ANEXO 1

En el Anexo I se encuentran las resoluciones de los TP1, correspondientes a los 20 alumnos que participaron de la experiencia.

CONSIGNA

Se construye con fósforos una sucesión de figuras como la siguiente:

… … … …

¿Puede ser que alguna de las figuras de esta sucesión tenga exactamente 6743 fósforos? ¿Por qué?
Si nos dan distintas cantidades de fósforos para que armemos una figura de esta sucesión, tratando de que no sobre ninguno, nos encontramos que a veces no sobran y a veces sí. ¿Podrías explicar cuándo es que sobran fósforos y cuántos fósforos es posible que sobren? Cuando no sobra ningún fósforo, ¿a qué se debe?

PREGUNTAS:
- ¿Qué concepto matemático considerás que se trabaja en esta consigna? (si hay más de uno, indicalos). Escribí una definición matemática de ese concepto. Pensá que la vas a dejar escrita en el pizarrón cuando sea trabajada en una clase.
- Explicá la definición con palabras (como si le hablaras a la clase). Todo esto a lo sumo te insumirá media carilla.
- ¿Qué resultados, propiedades o conceptos matemáticos utilizaste para la resolución de la consigna? Simplemente listalos.
- Si utilizaste alguna propiedad para resolver, redactala como tal (es decir tal como se vería en un libro de texto) y demostrala.

Resolución A1

Resoluciones de la consigna:

1) $3n + 1 = f(n)$
   $3n + 1 = 6743$
   $3n = 6743 - 1$
   $n = (6742)/3$
   $n \approx 2247,33$ abs!

Llamamos f(n) a la cantidad de fósforos necesarios para obtener figuras sin que sobren fósforos cuando n es natural.
Respuesta: No es posible que alguna de las figuras de la sucesión tenga exactamente 6743 fósforos ya que n debe ser natural por lo tanto no tendré, como solución, números con decimales.
Al armar la figura de la sucesión nos encontramos con que no sobran fósforos cuando el número hallado es divisible por 3. Mientras que cuando sobran es por qué sucede lo contrario. La cantidad de fósforos que podrían sobrar son los restos de dividir el numero hallado por 3, o sea, 1 o 2 fósforos.

2) $4n - (n - 1) = 6743$
   Notemos que la resolución de esta ecuación es similar a la anterior.
3) 4
   $4 + 3 = 7$
   $7 + 3 = 10$
   $10 + 3 = 13$
   …
   …
   …
   $6738 + 3 = 6741$
   $6741 + 3 = 6744$

   Con $n=1$
   $4n - (n - 1) =$ fósforos GENERALIZACION

Respuesta: No existe una figura donde la sucesión tenga exactamente 6743 fósforos. Porque la más próxima es 6741 y en la siguiente se necesitan 6744 fósforos y en una me faltan fósforos mientras que en la próxima figura me sobran.

4) $4 + 3n = 6743$
   $3n = 6743 - 4$
   $n \approx 2246{,}33$
   con $n \geq 0$ y n número natural incluido el 0.

Respuesta: No existe una figura donde la sucesión tenga exactamente 6743 fósforos, ya que n debe ser natural incluido el 0

Al armar la figura de la sucesión nos encontramos con que no sobran fósforos cuando el número hallado es divisible por 3. Mientras que cuando sobran es por qué sucede lo contrario. La cantidad de fósforos que podrían sobrar son los restos de dividir el numero hallado por 3, que en todos los casos serian 1 o 2 fósforos.

Respuesta a las preguntas:

El concepto matemático que se trabaja en esta consigna es el de plantear y resolver ecuaciones lineales.

Concepto matemático:

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas donde aparece, como mínimo, una incógnita. En esta igualdad hay términos conocidos y términos desconocidos. Este último es llamado incógnita y se representa, generalmente, con las ultimas letras del abecedario (x, y, z).

Una **ecuación lineal** o de primer grado es aquella que involucra solamente sumas y restas de variables elevadas a la primera potencia. Son llamadas lineales por que se pueden representar como rectas en el sistema cartesiano.

Explicación de las definiciones:

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones matemáticas que combinan números y letras ligadas por operaciones elementales como la suma, resta, multiplicación, división. Las letras suelen representar cantidades desconocidas llamadas incógnitas.

Una **ecuación lineal** es una igualdad que involucra una o más variables o incógnitas a la primera potencia. Además esta ecuación solo involucra sumas y restas de una variable a la primera potencia.

Resultados, propiedades o conceptos matemáticos utilizados para la resolución de la consigna:

- Conceptos matemáticos como: ecuaciones y ecuaciones lineales.
- Propiedades para resolver ecuaciones de primer grado.

Propiedades de las ecuaciones:
<u>Propiedad aditiva</u>: cuando se suma o resta un número a ambos lados de la igualdad, esta se mantiene
<u>Propiedad multiplicativa:</u> cuando se multiplica o divide por un mismo número, distinto de cero, la igualdad se mantiene.

Resolución A2

a) Se construyen con fósforos una sucesión de figuras como la siguiente:

Puede verse que para armar las primeras cuatro sucesiones de figuras se usarán 34 fósforos.
1 4
2 $\Longrightarrow$ 4+3
3 $\Longrightarrow$ 4+2.(3)
4 $\Longrightarrow$ 4+3.(3)
Pero para armar la quinta sucesión no cumple este patrón, ya que 5 figuras las obtengo con 15 fósforos y no con 16 que me daría 4+4.(3)
Debido a esto, para las sucesiones mayores a 4 figuras se usará la siguiente expresión:
5 $\Longrightarrow$ 3+4.(3)
6 $\Longrightarrow$ 3+5.(3)
7 $\Longrightarrow$ 3+6.(3)
Generalizando tenemos dos expresiones para poder armarnos las siguientes sucesiones de figuras.
Para n≤4 n=4+3(n-1)
Para n>4 n=3+3(n-1) [1] donde en ambos casos n representa la cantidad de figuras que podemos armar.
Ahora podemos resolver la primera pregunta del enunciado, quiero ver si alguna de las figuras de la sucesión tiene exactamente 6743 fósforos.
Para ser un poco más prolija y como estoy trabajando con dos expresiones según la cantidad de sucesiones de figura que tengo, al número 6743 le voy a restar los 34 fósforos que me arman las primeras 4 sucesiones.
Ahora puedo trabajar solo con la expresión n=3+3.(n-1) para n>4. Para ver si puedo armarme una figura con 6709 fósforos tengo que resolver la siguiente ecuación[1]

$$6709 = 3 + 3.(n - 1)$$

Resolviendo me queda que 6709/3=n, pero por el criterio de divisibilidad por 3 puedo ver que 3 no divide a 6709. Entonces no es posible armar una figura de la sucesión de exactamente 6743 fósforos.
Siguiendo la idea anterior puedo responder a la siguiente pregunta ¿Podrías explicar cuándo es que sobran fósforos y cuantos fósforos es posible que sobren?¿cuándo no sobra ningún fosforo y a que se debe?

Entonces independientemente de la cantidad de fósforos que tenga, una forma es restar los 34 que me arman las primeras 4 figuras para trabajar solo con una expresión y ver el restante de fósforos que tengo para seguir armando las figuras.
Si el numero restante es divisible por 3 entonces puedo armar figuras y no me sobrara ningún fosforo, por el contario si no lo es entonces podre armar figuras pero me van a sobrar fósforos.
Sea x mi cantidad de fósforos (con los 34 ya restados) y quiero ver que sean divisibles por 3, entonces puedo escribir a x de la siguiente manera:
X= 3.k
X=3.k+1
X=3.k+2 en todos los casos con k∊ enteros
Si x es divisible por 3 con resto cero entonces puedo armar una figura con mi cantidad x de fósforos sin que sobre ninguno, de lo contrario si x es alguna de las otras dos expresiones, entonces me van a sobrar 1 o 2 fósforos, ya que 0,1 y 2 son los posibles restos en una división por 3.
b)

- Considero que los conceptos matemáticos trabajados en esta consigna son: Divisibilidad, relación ente variables, ecuaciones.
  Definición de divisibilidad: "Se dice que un número entero b es divisible por otro entero a, con a≠0, si existe un entero c talque b=a.c"
- Según esta definición, es equivalente decir que "b" es divisible por "a", que el resto de dividir a "b" por "a" es cero, que "a" es un divisor de "b" o "b" es múltiplo de "a", por ejemplo 6 es divisible por 3, ya que 6 es igual a 3 por dos pero 6 no es divisible por 4 porque no existe un numero entero c que haga que c.4=6. O que no hay ningún número en la tabla del 4 que me dé como resultado 6.
- Para la resolución de la consigna utilice la relación entre las variables fósforos y formas para sacar las expresiones genéricas, el criterio de divisibilidad por 3 y resolución de ecuaciones.

Resolución de A3

Se puede notar que la primera figura tiene 4 fósforos, la segunda figura 7 y la tercera figura tiene 10 fósforos. Se puede notar que siempre comparten el primero y luego se van sumando de a tres, por lo cual se puede usar la forma $3n + 1$ siendo n la posición que ocuparía esa figura con esa cantidad de fósforos.
Para averiguar si se puede formar con una cantidad exacta de fósforos se puede tomar la siguiente ecuación.

$$3n + 1 = 6743\,, n \in \mathbb{N}$$

Luego del manejo algebraico se llega a que no es posible que la sucesión tenga exactamente 6743 fósforos
Ya que al resolver la ecuación n da como resultado un número no natural y las posiciones en una sucesión se indican con números naturales.
Si me dan 13 fósforos observo que no sobran, pero si me dan 14 sobra uno, si me dan 15 sobran 2 pero si hay 16 no sobran.

Fósforos	sobran
13	0
14	1
15	2

16	0
17	1
18	2

etc...
Se puede ver que la cantidad de fósforos que sobran se van repitiendo cada tres cuando la cantidad es múltiplo de 3, siempre sobran 2 pero cuando es el siguiente de un múltiplo de 3 no sobran fósforos
No sobran fósforos cuando la cantidad es un siguiente de un múltiplo de 3 porque se pueden agrupar los fósforos de a 3 y siempre sobra uno.

Definición: Una sucesión es una secuencia de números que comienza con un primer número, siguen con el segundo, uno a continuación del otro.
Explicación: En general los términos se llaman $a_1;\ a_2;\ a_3; \dots;\ a_n; \dots$ donde el subíndice indica el lugar que ocupa ese término en la sucesión.
Hay diferentes maneras de expresar una sucesión:
a) Indicando propiedades de sus términos
b) Por recurrencia, es decir mediante una fórmula que permita obtener un término a partir de los anteriores.
c) Mediante una función cuyo dominio son los naturales y que permite hallar cualquier término según la posición que ocupe en la sucesión.
En la consigna se trabaja una sucesión cuyo término general está definido mediante una función lineal cuyo dominio son los naturales y, en este caso, codominio también son los naturales

$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} |\ f(n) = 3n + 1$$

En esta consigna se utilizaron los siguientes conceptos matemáticos.
Sucesiones
Función lineal
Conjuntos numéricos
Ecuación
Expresiones algebraicas

Resolución de A4

1) Los conceptos matemáticos son sucesiones y función lineal. Con respecto a sucesiones:
   Una sucesión es un conjunto ordenado de números.
   Las funciones describen fenómenos y se relacionan las variables, una de ellas se llama variable independiente y la otra variable dependiente. En toda función para cada valor de la variable independiente existe un único valor de la variable dependiente. Las funciones se pueden representar mediante gráficos, tablas de valores, etc.
2) Para la resolución de la consigna utilice los conceptos matemáticos de sucesión y función lineal. Y las resoluciones de los estudiantes del análisis en términos de actividad matemática.

Consigna
Si nos dan distintas cantidades de fósforos para que armemos una figura de esta sucesión, tratando de que no sobre ninguno, nos encontramos que a veces no sobran y a veces sí. ¿Podrías explicar cuándo es que sobran fósforos y cuántos fósforos es posible que sobren? Cuando no sobra ningún fósforo, ¿a qué se debe?

Si nos dan distintas cantidades de fósforos, por lo analizado anteriormente, si le resto 1 y es divisible por tres entonces no sobra ningún fósforo. Y si no sucede esto, sobran fósforos en los que sus posibles restos pueden ser 1 ó 2.

Resolución de A5

1) $3n + 1 = 6743$ No explica cómo llegó a esto, bien los proced
   $3n = 6743 – 1$
   $n = (6742)/3$
   $n \approx 2247{,}33$

Con $n \geq 1$ y n número natural. No dice qué representa n.Respuesta: No existe una figura donde la sucesión tenga exactamente 6743 fósforos. Ya que n debe ser natural.
Al armar la figura de la sucesión nos encontramos con que no sobran fósforos cuando el número hallado es divisible por 3. Mientras que cuando sobran es por qué sucede lo contrario. La cantidad de fósforos que podrían sobrar son los restos de dividir el numero hallado por 3, que en todos los casos serian 1 o 2 fósforos.

2) $4n – (n - 1) = 6743$
   $3n + 1 = 6743$
   $3n = 6743 – 1$
   $n = (6742)/3$
   $n \approx 2247{,}33$

Con $n \geq 1$ y n número natural.
La resolución de esta ecuación y la respuesta es similar a la anterior.

3) 4
   $4 + 3 = 7$
   $7 + 3 = 10$
   $10 + 3 = 13$
   …
   …
   …
   $6738 + 3 = 6741$
   $6741 + 3 = 6744$

Respuesta: No existe una figura donde la sucesión tenga exactamente 6743 fósforos. Porque la más próxima es 6741 y en la siguiente se necesitan 6744 fósforos y en una me faltan fósforos mientras que en la próxima figura me sobran

4) $4 + 3n = 6743$
   $3n = 6743 – 4$
   $n \approx 2246{,}33$
   Con $n \geq 0$ y n número natural incluido el 0.

Respuesta: No existe una figura donde la sucesión tenga exactamente 6743 fósforos. Ya que n debe ser natural.

Al armar la figura de la sucesión nos encontramos con que no sobran fósforos cuando el número hallado es divisible por 3. Mientras que cuando sobran es por qué sucede lo contrario. La cantidad de fósforos que podrían sobrar son los restos de dividir el numero hallado por 3, que en todos los casos serian 1 o 2 fósforos.
Hasta acá todas las resoluciones iguales.

5) □ □□ □□□ …
   4 4+3 4+6

Respuesta: En esta resolución se puede deducir que para armar otra figura más, solo se van a necesitar 3 fósforos. Por consiguiente, se puede generalizar, simbolizando la cantidad de figuras con la letra n y la cantidad de fósforos con la letra F, deduciendo F(n)=4+3n, usa notación funcional pero no define la terna.

Respuesta a las preguntas:
El concepto matemático que se trabaja en esta consigna es el de plantear y resolver ecuaciones lineales.

Definición de ecuación:

Ecuación es la igualdad de dos expresiones algebraicas no equivalentes, o sea, una igualdad que sólo se verifica para determinados valores de las incógnitas. En una ecuación existen una o varias variables a las que se las llama incógnitas.

Las incógnitas se acostumbran a representar por las ultimas letras del alfabeto: t,u,v,x,y,z.

Una ecuación lineal de primer grado es del tipo $a.x + b = 0$, con $a \neq 0$, o cualquier otra ecuación en la que, al operar, transponer términos y simplificar adopten esa expresión.

Ejemplo:

$X – 2 = 10$

Tenemos un ejemplo de ecuación lineal de primer grado, ya que esta igualdad sólo se verifica para un determinado valor de x, o sea, $X = 12$.

Explicación de la definición:

Entendamos que una igualdad es la expresión de dos cantidades o expresiones algebraicas que tienen el mismo valor y ambas expresiones se hallan separadas por el signo = (igual a).

Ejemplos: $3.6 – 5 = 13$ ó $x = y + z$.

Por otro lado una identidad es la igualdad de dos expresiones algebraicas equivalentes, o sea una igualdad que se verifica para cualesquiera valores de las letras que forman parte de la misma. Ejemplo: $(a + b)^2 = (a + b). (a + b)$

En el caso de las ecuaciones lineales la igualdad solo se va a verificar para un solo valor de la incógnita.

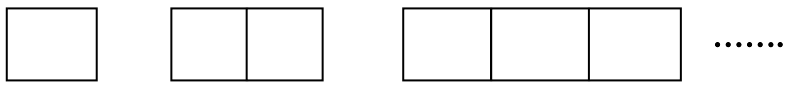
Resultados, propiedades o conceptos matemáticos que se utilizaron. Propiedades para resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita:

1) Se efectúan las operaciones indicadas, si las hay.
2) Se hace la transposición de términos, pasando todos los términos que contienen la incógnita a uno de los miembros y los términos restantes al otro.
3) Se reducen términos semejantes en cada miembro.
4) Se despeja la incógnita: para ello el coeficiente que está multiplicando a la incógnita se pasa al otro miembro dividiendo.

5) Una vez obtenida la solución de la ecuación podemos verificar el resultado, sustituyendo las incógnitas por la solución. Después de efectuar las operaciones pertinentes debe llegarse a una igualdad.

Resolución de A6

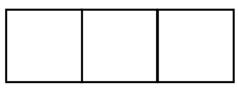
a) Se construye con fósforos una sucesión como la que se presenta a continuación:



Para saber si alguna de las figuras de la sucesión tiene exactamente 6743 fósforos primero tenemos que hallar la fórmula que represente la sucesión. Para eso veremos qué pasa cuando tomamos distintas cantidades de fósforos.
Como vemos en el gráfico, necesitamos 4 fósforos para formar un cuadrado y armar la primera figura.

Luego para la segunda figura, necesitamos armar dos cuadrados, por lo tanto, necesitaríamos el doble de los fósforos usados anteriormente.

Pero como vemos en el gráfico, ambos cuadrados están unidos por uno de sus lados, es decir, comparten un lado. Por ende, le restamos ese fósforo que esta demás. De esta manera necesitaríamos 4.2-1 fósforos para completar la figura.
Para la tercera figura, necesitamos tres cuadrados, entonces necesito 3.4 fósforos, pero como paso en el caso anterior, los primeros dos cuadrados van a compartir un lado, lo mismo pasa con el segundo y tercer cuadrado, entonces debemos restarle dos fósforos que están demás. Quedando de este modo un total de 4.3-2 fósforos.
Notamos que si tenemos dos cuadrados le restamos uno, si tenemos tres cuadrados le restamos dos, es decir, le restamos al total la cantidad de cuadrados menos uno. Por ejemplo si tuviéramos diez cuadrados, le restaríamos al total 10-1 fósforos. De este modo la cantidad de fosforo serian 4.10 – **(10-1).**



A continuación, realizamos un cuadro en donde estarán las cantidades de cuadrados en la figura, lo llamaremos “x”, y por otro lado la cantidad de fósforos utilizados, lo llamaremos “y”.

x	y
1	4.1-(1-1)

2	4.2-(2-1)
3	4.3-(3-1)
4	4.4-(4-1)
.	.
.	.
n	4.n-(n-1)

De esta manera vemos que para n cantidad de cuadrados necesitamos 4.n-(n-1) fósforos. Logramos encontrar la fórmula que representa la sucesión de las figuras. Luego vamos a pensar la fórmula encontrada como la función f(x)= 4.x-(x-1), en donde “x” representa la cantidad de cuadrados que tiene la figura y “f(x)” representa la cantidad de fósforos necesarios para armar dicha figura.
Si queremos saber si alguna figura tiene 6743 fósforo, solo tenemos que igualar la cantidad de fósforos con la función f(x). De esta manera:

$4.x-(x-1) = 6743$

$4.x-x+1= 6743$

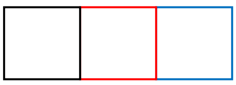
$3.x+1=6743$

$3x=6743-1$

$x=6742/3$

$x= 2247,666\ldots$

Esto quiere decir que para que la figura tenga exactamente 6743 fósforos se necesitan 2247,666…cuadrados, pero esto no es posible, ya que “x” representa una cantidad entera de cuadrados. Luego no existe figura con exactamente 6743 fósforos.
Sabemos que para armar figuras que pertenezcan a la sucesión la cantidad de fósforos utilizados tiene que ser de la de la forma 3.x+1. Luego si algún número no es de esa forma entonces sobraran fósforos. Para agregar al gráfico un nuevo cuadrado voy agregando de a tres fósforos.



Entonces la cantidad de fósforos que pueden sobrar será menor que tres. Por lo tanto, los únicos restos posible son uno o dos.

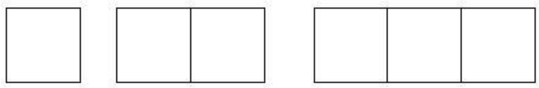
b) El concepto que se trabaja en la consigna es el concepto de función.
Una función es una relación entre un conjunto “x” (llamado dominio) y un conjunto “y” (llamado codominio o imagen), de manera que a cada elemento del primer conjunto le corresponde un elemento del segundo conjunto.
Explicado con mis palabras:
Vamos a definir que es una función, pero para eso primero vamos a ver un ejemplo.
Un auto que va por la carretera recorre 80km en 1 hora. En este caso si quisiéramos saber cuánto recorre en 2 horas tendríamos que calcular el doble de esos kilómetros recorridos. Los que nos daría que recorrió 160 kilómetros. Podemos ver que la cantidad de kilómetros recorridos va a depender de la cantidad de horas que maneja. Entonces una función podemos decir que es esta relación, en este caso, que se da entre el tiempo y la distancia recorrida. De esta manera x representa la cantidad de horas, es la variable dependiente, e

“y” representa la cantidad de kilómetros recorridos, es la variable dependiente, ya que depende de la cantidad de horas. Luego vemos que para cada valor que toma x, o sea para cada hora distinta que tomo, hay una única distancia recorrida, es decir, hay un único valor en y.
Luego una función es, como vimos en el ejemplo, una relación que se da entre dos conjuntos, un conjunto x y otro conjunto y. Tienen una relación de dependencia, para cada elemento de x le corresponde un elemento de y.
En nuestra consigna trabajada “x” es la cantidad de cuadrados de la figura e “y” son la cantidad de fósforos para armar esa figura. Vemos que para un número determinado de cuadrados hay una cantidad de determinada de fósforos.

Lista de conceptos y definiciones utilizadas:
Funciones
Ecuaciones
Sucesiones

Resolución de A7

a.



La primera figura tiene 4 fósforos, la segunda 7 y la tercera 10 y podría seguir viendo algunas figuras más. A cada uno los puedo ver de la siguiente manera: $4 = 3 + 1$, $7 = 3 + 3 + 1$ y $10 = 3 + 3 + 3 + 1$ por lo que deduzco que la ecuación para la cual está dada esta relación entre figuras y fósforos es $y = 3x + 1$ donde y son los fósforos y x las figuras.

- Para responder la primera consigna reemplazo la cantidad de fósforos, entonces queda la siguiente ecuación, $6343 = 3x + 1 \Rightarrow 6343 - 1 = 3x \Rightarrow 6342 : 3 = x \Rightarrow x = 2114$. Entonces, partiendo de lo que dije sobre x y observando que el número obtenido es un número natural, puedo afirmar que sí es posible que una de las sucesiones tenga 6342 fósforos, y sería la sucesión 2114.
- Sobran fósforos cuando la resta entre la cantidad de fósforos y 1 no es múltiplo de 3 y sobran 1 o 2 fósforos.
- No sobra ningún fósforo cuando el resultado obtenido entre la resta de la cantidad de fósforos y 1 es divisible por 3.

Resolución de A8

Al observar el grafico de la secuencia noto que el primer cuadrado está constituido por 4 fósforos. Luego para agregar otro cuadrado se utilizan 3 fósforos. Lo que me lleva a platear la siguiente función lineal:

$$3 \times X + 1 = Y \quad , \{X \geq 1, X \in N\}$$

Donde X es la cantidad de cuadrados en la secuencia e Y es la cantidad de fósforos utilizados.

Para saber si hay alguna figura que se construya con exactamente 6743 fósforos lo que voy a hacer es reemplazar esa cantidad en la variable Y resultando:

$$3 \times X + 1 = 6743$$
$$X = 2580{,}6666$$

Como X no es un número natural no es posible armar una figura que utilice exactamente 6743 fósforos.

Además, si nos dan una cantidad Y de fósforos podemos decir que:

1. No sobraran fósforos si el resto de dividir Y – 1 por 3 es igual a 0.
2. Sobrara 1 si el resto de la misma división es 1. Y serán 2 en el caso de que sea 2 ese resto.

<u>Respuestas a las preguntas</u>

1) En esta consigna se trabajan los conceptos de función, función lineal y ecuación lineal.

Función: es una relación entre un conjunto de elementos llamado dominio y otro conjunto de elementos llamado codominio, de forma que a cada elemento del dominio le corresponde un único elemento del codominio.

Función lineal: es una función cuya expresión analítica es un polinomio de primer grado.

Ecuación lineal: es un tipo de ecuación que solamente involucra sumas y restas de una variable de la primera potencia.

2) Una función es una relación entre elementos de dos conjuntos que tiene como condición que a cada elemento del dominio le corresponde un único elemento del codominio. Vamos a decir que una función es lineal si podemos expresarla como un polinomio de grado 1, en el cual en principio el dominio son todos los números reales y el codominio también tiene a todos los números reales. Como por ser función a cada elemento del dominio le corresponde un único elemento del codominio y por ser lineal a cada elemento del codominio le corresponde un solo elemento del dominio, si fijamos alguna de las dos variables de la función, obtenemos una ecuación (en este caso lineal) con una única solución. Resolviendo esta ecuación hallaremos el valor correspondiente al valor fijado.

3) Propiedades, resultados y/o conceptos utilizados: función lineal, ecuaciones, dominio y divisibilidad por 3.

4) Divisibilidad por 3: si la suma de los dígitos de un número es divisible por 3 entonc.es el número es divisible por 3.

Nota: para demostrar esta propiedad se utiliza el concepto de congruencia y propiedades de congruencias.

Nota 2: entrego el trabajo sin la última consigna porque no me alcanzo el tiempo para completarlo.

Resolución de A9

a) *<u>Resolución Experta:</u>*

Si construimos las figuras partiendo de un fósforo inicial, al que luego le agregamos tres fósforos para completar el cuadrado, luego tres más para el cuadrado lindante y así continuamos alargando la figura, esto es una sucesión aritmética de la siguiente forma:

$$a_n = 3n + 1$$
$$6743 = 3n + 1 \quad \rightarrow \quad n = \ 2.247,\hat{6}$$

Cómo no me da un número entero, ninguna figura de la sucesión podrá tener exactamente 6.743 fósforos.

- Sobran cuando el número de fósforos dado no tiene resto 1 al dividirlo por 3, esto es 3n+1 usando *"algoritmo de división"*. Sobrarán fósforos cuando el número de fósforos dado sea múltiplo de 3, es decir resto cero al dividir por 3, (en cuyo caso sobraran dos fósforos) o tenga resto 2 al dividirlo por 3 (en tal caso sobrará un fósforo). Por lo dicho anteriormente, cuando no sobra ninguno se debe a que el número de fósforos dado tiene resto 1 al dividirlo por 3.

b) *Respuestas al cuestionario:*

¿Qué concepto matemático considerás que se trabaja en esta consigna? (si hay más de uno, indicalos). Escribí una definición matemática de ese concepto. Pensá que la vas a dejar escrita en el pizarrón cuando sea trabajada en una clase.

Considero que el concepto trabajado en esta consigna es el concepto de **sucesión aritmética**.
Sucesión aritmética: es una sucesión de números tales que la diferencia entre dos números consecutivos cualquiera de ellos es siempre la misma.

- Explicá la definición con palabras (como si le hablaras a la clase). Todo esto a lo sumo te insumirá media carilla.

Veamos a que se refiere la definición haciendo un ejemplo. Utilicemos la sucesión que conseguimos con la resolución del ejercicio anterior y calculemos los primeros tres términos

$$a_1 = 3 \times 1 + 1 = 4$$
$$a_{2=} 3 \times 2 + 1 = 7$$
$$a_3 = 3 \times 3 + 1 = 10$$

Si hacemos la diferencia, es decir, la resta entre $a_3 = 10$ y su término anterior $a_2 = 7$, esto nos da como resultado $a_3 - a_2 = 3$. Si trabajamos de la misma manera con $a_2 = 7$ y su término anterior $a_1 = 4$, vemos que nos da $a_2 - a_1 = 3$.
En ambas restas, el resultado fue 3. Entonces vemos que, al haber tomado dos términos consecutivos de la sucesión, la diferencia entre ellos siempre dio el mismo número.

- ¿Qué resultados, propiedades o conceptos matemáticos utilizaste para la resolución de la consigna? Simplemente listalos.

1) Sucesión aritmética.
2) Algoritmo de división.

- Si utilizaste alguna propiedad para resolver, redactala como tal (es decir tal como se vería en un libro de texto) y demostrala.

Algoritmo de la división en Enteros

Teorema: Dados dos números $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$; $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ pertenecientes a los enteros, $b \neq 0$, existen números únicos $\boldsymbol{q}$ y $\boldsymbol{r}$ con $0 \leq r < |b|$ tales que $a = b \times q + r$.

Resolución de A10

En la consigna analizada anteriormente se trabaja con los siguientes conceptos matemáticos:

- Función lineal
- Ecuaciones

<u>Función lineal:</u>

Sea F: R $\rightarrow$ R decimos que F es lineal si tiene la forma $F(X) = mx + b$, donde m y b son números reales (pendiente y ordenada al origen), que se denominan constantes, con **m** distinto de **0**. Los términos **x** e **y** se denominan variables, **x** es la variable independiente e **y** se denomina variable dependiente.

Es decir, que toda función lineal tiene la forma $F(X) = mx + b$ con m y b números reales. Su representación gráfica corresponde a una recta.
Las funciones lineales tienen como dominio e imagen a todos los números reales. Cuando nos referimos a dominio es el conjunto de todos los valores que puede tomar la variable x en la ecuación planteada, en cambio, la imagen es el conjunto de todos valores que puede tomar la variable y.
Por otra parte Y es la variable dependiente y X la variable independiente. El valor de Y estará condicionado al valor que X tome en la formula.
Con respecto a la pendiente y a la ordenada al origen, la pendiente nos dará la inclinación de la recta y la ordenada origen es la intersección de la recta con el eje Y.

<u>Ecuaciones:</u>

En matemática se llama ecuación a la igualdad entre dos expresiones algebraicas, que serán denominados miembros de la ecuación. En las ecuaciones, aparecerán relacionados a través de operaciones matemáticas, números y letras (incógnitas).
En tanto, cuando cualquiera de las variables de la ecuación cumpla la igualdad, se denominara à esta situación como solución de la ecuación.

En otras palabras una ecuación es una igualdad de expresiones algebraicas en la que aparece algún valor que es desconocido, el cual debe ser hallado a partir de manipulaciones de operaciones algebraicas.

<u>Propiedades o conceptos utilizados para la resolución de la consigna:</u>

- Función lineal
- Ecuaciones
- Divisibilidad
- Operaciones algebraica

Divisibilidad:

La divisibilidad resulta ser una propiedad que poseen los números enteros
b divide a **a** si hay un número q entero tal que: **a=b.q** siendo $b \neq 0$
Se dice que **b** no divide a **a** si **a=b.q +r, 0**$< r < b$

Resolución de A11

a) **METODO 1 (experto)**

n=1 4 fósforos   n=2 7 fósforos   n=3 10 fósforos

Para n=1 > $3 \times 1 + 1$ (Figura 1)
Para n=2 > $3 \times 2 + 1$ (Figura 2)
Para n=3 > $3 \times 3 + 1$ (Figura 3)
Para n=n > $3 \times n + 1$ (Figura n-esima)
Podemos decir que la cantidad de fósforos está dada por la sucesión aritmética:
$a_n = 3n + 1$
Sabiendo que n pertenece a N
Para saber si alguna de las figuras tiene exactamente 6743 fósforos tendríamos que igualar la sucesión a 6743 y despejar n
$6743 = 3n + 1$
$n = 2247{,}3$
Llegamos a que no existe ninguna figura que tenga exactamente 6743 fósforos porque para que suceda eso la figura tendría que tener 2247,3 cuadrados y es imposible ya que la cantidad de cuadrados tiene que estar dada por números enteros.

METODO 2 (alumno)

Figura 1 > 1 cuadrado> 4 fósforos
Figura 2> 2 cuadrados > 7 fósforos
Figura 3> 3 cuadrados> 10 fósforos
Pares ordenados > Q= (1,4)   P= (2,7)
Pendiente > $M = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \frac{7-4}{2-1} = 3$
Busco la ecuación de la recta que pasa por Q= (1,4) que tenga como pendiente M=3
$Y = M.X + B$
$1 = B$
Ecuación> $Y = 3X + 1$
Donde Y= cantidad de fósforos utilizados y X= número de la figura= cantidad de cuadrados
Podríamos decir que la cantidad de fósforos se determina mediante la función:
$F: N \rightarrow R: f(x) = 3x + 1$
A su vez, en este método, por más que se utilice ecuaciones de una recta estamos hablando de una sucesión
Luego el ejercicio se resolvería de igual manera que el método 1 para saber si existe una figura que tenga exactamente 6743 fósforos.

b) Si nos dan distintas cantidades de fósforos para que armemos una figura de la sucesión dada y queremos saber cuándo nos sobran fósforos tendría que cumplirse que:

Cantidad de fósforos - 1 ≠ numero divisible por 3
Si se cumple lo anterior quiere decir que sobraran fósforos y por divisibilidad los restos de dividir un número por tres son 0,1 y 2, es decir, solo nos pueden sobrar 1 o 2.

Cuando no sobra ningún fosforo tiene que suceder lo contrario:
Cantidad de fósforos -1 = numero divisible por 3
Si se cumple lo anterior quiere decir que no sobrara ningún fosforo ya que el resto será 0.

Resolución de A12

a)
La figura uno del ejercicio tiene 4 fósforos, la dos tiene 7, y la tercera 10. Puede observarse que a medida que avanzo en la enumeración de la figura voy teniendo 3 fósforos más en cada una. Para saber si la figura puede tener 6743 fosforo puedo plantear la siguiente fórmula que me dice si estoy en la figura “n” voy a tener f(n) de fósforos.

$$f(n) = 3.(n-1)+4$$
$$6743 = 3.(n-1)+4$$
$$6743 = 3n-3+4$$
$$6743-1 = 3n$$
$$6742 = 3n$$
$$\frac{6742}{3} = n$$
$$2247,\hat{3} = n$$

La figura no puede estar formada por 6743 fósforos ya que, como se ve en el resultado, para que esto fuese posible debería existir la figura numero $2247,\hat{3}$ pero esto no es posible debido a que las figuras están enumeras con números naturales o mejor dicho el dominio y el co-dominio de la formula son los números naturales.
Para saber si van a sobrar o no fósforos basta con restarle 1 a la cantidad de fósforos que me dan (acá hay que tener en cuenta que la cantidad de fósforos debe ser mayor o igual a 4 ya que de otra forma no se podría formar ni siquiera una figura si se tiene una cantidad menor de fósforos), si esta resta es múltiplo de 3 puedo afirmar que no van a sobrar fósforos y por ende si no es múltiplo de 3 puedo afirmar que si me van a sobrar fósforos. La cantidad de fósforos que pueden llegar a sobrar son 1 o 2 ya que 1 o 2 son los restos posibles (sin tomar en cuenta al 0) de dividir un numero por 3.
b)
- En la consigna los conceptos matemáticos que se trabajan son: dominio y co-dominio de ecuaciones lineales, resto de divisiones de números enteros.

Dominio: el dominio en una ecuación nos habla sobre los valores numéricos que puede tomar una variable, que llamaremos en este caso, “n”. Los valores que podrá tomar este “n” dependerán siempre del ejercicio que se nos dé.
Co-domnio: El co-dominio son los valores que va a poder tomar nuestra ecuación dependiendo de lo que valga “n”, es decir el co-dominio de una ecuación serán aquellos resultados que puedo obtener en la ecuación que se me plantea.
Resto de divisiones: el resto en una división es lo que nos sobra al dividir dos números enteros, cuando el resto es 0, nos dice que un numero es múltiplo de otro, cuando el resto es distinto de 0, nos dice cuanto es lo que me sobra de la división dos números.

- Explicación como si hablara en clase:

El dominio en una función son los valores permitidos que puede tomar la variable independiente que en nuestro caso es “n”, por ejemplo “n” en el ejercicio solo puede tomar valores positivos y enteros, ósea números naturales (1, 2, 3, etc) por lo tanto el dominio son los números naturales ya que no podemos decir que hay -5 figuras o hay

3,4 figuras porque a las figuras las vemos como unidades enteras y no las podemos partir.
El co-dominio son los valores permitidos que puede tomar nuestra ecuación, en el ejercicio se ve en la cantidad de fósforos que puede tener la figura “n”, es decir si estoy en la figura 1 la cantidad de fósforos es 4 ni uno más ni uno menos, en la figura 2 la cantidad de fósforos va a ser 7, y así si estoy en la figura “n” la cantidad de fósforos que va a tener esa figura va a depender de que numero de figura estoy hablando.
Supongamos que quiero dividir 7 por 3, al hacer la división tenemos que el cociente es 2 y el resto es 1. Este resto nos dice cuanto le falta al 3 cuando lo multiplico por 2 para llegar al 7, en términos generales si tengo “A” dividido por “B” y el cociente es “C”, el resto seria “R”. si R=0 esto nos dice que “A*C=B”, es decir “B” es múltiplo de A.

- **Conceptos usados:**

Planteamientos y resolución de ecuaciones lineales, dominio y co-dominio de las misma, definición de conjuntos de números (naturales y enteros),resto de divisiones de números naturales.

Resolución de A13

a) Resolución de la consigna desde el punto de vista experto:

La ecuación planteada a partir de la consigna sería la siguiente: **4+3(x-1)** (con x mayor o igual que 1), donde x representa la cantidad de cuadrados que se van formando a medida que agrego 3 fósforos.
Para realizar la consigna, puedo comenzar resolviendo dicha ecuación y si el valor de “x” da un número natural entonces podré concluir que alguna de las figuras que se forme tendrá 6743 fósforos.
Resuelvo la ecuación:
4+3(x-1)=6743
4+3(x-1)-4=6743-4
[3(x-1)]:3=6739:3
x-1+1=(6739:3)+1
x=2247,33…
Como “x” (“x: cantidad de cuadrados”) no es un número natural, puedo concluir que ninguna figura tendrá 6743 fósforos.
Sobran fósforos cuando el “x” obtenido no es un número perteneciente al conjunto de números naturales. La cantidad de fósforos que puede sobrar puede ser 1 o 2, ya que con 3 fósforos se podría armar un nuevo cuadrado. En el caso en que no sobre ningún fósforo, se puede decir que se formaron determinada cantidad de cuadrados, es decir que “x”, en este caso, pertenece al conjunto de los números naturales.

b) Respuestas a las preguntas propuestas en el trabajo práctico:
- El concepto matemático que considero que se trabaja en esta consigna es ecuaciones.

Definición que voy a dejar escrita en el pizarrón cuando se trabaje este concepto matemático en una clase:
Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones que contiene una o más variables, es decir que la misma constituye una igualdad donde aparece como mínimo una incógnita que exige ser develada por quien resuelve el ejercicio.
- Definición explicada con mis palabras en una clase de Matemática:

Una ecuación es una igualdad en la cual se debe hallar un cierto valor que está predeterminado con una letra, generalmente a esa letra de la denota “x”. Dicha letra “x” va a representar, en el caso de esta consigna, la cantidad de cuadrados que se pueden formar con los fósforos. Por lo tanto, se deberá hallar el valor de la misma y deberá dar un número natural.
- Para la resolución de la consigna, utilicé el método de resolución de ecuaciones (despeje de “x”).

c) Resolución de la consigna desde el punto de vista de los estudiantes:
1) Por “tanteo”:
1 cuadrado, 4 fósforos.
2 cuadrados, 7 fósforos.
3 cuadrados, 10 fósforos.
Y así sucesivamente, continuando con la suma de 3 fósforos al número anterior (este sería un método en el que deben realizarse muchas cuentas y el cual muy pocos estudiantes optarían abordar).

2) Planteando una ecuación y hallando el valor de la incógnita:
$4+3(x-1)=6743$
$4+3x-3=6743$
$3x+1=6743$
$3x=6743-1$
$x=6742:3$
$x=2247,33\ldots$
En ambos casos, los estudiantes concluirían diciendo que ninguna figura podría tener 6743 fósforos.

Resolución de A14

a) Resolución experta
Para resolver la consigna, utilizando lo que nosotros sabemos lo que haremos será considerar el siguiente razonamiento:
Para el primer lugar utilizaríamos cuatro fósforos que conformarían el primer elemento de la sucesión. Para el segundo lugar tenemos dos cuadrados que conformarían un rectángulo formado por siete fósforos aunque a priori uno pensaría que se utilizarían ocho. Para el tercer lugar tenemos tres cuadrados que conformarían un rectángulo formado por diez fósforos aunque a priori uno pensaría que se utilizarían doce considerando que para formar el primer cuadrado usamos cuatro fósforos. Para el cuarto lugar tenemos cuatro cuadrados que conformarían un rectángulo formado por trece fósforos aunque a priori uno pensaría que se utilizarían dieciséis considerando que para formar el primer cuadrado usamos cuatro fósforos. Y así seguiría para los restantes lugares…
¿Qué es lo que pasa?
Lo que ocurre es que a partir del segundo lugar los cuadrados que vamos formando empiezan a compartir un fósforo, entonces podemos pensar que un fósforo va a quedar fijo y luego agregamos tres fósforos hasta llegar a la ubicación que necesitemos.
Podemos plantear entonces la siguiente relación expresada por la siguiente función lineal:

$$Y=3.x+1$$

Donde:
-La pendiente de la función significa los tres fósforos que vamos agregando.
-La variable **x** es el lugar en el que estamos
-La expresión **3.x** significa que vamos a multiplicar tres fósforos por el lugar en el que estemos.
-La ordenada al origen significa ese primer fósforo que queda fijo.
-La variable **y** es la cantidad de fósforos que se utilizan en total en la posición x dejando el primer fósforo fijo y habiendo considerado que por cada posición multiplicábamos por tres fósforos.
Observamos que la función f(x)=3.x+1 es una función $f : N_{\geq 1} \rightarrow N_{\geq 4}$
Ahora, alguna de estas figuras ¿podría tener 6743 fósforos?
Para averiguarlo lo que vamos a hacer es poner que **y** vale 6743 fósforos y ver si se hay una solución para la ecuación.

$$6743 = 3.x + 1$$

$$6743 - 1 = 3.x$$

$$\frac{6742}{3} = x$$

$$2.247,\hat{3} = x$$

Como **x** era el lugar en el que estamos, y el resultado de la ecuación es un número periódico, concluimos que para ninguna de estas figuras hay una que posea 6743 fósforos.

Si nos dan distintas cantidades de fósforos para que armemos una figura de esta sucesión, tratando de que no sobre ninguno, nos encontramos que a veces no sobran y a veces sí. ¿Podrías explicar cuándo es que sobran fósforos y cuántos fósforos es posible que sobren? Cuando no sobra ningún fósforo, ¿a qué se debe?

Recordemos el razonamiento que habíamos usado para hallar la expresión de la función lineal, dijimos que dejábamos un fósforo fijo y luego íbamos agregando tres las veces que nosotros quisiéramos, entonces lo que hacemos es sumarle a ese primer fósforo múltiplos de tres. Entonces si nos dan una cantidad de fósforos que sea múltiplo de tres no va a sobrar nada por que con tres fósforos (y con cualquier múltiplo de este) ya podremos armar una figura, en cambio si la cantidad que nos dan no es múltiplo de tres entonces si nos van a sobrar fósforos. Pero ¿Cuántos nos van sobrar? Lo pensamos de la siguiente forma: si nos sobran cuatro fósforos yo puedo usar tres y armar otra figura con lo cual me sobraría uno (con lo que no se puede armar ninguna figura). Si me sobraran cinco, siete, ocho, diez, etc. Siempre puedo hacer lo mismo: es decir sacar todas las ternas de fósforos necesarias para armar nuevas figuras. Por consiguiente, concluimos que los posibles fósforos que sobren son uno o dos.

b) PREGUNTAS:
- ¿Qué concepto matemático consideras que se trabaja en esta consigna? (si hay más de uno, indícalos). Escribí una definición matemática de ese concepto. Pensá que la vas a dejar escrita en el pizarrón cuando sea trabajada en una clase.
Nosotros consideramos que los conceptos matemáticos que se trabajan esta consigna son el de ***sucesiones*** y el de ***función lineal***. Estos conceptos son trabajados en el aula en distintos momentos de su formación secundaria: el primer concepto es desarrollado recién en cuarto año y el segundo concepto desde segundo año empieza a desarrollarse. Lo que nosotros consideramos es el abordaje de esta consigna desde la perspectiva de la

función lineal (lo cual no indica que en nuestro razonamiento o el razonamiento que realizamos con los alumnos en el aula aparezcan cuestiones referidas a sucesiones).

Definición

Llamamos función lineal a toda función que tiene una expresión de la forma:

Y=m.x+b

Y tiene como representación grafica una recta.

Donde:

- $m \in R$ y es la pendiente de la función e indica su inclinación.
- $b \in R$ y es la ordenada al origen de la función e indica la intersección de la función con el eje y.

Definición formal

Una **función lineal** es una función polinómica de primer grado; es decir, una función cuya representación en el plano cartesiano es una línea recta. Esta función se puede escribir como:

Y=m.x+b

Donde m y b son constantes reales y x es una variable real. La constante m es la pendiente de la recta, y b es el punto de corte de la recta con el eje y. Si se modifica m entonces se modifica la inclinación de la recta, y si se modifica b, entonces la línea se desplazará hacia arriba o hacia abajo.

- Explicá la definición con palabras (como si le hablaras a la clase). Todo esto a lo sumo te insumirá media carilla.

Explicación del concepto a la clase

*Una **función lineal** es una expresión de la forma Y=m.X+b que se representa en el plano cartesiano como una recta.*

En esta expresión como todos pueden ver tenemos diferentes letras:

Las letras x e y son las variables de esta relación.

Por otro lado m es la pendiente de la función y nos dice su inclinación. Esto significa que si m es positivo la recta será creciente (se realiza un dibujo en el pizarrón ejemplificando. Si m es negativo la recta será decreciente (se realiza un dibujo en el pizarrón ejemplificando). Finalmente si m es igual a cero la recta será una constante (se realiza un dibujo en el pizarrón ejemplificando).

Las funciones lineales sirven para trabajar con muchos problemas que involucran magnitudes directamente proporcionales. Para nosotros estas magnitudes son las variables x e y.

Para graficar una función lineal lo que tenemos que hacer es una tabla de valores (se muestre en el pizarrón) donde de un lado tendremos valores de x y del otro lado valores de y. Lo que vamos a hacer es elegir valores para x (cinco valores esta bien, pero siempre depende del problema la cantidad de valores que tomemos) y luego reemplazarlos en la expresión de la función que nos den (se hace un breve ejemplo). Así lo que vamos a obtener es una coordenada, un punto, que como hemos trabajado tiene la primera componente en x y la segunda en y. La finalidad de la tabla de valores es poder encontrar algunos puntos de la función y luego ubicándolos en el plano cartesiano poder dibujar la recta de la función lineal que tengamos (se grafica la función del ejemplo).

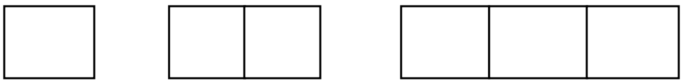
- ¿Qué resultados, propiedades o conceptos matemáticos utilizaste para la resolución de la consigna? Simplemente listalos.

<u>Resultados/propiedades/conceptos matemáticos utilizados para la resolución de la consigna</u>
-Sucesiones (solo una idea básica para entender el la consigna a nivel global, no se utilizaron definiciones ni propiedades de este concepto).
-Función lineal (la ecuación de la función lineal, los conceptos de dominio e imagen para darle el contexto necesario al problema).
-Ecuaciones de primer grado (necesario para la resolución del primer ítem de la consigna).
-Divisibilidad en N (necesario para la resolución del segundo ítem de la consigna).

-Si utilizaste alguna propiedad para resolver, redáctala como tal (es decir tal como se vería en un libro de texto) y demostrala.
Para resolver esta consigna no se utilizo ninguna propiedad que necesite ser demostrada. Con se dijo en el ítem anterior se utilizaron conceptos teóricos como el de función lineal y procedimientos algebraicos básicos como la resolución de ecuaciones de primer grado.
Lo único que si consideramos que podría ser demostrado el criterio de divisibilidad por 3 ***<u>el cual no incluimos en este trabajo por una cuestión de tiempo</u>****.*

Resolución de A15

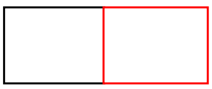
Se construye con una cierta cantidad de fósforos una sucesión como la que se presenta a continuación:



…. ….. …..

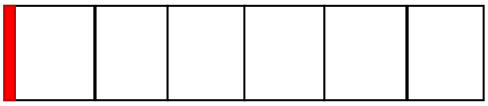
Para encontrar la cantidad de figuras de la sucesión que tenga exactamente 6743 fósforos será necesario encontrar la fórmula que representa dicha sucesión. La idea es plantear primero que se tienen cuatro fósforos que forman un cuadrado

Luego, se puede ver que agregando tres fósforos se formaran dos cuadrados, de forma tal que uno de los lados será compartido con el otro cuadrado, formándose la siguiente figura:



Así sucesivamente, para formar los tres cuadrados y los demás. Por lo que se tiene una sucesión que va aumentando de tres en tres. Así, se tendrán cuatro fósforos al comienzo más tres fósforos por la cantidad de veces que se le agregan, es decir que, se encontró una función para dicha sucesión: f(n) = 4+3.n. Con lo cual n representa la cantidad de veces que se le agregan tres fósforos a la sucesión y f(n) representa la cantidad de fósforos.
Ahora, se quiere encontrar la figura que tiene 6743 fósforos. Para eso, es necesario igualar la función f(n) = 4+3.n a 6743, que es la cantidad de fósforos, y de allí despejar n para saber cuántas veces se le agregaron tres fósforos a la sucesión. Entonces para formar la

figura buscada tenemos n más un fósforo del lado compartido que tenia inicialmente como se ve en la siguiente figura:



Por lo tanto queda
4+3.n = 6743
3. n = 6739
n= 2246,3333…
Luego, para formar la figura tenemos n+1 fósforos, entonces son 2247,3333… fósforos. Como resulta que n no es un número natural, dado que n es la cantidad de veces que se le agregan los fósforos, n+1 tampoco lo es. Finalmente, no es posible encontrar ninguna figura que tenga esa cantidad de fósforos porque no hay 6743 fósforos que formen una figura de esa sucesión, esto se puede ver dado que no cumple con la función de la misma. En este caso, puede pasar que sobren fósforos.
En el caso de que sobren, esto se debe a que la cantidad de fósforos dados no cumple con la función, es decir, que no se obtiene un número natural al despejar la solución, y además, es posible que sobren solo uno o dos fósforos como es una sucesión que va aumentando de a tres. Si no sobran fósforos se debe a que la cantidad de fósforos dados cumple la función de la sucesión.

Actividad 2: A continuación, se responderán a las siguientes preguntas:
PREGUNTAS:
- ¿Qué concepto matemático considerás que se trabaja en esta consigna? Escribí una definición matemática de ese concepto.
El concepto matemático trabajado en la consigna es el concepto de función, además se utilizo el concepto de ecuación.
Definición: Una función (f) es una relación entre un conjunto dado X (llamado dominio) y otro conjunto de elementos Y (llamado codominio) de forma que a cada elemento x del dominio le corresponde un único elemento f(x) del codominio.
- Explicó la definición con palabras (como si le hablara a la clase).
Lo que la definición quiere decir es que teniendo un valor x desconocido, por ejemplo, en el caso de los fósforos X se estaría representando con la letra n a la cantidad de veces que se le agregan tres fósforos. Además, se tiene el valor Y también desconocido que estaría en este caso, siendo la cantidad de fósforos que esta representado con las letra f(n). La relación que tienen estas variables n y f(n) es que dependen una de la otra para ser utilizada en la función que representa a la sucesión ya que f(n) es la cantidad de fósforos que forman la figura y n es la cantidad de veces que se le agregan tres fósforos. Mostrando en el pizarrón la función f(n) = 4+3.n y compararla con la forma Y= 4+3.X para ver que tienen la misma forma y que X e Y se relacionan, del mismo modo, n y f(n) se estarían relacionando.
- ¿Qué resultados, propiedades o conceptos matemáticos utilizaste para la resolución de la consigna?
Para la resolución de la consigna fue necesario utilizar el concepto de función y los resultados de una ecuación.

Resolución de A16

a) **Resolución de consigna de "modo experto".**

Desde un rol experto diríamos: que al tener una sucesión de figuras, donde se observa que para formar la primera figura se utiliza 4 fósforos, para la segunda figura utiliza 3 fósforos más al igual que para la tercer figura y así sucesivamente. Estaríamos en una sucesión donde, la cantidad de fósforos que utilice sería igual a multiplicar los tres fósforos que utiliza siempre por la cantidad de figuras que estoy armando y sumarle uno por el primer fosforo de más que utilizo al empezar la figura para armar un cuadrado. Por lo cual podríamos llamar a *X como la cantidad de figuras armadas*, así introduciendo funciones lineales podríamos llamar *Y a la cantidad de fósforos*. De esta forma, expreso:

$$\mathbf{Y = 3.X + 1}$$

Y como la consigna pide si alguna de las figuras de esta sucesión tiene exactamente 6743 fósforos, para resolver planteo una ecuación y despejo X de la siguiente forma:

$$\mathbf{Y = 6743 \qquad x = ?}$$
$$\mathbf{6743 = 3.X + 1}$$
$$\mathbf{6743 - 1 = 3.X}$$
$$\mathbf{6742 = 3.X}$$
$$\mathbf{6742 : 3 = X}$$
$$\mathbf{2247{,}333\ldots = X}$$

Como la solución hallada no es un número exacto, entonces no podría ser la cantidad de figuras construidas. Esto estaría respondiendo a la primera pregunta.

Respecto a que a veces sobran o no fósforos al momento de armar las figuras, podríamos explicar que van a sobrar fósforos cuando (Y-1), no sea divisible por tres por lo cual tendríamos como posibles restos a 1 o 2. Entonces esos restos son la cantidad de fósforos posibles que sobren al momento de la construcción. De esta manera, planteando divisibilidad decimos que no van a sobrar fósforos cuando (Y-1) sea divisible por tres, eso se debe a que al ser divisible su resto es cero.

b) **Respuestas**

1- En esta consigna se está trabajando el concepto matemático de *función lineal*. Una definición que podría usar es:

La función lineal es una relación de dos variables, de la forma: y= mx + b, donde m y b son números reales y m es distinto de cero. Su expresión analítica es:

f: R → R f(x) = m.x + b ← Ordenada al origen

↑ Pendiente.

2- Explicación de la definición.

Las funciones constituyen una herramienta útil para describir, analizar e interpretar diferentes situaciones provenientes de la Matemática y otras áreas. Donde permite expresar relaciones entre variables y construir modelos matemáticos para representar estas relaciones. En este caso veremos la definición de uno de los tipos de funciones: función lineal. La función lineal es un buen modelo para analizar situaciones en las cuales a variaciones iguales de una variable corresponden cambios iguales de la otra variable. Donde estas variables las denotamos con letras, usualmente como se observa en la definición, con X e Y. O también en vez de utilizar Y, usamos el símbolo de función de X (se escribe o se señala f(x)).Como se observa en el pizarrón, la fórmula que la define es: f(x) = mx + b donde m y b son números cualesquiera que tienen nombres. A m definimos como la pendiente y a b la llamamos ordenada al origen. Son conceptos que veremos más adelante al momento de graficar estas funciones. Por ahora nos centraremos en identificar a X como una de las variables que la llamaremos independiente y f(x) = Y adopta los valores que se obtienen a medida que x cambia por lo cual decimos que es una variable dependiente. Ahora para entender mejor este concepto veremos varios ejemplos, donde estaremos aplicando la definición de función lineal teniendo en cuenta su fórmula y la aplicación de la misma a varias situaciones.

3- Resultados, propiedades o conceptos matemáticos usados al momento de resolver la consigna.

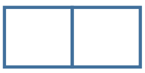
- Formula de función lineal
- Despeje de ecuaciones
- Interpretación de datos para armar la ecuación
- Divisibilidad

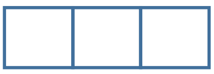
Resolución de A17

a) Resolver la consigna desde el punto de vista experto.

Si nos fijamos las figuras podemos sacar una expresión que nos permita plantear una expresión general


1 cuadrado = 4 palitos = 1 + 3


2 cuadrados = 7 palitos = 1 + 3 + 3


2 cuadrados = 7 palitos = 1 + 3 + 3 + 3

Entonces planteamos que la expresión debería ser

$$f_n = 3.n + 1$$

¿Puede ser que alguna de las figuras de esta sucesión tenga exactamente 6743 fósforos? ¿Por qué?

$$f_n = 6743 = 3.n + 1$$
$$6742 = 3.n$$
$$\frac{6742}{3} = n, \qquad n \notin \mathbb{N}$$

Como n nos dio un resultado que no pertenece a los naturales, pues son palitos enteros, entonces no existe una sucesión que tenga tal cantidad de fósforos.

Si nos dan distintas cantidades de fósforos para que armemos una figura de esta sucesión, tratando de que no sobre ninguno, nos encontramos que a veces no sobran y a veces sí. ¿Podrías explicar cuándo es que sobran fósforos y cuántos fósforos es posible que sobren? Cuando no sobra ningún fósforo, ¿a qué se debe?

La cantidad de fósforos que sobran pueden ser uno o dos, pues si fuesen tres este completaría un cuadrado más y tenemos una sucesión completa, esto se debe a que si agregásemos una cantidad m de palitos a una sucesión ya hecha, este necesariamente debería ser múltiplo de 3

Si m es múltiplo de 3 entonces $\underline{m = 3k}$

$$3n + 1 + m = 3n + 1 + 3k = 3(n + k) + 1 = f(k + n)$$

Si m no es múltiplo de 3 entonces: $\underline{m = 3k + 1}$ o $\underline{m = 3k + 2}$

$$3n + 1 + m = 3n + 1 + 3k + 1 = 3(n + k) + 1 + 1 = f(k + n) + 1$$
$$3n + 1 + m = 3n + 1 + 3k + 2 = 3(n + k) + +1 + 2 = f(k + n) + 2$$

En estos dos últimos casos puede que sobren uno o dos fósforos

b) Responder las preguntas que siguen al recuadro de la consigna.

- *¿Qué concepto matemático considerás que se trabaja en esta consigna? (si hay más de uno, indicalos). Escribí una definición matemática de ese concepto. Pensá que la vas a dejar escrita en el pizarrón cuando sea trabajada en una clase.*

Concepto de Sucesión

Una sucesión es un conjunto ordenado de números. Cada uno de estos números se les llama *términos*. Para algunas sucesiones es posible escribir una fórmula general que permite calcular cualquiera de sus términos, debido a que cada término se puede obtener en función del anterior.

Formalmente, a una sucesión se le denota por a_n donde *n* es un número natural. En una sucesión ,a_1 es el primer término, a_2 es el segundo término y así sucesivamente hasta llegar a a_n que es el término de lugar n o n-ésimo término, también llamado ***término general de una sucesión*.**

Ejemplo

$$3, 5, 7, 9, 11, \ldots$$

$$a_1 = 3 , \qquad a_2 = 5, \qquad a_3 = 7, \qquad a_4 = 9, \qquad a_5 = 11$$

$$a_n = 2n + 1$$

- *Explicá la definición con palabras (como si le hablaras a la clase). Todo esto a lo sumo te insumirá media carilla.*

La sucesión sería como como una tira de números en el cual tienen un comportamiento particular y definido, es decir existe un patrón entre sus términos que me permiten hallar cualquier termino quede esta tira de números.

Por ejemplo si yo tengo esta sucesión

$$1, 4, 9, 16, 25, \ldots$$

Se ve fácilmente que el patrón de de esta sucesión son los números cuadrados

$$a_1 = 1^2 , \qquad a_2 = 2^2, \qquad a_3 = 3^2, \qquad a_4 = 4^2, \qquad a_5 = 5^2$$
$$a_n = n^2$$

- *¿Qué resultados, propiedades o conceptos matemáticos utilizaste para la resolución de la consigna? Simplemente lístalos.*

- Concepto de sucesión
- Principio de Inducción
- Propiedad asociativa y distributiva de los números
- Resolución de ecuaciones de primer grado
- Divisibilidad

- *Si utilizaste alguna propiedad para resolver, redactala como tal (es decir tal como se vería en un libro de texto) y demostrala.*

- Propiedad asociativa y distributiva de los números

$$(a\ +\ b) * c\ =\ a * c + b * c = b * c + a * c$$

Resolución de A18

<u>RESOLUCIóN DE CONSIGNA</u>:
En primer lugar para resolver la consigna representamos la relación entre los fósforos utilizados,para formar cada figura,y la cantidad de cuadrados que tiene cada una, usando una ecuacion con la expresión:
1+3x=y no explica cómo sale. No lo presenta como una función de dominio N, cosa que luego usa
En esta, "x" representa el número de cuadrados e "y" el número de fósforos utilizados. Si deseamos saber si se puede formar alguna de las figuras indicadas con 6743 fósforos exactamente, debemos reemplazar el valor en "y" y despejar la "x".

x=(6743-1)/3

6742 | 3
07   2247
14
22
1

Como nos interesa saber si se puede formar una figura completa, el número de cuadrados representado por x debe ser [1, 2, 3…,],es decir, queel dominio de x serán los naturales. El hecho que el resto sea distinto de cero, y en este caso nos haya dado uno, nos indica que sobraron 1 fósforos. Por tanto, el resultado no pertenece al dominio de x, lo cual implica que no se pueden formar una figura con exactamente 6743 fósforos. Si el cociente nos hubiera dado cero, en cambio, nos indicaría que no sobraron fósforos.

<u>RESPUESTAS</u>

I. Los conceptos matemáticos que se podrían utilizar para resolver la consigna son: variables independiente y dependiente, imagen, dominio, función y ecuación.
Definiciones:
Variable independiente: *es aquella que no depende de otra variable*
Variable dependiente: *es aquella que cambia dependiendo del valor de otra variable*
Dominio*: conjunto de valores que puede tomar la variable independiente*
Imagen*: conjunto de valores que puede adoptar la variable dependiente.*
Ecuación*: igualdad donde aparece como mínimo una variable.*

Función: *correspondencia o relación de los elementos del dominio y la imagen, con condición de que a cada elemento del dominio le corresponde un único elemento del conjunto imagen.*

II. "Con la consigna dada espero que ustedes encuentren una relación entre la cantidad de cuadrados de una figura y la cantidad de fósforos necesarios para armarla, y lo planteen de forma simbólica en una función. A modo de ejemplo, piensen en la siguiente igualdad

Base x Altura= Área

Donde el valor de la base es conocido pero la altura y el área no. El valor del área dependerá del valor que tome la altura o viceversa. A dichos valores los llamaremos **variables dependientes** o **independientes** y a la relación la llamaremos **ecuación**. La variable dependiente, que por convención llamaremos "y", será la que como la palabra lo indica cambia en relación a como varia la primera, que llamaremos "x". Definiremos **dominio** a los valores que puede tomar x, e imagen a los valores que puede tomar la **variable** "y".

III. **Conceptos utilizados:** dominio, ecuación, variable independiente, variable dependiente y propiedades de suma, resta, multiplicación y división en ecuaciones.

IV. Una vez planteada la ecuación que representa la relación entre las dos variables ya mencionadas las propiedades utilizadas para resolver las ecuaciones son:

1: Cuando se suma o resta un número a ambos lados de la igualdad, la igualdad se mantiene.

Demostración

Ax+b=y entonces (Ax+b)+c=y+c

Ejemplo

2*2+1=5 entonces (2*2+1)+3=5+3 Se mantiene la igualdad

2: Cuando se multiplica o divide por un mismo número, distinto de cero, en ambos lados de la igualdad, la igualdad se mantiene.

Demostración

Ax+b=y entonces (Ax+b)*c=y*c

Ejemplo

2*2+1=5 entonces (2*2+1)*3=5*3 Se mantiene la igualdad

4*2+1=9 entonces (4*2+1):3=9:3 Se mantiene la igualdad

Resolución de A19

Al establecer un análisis sobre esta consigna, es necesario resolver el problema planteado. Para esto, se procede a realizar una asociación entre variables que intervienen, como ser x: número de figuras; y: cantidad de fósforos **(f1)**. Se considera como pares de puntos (x, y) a (1,4); (2,7); (3,10), y utilizando dos de esos puntos, por ejemplo, P= (1,4) y Q= (2,7) se determina así la pendiente con la siguiente fórmula

$$m = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p}$$
$$m = \frac{7-4}{2-1}$$
$$m = 3$$

Luego, la relación a esta asignación es lineal por lo que $f(x) = mx + b$. Al utilizar un punto cualquiera, por ejemplo, p= (1,4) se procede hallar b. Entonces, con y= 4, x= 1 y m= 3, se obtiene

$$4 = 3.\,1 + b$$
$$4 - 3 = b$$
$$b = 1$$

Por lo que define f: N → N ≥ 4, tal que $f(x)=3x+1$ con x: figuras, f(x): fósforos. (**f4)**

Una vez determinada la fórmula, se responde a lo pedido reemplazando 6743 en f(x), entonces

$$6743 = 3x + 1$$

Al despejar la variable se obtendrá que

$$x = \frac{6743-1}{3}$$
$$x = 2247{,}33...$$

Al observar el resultado se concluye que no es posible armar una figura con exactamente 6743, ya que el número de figuras es natural y la solución plantea un número que no es natural. Esto concluye que falten o sobren fósforos.

Si se dan distintas cantidades de fósforos se reemplazan en la fórmula determinando condiciones sobre éstos de la siguiente manera: se interpreta a y = cantidad cualquiera de fósforos, y como se quiere saber cuántos sirven se analiza en la ecuación de manera general. Al despejar x queda

$$x = \frac{y-1}{3}$$

y las figuras están condicionadas a la cantidad y (cantidad de fósforos). Para que las figuras sean un número natural debe pasar que *y*-1 sea divisible por 3, en este caso no sobran fósforos y las figuras se completan. En el caso que el resultado de la figura no sea natural (como en el cálculo pedido) sobrarán o faltarán fósforos para armar la figura siguiente. Sobran fósforos cuando y-1 no es divisible por 3, y en tal caso se excederán en 1 o 2 unidades, ya que son los posibles restos de un número no divisible por 3.

Al resolver el problema de otra manera, se puede establecer una relación que es interpretada a través de una variable al seguir un patrón estricto mediante figuras u objetos ligados a su posición.

En el ejercicio se encuentra una asociación entre la posición que tiene la figura con la cantidad de fósforos utilizados.

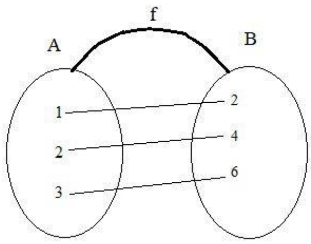
Se realiza una tabla para la relación de figuras y fósforos

Número de figuras	Cantidad de fósforos
1	4=3.**1**+1
2	7=3.**2**+1
...	...
N	*m*=3.**n**+1

A partir de ella se muestra que los fósforos utilizados pueden descomponerse en relación a la posición representada por la figura. Este patrón observado conlleva a la ecuación general para una cantidad cualquiera de fósforos y una posición cualquiera de la figura dibujada.
De la misma manera que se despeja la ecuación en la primera forma, se resuelve y llega a la misma conclusión.

Los conceptos matemáticos que trabaja ésta consigna son sobre función lineal y sucesión aritmética.
Se define como función lineal a la asignación unívoca de puntos de un conjunto A (de partida) a un conjunto B (de llegada), donde existe una relación que los asocia mediante una fórmula. En el caso del ejercicio resuelto, $f : A \rightarrow B / f(x) = a.x + b$

Como ejemplo se puede tomar otra función lineal, $f(x) = 2x$ y se obtiene lo siguiente:



Se puede observar a partir del diagrama anterior que un elemento del conjunto A (por ejemplo, el 1) está relacionado con uno y sólo un elemento del conjunto B (en éste caso, el 2) por medio de f que es una fórmula que cumple con ello.

Otro concepto presente en la consigna es la sucesión aritmética. Se define una sucesión aritmética como toda función $f: N \rightarrow R$, si cada término se obtiene sumando un valor fijo r al término anterior.

En la resolución que utiliza el patrón se advierte que la figura siguiente es la igual a la anterior sumado a tres,

En la primera figura hay 4 fósforos $\longrightarrow$ 4
En la segunda figura hay 7 fósforos $\longrightarrow$ 7=4+3
En la tercera figura hay 10 fósforos $\longrightarrow$ 10=7+3
… …
$\longrightarrow$

En la figura p habrá q fósforos q=k + 3, donde k es la cantidad de fósforos de la figura anterior.
Al observar la tabla que permite reconocer la relación existente de la variable como número general se obtiene la fórmula m=3.**n**+1. Por ejemplo, podría tomar a m=6742 y al reemplazarlo en la ecuación daría $n = \frac{6742-1}{3}$=*2247* figuras. O también podría tomar *n=158*, que al reemplazarlo en la misma ecuación necesitaría m = 3.158 + 1 = 475 fósforos para la figura solicitada.

En la resolución de la consigna se utilizó:

- Operaciones algebraicas y aritméticas para despeje y resolución de la ecuación;
- Como resultado la fórmula explícita de función lineal.
- Propiedad de divisibilidad de un número entero.

En el caso del problema se utiliza divisibilidad de un número entero, en particular, divisibilidad por 3.
Se entiende por divisibilidad que un número entero **a** divide a otro número entero **b (≠0)** si existe un número **q** tal que **b= a.q**, con q número entero y resto cero. Si **a** no está contenido un número exacto de veces en **b**, la operación tiene un **resto** (**r**). En este caso, el resto debe ser menor que **b** y su expresión es **b=a.q + r, con 0<│r│< a.**

Resolución A20

a)

Resolución experta

Defino:
n: *número de figura*;
f: *cantidad de fósforos empleados para armar la* $n-$*ésima figura*.

Interpretación de la consigna
El incremento de fósforos para el armado de las sucesivas figuras es un valor constante, ya que a partir de cualquier de figura, agregando tres fósforos, se obtener la siguiente. En base a lo anterior, propongo una ecuación lineal como solución genérica.
Según lo definido, la cantidad de fósforos "f" a utilizar, depende del número de figura "n" que queremos armar.

$$f = an + b, \quad donde \begin{cases} n \in \mathbb{N}; \\ f \in \mathbb{N}; \\ a \text{ y } b \text{ son coeficientes a determinar}. \end{cases}$$

- Como ya se mencionó, el incremento de fósforos por cada figura es tres, por lo tanto el coeficiente $a = 3$.
- Para la figura uno: $f = 4$, luego $3 \cdot 1 + b = 4$ y por lo tanto $b = 1$.

En la consigna nos preguntan si es posible que alguna figura de la sucesión tenga exactamente 6743 fósforos. De ser posible, ha de existir un valor natural para n tal que:

$$3n + 1 = 6743$$

Despejando n vemos que:

$$n = \frac{6743 - 1}{3} \notin \mathbb{N}$$

Por criterio de divisibilidad del 3, vemos que 6742 no es divisible por 3. Por lo tanto, no es posible que alguna figura de la serie tenga exactamente 6743 fósforos.

Sea f la cantidad de fósforos que nos dan:

- Si $(f - 1)$ es múltiplo de tres, el cociente $\frac{f-1}{3}$ deja resto 0. Por lo tanto, podremos armar alguna figura de la serie utilizando exactamente los f fósforos suministrados.
- Si $(f - 1)$ no es múltiplo de tres, el cociente $\frac{f-1}{3}$ deja resto 1 o 2. Es decir, nos sobraran 1 o 2 fósforos.

<<Fin de la resolución experta>>

b) <u>Preguntas</u>

1) <u>Conceptos matemáticos trabajados</u>:

- Interpretación de la consigna, pasaje del leguaje coloquial al lenguaje matemático, estrategias de resolución, exploración, interpretación de resultados (intermedios y finales); comunicación escrita.
- Conjuntos numéricos; planteo y resolución de ecuaciones lineales (despeje de ecuaciones); operación con números enteros (cociente y resto de números enteros).

Creo que la consigna, tal como está planteada, tiene un doble objetivo (lectura comprensiva y uso de los nuevos recursos matemáticos trabajados). Por eso, separe los conceptos matemáticos en dos grupos, el primero concerniente a lo interpretativo y el segundo más relacionado con lo operacional.

<u>Definiciones matemáticas que dejo escrita en el pizarrón</u>:

- Una ecuación lineal es una igualdad entre dos expresiones matemáticas donde, al menos, existe un valor desconocido al cual llamamos incógnita.

  Ejemplos: a) 2x + 1,5 = 7,5; b) 3x – 4 = 3x – 1
- Resolver una ecuación significa hallar todos los valores de un conjunto numérico determinado, tal que al reemplazarlos por la incógnita, verifican la igualdad. Si no existe ningún valor que cumpla con lo anterior, decimos que la ecuación no tiene solución.

  Ejemplos:

$$a)\ \ despejando\ x\ tenemos: x = \frac{7{,}5 - 1{,}5}{2} \ \rightarrow\ x = 3.$$

$$b)\ despejando\ x\ tenemos: 3x - 3x = 3\ \rightarrow\ 0 = 3, lo\ cual\ es\ falso.$$

<u>Explicación “hablando a la clase</u>”

En el ejemplo “a”, al despejar “x” obtenemos el valor “3”, esto significa que si reemplazamos a la “x” por el número “3”, la cuanta a izquierda de la igualdad da lo mismo que el número que se encuentra a derecha de la igualdad, en este caso “7,5”. A esto nos referimos cuando decimos que se verifica la igualdad. Notemos además que, en este caso, “3” es el único valor que cumple con esto, ya que al despejar y resolver obtenemos este único valor como solución de la ecuación.

En el ejemplo “b”, al despejar “x” obtenemos una igualdad falsa (o una desigualdad), esto lo podemos interpretar de la siguiente manera, para hallar un valor de “x” que verifique la igualdad se requiere que “0” sea igual a “3”. Como “0” no es igual a “3”, podemos concluir que no existe algún valor que pueda tomar “x” para que se verifique la igualdad. Decimos, entonces, que la ecuación no tiene solución.

3)

Conceptos matemáticos:

Igualdad, conjuntos numéricos, elemento perteneciente a un conjunto, ecuaciones lineales.

Propiedad

Criterio de divisibilidad del tres: Un número será divisible por tres, si y sólo si, la suma de sus cifras es múltiplo de tres.

Demostración:

Sea N un número entero dado, queremos ver qué requisitos debe cumplir N para que sea divisible por 3.

Escribimos N explicitando genéricamente sus cifras:

$$N = a_0 a_1 a_2 \ldots a_n = a_0 \cdot 10^0 + a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + \cdots + a_n \cdot 10^n$$

Reescribimos la última expresión:

$$N = a_0 + a_1 \cdot (9 + 1) + a_2 \cdot (99 + 1) + \cdots + a_n \cdot (999 \ldots + 1)$$

Aplicando propiedad distributiva en la segunda parte de la igualdad

$$N = a_0 + a_1 \cdot 9 + a_1 + a_2 \cdot 99 + a_2 + \cdots + a_n \cdot 999 \ldots + a_n$$

Reordenando los términos en la segunda parte de la igualdad

$$N = (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots a_n) + (a_1 \cdot 9 + a_2 \cdot 99 + \cdots + a_n \cdot 999 \ldots)$$

Sacando 3 como factor común del segundo paréntesis

$$N = (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots a_n) + 3(a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 33 + \cdots + a_n \cdot 333 \ldots)$$

Así, el segundo término siempre será divisible por tres y si el primer término también lo fuera, N sería divisible por tres. Pero el primer término entre paréntesis es la suma de las cifras del número N.