 - ac\right)}}{8a} \rightarrow \text{use la distributividad de la raiz y saque afuera } \sqrt{16}$$

$$x_{1,2} = \frac{-4b \pm 4.\sqrt{\left(b^2 - ac\right)}}{8a}$$

$$x_{1,2} = \frac{4\left[-b \pm \sqrt{\left(b^2 - ac\right)}\right]}{8a} \rightarrow \text{saque el 4 de factor comun y lo simplifique con el 8}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\left(b^2 - ac\right)}}{2a}$$

Ahora nos quedan las raíces de la ecuación de la forma:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - ac}}{2a}$$

Ahora pienso en tres números enteros n, n+1 y n+2 (números consecutivos para todo $n \in Z_{\neq 0}$)
Luego reemplazo a=n, b=n+1 y c=n+2 (con n distinto de cero) en las expresiones que obtuve antes y vuelvo a operar algebraicamente:

Raíz x_1:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-(n+1)+\sqrt{(n+1)^2-n(n+2)}}{2n} \rightarrow \text{resuelvo el cuadrado y aplico prop distributiva}$$

$$x_1 = \frac{-n-1+\sqrt{n^2+2n+1-n^2-2n}}{2n} \rightarrow \text{aplico prop cancelativa}$$

$$x_1 = \frac{-n-1+\sqrt{1}}{2n}$$

$$x_1 = \frac{-n-1+1}{2n}$$

$$x_1 = \frac{-n}{2n}$$

$$x_1 = \frac{-1}{2}$$

Raíz x_2:

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-(n+1)-\sqrt{(n+1)^2-n(n+2)}}{2n} \rightarrow \text{resuelvo el cuadrado y aplico prop distributiva}$$

$$x_2 = \frac{-n-1-\sqrt{n^2+2n+1-n^2-2n}}{2n} \rightarrow \text{aplico prop cancelativa}$$

$$x_2 = \frac{-n-1-\sqrt{1}}{2n}$$

$$x_2 = \frac{-n-1-1}{2n}$$

$$x_2 = \frac{-n-2}{2n}$$

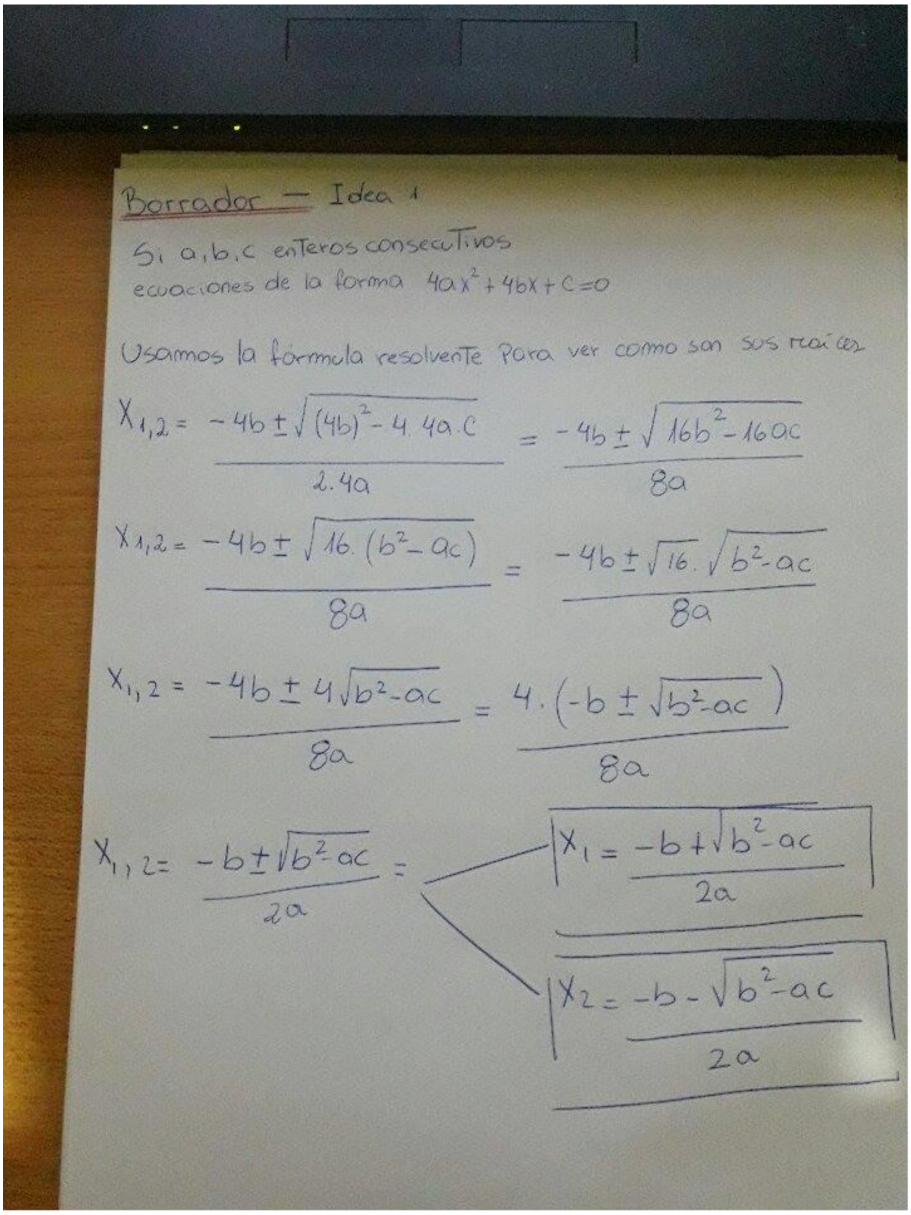
Finalmente las raíces de todas las ecuaciones de la forma $4ax^2+4bx+c=0$ con a, b y c enteros consecutivos (donde a=n, b=n+1 y c=n+2): son de la forma:

$$x_1 = \frac{-1}{2} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-2-n}{2n} \quad \text{con } n \neq 0$$

Si se toman tres números enteros (esto no lo incluyo en esta resolución) consecutivos vemos que sus raíces dan de la forma que me quedo en la resolución.

Podemos además concluir (ver demostración) que x_2

b) hoja borrador



Borrador — Idea 1

Si a, b, c enteros consecutivos

ecuaciones de la forma $4ax^2+4bx+c=0$

Usamos la fórmula resolvente para ver como son sus raíces

$$X_{1,2}=\frac{-4b\pm\sqrt{(4b)^2-4.4a.c}}{2.4a}=\frac{-4b\pm\sqrt{16b^2-16ac}}{8a}$$

$$X_{1,2}=\frac{-4b\pm\sqrt{16.(b^2-ac)}}{8a}=\frac{-4b\pm\sqrt{16}.\sqrt{b^2-ac}}{8a}$$

$$X_{1,2}=\frac{-4b\pm4\sqrt{b^2-ac}}{8a}=\frac{4.(-b\pm\sqrt{b^2-ac})}{8a}$$

$$X_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{2a}=$$

$$\boxed{X_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{2a}}$$

$$\boxed{X_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{2a}}$$

Ahora considero 3 números enteros $n, n+1, n+2$ con $n \in \mathbb{Z}$,
$\rightarrow a=n$, $b=n+1$, $c=n+2$ $\quad n \neq 0$
Reemplazando

$$\Rightarrow X_1 = \frac{-(n+1)+\sqrt{(n+1)^2-n.(n+2)}}{2n}$$

$$X_1 = \frac{-n-1+\sqrt{\cancel{n^2}+\cancel{2n}+1-\cancel{n^2}-\cancel{2n}}}{2n} = X_1 = \frac{-n-1+\sqrt{1}}{2n}$$

$$\Rightarrow X_1 = \frac{-n\cancel{-1}\cancel{+1}}{2n} = \frac{-n}{2n} \Rightarrow \boxed{X_1 = -\frac{1}{2}}$$

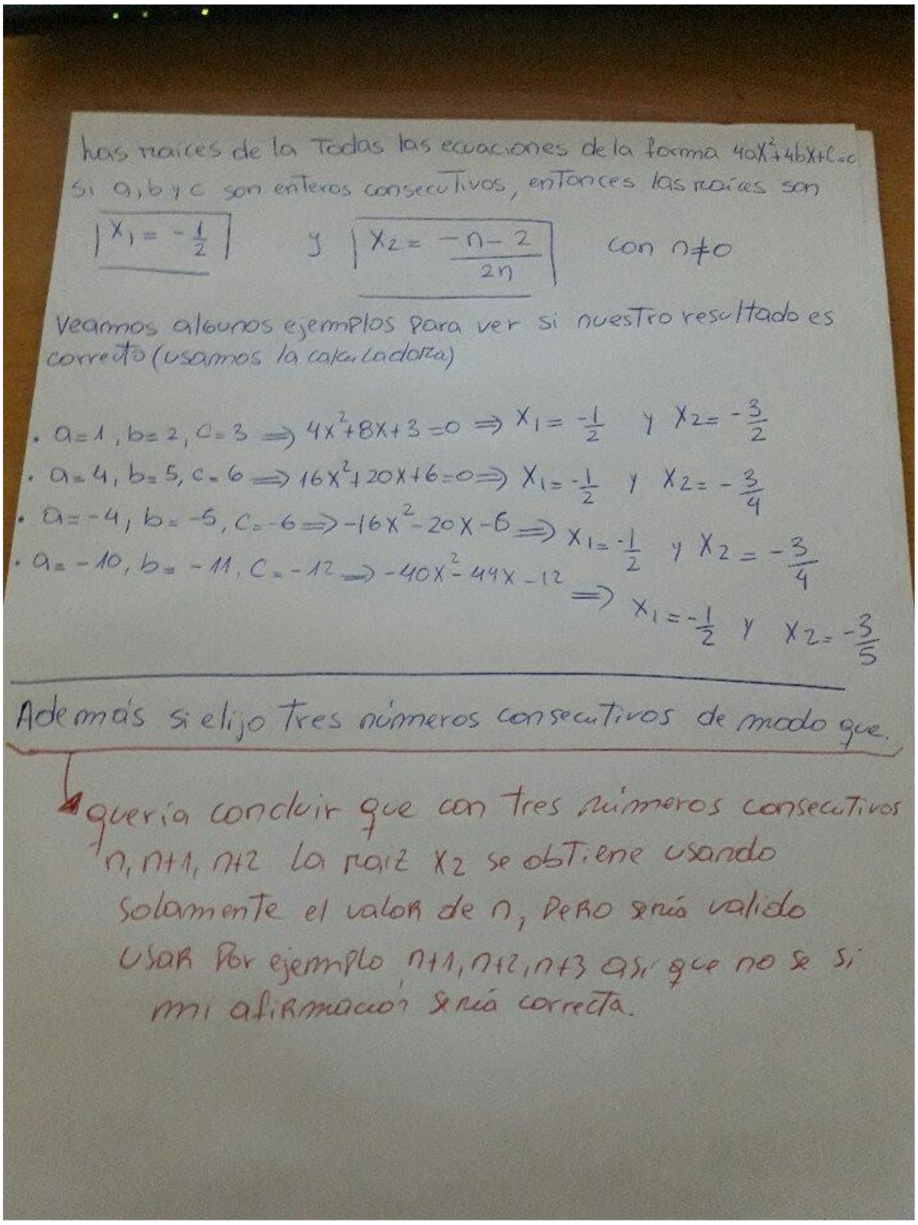
$$X_2 = \frac{-(n+1)-\sqrt{(n+1)^2-n.(n+2)}}{2n}$$

$$X_2 = \frac{-n-1-\sqrt{\cancel{n^2}+\cancel{2n}+1-\cancel{n^2}-\cancel{2n}}}{2n}$$

$$X_2 = \frac{-n-1-\sqrt{1}}{2n} \longrightarrow X_2 = \frac{-n-1-1}{2n} = \frac{-n-2}{2n}$$

$$\Rightarrow \boxed{X_2 = \frac{-n-2}{2n}}$$

HOJA 2



Las raíces de la Todas las ecuaciones de la forma $4aX^2+4bX+C=0$
si a, b y c son enteros consecutivos, entonces las raíces son

$\boxed{X_1 = -\frac{1}{2}}$ y $\boxed{X_2 = \frac{-n-2}{2n}}$ con $n \neq 0$

Veamos algunos ejemplos para ver si nuestro resultado es correcto (usamos la calculadora)

- $a=1, b=2, c=3 \Rightarrow 4x^2+8x+3=0 \Rightarrow x_1=-\frac{1}{2}$ y $x_2=-\frac{3}{2}$
- $a=4, b=5, c=6 \Rightarrow 16x^2+20x+6=0 \Rightarrow x_1=-\frac{1}{2}$ y $x_2=-\frac{3}{4}$
- $a=-4, b=-5, c=-6 \Rightarrow -16x^2-20x-6 \Rightarrow x_1=-\frac{1}{2}$ y $x_2=-\frac{3}{4}$
- $a=-10, b=-11, c=-12 \Rightarrow -40x^2-44x-12 \Rightarrow x_1=-\frac{1}{2}$ y $x_2=-\frac{3}{5}$

Además si elijo tres números consecutivos de modo que.

quería concluir que con tres números consecutivos n, n+1, n+2 la raíz x_2 se obtiene usando solamente el valor de n, pero sería valido usar por ejemplo n+1, n+2, n+3 así que no se si mi afirmación sería correcta.

Nota: en esta ultima hoja hay un error de escritura, seria: "*usando solamente el valor de n, pero **no seria valido**"*

a) explicación de la resolución pasada en limpio:

Para la resolución de la consigna lo primero que hice fue usar la formula resolvente como si fuera una ecuación de segundo grado cualquiera, pero en vez de usar a, b y c use los términos que incluía la consigna es decir: 4a y 4b. Luego realice operaciones algebraicas (resolver potencia, sacar factor común y simplificar) para resumir esa expresión.

Obtuve una expresión para cada raíz de esa ecuación. A continuación lo que hice fue tomar tres números enteros n, n+1 y n+2 con n distinto de cero.

Finalmente lo que hice fue reemplazar esos tres números en las expresiones de las raíces que yo ya había obtenido y volviendo a hacer manejos algebraicos (propiedad cancelativa, distributiva y cuadrado de un binomio) encontré como son las raíces en funciones de los números enteros consecutivos elegidos.

Observación 1: Luego de terminar podría elegir nueceros enteros consecutivos y chequear la veracidad de mi resultado.
Observación 2: también se podrían tomar otros números consecutivos. Por ejemplo un caso podría ser: n+1, n+2, n+3
2) Conceptos matemáticos trabajados en esta consigna:
-Ecuaciones cuadráticas
-Raíces
-Números enteros
-Propiedad cancelativa
-Propiedad distributiva
-Cuadrado de un binomio
-Factor común
-Simplificación

Ecuaciones Cuadráticas

Definición:

$$\boxed{a.x^2 + b.x + c = 0}$$

Una Ecuación cuadrática o de segundo grado es una expresión de la forma:

Y se llama así por que la incógnita **x** aparece elevada al cuadrado. Decimos que: a es el termino cuadrático, b es el termino lineal y c es el termino independiente. Las soluciones de este tipo de ecuaciones se llaman raíces.

3) Explicación de la definición como si le hablara a la clase:

Aclaración:
Esta definición de forma hablada la di a un curso de 4to año y la estructura que usare es exactamente la misma que utilice para dialogar con mis alumnos con la cual posteriormente a la clase verifique que sirvió para la comprensión de dicha definición.

"Ustedes trabajaron con este tipo ecuaciones (**se escriben el pizarrón algunos ejemplos de ecuaciones de grado 1)**. Estas ecuaciones se llaman ecuaciones de grado 1 o lineales por que la incógnita x tiene una potencia 1, la cual no se escribe nunca (**momento en el que se inicia una explicación sobre por que x^1=x y se dicen ecuaciones lineales**), ahora vamos a trabajar con ecuaciones donde la incógnita x esta elevada al cuadrado (**se escribe un ejemplo en el pizarrón, como es el caso de:** $2x^2-6x+2$ y luego otros ejemplos similares).

Estas ecuaciones se llaman ecuaciones cuadráticas o de grado 2 (**volvemos a repetir que esto es por que la incógnita esta elevada al cuadrado**).
Pregunta: **¿Cómo se escribiría en general una ecuación así?** Como se pueden ver en estos ejemplos tenemos tres términos (**en general pero podemos tener menos: mostramos casos donde falten términos**): un número por x^2 más o menos por otro numero por x más o menos un número sin incógnita.
Escribamos ahora la definición de una ecuación cuadrática".

4) <u>Resultado:</u>

Sea n un número entero (distinto de cero) entonces la expresión $x_n = \frac{-2n-2}{2n}$ tiene un desarrollo decimal comprendido entre -2 y 0.

5) En la demostración del resultado que planteamos anteriormente lo que voy a hacer es considerar que números enteros yo reemplazaría en la expresión $x_n = \frac{-2n-2}{2n}$ y que obtendría luego de realizar las cuentas correspondientes.
Para esto consideramos cuatro casos: es decir el caso par si positivo y negativo y el caso impar si es positivo y negativo.
Con esto voy a obtener cuatro expresiones que voy a simplificar lo que mas se pueda para que me den una expresión para el número entero elegido de forma general.
Luego reemplazare un valor elegido al azar en cada expresión para ver en que intervalo se encuentran las soluciones de $x_n = \frac{-2n-2}{2n}$ si tomo distintos números enteros.
Finalmente a lo que vamos a llegar es a que sea cual sea el numero entero elegido (menos el cero) el intervalo de soluciones de $x_n = \frac{-2n-2}{2n}$ estará entre -2 y 0.

5)

Demostración

Para demostrar que $x_n = \frac{-2n-2}{2n}$ tiene un desarrollo decimal comprendido entre -2 y 0 tenemos que analizar al número entero n. vamos a analizar distintos casos.

- Si n es un numero entero par mayor que cero

Sea n=2k con k natural (distinto de cero)

Lo reemplazamos en la expresión $x_n = \frac{-2n-2}{2n}$ y realizamos los procedimientos algebraicos correspondientes para simplificarla con el fin de estudiar el resultado de utilizar n=2k.

$$x_n = \frac{-2k-2}{2.2k} = \frac{2.(-k-1)}{2.2k} = \frac{-k-1}{2k} \rightarrow x_n = \frac{-k-1}{2k} \text{ con } k \neq 0$$

- Si n es un numero entero impar mayor que cero

Sea n=2k+1 con k natural (distinto de cero)

Lo reemplazamos en la expresión $x_n = \frac{-2n-2}{2n}$ y realizamos los procedimientos algebraicos correspondientes para simplificarla con el fin de estudiar el resultado de utilizar n=2k+1

$$x_n = \frac{-2(2k+1)-2}{2(2k+1)} = \frac{-4k-2-2}{4k+2} = \frac{-4k-4}{4k+2} = \frac{2(-2k-2)}{2(2k+1)} \rightarrow x_n = \frac{-2k-2}{2k+1} \text{ con } k \neq 0$$

- Si n es un numero entero par menor que cero

Sea n=-2k con k natural (distinto de cero)

Lo reemplazamos en la expresión $x_n = \frac{-2n-2}{2n}$ y realizamos los procedimientos algebraicos correspondientes para simplificarla con el fin de estudiar el resultado de utilizar n=-2k.

$$x_n = \frac{-2(-2k)-2}{2(-2k)} = \frac{4k-2}{-4k} = \frac{2(2k-1)}{-4k} = \frac{2k-1}{-2k} \rightarrow x_n = \frac{2k-1}{-2k} \text{ con } k \neq 0$$

- Si n es un numero entero impar menor que cero

Sea n=-2k+1 con k natural (distinto de cero)

Lo reemplazamos en la expresión $x_n = \frac{-2n-2}{2n}$ y realizamos los procedimientos algebraicos correspondientes para simplificarla con

6) Considero que es valido el resultado que utilice porque en primer lugar lo demostré correctamente.

En segundo lugar, por que aparte utilice una hoja de cálculo donde utilice muchos ejemplos y todos los resultados caían en el intervalo (-2,0).
Como esto lo que queremos decir es que una de las raíces de la familia de ecuaciones de la forma $4ax^2+4bx+c=0$ necesariamente va a estar entre -2 y 0.
La única restricción que encontré para este resultado es que el número entero utilizado no puede ser cero y si o si tiene que ser entero.
La utilidad de este resultado reside en que yo estoy diciendo como va a ser una de las soluciones de la ecuación cuadrática pero además estoy diciendo, al aplicar ese resultado, que la raíz esta en el intervalo (-2,0), es decir que:

$$-2< x_2=\frac{-2-n}{2n}<0 \text{ para todo n distinto de cero}$$

Resolución de A15

1)

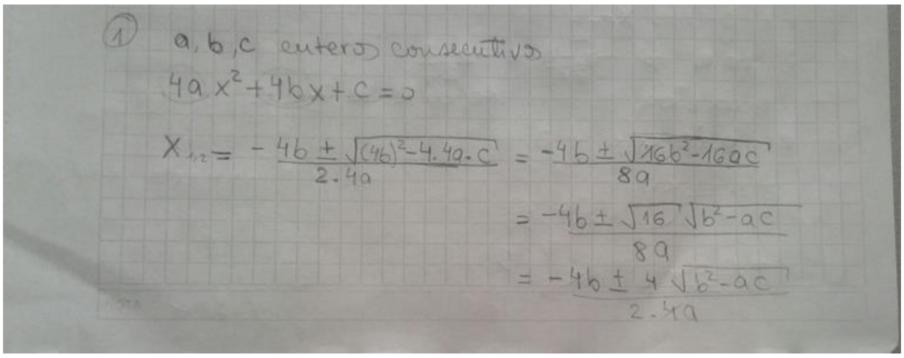
a) Resolución experta "pasada en limpio"

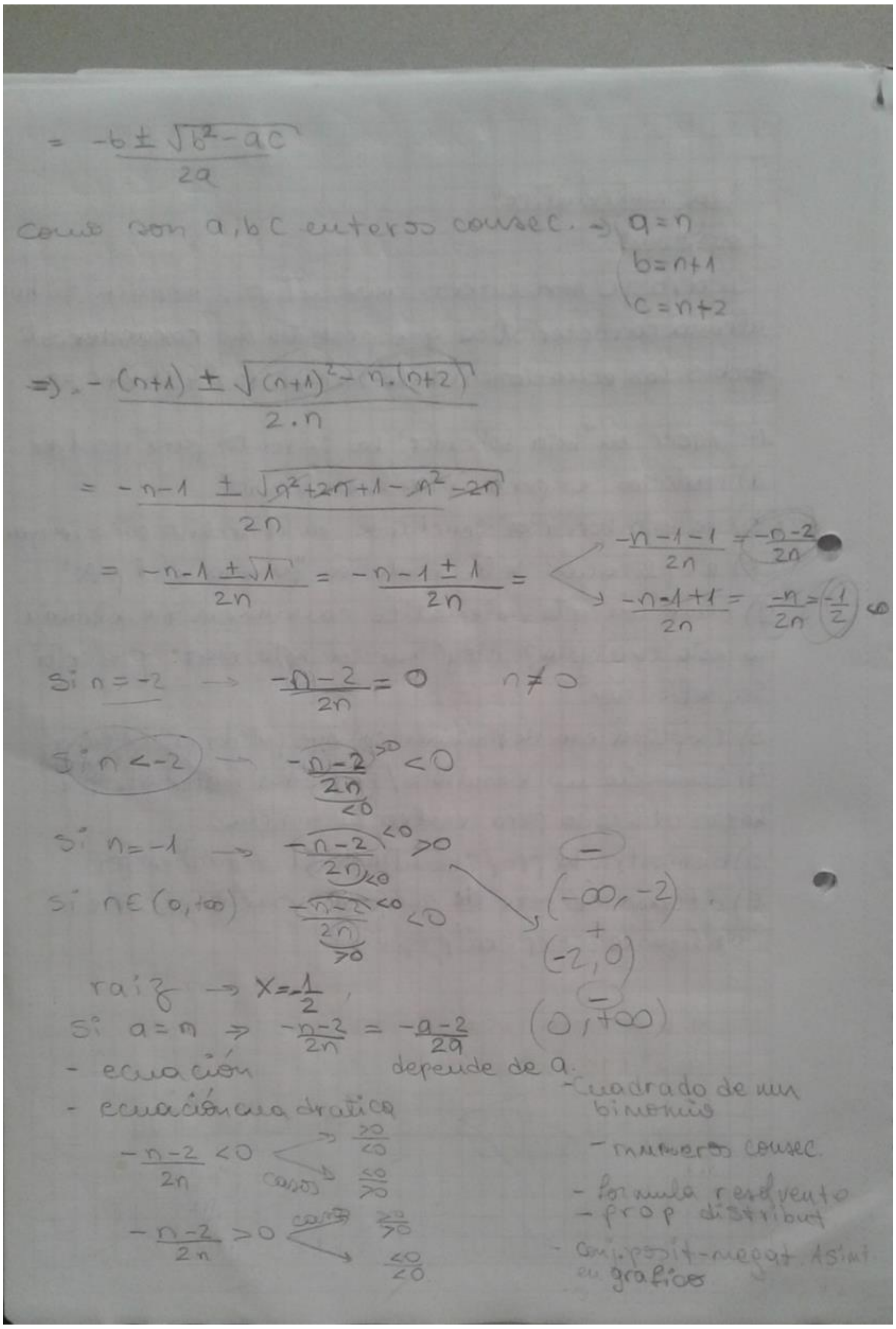
Si a, b y c son enteros consecutivos, hallamos las raíces de todas las ecuaciones cuadráticas $4ax^2+4bx+c=0$. Para hallarlas utilizaremos la fórmula resolvente: $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Entonces, tenemos que $a=4a$, $b=4b$ y $c=c$. Reemplazándolo en la fórmula obtenemos:
$x=\frac{-4b\pm\sqrt{(4b)^2-4.4ac}}{2.4a}=\frac{-4b\pm\sqrt{16b^2-16ac}}{8a}=\frac{-4b\pm\sqrt{16}\sqrt{b^2-ac}}{8a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{2a}$
Como a, b y c son enteros consecutivos. Entonces $a=n, b=n+1$ y $c=n+2$ con n entero. Por lo que sus raíces serán de la forma:
$x=\frac{-(n+1)\pm\sqrt{(n+1)^2-\mathrm{n.(n+2)}}}{2n}=\frac{-(n+1)\pm\sqrt{n^2+2\mathrm{n}+1-n^2-2\mathrm{n}}}{2n}=\frac{-(n+1)\pm 1}{2n}$ entonces obtenemos las raíces $x=\frac{-n-2}{2n}$ y $x=-\frac{1}{2}$
Notemos que la raíz $x=-\frac{1}{2}$ no depende de los valores de n. Y para $x=\frac{-n-2}{2n}$ debemos encontrar los valores de n en los que la raíz sea positiva, negativa o cero. Para esto, resolvemos las inecuaciones $\frac{-n-2}{2n}>0$ y $\frac{-n-2}{2n}<0$. Y la ecuación $\frac{-n-2}{2n}=0$.
Primero calculamos $\frac{-n-2}{2n}=0$
$\frac{-n-2}{2n}=0 \leftrightarrow -n-2=0 \leftrightarrow n=-2$. Entonces para $n=-2$, la raíz es $x=0$
Luego calculamos $\frac{-n-2}{2n}>0$
Por lo que tenemos $\begin{cases}-n-2>0\\ 2n>0\end{cases}$ o $\begin{cases}-n-2<0\\ 2n<0\end{cases}$
Luego de resolver las inecuaciones, obtenemos que para todo n Є (-2,0) la raíz $x=\frac{-n-2}{2n}$ es positiva.
Ahora calculamos $\frac{-n-2}{2n}<0$
Por lo que tenemos $\begin{cases}-n-2<0\\ 2n>0\end{cases}$ o $\begin{cases}-n-2>0\\ 2n<0\end{cases}$
Resolviendo las ecuaciones obtenemos que para todo n Є (-∞,-2)υ(0,+∞) la raíz $x=\frac{-n-2}{2n}$ es negativa.
Las raíces de la ecuación $4ax^2+4bx+c=0$ con a, b, c enteros consecutivos son:
$X=-\frac{1}{2}$ y $x=\frac{-n-2}{2n}=0$ si $n=-2$
$X=-\frac{1}{2}$ y $x=\frac{-n-2}{2n}>0$ si n Є (-2,0)

$X = -\frac{1}{2}$ y $x = \frac{-n-2}{2n}$ <0 si n Є (-∞,-2)υ(0,+∞)

Por otro lado, observamos que $a = n$ por lo tanto si la raíz depende de n, dependerá del valor de a. Esto indica que las raíces dependerán del valor que tome el coeficiente a de la cuadrática $4ax^2 + 4bx + c = 0$.

b)





$= \frac{-b \pm \sqrt{b^2-ac}}{2a}$

Como son a, b, c enteros consec. → $a=n$, $b=n+1$, $c=n+2$

$\Rightarrow = \frac{-(n+1) \pm \sqrt{(n+1)^2 - n.(n+2)}}{2.n}$

$= \frac{-n-1 \pm \sqrt{n^2+2n+1-n^2-2n}}{2n}$

$= \frac{-n-1 \pm \sqrt{1}}{2n} = \frac{-n-1 \pm 1}{2n} =$ → $\frac{-n-1-1}{2n} = \frac{-n-2}{2n}$; → $\frac{-n-1+1}{2n} = \frac{-n}{2n} = -\frac{1}{2}$

Si $n=-2$ → $\frac{-n-2}{2n} = 0$ $n \neq 0$

Si $n<-2$ → $\frac{-n-2}{2n} < 0$

Si $n=-1$ → $\frac{-n-2}{2n} > 0$

Si $n \in (0,+\infty)$ → $\frac{-n-2}{2n} < 0$

$(-\infty,-2)$ − ; $(-2,0)$ + ; $(0,+\infty)$ −

raíz → $x = -\frac{1}{2}$

Si $a=n$ ⇒ $\frac{-n-2}{2n} = \frac{-a-2}{2a}$ depende de a.

- ecuación
- ecuación cuadrática
- Cuadrado de un binomio
- números consec.
- fórmula resolvente
- prop distribut
- conj. posit-negat. Asint. en gráficos

$\frac{-n-2}{2n} < 0$ casos $\frac{>0}{<0}$, $\frac{<0}{>0}$

$\frac{-n-2}{2n} > 0$ casos $\frac{>0}{>0}$, $\frac{<0}{<0}$

C) Para hallar las raíces de la ecuación $4ax^2 + 4bx + c = 0$ con a, b, c enteros consecutivos lo primero que hacemos es usar la fórmula resolvente para una ecuación cuadrática. La fórmula resolvente tiene la forma $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ donde a=4a, b=4b y c=c. Luego reemplazando en la fórmula y haciendo cálculos obtenemos $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-ac}}{2a}$ y como a, b y c sabíamos que son consecutivos llamamos $a = n$, $b = n+1$ y $c = n+2$. Reemplazando esto último en la formula obtenida $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-ac}}{2a}$ tenemos que las raíces son $\frac{-n-2}{2n}$ y$-\frac{1}{2}$.

Vemos que la raíz $\frac{-n-2}{2n}$ depende de los valores que tome n. Entonces queremos encontrar los valores de n para los cuales $\frac{-n-2}{2n} > 0$, $\frac{-n-2}{2n} < 0$ y $\frac{-n-2}{2n} = 0$. Y de este modo encontrar

las raíces. Luego, resolvemos las ecuaciones e inecuaciones y hallamos los valores de n para los cuales la raíz es positiva, negativa o cero.
2) Los conceptos matemáticos que se trabajan en esta consigna son: ecuaciones, ecuación cuadrática e inecuaciones.
Ecuación: Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas, denominadas miembros de la ecuación. Estos miembros se relacionan a través de operaciones matemáticas, números y letras utilizadas como incógnita.
3) En una ecuación están igualadas dos expresiones algebraicas. Nos referimos con expresiones algebraicas a la combinación de letras y números, en donde las letras representan a la incógnita o variable. Estas expresiones de la ecuación se relacionan a través de ciertas operaciones.
4) Para hallar las raíces de una ecuación cuadrática de la forma ax^2+bx+c se puede utilizar la fórmula resolvente. La fórmula es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El análisis de la expresión $b^2 - 4ac$ que aparece en ellas permite discriminar la cantidad de raíces reales que tiene la ecuación. Si $b^2 - 4ac = 0$ la ecuación tiene una sola raíz, si $b^2 - 4ac > 0$ tiene dos raíces y si $b^2 - 4ac < 0$ no tiene ninguna raíz.
5) Sea la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$
Como la expresión cuadrática $ax^2 + bx + c$ tiene grado 2, es irreducible si y solo si tiene un factor en los reales de grado 1, que podemos asumir Mónico de la forma X-x con x perteneciente a los reales. Así que en este caso la ecuación es reducible en los reales si y solo si la ecuación tiene una raíz real.
Luego

$ax^2 + bx + c = a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}) = a((x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}) = a((x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2})$

El discriminante de la ecuación es $\Delta = b^2 - 4ac$
Si existe w Є reales tal que $w^2 = \Delta$, se tiene que

$ax^2 + bx + c = a((x+\frac{b}{2a})^2 - (\frac{w}{2a})^2) = a(x-\frac{-b+w}{2a})\, a(x-\frac{-b-w}{2a})$

y por lo tanto las raíces serán

$X_1 = a(x - \frac{-b+w}{2a})$

$X_2 = a(x - \frac{-b-w}{2a})$

6) Tengo la certeza de que se puede usar la fórmula resolvente dado que se utiliza para hallar las raíces de una ecuación cuadrática. Esta fórmula ayuda a poder analizar las raíces que tengan ya sean positivas, negativas o cero, para los valores que tome n o dependiendo de los coeficientes de la ecuación. Aunque quizás no sea la única forma de resolver esta ecuación o de analizar las raíces.

Resolución de A16

1) a) Resolución experta “pasada en limpio”.

Con a, b y c consecutivos tengo que: a= n, b =n+1 y c=n+2
Dada la ecuación: *$4ax^2 + 4bx + c = 0$,* reemplazo los datos de las constantes.
Entonces queda; $4(n)\, x^2 + 4(n+1)\, x + (n+2) = 0$ y para hallar las raíces aplico la formula resolvente. Es decir;

$$X_{1,2} = \frac{-b +- (b^2 – 4ac)^{1/2}}{2a}$$

$$X_{1,2} = \frac{-(4(n+1)) +- ((4(n+1))^2 - 4((4n)(n+2)))^{1/2}}{2(4n)}$$

$$X_{1,2} = \frac{-(4n+4) +- (4^2(n+1)^2 - (16n)(n+2))^{1/2}}{8n}$$

$$X_{1,2} = \frac{-(4n+4) +- (16(n^2+2n+1) - (16n^2+32n))^{1/2}}{8n}$$

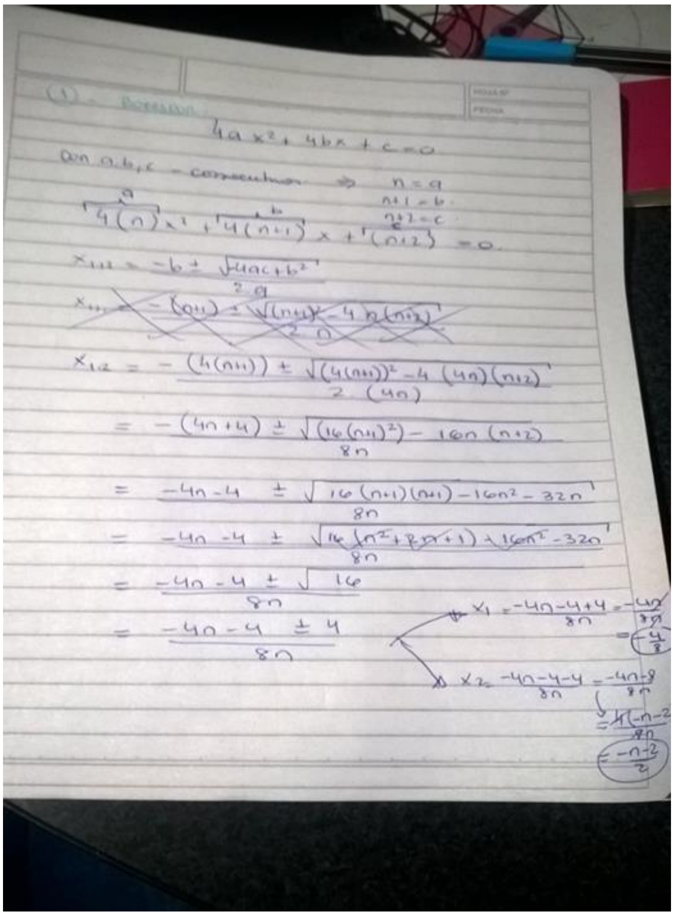
$$X_{1,2} = \frac{-(4n+4) +- (16n^2+32n+16) - 16n^2-32n)^{1/2}}{8n}$$

$$X_{1,2} = \frac{-(4n+4) +- (16)^{1/2}}{8n}$$

$$X_{1,2} = \frac{-(4n+4) +- (4)}{8n} = \quad X_1 = \frac{-4n-4+4}{8n} = \frac{4n}{8n} = 1/2$$

$$X_2 = \frac{-4n-4-4}{8n} = -\frac{(n+2)}{4n} = -a/\,4c$$

b) "Hoja borrador" (imagen adjunta)



c) Explicación de resolución a un compañero.

Si a, b y c consecutivos (recordar su definición de consecutivos de números enteros n, n+1…) los puedo escribir de la forma: a= n, b =n+1 y c=n+2

Dada la ecuación: $4ax^2 + 4bx + c = 0$, (recordar que las cuadráticas polinomicas son de la forma $ax^2 + b\,x + c$) reemplazo los datos de las constantes.
Entonces queda; $4(n)\,x^2 + 4(n+1)\,x + (n+2) = 0$ (tener en cuenta que acá, a= 4n, b= 4 (n+1) y c= (n+2)) y para hallar las raíces aplico la formula resolvente (ya que esta en polinomica, aplico directamente la formula). Es decir;

$$X_{1,2} = \frac{-b \pm (b^2 - 4ac)^{1/2}}{2*a}$$

Reemplazo los valores que halle a lo último: a= 4n, b= 4 (n+1) y c= (n+2).
Despejo!!

$$X_{1,2} = \frac{-(4(n+1)) \pm ((4(n+1))^2 - 4((4n)(n+2)))^{1/2}}{2(4n)}$$

$$X_{1,2} = \frac{-(4n+4) \pm (4^2(n+1)^2 - (16n)(n+2))^{1/2}}{8n}$$

$$X_{1,2} = \frac{-(4n+4) \pm (16(n^2+2n+1) - (16n^2+32n))^{1/2}}{8n}$$

$$X_{1,2} = \frac{-(4n+4) \pm (16n^2+32n+16) - 16n^2-32n)^{1/2}}{8n}$$

$$X_{1,2} = \frac{-(4n+4) \pm (16)^{1/2}}{8n}$$

$$X_{1,2} = \frac{-(4n+4) \pm (4)}{8n} = \quad \rightarrow \quad X_1 = \frac{-4n-4+4}{8n} = \frac{-4n}{8n} = -1/2$$

X_1 Observar que en este caso no depende de ningún parámetro, siempre va a dar -1/2.

$$\rightarrow \quad X_2 = \frac{-4n-4-4}{8n} = \frac{-(n+2)}{4n} = -a/4c$$

X_2 Observar que depende de a y c, ya que los parámetros a=n y c=(n+2)
En conclusión, todas las raíces de la ecuación cuadrática de la forma $4ax^2 + 4bx + c = 0$ con a, b y c consecutivos van a tener la forma de X = -1/2 y X= -a/4c
Lo que está en rojo son las aclaraciones que haría a un compañero que viera mi resolución y no entienda ciertos pasos.

1) En esta actividad, en la consigna dada se están trabajando se trabaja el concepto matemático de ecuación de grado 2 en forma polinomica y cálculo de raíces/ soluciones de la ecuación de forma algebraica.

   Concepto matemático que plasmaría en el pizarrón:

   Ecuación de grado 2 (ecuación cuadrática)
   Es una ecuación que tiene la forma de una suma algebraica de términos, cuyo grado máximo es 2 y puede ser representada por un polinomio cuadrático. Su expresión general es:

$$\boxed{aX^2 + b\,X + c}$$

a= coeficiente cuadrático
b= coeficiente lineal
c= termino independiente

2) Explicación de la definición.
Esta definición introduce las ecuaciones de grado 2, en una de sus formas, en este caso la polinomica. Como menciona la definición, se trata de una suma de términos donde el mayor grado que acompaña a la variable X es 2 y su forma polinomica es esa (señalando el pizarrón). En la misma observamos que tiene coeficientes, es decir son números que ya van a estar dados por eso decimos que son constantes, no van a variar. Por un lado, tenemos el coeficiente “a” llamado coeficiente cuadrático que es el numerito que siempre va a acompañar a las variables X elevadas al cuadrado, luego sigue el termino con coeficiente “b” denominado coeficiente lineal porque es el que acompaña a X elevado a la uno, es decir de la forma lineal, y por ultimo está el termino independiente “c” es aquel que no está acompañado por ninguna variable, se dice que es una constante. A este tipo de funciones se las puede analizar de igual manera que las lineales, podemos graficarlas, hallar su solución, calcular raíces, etc. Más adelante, podremos ver que al interpretarla como una función cuadrática, su grafico es una parábola (mostrar en el pizarrón un dibujo) y para hallar sus raíces utilizaremos una formula.

3) Un concepto importante que utilice para resolver la consiga es la ***fórmula resolvente***.
Definición:
Las ecuaciones de segundo grado se resuelven aplicando la siguiente formula:

$$X_{1,2} = \frac{-b +- (b^2 - 4ac)^{1/2}}{2*a}$$

Se denomina discriminante a la expresión b^2*-4ac. Las ecuaciones de segundo grado o cuadráticas, pueden tener una solución doble, dos soluciones o no tener soluciones, eso depende del valor del discriminante.*
Si $b^2-4ac > 0$*, hay dos soluciones.*
Si $b^2-4ac = 0$*, hay una solución doble.*
Si $b^2-4ac < 0$*, no hay soluciones en el conjunto de los reales.*

4) Demostración de formula resolvente.

El objetivo es convertir el polinomio $aX^2 + b\,X + c$ en un cuadrado perfecto.
Tenemos $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$.
Multiplico a ambos lados **4a**. Entones queda, $\mathbf{4a^2 X^2 + 4abX + 4ac = 0}$
Ahora sumo a ambos lados $\mathbf{b^2}$. Y obtengo, $\mathbf{4a^2 X^2 + 4abX + 4ac + b^2 = b^2}$
Paso a **4ac** al miembro derecho y ya tengo un cuadrado perfecto en el miembro izquierdo, es decir,

$$4a^2 X^2 + 4abX + b^2 = b^2 - 4ac$$
$$(2aX)^2 + 2*2aXb + b^2 = b^2 - 4ac$$
$$(2aX + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Elimino el cuadrado de la izquierda, $\mathbf{2aX + b = +- (b^2 - 4ac)^{1/2}}$

Despejo X y obtengo,

$$X_{1,2} = \frac{-b \pm (b^2 - 4ac)^{1/2}}{2*a}$$

5) Creo que esta fórmula es aplicable, porque es una de las maneras más eficientes de hallar las raíces / soluciones de la ecuación cuadrática en su forma polinomica sea cuales fueran sus coeficientes cuadráticos, lineales o independientes. Sabemos que con números concretos es directo y fácil, pero en esta consigna vimos que de manera algebraica resulta igual su aplicación.

Resolución de A17

Para empezar a resolver la consigna vamos simplificar la ecuación, para ello vamos a sacar factor común el 4 y pasamos a dividir al 0

$$p(x) = 4\left(ax^2 + bx + \frac{c}{4}\right) = 0$$

$$ax^2 + bx + \frac{c}{4} = 0$$

De esta manera nos queda simplificada la cuadrática y usamos la resolvente en esta nueva ecuación:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{2a} \quad (1)$$

Para la elección de los tres números consecutivos vamos a considerar $a < b < c$, con

$$a = n - 1, \quad b = n, \quad c = n + 1$$

$$p(x) = (n-1)x^2 + nx + \frac{(n+1)}{4}$$

Reemplazamos en (1):

$$x_{1,2} = \frac{-n \pm \sqrt{n^2 - (n-1)(n+1)}}{2(n-1)} = \frac{-n \pm \sqrt{n^2 - n^2 + 1}}{2(n-1)} = \frac{-n \pm 1}{2(n-1)}$$

Hallamos las raíces:

$$\boxed{x_1 = \frac{-n+1}{2(n-1)} = \frac{-(n-1)}{2(n-1)} = -\frac{1}{2}, \qquad x_2 = \frac{-n-1}{2(n-1)} = \frac{-(n+1)}{2(n-1)}}$$

Una de las raíces es una constante y el otro depende del valor de n que no puede valer 1 sino tendríamos una lineal

$$4x + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -\frac{1}{2}$$

Tenemos una raíz que es fija, vamos a ver cómo se comporta la otra raíz en los valores límites

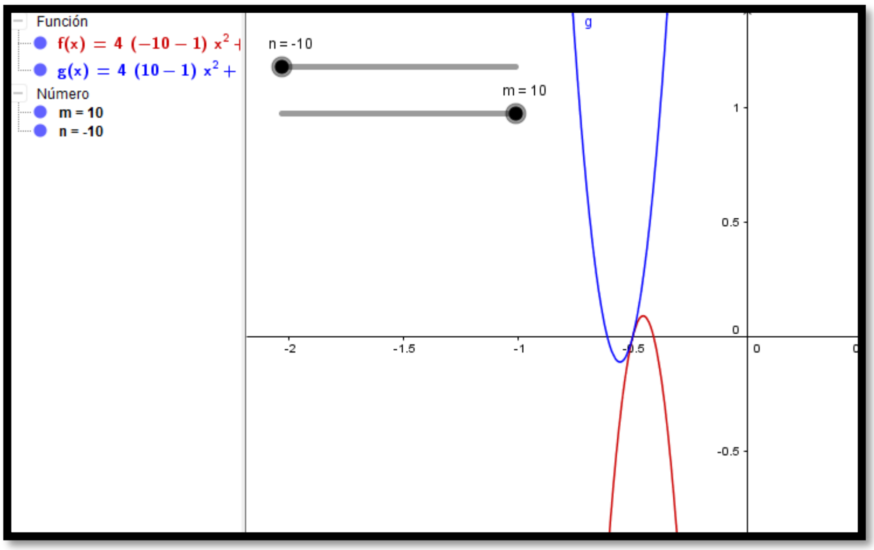
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-(n+1)}{2(n-1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-n(1+1/n)}{2n(1-1/n)} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to-\infty} \frac{-(n+1)}{2(n-1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-n(1+1/n)}{2n(1-1/n)} = -\frac{1}{2}$$

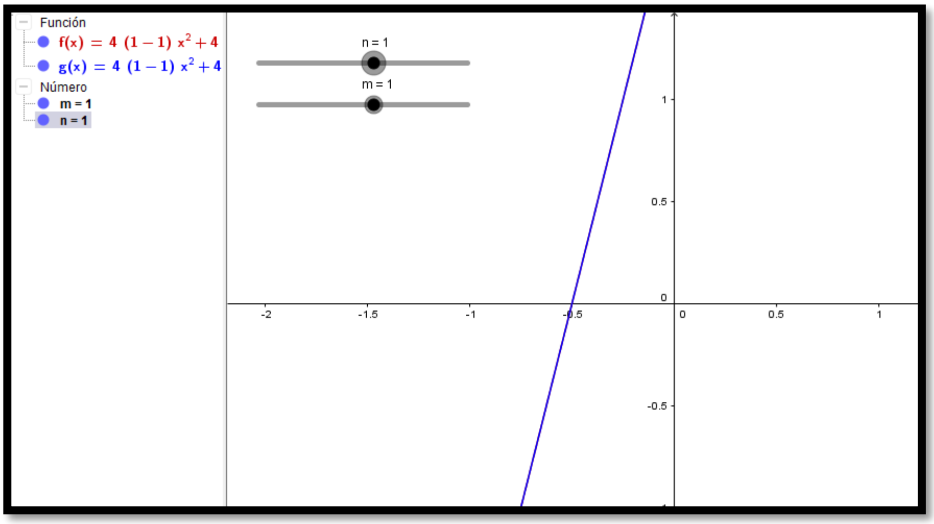
$$\lim_{n\to1^+} \frac{-(n+1)}{2(n-1)} = \lim_{n\to1^+} = \frac{-(2)}{2.0^+} = -\infty$$

$$\lim_{n\to1^-} \frac{-(n+1)}{2(n-1)} = \lim_{n\to1^+} = \frac{-(2)}{2.0^-} = \infty$$

Es decir que cuando tiende a infinito ya sea negativo o positivo, la segunda raíz tiende a -1/2 por lo que las raíces están muy próximas hasta casi juntarse en -1/2, la parábola se hace muy cerrada haciéndose casi raíz única.



Para el caso del límite por derecha e izquierda de 1 la raíz se hace infinita, pero como vimos si llegase n a valer 1 tendríamos una recta con una sola raíz y la otra estaría en el "infinito".



La única restricción de x_2 está si $n = 1$, por lo tanto x_2 puede tomar cualquier valor sobre el eje x a excepción de 1/2 como hemos visto en el límite de los infinitos. Nos queda ver el signo que va tomando x_2 a medida que asignamos valores de n:

$$x_2 > 0$$

$$\frac{-(n+1)}{2(n-1)} > 0$$

$$\begin{cases} -(n+1) > 0 & \rightarrow \quad n < -1 \\ 2(n-1) > 0 & \rightarrow \quad n > 1 \end{cases}, \text{ no hay intersección en el conjunto de soluciones}$$

$$\begin{cases} -(n+1) < 0 & \rightarrow \quad n > -1 \\ 2(n-1) < 0 & \rightarrow \quad n < 1 \end{cases}, \text{ hay intersección en el intervalo } n \in \langle -1,1 \rangle$$

$$x_2 < 0$$

$$\frac{-(n+1)}{2(n-1)} < 0$$

$$\begin{cases} -(n+1) < 0 & \rightarrow \quad n > -1 \\ 2(n-1) > 0 & \rightarrow \quad n > 1 \end{cases}, \text{ hay intersección en el intervalo } n \in \langle 1, \infty \rangle$$

$$\begin{cases} -(n+1) > 0 & \rightarrow \quad n < -1 \\ 2(n-1) < 0 & \rightarrow \quad n < 1 \end{cases}, \text{ hay intersección en el intervalo } n \in \langle -\infty, -1 \rangle$$

$$x_2 = 0$$

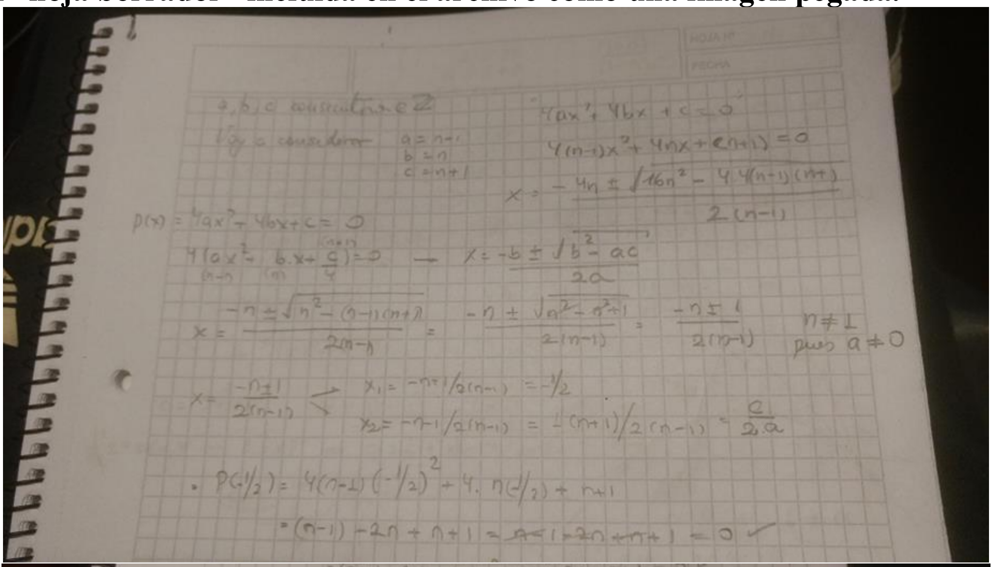
$$\frac{-(n+1)}{2(n-1)} = 0$$

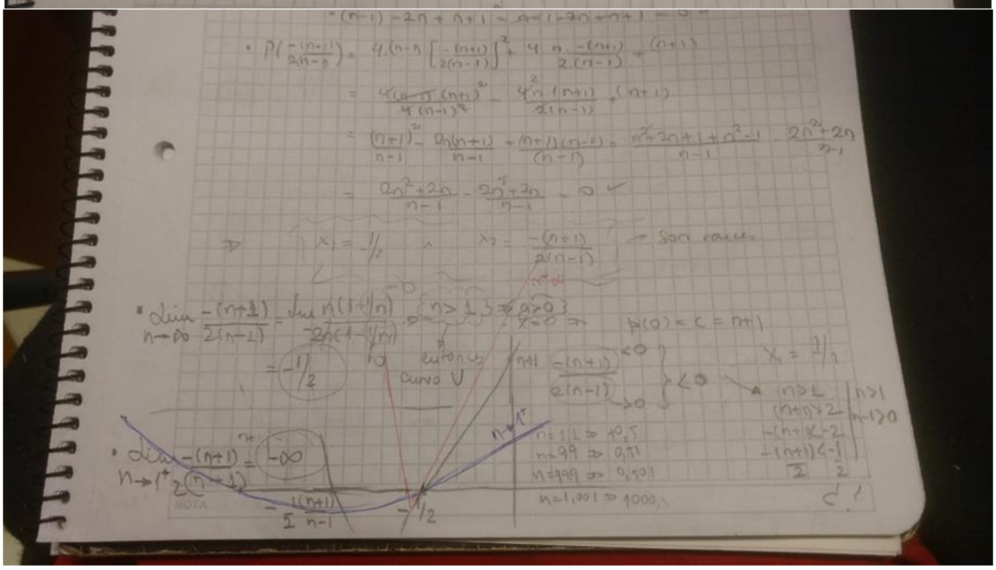
$$-(n+1) = 0 \rightarrow n = -1$$

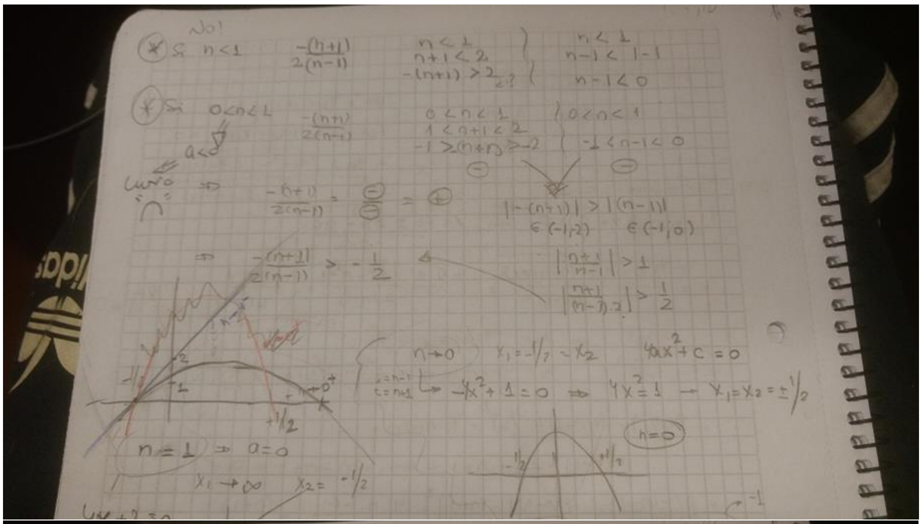
Entonces clasificamos las raíces de la siguiente manera

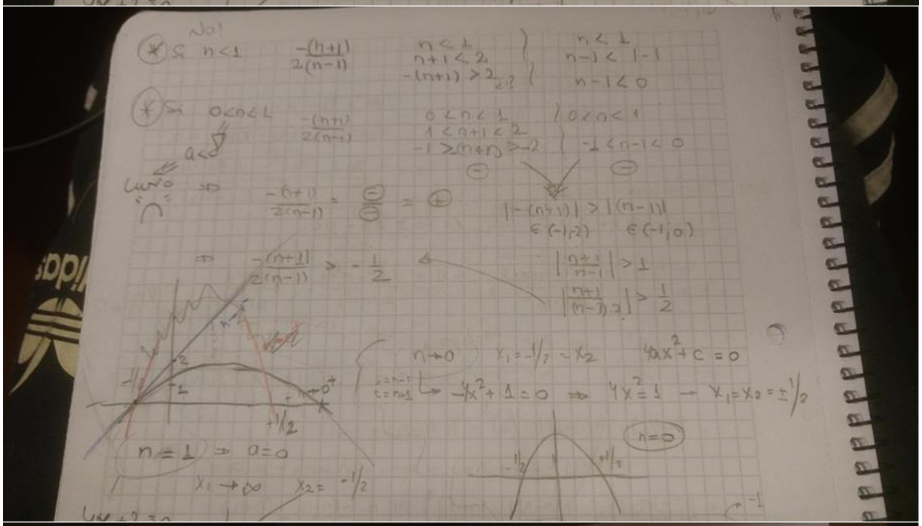
Para $n = -1$ $x_1 = -\frac{1}{2}, \qquad x_2 = 0$
Para $n \in \langle -1,1 \rangle$ $x_1 = -\frac{1}{2}, \qquad x_2 > 0$
Para $n \in [\langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 1, \infty \rangle]$ $x_1 = -\frac{1}{2}, \qquad x_2 < 0$

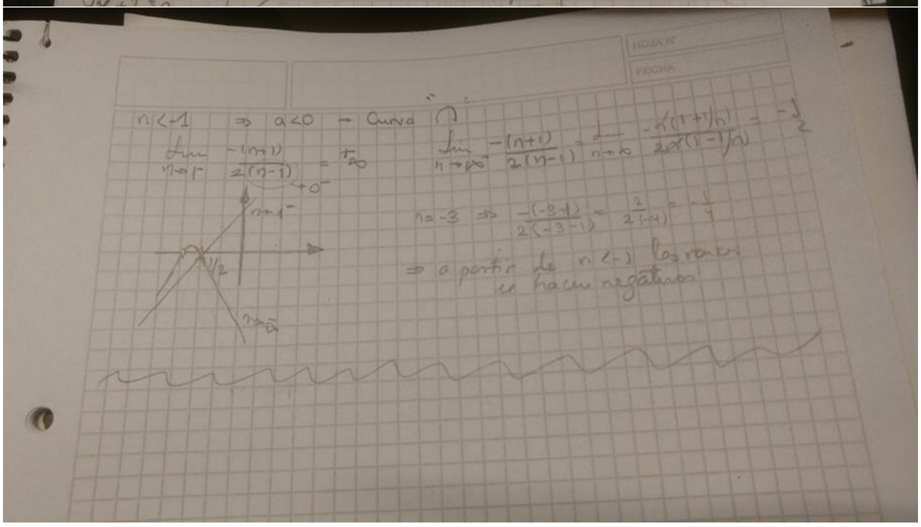
b) Tu "hoja borrador" incluida en el archivo como una imagen pegada.



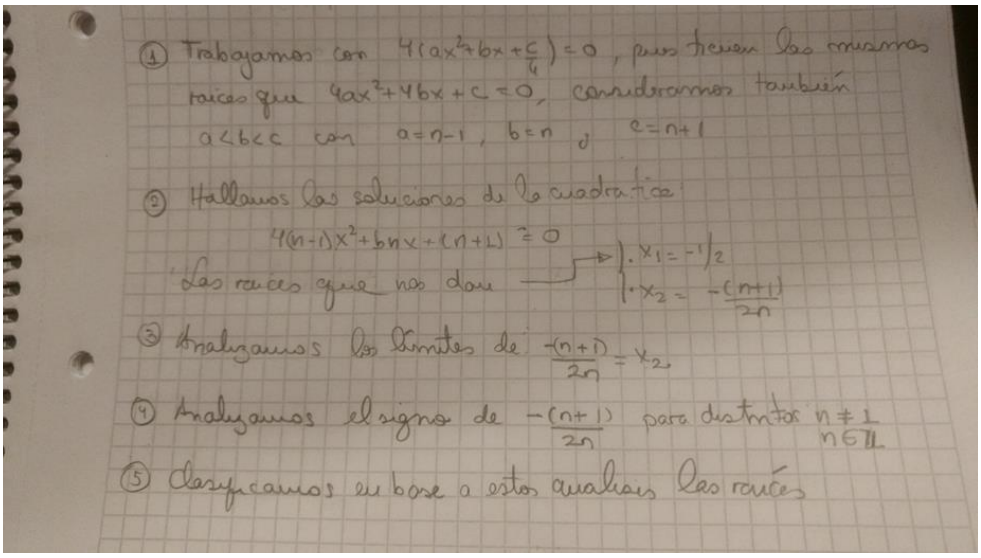








c) Una explicación de tu resolución como si se la quisieras pasar a un compañero que tiene tu “resolución pasada en limpio” pero no la entendió. Podés, por ejemplo, a tu resolución en limpio agregarle flechas con explicaciones, o grabar un audio, escribir un párrafo, etc. Lo importante es que esta parte no deberá ser extensa.



① Trabajamos con $4(ax^2+bx+\frac{c}{4})=0$, pues tienen las mismas raíces que $4ax^2+4bx+c=0$, consideramos también $a<b<c$ con $a=n-1$, $b=n$ y $c=n+1$

② Hallamos las soluciones de la cuadrática

$4(n-1)x^2+4nx+(n+1)=0$

Las raíces que nos dan $\rightarrow \begin{cases} x_1=-1/2 \\ x_2=-\frac{(n+1)}{2n} \end{cases}$

③ Analizamos los límites de $\frac{-(n+1)}{2n}=x_2$

④ Analizamos el signo de $-\frac{(n+1)}{2n}$ para distintos $n\neq 1$, $n\in\mathbb{Z}$

⑤ Clasificamos en base a estos análisis las raíces

2) ¿Qué concepto matemático considerás que se trabaja en esta consigna? (si hay más de uno, indicalos). Elegí un concepto matemático que hayas utilizado en la resolución de la consigna, y escribí su definición. Pensá que la vas a dejar escrita en el pizarrón cuando sea trabajada en una clase.

En la consigna se trabajó los siguientes conceptos:

- Raíces de una ecuación cuadrática
- Concepto de limite
- Inecuaciones y conjuntos de solución

<u>Raíces de una ecuación cuadrática</u>:

Definición: Sea $p(x) = ax^2 + bx + c$ *un polinomio de grado 2 en* $\mathbb{R}$*, con* $x_o \in \mathbb{R}$*. Si* $p(x_o) = 0$*, se dice que* x_o *es una raíz de* $p(x)$*.*

3) Explicá esa definición con tus palabras (como si le hablaras a la clase). Todo esto a lo sumo te insumirá media carilla.

Las raíces de una función, en este caso una cuadrática, son todos los valores llamémosle x_o para los cuales evaluadas en la función cuadrática me dan cero, es decir:

$$p(x_o) = a{x_o}^2 + bx_o + c = 0$$

Recordar que a, b y c son números y al evaluar x_o en $p(x)$, lo que hacemos es trabajar una operación combinada cuyo resultado sabemos de antemano es cero.

Veámoslo con un ejemplo, si tengo la siguiente cuadrática $p(x) = x^2 - 3x - 10$ y me piden hallar las raíces, lo que tengo que hacer es plantear una ecuación:

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

Entonces debo hallar un valor de x que al evaluarlo en $x^2 - 3x - 10$ tiene que dar cero, por ejemplo elijo un número como el 2 y reemplazo

$$p(x = 2) = 2^2 - 3.2 - 10 = -12$$

Para $x = 2$ no me dio cero entonces 2 no es raíz de $p(x)$. Ahora pruebo con $x = 5$

$$p(x = 5) = 5^2 - 3.5 - 10 = 0$$

Para este valor si me dió cero, entonces digo que $x = 5$ es una raíz de $p(x)$.

Nuestra motivación para este tema es como saber que número es raíz o no y lo veremos dentro de poco.

4) Enunciá un resultado/propiedad matemática que hayas utilizado para resolver la consigna tal como se leería en un libro de texto.

Las ecuaciones de segundo grado se resuelven aplicando la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se denomina discriminante a la expresión:

$$b^2 - 4ac$$

Las ecuaciones de segundo grado o cuadráticas pueden tener una solución doble, dos soluciones o no tener solución, eso depende del valor que tenga el discriminante:

- Si $b^2 - 4ac > 0$, hay dos soluciones
- Si $b^2 - 4ac = 0$, hay una solución doble
- Si $b^2 - 4ac < 0$, no hay solución en el conjunto de los números reales

5) Demostrá la propiedad/resultado que hayas mencionado en el ítem anterior. Pensá cómo explicarías la demostración, escribilo y anexalo (podés escribir un párrafo, utilizar flechas y comentarios en la definición que escribiste, grabar un audio, etc.)

Habíamos comenzado el tema intentando hallar el valor de x para la siguiente ecuación:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Vamos a intentar despejar el valor de x haciendo uso varias propiedades, por ejemplo voy a comenzar dividiendo a todo por a, esto ya me restringe que l valor de a no puede ser cero

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Ahora vamos a agregar términos tal que podamos formar un cuadrado perfecto y agrupamos

$$x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{a}\right)^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left[x + \frac{b}{2a}\right]^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

Teniendo la ecuación con este formato podemos despejar x

$$\left[x + \frac{b}{2a}\right]^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{a^2}} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Despejamos x

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Así obtenemos nuestra fórmula resolvente.

6) ¿Tenés certeza de que podés usar la propiedad que utilizaste? Si tu respuesta es afirmativa, explicá por qué. Si no lo es, explicá por qué la usaste, si considerás que es válido haberla usado, si tiene restricciones, etc.

Se puede usar la propiedad que acabamos de demostrar para la consigna pues el discriminante, para todos los valores de n, me da 1 que es mayor que cero, debemos tener cuidado cuando el valor de $n = 1$, pues esto anularía el valor de a y por lo tanto la formula resolvente no tendría sentido usarla, como condiciones durante la demostración pedimos que $a \neq 0$.

Resolución de A18

1)Como primer paso por resolvente encuentro que $4ax^2 + 4bx + c = 0$ tiene como raíces de la forma
$(-b\pm\sqrt{(b^2-4ac)})/2a$
Por otro lado, siendo a, b, c enteros positivos consecutivos se encuentra que los mismos podrían escribirse como a=x, b=x+1, c=x+2. Por tanto, las siguientes expresiones son equivalentes:
$b^2-ac =(x+1)^2- x(x+2)$
Aplicando resolución de cuadrado de un binomio y propiedad distributiva encontramos que
$(x+1)^2- x(x+2)= x^2+2x+1-x^2-2x = 1$
Por tanto y volviendo al análisis de la primera expresión las raíces serán de la forma
$(-b\pm\sqrt{(1)})/2a = (-b\pm1)/2a$
Por ejemplo dados los consecutivos a=5, b=6, c=7 nos determina la función
$20x^2+24x+7$
Debemos probar que sus raíces son de la forma $(-b\pm1)/2a$. Aplicando resolvente
$(-24\pm\sqrt{(24^2-4.20.7)})/40 = (-24\pm\sqrt{1})40 = (-6\pm1)/10$ se verifica.
Por otro lado podemos afirmar que la raíz de la forma $(–b+1)/2.a = -(b-a)/2.a = -a/2a = -0.5$ para todo a, b entero positivo consecutivo.

2) <u>Conceptos matemáticos utilizados</u>
Se conoce como **raíz** (o **cero**) de un polinomio o de una función *f(x)* a todo lemento *x* perteneciente al dominio de dicha función tal que se cumpla que la función evaluada en el punto es cero F(x)=0.
Un polinomio es una expresión matemática constituida por una suma finita de productos entre variables (*valores no determinados* o desconocidos) y constantes.
El **dominio** de definición de una función f:$X\rightarrow Y$ se define como el conjunto *X* de todos los elementos *x* para los cuales la función *f* asocia algún *y* perteneciente al conjunto *Y* de llegada, llamado **codominio.**
La **propiedad distributiva** de la multiplicación sobre la suma es aquella en la que el resultado de un número multiplicado por la suma de dos o más sumandos, es igual a la suma de los productos de cada sumando por ese número.
a.(b+c)=a.b+a.c
El **cuadrado de un binomio** resulta de aplicar propiedad distributiva entre todos los términos
$(a \pm b)^2 = (a \pm b).(a \pm b) = a^2 \pm 2.a.b \pm b^2$
3) Llamamos raíz de una función cuadrática a aquellos valores pertenecientes al dominio que hacen que la función valga cero. Una función cuadrática en su expresión polinómica es de la forma Ax^2+Bx+C y puede tener una dos o ninguna raíz. Para hallarlas podemos utilizar la resolvente
$(-B\pm\sqrt{(B^2-4AC)})/2A$
Por tanto una ecuación cuadrática de la forma $4ax^2+4bx+c$ tendrá A=4a, B=4b, C=c y sus raíces serán de la forma $(-b\pm1)/2a$ por lo antes analizado.

4) Sean a, b, c números enteros consecutivos, la expresión de la forma $4ax^2+4bx+c$ tendrá raíces de la forma $(-b\pm1)/2a$
5) Demostración: Aplicamos resolvente y llegamos a la forma
$(-b\pm\sqrt{(b^2-ac)})/2a$
La expresión que se encuentra en el radicando puede escribirse como
$(x+1)^2- x(x+2) = 1$
Las raíces entonces son de la forma $(-b\pm1)/2a$
6) Puedo afirmar con certeza que las raíces son de la forma indicada para todo valor a, b, c enteros consecutivos positivos, y que además una de las raíces siempre es -0.5 por lo visto anteriormente.

Resolución de A19

Dados *a, b* y *c* enteros consecutivos, se realiza el siguiente cambio de variables: ***a=n***, ***b=n+1***, ***c=n+2***, con *a* o $n \neq 0$.
Luego la ecuación queda de la forma $4nx^2 + 4(n+1)x + (n+2) = 0$.
Para analizar el comportamiento de las raíces se utiliza la fórmula resolvente para funciones cuadráticas, representada por la siguiente expresión:

$$X_{1,2}= (-b\pm\sqrt{b^2-4ac})/2a \quad \textbf{(1)}$$

Al sustituir las letras *a, b, c* con el cambio de variables propuesto se obtiene:

$$X_{1,2} = [-4(n+1) \pm \sqrt{[4(n+1)]^2 -4.4n\,(n+2)}]/2.4n$$
$$\leftrightarrow \quad X_{1,2} = [-4(n+1) \pm \sqrt{4^2(n+1)^2-16n(n+2)}]/8n$$
$$\leftrightarrow \quad X_{1,2} = [-4(n+1) \pm \sqrt{16((n+1)^2 - n(n+2))}]/8n$$
$$\leftrightarrow \quad X_{1,2} = [-4(n+1) \pm \sqrt{16}\,\sqrt{(\cancel{n^2} \cancel{+2n} + 1 \cancel{-n^2} \cancel{-2n})}]/8n$$
$$\leftrightarrow \quad X_{1,2} = [-4(n+1) \pm 4\sqrt{1}]/8n$$
$$\leftrightarrow \quad X_{1,2} = (-4n -4 \pm 4)/8n$$

Luego,

$X_1 = (-4n \cancel{-4 + 4})/8n \rightarrow x_1 = -4n/8n \rightarrow \boldsymbol{x_1 = -1/2}$,

$X_2 = (-4n -4 -4)/8n \rightarrow x_2 = (-4n -8)/8n \rightarrow x_2 = -4(n +2)/8n \rightarrow \boldsymbol{x_2 = -(n +2)/2n}$

Volviendo al cambio de variables, como $c= n+2$ y $a= n$ resulta que
$\boldsymbol{X_2 = -c / 2a}$ y $\boldsymbol{x_1= -1/2}$ es constante para todo $n \neq 0$.

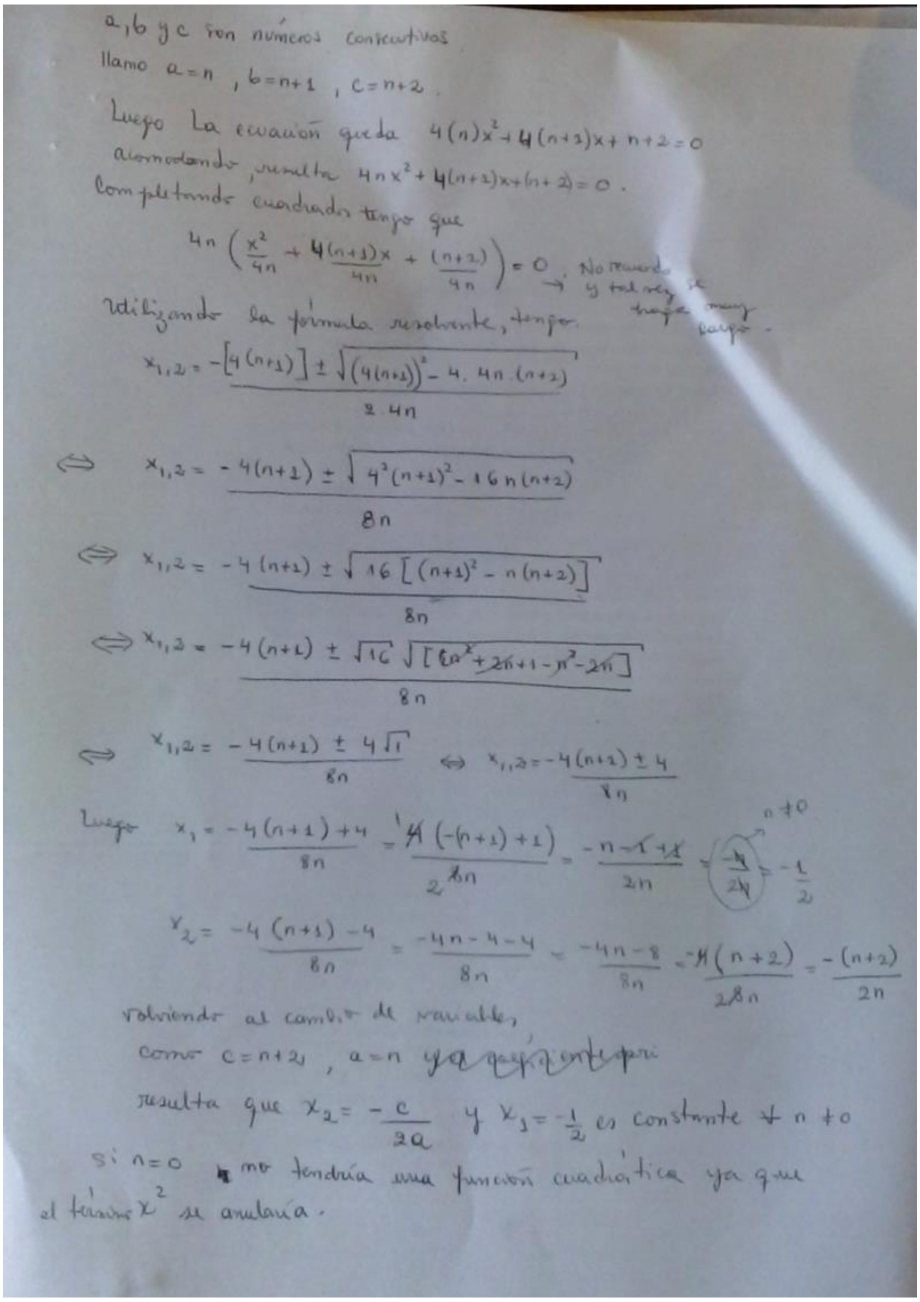
Por lo resuelto anteriormente, la característica que presentan las raíces de todas las ecuaciones de la forma $4ax^2 + 4bx + c = 0$ es que el conjunto de sus ceros o raíces está determinado por C°: {-1/2, -c/2a}. Es decir, dado cualquier *a, b* y *c* enteros consecutivos, una de las raíces es constantemente -1/2 y la otra raíz está condicionada por los valores *c* y *a*. Donde *a* representa la amplitud de la curva y *c* es el corrimiento que realiza la función sobre el eje de ordenadas.

Explicación a un compañero:

Bueno, como en la consigna me determinan que *a, b* y *c* son enteros consecutivos, lo que hice fue llamar de alguna manera a estas letras para que se relacionen. Por eso denomino a *a* como *n*, entonces al ser consecutivos *b* va a ser uno más al anterior. Como *n* es el anterior, el siguiente va a ser *n+1* y siguiendo el mismo razonamiento para *c*, queda que es *n+2*. Además expliqué que *a* o *n* no puede ser cero porque no estaría en condiciones de tener una forma de ecuación cuadrática si este valor fuese cero. Luego, al reemplazarlo queda la ecuación donde los coeficientes ahora dependen de *n* únicamente. Como se pide alguna característica de las raíces de este tipo de ecuaciones, para poder hallar las raíces de esta ecuación utilicé la fórmula resolvente dada para este tipo de funciones que se encuentra expresada más arriba **(1)**.

Al hacer los cálculos, habiendo reemplazado con el cambio de variable propuesto, todo me queda expresado en *n*. Lo hago de esta manera para no tener tantas letras "dando vueltas". Luego llego a una conclusión por toda la manipulación algebraica que hice, se cancelan valores y x_1 queda que vale *-1/2* siempre independientemente de los valores que tomen *a*, *b* y *c* consecutivos. En este caso tampoco importa quién es *n*. En el caso de x_2 es una relación que queda expresada en términos de *n* como *–(n+2)/2n*. Tomé de nuevo el cambio de variables para ver cómo se relacionaba esto con los valores de *a*, *b* y *c* dados inicialmente. Entonces x_2 va a quedar expresado en términos de *c* y *a*, en este caso *b* no aparece.

Por lo tanto, la característica que presenta todas las raíces de una ecuación de esta forma es que una de ellas, siempre no importa quienes sean *a*, *b* y *c* consecutivos es constantemente menos un medio y la otra va a depender de los valores que tomen *a* y *c*.



a, b y c son números consecutivos

llamo $a=n$, $b=n+1$, $c=n+2$.

Luego la ecuación queda $4(n)x^2+4(n+1)x+n+2=0$

acomodando, resulta $4nx^2+4(n+1)x+(n+2)=0$.

Completando cuadrados tengo que

$$4n\left(\frac{x^2}{4n}+\frac{4(n+1)x}{4n}+\frac{(n+2)}{4n}\right)=0$$

No me quedo → y tal vez se haga muy largo.

Utilizando la fórmula resolvente, tengo:

$$x_{1,2}=\frac{-[4(n+1)]\pm\sqrt{(4(n+1))^2-4.\,4n.(n+2)}}{2.\,4n}$$

$$\Leftrightarrow\quad x_{1,2}=\frac{-4(n+1)\pm\sqrt{4^2(n+1)^2-16n(n+2)}}{8n}$$

$$\Leftrightarrow\quad x_{1,2}=\frac{-4(n+1)\pm\sqrt{16[(n+1)^2-n(n+2)]}}{8n}$$

$$\Leftrightarrow\quad x_{1,2}=\frac{-4(n+1)\pm\sqrt{16}\sqrt{[\cancel{n^2}+\cancel{2n}+1-\cancel{n^2}-\cancel{2n}]}}{8n}$$

$$\Leftrightarrow\quad x_{1,2}=\frac{-4(n+1)\pm4\sqrt{1}}{8n}\quad\Leftrightarrow\quad x_{1,2}=\frac{-4(n+1)\pm4}{8n}$$

Luego $x_1=\frac{-4(n+1)+4}{8n}=\frac{\cancel{4}(-(n+1)+1)}{2\cancel{8}n}=\frac{-n\cancel{-1+1}}{2n}=\frac{-\cancel{n}}{2\cancel{n}}=-\frac{1}{2}$ $n\neq0$

$x_2=\frac{-4(n+1)-4}{8n}=\frac{-4n-4-4}{8n}=\frac{-4n-8}{8n}=\frac{-\cancel{4}(n+2)}{2\cancel{8}n}=\frac{-(n+2)}{2n}$

volviendo al cambio de variable,

como $c=n+2$, $a=n$ [illegible]

resulta que $x_2=-\frac{c}{2a}$ y $x_1=-\frac{1}{2}$ es constante $\forall\, n\neq0$

si $n=0$ no tendría una función cuadrática ya que el término x^2 se anularía.

En ésta consigna se trabaja el concepto de función cuadrática y su análisis, particularmente con las raíces. También se advierte el concepto de pasaje de lenguaje coloquial a simbólico y resolución de ecuaciones de segundo grado.
Se presentará a continuación el concepto de función cuadrática:
Definición: *Sea f: R→R. Decimos que f es una función* **polinómica** *o simplemente un* **polinomio** *si tiene la forma*

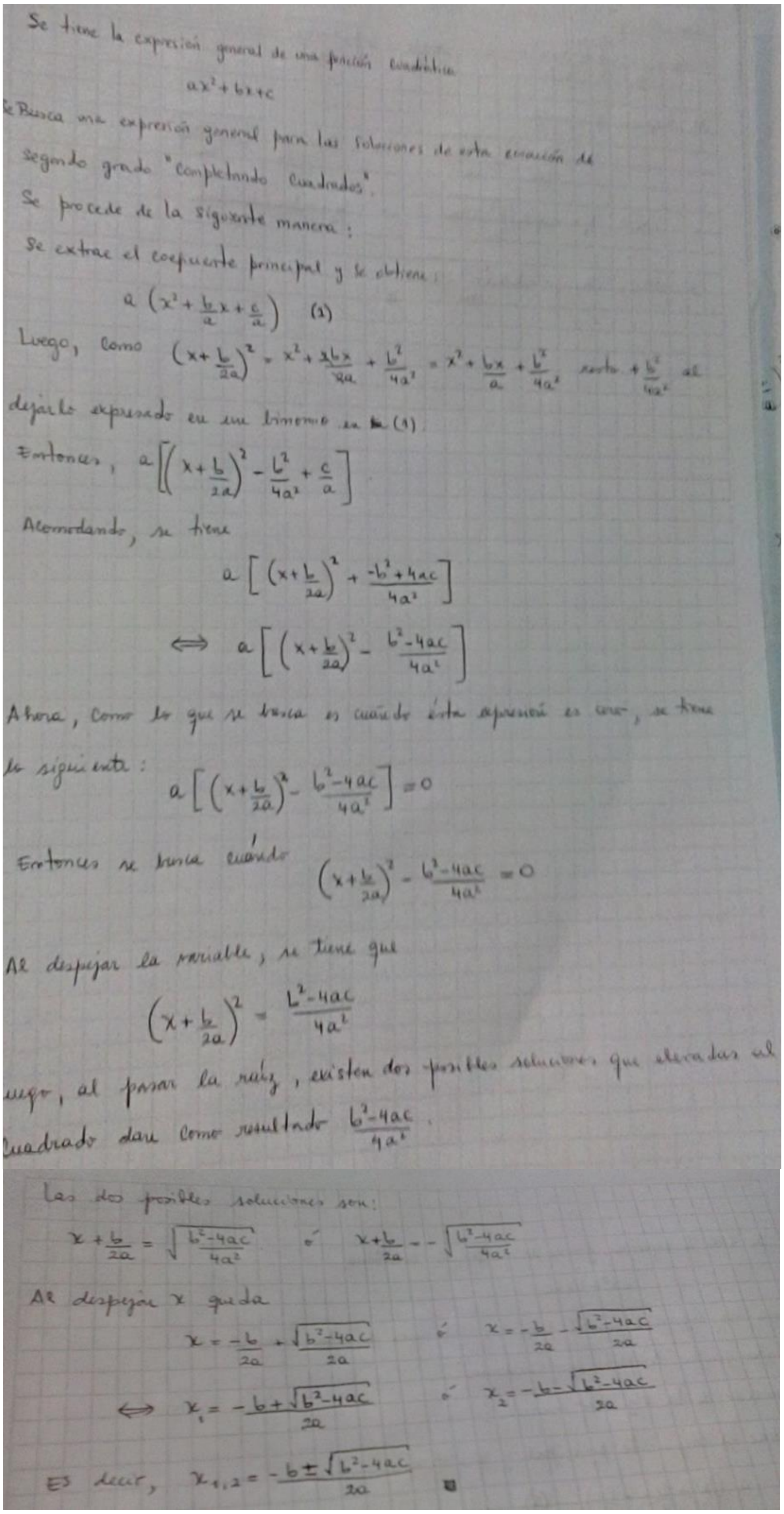
$f(x)= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, *para ciertos* $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ *en R.*

Las funciones **cuadráticas,** $f(x)= ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$, también son funciones polinómicas. Donde *a* es el coeficiente principal del término cuadrático, *b* es el coeficiente que acompaña el término lineal y *c* es el término ndependiente**.**(Aragón, Pinasco, Schifini, Varela, 2008, p. 53)
Una función cuadrática es una expresión como la descrita más arriba, en la que se puede ver que está determinada por tres términos: un término cuadrático (ax^2) llamado así por tener a la variable "x" elevada al exponente "2"; un término lineal *(bx)* llamado así por tener a la variable elevada al exponente "1" y que en ocasiones este término puede no estar presente; y un tercer término *(c)* denominado término independiente o de ordenada ya que no está condicionado al valor de "x".
En este tipo de funciones, el coeficiente principal *(a)* siempre está presente. Este valor es siempre distinto de cero y es constante como *b* y *c*.
Estas funciones sirven para modelizar problemas relacionados con trayectorias de objetos y hacer análisis tanto gráficamente como analíticamente de temas de interés.

Para hallar las soluciones de una ecuación de segundo grado con *a*, *b* y *c* números reales y distintos de cero, la fórmula utilizada es la denominada "fórmula resolvente" dada con la siguiente expresión:

$$X_{1,2} = [-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}]/ 2a$$

Esta fórmula, viene de una manipulación algebraica sobre la ecuación de segundo grado para hallar de una forma general las soluciones


Se tiene la expresión general de una función cuadrática

$$ax^2+bx+c$$

Se Busca una expresión general para las soluciones de esta ecuación de segundo grado "Completando Cuadrados".

Se procede de la siguiente manera:

Se extrae el coeficiente principal y se obtiene:

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) \quad (1)$$

Luego, como $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = x^2+\frac{2bx}{2a}+\frac{b^2}{4a^2} = x^2+\frac{bx}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$ resto $+\frac{b^2}{4a^2}$ al dejarlo expresado en un binomio en (1).

Entonces, $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]$

Acomodando, se tiene

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-b^2+4ac}{4a^2}\right]$$

$$\Longleftrightarrow a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

Ahora, como lo que se busca es cuándo esta expresión es cero, se tiene lo siguiente:

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=0$$

Entonces se busca cuándo $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$

Al despejar la variable, se tiene que

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

Luego, al pasar la raíz, existen dos posibles soluciones que elevadas al cuadrado dan como resultado $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$.

Las dos posibles soluciones son:

$$x+\frac{b}{2a}=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \quad ó \quad x+\frac{b}{2a}=-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

Al despejar x queda

$$x=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad ó \quad x=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Longleftrightarrow x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad ó \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Es decir, $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ∎

Tengo la certeza de utilizar la fórmula en la resolución ya que si quisiera resolver la ecuación de la manera tradicional, como una ecuación lineal, quedaría una “solución” dependiendo de la variable, lo que no me daría lo que necesito. Al resolver esta ecuación y tener los tres términos no nulos, es condición necesaria utilizar esta fórmula, además de que la demostración me avala su uso. Al obtener las soluciones de esa manera puedo reemplazar el valor hallado y así verificar si cumple con lo pedido. Como esto pasa y simplifica el "completar cuadrados" para cada ecuación distinta, el uso de la fórmula es factible y muy útil.

Resolución A20

Punto 1 de la consigna

Lo primero que hice fue utilizar el geogebra para explorar el comportamiento de la función al variar los parámetros a, b y c teniendo en cuanta la relación existente entre ellos de acuerdo a la consigna.

1. Cree un deslizador "a";
2. Definí los parámetros b y c: b = a+1 y c = a+2;
3. Si bien el enunciado dice que a, b y c son números consecutivos, lo cual implica que son enteros y con el software estaríamos realizando una variación continua. Esto no representa ningún problema ya que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. Es decir, si la gráfica muestra cierto comportamiento para a, b y c $\in \mathbb{R}$, entonces también se observará el mismo patrón para a, b y c $\in \mathbb{Z}$.
   Introduje la función dada, marqué los puntos de intersección (A y B) de la gráfica con el eje de las abscisas y comencé a variar el parámetro "a".

   Así obtuve los siguientes gráficos:

Gráfico 1

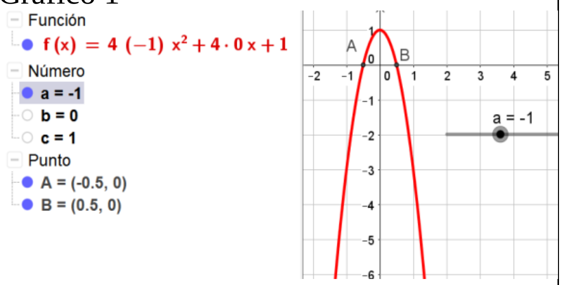


Gráfico 2

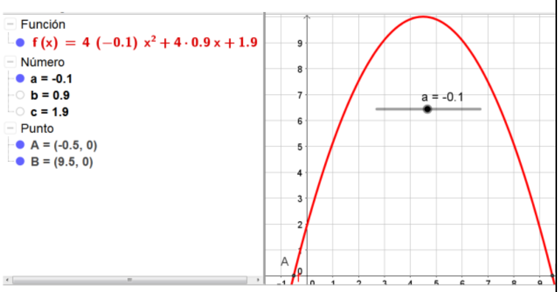


Gráfico 3

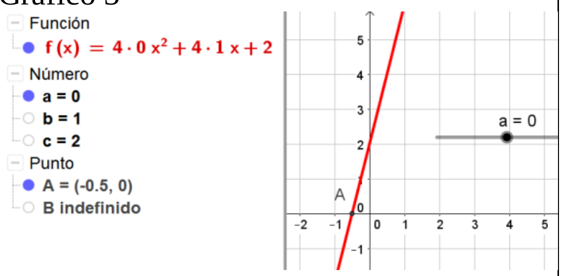
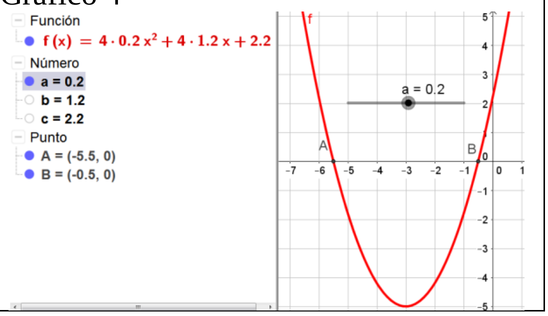


Gráfico 4



4. En base a la exploración pude notar que existe una raíz fija (x = -1/2) mientras que la otra se va desplazando conforme van cambiando los valores de a, b y c.
   i. Para a < 0 (gráficos 1 y 2) la raíz x =-1/2 designada por el punto A, no se modificó. En ambos casos las ramas de la parábola van hacia -∞ y el vértice de la parábola queda a derecha del punto A.

ii. Para a = 0 no tenemos una cuadrática, nos queda la lineal 4bx+c =0 (gráfico 3), esta lineal tiene una raíz en x = -1/2, denotada por el punto A.

iii. Para a > 0 (gráfico 4), la cuadrática sigue teniendo una raíz en x = -1/2 pero esta vez designada por el punto B. En este caso las ramas de la parábola van hacia +∞ y el vértice se encuentra a izquierda del punto B.

5. A partir de este primer análisis cualitativo me surgieron dos preguntas:

   I. ¿A qué se debe qué esta cuadrática tiene una raíz fija en x = -1/2?

   II. ¿Es posible construir una cuadrática que tenga una raíz fija en cualquier otro punto? Si es así, ¿Cómo lo hacemos?

a) Resolución experta

Sean a, b y c números enteros tal que

$$\begin{cases} a \in \mathbb{Z} - \{0\} \\ b = a + 1 \\ c = a + 2 \end{cases} \qquad (I)$$

Queremos ver qué valores de x satisfacen la ecuación:

$$4ax^2 + 4bx + c = 0, \quad (II)$$

Utilizando las identidades definidas en (I)

$$4ax^2 + 4(a+1)x + (a+2) = 0$$

Aplico la fórmula resolvente para hallar los valores de x que satisfacen la ecuación.

$$x_{1,2} = \frac{-4(a+1) \pm \sqrt{(4(a+1))^2 - 4(4a)(a+2)}}{2(4a)}, \qquad (III)$$

Opero sobre el discriminante

$$\Delta = 16(\mathrm{a}^2 + 2\mathrm{a} + 1) - 16\mathrm{a}^2 - 32a$$

$$\Delta = \cancel{16\mathrm{a}^2} + \cancel{32\mathrm{a}} + 16 - \cancel{16\mathrm{a}^2} - \cancel{32\mathrm{a}}$$

$$\Delta = 16$$

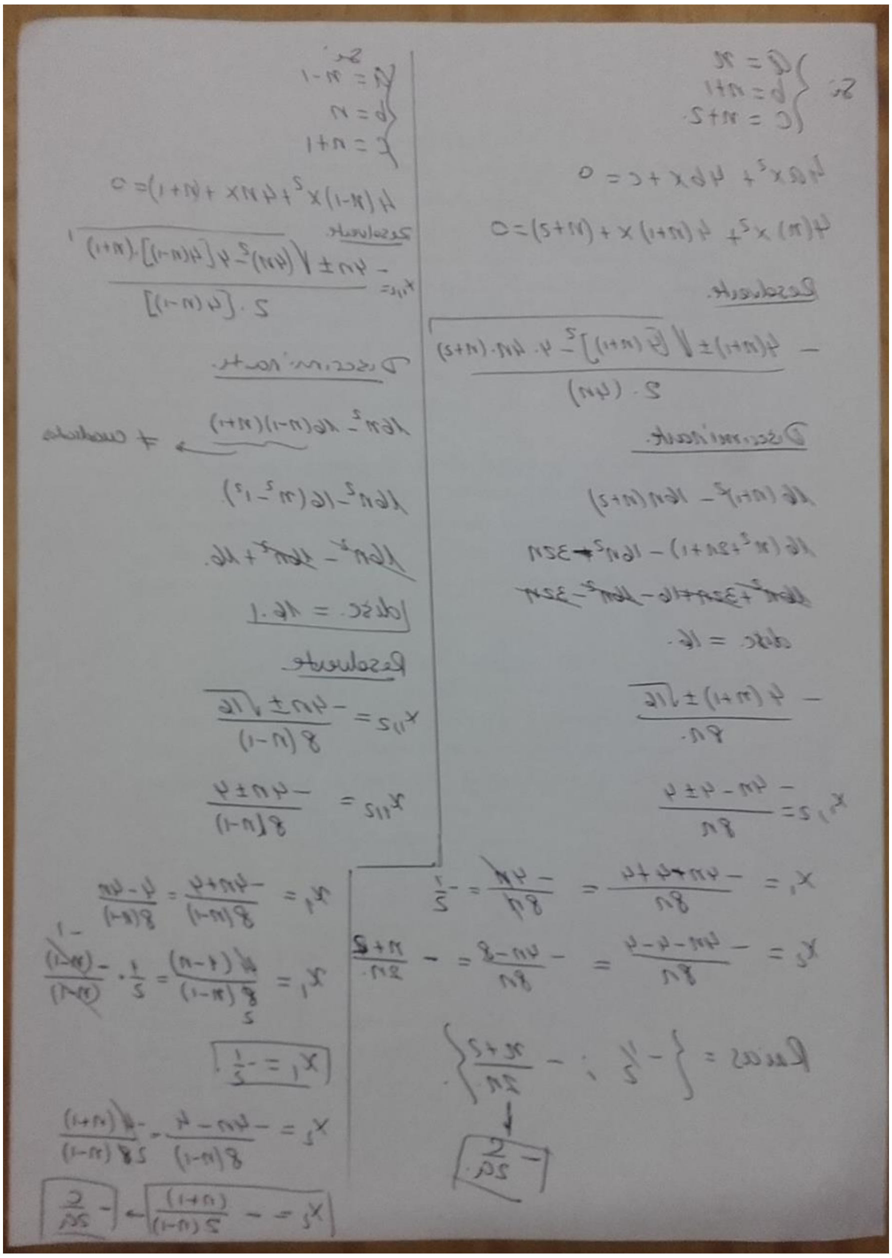
Vuelvo a la expresión (III)

$$x_{1,2} = \frac{-4a - 4 \pm \sqrt{16}}{8a}$$

$$x_1 = -\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad x_2 = -\frac{a+2}{2a}$$

Respondiendo a la consigna, podemos decir que una característica que presentan las raíces de las ecuaciones de la forma $4ax^2 + 4bx + c = 0$, (***donde a, b y c son enteros consecutivos), es que*** **una de las raíces siempre será -1/2, mientras que la otra dependerá del valor que asuma, en este caso, el parámetro "*a*".**

b)



Si $\begin{cases} a = n-2 \\ b = n-1 \\ c = n \end{cases}$

$4(n-2)x^2 + 4(n-1)x + n = 0$

Resolvente.

$$x_{1,2} = \frac{-4(n-1) \pm \sqrt{[4(n-1)]^2 - 4[4(n-2)]n}}{2[4(n-2)]}$$

Discriminante.

$16(n-1)^2 - 16(n-2)\cdot n$

$16(n^2-2n+1) - 16n^2+32n$

$\cancel{16n^2} \cancel{-32n} +16 \cancel{-16n^2} \cancel{+32n}$

$disc = 16.$

Resolvente.

$$x_{1,2} = \frac{-4(n-1) \pm \sqrt{16}}{8(n-2)}$$

$$x_1 = \frac{-4n+4+4}{8(n-2)} = \frac{-4n+8}{8(n-2)}.$$

$$x_1 = \frac{-4\cancel{(n-2)}}{8\cancel{(n-2)}} = -\frac{1}{2}.$$

$$x_2 = -\frac{4n\cancel{+4-4}}{8(n-2)}$$

$$\boxed{x_2 = -\frac{n}{2(n-2)}}$$

$$+\boxed{\frac{c}{2a}}$$

Si empiezo a contar de cualquier parámetro me da lo mismo ¡como tiene que ser!

Hasta acá noté dos cosas:

1°) No es necesario meter una letra más, en este caso la "n". Simplemente puedo hacer.

$\begin{cases} a \in \mathbb{Z} \\ b = a+1 \\ c = a+2. \end{cases}$

2°) No se puede aplicar la resolvente a una lineal.

Si $a=0$. tendría:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4(0).c}}{2\cdot(0)}$$

¡estaría dividiendo por cero!

La resolvente sólo se aplica a la cuadrática

c) preguntas que me hizo mi compañero después de leer mi resolución:

1) ¿Elegiste "*a*" como parámetro independiente por algo en particular?

2) ¿Qué pasa si elegís "*b*" como parámetro independiente?

La elección de "a" como parámetro indepensiente es completamente arbitrario, se podría haber ejegido " b " o "c " y llegaríamos a la misma conclusión

a) Resolución experta

Sean a, b y c números enteros tal que

definición 1

$$\begin{cases} a \in \mathbb{Z} \\ b = a + 1 \\ c = a + 2 \end{cases} \quad (I)$$

definición 2

$$\begin{cases} a = b - 1 \\ b \in \mathbb{Z} \\ c = b + 1 \end{cases}$$

Queremos ver qué valores de x satisfacen la ecuación:

$$4ax^2 + 4bx + c = 0, \quad (II)$$

Utilizando las identidades definidas en (I)

$$4ax^2 + 4(a + 1)x + (a + 2) = 0$$

Aplico la fórmula resolvente para hallar los valores de x que satisfacen la ecuación.

$$x_{1,2} = \frac{-4(a + 1) \pm \sqrt{(4(a + 1))^2 - 4(4a)(a + 2)}}{2(4a)}, \quad (III)$$

Opero sobre el discriminante

$$\Delta = 16(a^2 + 2a + 1) - 16a^2 - 32a$$

$$\Delta = \cancel{16a^2} + \cancel{32a} + 16 - \cancel{16a^2} - \cancel{32a}$$

$$\Delta = 16$$

Vuelvo a la expresión (III)

$$x_{1,2} = \frac{-4a - 4 \pm \sqrt{16}}{8a}$$

$$x_1 = -\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad x_2 = -\frac{a + 2}{2a}$$

Para darnos cuenta de que llegamos a la misma conclusión veamos que nos da la segunda raiz bajo ambas definiciones:
$x_2 = -(a + 2)/2a$, pero según esta definición 1 $(a + 2) = c$.
Así, $x_2 = -c/2a$.
Desarrollando bajo la definición 2 tenemos $x_2 = -(b + 1)/2(b - 1)$
pero $b + 1 = c$ y $b - 1 = a$.
Nuevamente obtenemos $x_2 = -c/2a$.

Comaparemoa esta raíz bajo ambas definiciones

Desarrollamos con la definición 2

y obtendríamos

$x_1 = -1/2$

$x_2 = -(b + 1)/ 2(b - 1)$

Respondiendo a la consigna, podemos decir que una característica que presentan las raíces de las ecuaciones de la forma $4ax^2 + 4bx + c = 0$, ***(donde a, b y c son enteros consecutivos), es que*** **una de las raíces siempre será -1/2, mientras que la otra dependerá del valor que asuma, en este caso, el parámetro “*a*”.**

Por nuestra definición, ahora, la segunda raíz nos queda en función del parámetro "b".

Por eso esta aclaración

Bajo la definición 2 sería

2)

I. Cálculo de las raíces de una ecuación cuadrática mediante el método de la resolvente.
   Ecuación (III) de la resolución experta.

II. El uso de la variable como número general y como variable funcional, ambos conceptos entendidos en términos del modelo 3uv.
   Al comienza de la resolución experta (I) defino la relación y el conjunto al cual pertenecen los parámetros a, b y c. “a” se interpreta como un número general, mientras que b y c mantienen una relación funcional con “a”, b y c dependen del valor que tome “a”.

III. La necesidad de apelar a los símbolos poder explicar la característica hallada mediante la exploración. Si bien, en principio uno puede inferir cierto comportamiento general tanteando con algunos números sueltos o, utilizar un software para dicho fin. La consigna pide una explicación, es decir, no alcanza con darse cuenta de ciertas regularidades, hay que explicarlas.

Un concepto matemático que utilice en la resolución:

“Las raíces de una ecuación cuadrática se calculan mediante la siguiente expresión:

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, *donde a, b y c son los coeficientes de la cuadrática y* $a \neq 0$.”

3) Para hallar la raíz de una ecuación lineal, es decir, para hallar el valor de x para que la ecuación de cero, ya conocemos un método. Tenemos que igualar la ecuación a cero y luego despejar x.

Por ejemplo (escribo en el pizarrón) escribamos la expresión general de una ecuación lineal:

$$ax + b = 0, \quad \text{donde } a \text{ y } b \text{ son números reales y } a \neq 0.$$

Notemos que si $a = 0$, tendríamos una identidad y no una ecuación.
(Pregunto a la clase) ¿Qué valor tiene que tomar x para que la ecuación me de cero?
(Si no surge la respuesta de la clase, sigo así)
Bueno, hay que despejar x. (escribo en el pizarrón)

$$x = -\frac{b}{a}$$

Si ahora tenemos una expresión cuadrática y queremos hallar sus raíces, es decir, queremos ver para qué valores de x la ecuación nos da cero.
(Escribo en el pizarrón)

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad donde\ a, b\ y\ c\ son\ números\ reales\ y\ a \neq 0.$$

Notemos que si $a = 0$, tendríamos una ecuación lineal y no una ecuación cuadrática.

¿Será posible despejar x como en el caso lineal?

(Dejo que prueben unos minutos mientras recorro el aula para ver o discutir sus intentos)
(Retomo la clase)
Bueno, podemos despejar x pero nos llevará un poco más de trabajo que en el caso lineal. Pero finalmente obtendremos la siguiente expresión:
(Escribo en el pizarrón)
"Las raíces de una ecuación cuadrática se calculan mediante la siguiente expresión llamada resolvente:
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $\quad donde\ a, b\ y\ c\ son\ los\ coeficientes\ de\ la\ cuadrática\ y\ a \neq 0$."

4) Un resultado: La resolvente de una ecuación cuadrática es una fórmula que nos permite calcular las raíces del polinomio a partir de sus coeficientes. Dicha fórmula es la siguiente:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \ \ con\ a, b, c\ \in \mathbb{R}\ y\ a \neq 0.$$

5) Deducción de la fórmula resolvente
Dada la ecuación cuadrática:

$$ax^2 + bx + c = 0, \ \ con\ a, b, c\ \in \mathbb{R}\ y\ a \neq 0.$$

Multiplicando miembro a miembro por $4a$ (el lado izquierdo de la ecuación no se anula ya que $a \neq 0$)

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

Completando cuadrados

$$(2ax)^2 + 2(2ax)b + b^2 - b^2 + 4ac = 0$$

Los primeros tres términos es la forma desarrollada del cuadrado de un binomio

$$(2ax + b)^2 - b^2 + 4ac = 0$$

Despejando x obtenemos la fórmula resolvente para una ecuación cuadrática

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

■

6) En la deducción del punto (5) notamos que el único requisito para utilizar la resolvente es que $a \neq 0$. Según la consigna a, b y c son enteros consecutivos, con lo cual, en principio, *a* podría valer cero. Pero si ese fuera el caso, ya no tendríamos una ecuación cuadrática sino una lineal.
En el punto (3) donde cuento como presentaría el tema ante una clase, escribo en el pizarrón la ecuación cuadrática y a continuación la restricción para el coeficiente "*a*" ($a \neq 0$) y el por qué de esta restricción.

Una vez aclarado este punto, creo que se ya podríamos utilizar la resolvente sin ningún problema y en todo caso prestar atención a lo que nos dice el discriminante.